سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات الأساسية

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

دليل المعلّم

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات الأساسية

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

دليل المعلّم

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

© مطبعة جامعة كامبريدج ووزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

يخضع هذا الكتاب لقانون حقوق الطباعة والنشر، ويخضع للاستثناء التشريعي
المسموح به قانونًا ولأحكام التراخيص ذات الصلة.
لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب من دون الحصول على الإذن المكتوب من
مطبعة جامعة كامبريدج ومن وزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من دليل المعلّم – الرياضيات للصف الثاني عشر – من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Mathematics Digital Teacher's Resource
للمؤلفين جوليا فلتشر، وإيلين دورسيت، وكولين ناي.

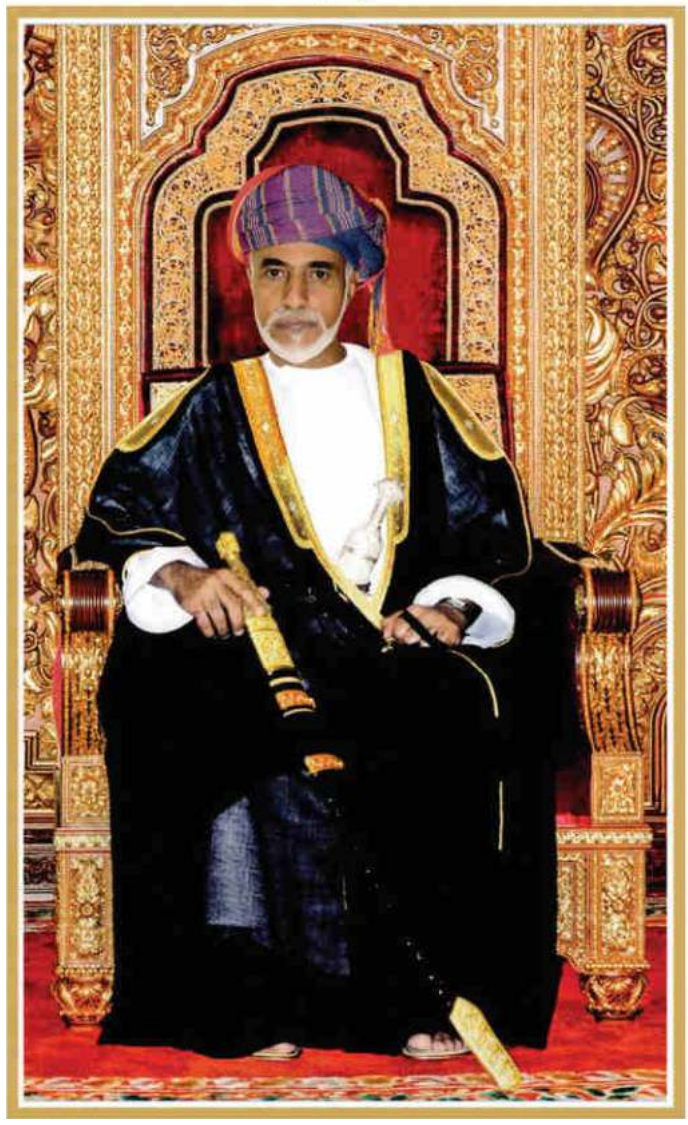
تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.
لا تتحمَّل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه وفرة المواقع الإلكترونية
المستخدمة في هذا الكتاب ومصداقيتها، ولا تؤكِّد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق
وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٦ / ٢٠٢٣ واللجان المنبثقة عنه

جميع حقوق الطبع والتأليف والنشر محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ولا يجوز طبع الكتاب أو تصويره أو إعادة نسخه كاملاً أو مجزّأً أو ترجمته أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات بهدف تجاري بأي شكل من الأشكال إلا بإذن كتابي مسبق من الوزارة، وفي حالة الاقتباس القصير يجب ذكر المصدر.



المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
-طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المعظّم
-حفظه الله ورعاه-

سلطنـــــة عُمـــــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يـا رَبَّنـا احْفَـظْ لنـا جَـلالَـةَ الـسُّـلْـطـان
وَالشَّعْـبَ فـي الأَوْطـان بِـالْـعِـزِّ والأَمـان
وَلْـيَـدُمْ مـؤَيَّـدًا عـاهِـلاً مُـمَـجَّـدًا
بِالنُّفـوسِ يُفْتَـدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فـارْتَقـي هـامَ السَّمـاء وَامْلَئي الْكَـوْنَ ضيـاء
وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخـاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المقدمة xiii

الوحدة الأولى: الأسس واللوغاريتمات الطبيعية

مخطط توزيع الدروس ١٥

١-١ الدالة الأسيّة الطبيعية ١٧

١-٢ الدالة اللوغاريتمية الطبيعية ومعكوسها .. ٢٠

١-٣ الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ ٢٤

١-٤ حلّ المعادلات الأسّية واللوغاريتمية الطبيعية ٢٥

١-٥ تحويل علاقة إلى صيغة خطية باستخدام اللوغاريتم الطبيعي ٢٨

العرض التوضيحي الإلكتروني (PPT) الأسس واللوغاريتمات الطبيعية ٣١

إجابات تمارين كتاب الطالب ٣٦

إجابات تمارين كتاب النشاط ٣٩

الوحدة الأولى: حلول التمارين: الأسس واللوغاريتمات الطبيعية ٤٢

الوحدة الثانية: التفاضل

مخطط توزيع الدروس ٥٣

٢-١ المشتقة الأولى ٥٥

٢-٢ الميل عند نقطة ٥٧

٢-٣ معادلة المماس ٥٩

٢-٤ المشتقة الثانية ٦١

٢-٥ الدوال المتزايدة والمتناقصة ٦٢

العرض التوضيحي الإلكتروني (PPT) معادلة المماس ٦٤

إجابات تمارين كتاب الطالب ٦٩

إجابات تمارين كتاب النشاط ٧١

الوحدة الثانية: حلول التمارين: التفاضل ٧٣

الوحدة الثالثة: المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة (المنفصلة)

مخطط توزيع الدروس ٨٣

٣-١ المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة (المنفصلة) ٨٤

٣-٢ التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع ٨٦

٣-٣ القيمة المتوقّعة والتباين للمتغيّر العشوائي المتقطّع ٨٨

العرض التوضيحي الإلكتروني (PPT) القيمة المتوقعة والتباين ٩١

إجابات تمارين كتاب الطالب ٩٦

إجابات تمارين كتاب النشاط ٩٨

الوحدة الثالثة: حلول التمارين: المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة (المنفصلة) ١٠٠

المُقدِّمة

صُمّم هذا الدليل ليساعد المعلمين على استخدام المواد التعليمية لتدريس منهج الرياضيات الأساسية للصف الثاني عشر.

اعتمدنا في إعداد هذا الدليل على مصادر عالية الجودة لتشجيع الطلبة على التعلم، ولمساعدتهم على تطوير فهم عميق للموضوع. تعدّ مهارة التواصل الرياضي مهمة ليس فقط لهدف تعلم المادة، ولكن لمساعدة الطلبة على تطوير المهارات التي يحتاجون إليها للتعاون، والتفكير والتحليل، واتخاذ القرارات المناسبة في بيئة العمل وفي مناحي الحياة المختلفة.

في هذا الدليل نناقش كل موضوع، ونقترح مصادر للتعلم، ونبحث في كيفية دعم بعض الطلبة وتحدي آخرين.

المعلم هو الأقرب إلى طلابه ومعرفة مستوياتهم في المادة، لذا فإنه يمكنك وضع خطط التدريس الخاصة بك؛ من خلال اختيار المناسب ممّا نقدمه لك في هذا الدليل، أو من مصادرك الخاصة.

لقد وضعنا في هذا الدليل شروحات وتوجيهات وكثيرًا من الأفكار العملية لكيفية استخدام مصادر إضافية في غرفة الصف. كما أننا سلطنا الضوء على الأمثلة والأسئلة والتمارين وأنشطة 'استكشف'، الموجودة في كتاب الطالب فضلًا عن الملاحظات المدوّنة لكيفية استخدامها في معالجة سوء الفهم وأخطاء شائعة معينة.

تتضمن كل وحدة من وحدات الدليل شرائح عرض إلكتروني (باوربوينت) يمكنك أن تستخدمها كما هي أو تعديلها لإدارة المناقشة الصفية. بعض هذه الشرائح مبني على أمثلة من كتاب الطالب، وبعضها الآخر مكمل لها. في بعض الوحدات تتوافر مصادر إضافية مثل بطاقات الفرز أو "أوراق ملء الفراغ" وغيرها. يمكنك أن توائم هذه الأنشطة لتستخدمها في موضوعات أخرى.

هدفنا أن تؤدي هذه المصادر إلى توفير الوقت، وأن ترسّخ معرفتك في هذا الدليل، وتعزّز الثقة في قدراتك لتزوّد الطلبة بأفضل الخبرات.

نأمل أن يحقق هذا الدليل لك وللطلبة المزيد من المنفعة والاستمتاع.

الوحدة الأولى : الأسس و اللوغاريتمات الطبيعية

Exponentials and natural logarithms

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الأهداف التعليمية	عدد الحصص	مصادر من كتاب الطالب	مصادر أخرى	المفردات
١-١ الدالة الأسيّة الطبيعية	١-١ يفهم ويستخدم تعريف وقوانين وخصائص $هـ^{س}$، لط س ويحوّل بين الصيغتَين الأسّية واللوغاريتمية للأساس الطبيعي هـ. ١-٢ يستخدم الحاسبة في إيجاد $هـ^{س}$، لط س ١-٤ يفهم أن الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية (لأي أساس) هي عكسية، ويفهم تمثيلهما البياني.	٤	استكشف ١ الأمثلة من ١ إلى ٤ تمارين ١-١		الأساس الطبيعي هـ، الدالة الأسيّة الطبيعيّة
١-٢ الدالة اللوغاريتمية الطبيعية ومعكوسها	١-١ يفهم ويستخدم تعريف وقوانين وخصائص $هـ^{س}$، لط س ويحوّل بين الصيغتَين الأسّية واللوغاريتمية للأساس الطبيعي هـ. ١-٢ يستخدم الحاسبة في إيجاد $هـ^{س}$، لط س ١-٤ يفهم أن الدوال الأسّية والدوال اللوغاريتمية (لأي أساس) هي عكسية، ويفهم تمثيلهما البياني.	٤	استكشف ٢ استكشف ٣ الأمثلة من ٥ إلى ٧ تمارين ١-٢		اللوغاريتم الطبيعي، الدالة اللوغاريتمية الطبيعية
١-٣ الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ	١-١ يفهم ويستخدم تعريف وقوانين وخصائص $هـ^{س}$، لط س ويحوّل بين الصيغتَين الأسّية واللوغاريتمية للأساس الطبيعي هـ.	٣	المثالان ٨ و٩ تمارين ١-٣		الصيغة الأسية للأساس هـ، الصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ
١-٤ حل المعادلات الأسّية واللوغاريتمية الطبيعية	١-٣ يحل معادلات أسّية ولوغاريتمية باستخدام الأساس الطبيعي (فقط تلك التي يمكن تبسيطها إلى الصيغة الخطية).	٥	الأمثلة من ١٠ إلى ١٣ تمارين ١-٤		المعادلة الأسية الطبيعية المعادلة اللوغاريتمية الطبيعية

١-٥ تحويل علاقة إلى صيغة خطية باستخدام اللوغاريتم الطبيعي	١-٥ يستخدم اللوغاريتم الطبيعي لتحويل دالة معطاة ص = ك س^{ن}، ص = ك × أ$^{(ب س + جـ)}$ إلى الصيغة الخطية، وبالتالي إيجاد أعداد ثابتة مجهولة من خلال استخدام الميل و/أو المقطع الصادي.	٤	الأمثلة من ١٤ إلى ١٦ تمارين ١-٥	شريحة عرض توضيح إلكتروني ١-١	الصيغة الخطيّة
تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى		٤			

١-١ الدالة الأسيّة الطبيعية

المفردات

الأساس الطبيعي: عدد غير نسبي يُرمز إليه بالرمز هـ ويساوي ٢,٧١٨٢٨ مقرّبًا إلى خمس منازل عشرية، ويُنسب إلى عدد من العلماء فيُعرف بثابت أويلر كما يُعرف بالعدد النيبيري.

الدالة الأسيّة الطبيعيّة: هي الدالة الأسية التي أساسها هـ.

ملاحظات للمعلّمين

درس الطلبة سابقًا الأسس ذات الأساس النسبي (وبالتحديد الأساس ١٠) في الصف الحادي عشر، الفصل الثاني.

سيجد الطلبة في هذا الدرس القيمة التقريبية للأساس الطبيعي هـ، وسيتعوّدون على استخدام المفتاح e^x في حاسباتهم، وسيتعرّف الطلبة أيضًا على منحنى دالة الأس الطبيعي د(س) = هـ^{س}، وسيتعرّفون على بعض ميزاتها وخصائصها.

وضّح للطلبة عند استخدام الحاسبة اختلاف طريقة استخدام المفتاح e^x من حاسبة إلى أخرى.

ركّز على حقيقة أن المنحنى يقطع المحور الصادي في ١، الأمر الذي يعني أن هـ^{٠} = ١؛ وأنه لا يقع أي جزء من المنحنى على المحور السيني أو تحته، الأمر الذي يعني أن هـ^{س} > ٠ لكل قيم س.

سيتم كذلك استخدام قوانين القوى التي تعلّموها سابقًا، بيّن لهم أنها تنطبق على كل الأساسات، بما يتضمن هـ، وبالتالي هـ^{أ} × هـ^{ب} = هـ$^{أ+ب}$، هـ^{أ} ÷ هـ^{ب} = هـ$^{أ-ب}$.

أفكار للتعليم

اطلب إلى الطلبة التدرّب على استخدام المفتاح e^x في حاسباتهم، وكذلك التدرّب على تقريب القيم إلى درجات محددة من الدقة.

يمكنك الطلب إليهم إيجاد القيم الآتية:

هـ^{٤} مقرّبة إلى أقرب عدد صحيح (= ٥٥)

هـ^{٣,٦} مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة (= ٣٦,٦)

هـ$^{-٠,٧٥}$ مقرّبة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين (= ٠,٤٧)

هـ$^{\frac{١}{٤}}$ مقرّبة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية (= ١,٢٨٤)

$\sqrt{\text{هـ}}$ = هـ$^{\frac{١}{٢}}$ مقرّبة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية (= ١,٦٤٩)

هـ$^{\frac{-٢}{١١}}$ مقرّبة إلى أقرب ثلاثة أرقام معنوية (= ٠,٨٣٤)

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

أ) أصغر قيمة لـ ن بحيث يكون التقريب إلى أقرب خمس منازل عشرية يساوي ٢,٧١٨٢٨ هي ن = ١٩٩٠٤٤ لكل القيم التي تكبر هذه القيمة، يمكن أن يظهر أن قيمة هـ لا تتغير. أكد على الطلبة أن تقريب هـ يظل في تزايد، ولكن بقيم أصغر وأصغر تدريجيًا.

ب) مقرّبة إلى أقرب خمس منازل عشرية، هـ = ٢,٧١٨٢٨

لاحظ أن هـ عدد غير نسبي. ونشير إلى قيمته الدقيقة بكتابة هـ (كما تعاملت مع القيمة التقديرية للـ π).

نشاط بديل لاستكشف ١

يمكنك أيضًا أن تقدم للطلبة تحديًا يتمثل في تحديد قيمة هـ باستخدام المتسلسلة $\frac{١}{!٠} + \frac{١}{!١} + \frac{١}{!٢} + \frac{١}{!٣} + \frac{١}{!٤} + \frac{١}{!٥} + \frac{١}{!٦} + \ldots$ وهي باستخدام رمز المجموع تكتب $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{!ن}$.

ذكّرهم بمعنى دالة المضروب، ثم اطلب إليهم إيجاد عدد حدود المتسلسلة المطلوبة لإنتاج قيمة هـ صحيحة حتى خمس منازل عشرية مثل ٢,٧١٨٢٨

يمكنهم وضع نتائجهم في جدول:

عدد الحدود	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
المجموع (خمس منازل عشرية)	١	٢	٢,٥	٢,٦٦٦٦٧	٢,٧٠٣٣٣	٢,٧١٦٦٧	٢,٧١٨٠٦	٢,٧١٨٢٥	٢,٧١٨٢٨

تسعة حدود مطلوبة، أي من ن = ٠ حتى ن= ٨ ضمنًا.

دعم الطلبة

قدّم للطلبة الكثير من الفرص للتدرّب على إيجاد قيمة هـ^{س} لعدد من القيم المتفاوتة لـ س، وذكّرهم بانتظام بكيفية إدخال قيمة سالبة أو كسرية باستخدام مفتاحَي (-) أو $a^{b/c}$ في حاسباتهم، وكذلك التدرّب على تقريب القيم إلى درجات محددة من الدقة.

تحدّي الطلبة

يمكنك سؤال الطلبة الذين يظهرون تقدمًا ملحوظًا في الدرس عن كيفية إيجاد القوة التي يجب أن يرفع لها الأساس هـ للحصول على قيمة محددة. مثلًا، نعرف أنه يجب رفع هـ إلى القوة ٣ للحصول على ٢٠ تقريبًا، ولكن ما هي القوة المطلوبة للحصول على ٥٠، ٢٠٠، ٣٠٠، ... تقريبًا؟

إذا استخدم الطلبة، كما هو مرجّح، طريقة التجربة والتحسين، فناقش معهم سبب عدم فاعلية هذه الطريقة، وذكّرهم بأنهم تعلموا سابقًا كيفية إيجاد القوة التي يجب أن يرفع إليها الأساس ١٠ للحصول على ٥٠، ٢٠٠، ٣٠٠، لذا من المفروض أن يكون باستطاعتهم تطبيق الأمر على الأساس هـ.

من المأمول أن يسألوا عندئذ عمّا إذا كان يوجد مفتاح "لـو" في حاسباتهم.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١–١

١-٢ الدالة اللوغاريتمية الطبيعية ومعكوسها

المفردات

اللوغاريتم الطبيعي: اللوغاريتم ذو الأساس هـ (عدد أويلر أو العدد النيبيري).

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية: الدالة العكسية للدالة الأسية الطبيعية وتكتب د(س) = لط س.

ملاحظات للمعلِّمين

وضّح للطلبة عند استخدام الحاسبة اختلاف طريقة استخدام المفتاح ln من حاسبة لأخرى.

اشرح للطلبة أن قوانين اللوغاريتمات التي تعلّموها سابقًا تنطبق كذلك على اللوغاريتمات الطبيعية بما يتضمن قوانين الضرب والقسمة والقوى.

ستحتاج إلى تذكير الطلبة بخطوات إيجاد معكوس الدالة.

ذكِّر الطلبة بكيفية إيجاد معكوس دوال خطية بسيطة قبل الدخول إلى الدوال الأسّية واللوغاريتمية د(س) = أ^{س}، د(س) = لـو$_{أ}$ س. بعد ذلك يمكنك الطلب إليهم إيجاد معكوسات دوال أسيّة ودوال لوغاريتمية أساسها هـ.

أفكار للتعليم

اطلب إلى الطلبة التدرّب على استخدام المفتاح ln في حاسباتهم، وكذلك التدرّب على تقريب الناتج إلى درجات محددة من الدقة.

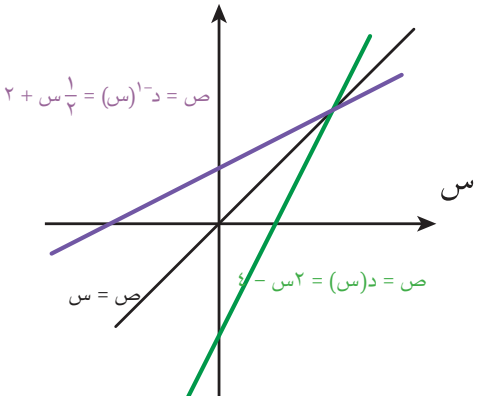
يمكنك مثلًا الطلب إليهم إيجاد القيم الآتية:

لط(٠,٥) = – ٠,٦٩٣ مقرّبًا إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

لط(٥) = ١,٦ مقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

اربط قوانين اللوغاريتمات الطبيعية مع ما تمّ دراسته من قوانين اللوغاريتمات في الصف الحادي عشر، مع التأكيد على الأساس هـ.

ذكّر الطلبة بالعلاقة الهندسية بين منحنى دالة ومنحنى معكوسها. سيكون كافيًا أن تعرض عليهم مثالًا بسيطًا، كرسم منحنيَي ص = د(س)ص٢س – ٤ ، ص = د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٢، كما هو مبيّن أدناه.



اسأل الطلبة عن سبب وجوب أن تكون قيمة د$^{-١}$(١٠) = ٧ إذا كنت تعرف أن د(٧) = ١٠

يتم تعميم هذا إلى الآتي: "إذا كان د (أ) = ب فإن د$^{-١}$(ب) = أ"، على الطلبة فهم أننا لا نقوم إلا بإبدال المحورَين السيني والصادي: المحور السيني انعكاس للمحور الصادي حول المستقيم ص = س والعكس صحيح.

إذا كان لدى الطلبة برمجية للتمثيل البياني مثل برنامج GeoGebra أو Desmos، فأعطهم معادلات لعدة أزواج من الدوال ومعكوساتها مثل ص = هـ^{س}، ص = لطـ س، بحيث يرون أن منحنى واحدة منها هو انعكاس للأخرى حول ص = س.

رسم المنحنيَين ص = د(س)، ص = د$^{-١}$(س) معًا يعين الطلبة على التحقق من كونهم وجدوا المعكوس الصحيح لأي دالة محددة.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

يساعد هذا النشاط الطلبة على تطوير مهاراتهم في استخدام الحاسبة، وكذلك في تقريب الأعداد إلى درجة معيّنة من الدقة.

كما يعطي الطلبة فكرة عن أشكال ومواقع منحنيَي الدالتَين د(س) = هـ^{س}، د(س) = لطـ س (أي ما ستبدو عليه المنحنيات).

١)

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥
لطـ س	−	−	−	−	٠	٠,٦٩	١,١٠	١,٣٩	١,٦١
هـ^{س}	٠,٠٥	٠,١٤	٠,٣٧	١	٢,٧٢	٧,٣٩	٢٠,٠٩	٥٤,٦٠	١٤٨,٤١

٢) عندما نزيد قيمة س واحدًا:

- تتزايد قيم لطـ س بمقادير أصغر وأصغر كل مرة.
- تتزايد قيم هـ^{س} بمقادير أكبر وأكبر كل مرة.

استكشف ٣

من المتوقع أن يلاحظ الطلبة أن:

أحد المنحنَيين انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س

يقطع ص = هـ^{س} المحور الصادي عند ص = ١، ويقطع ص = لطـ س المحور السيني عند س = ١

قيمة ص = هـ^{س} موجبة لكل قيم س

توجد قيمة لـ ص = لطـ س فقط إذا كان س > ٠

تتزايد قيمتا ص = هـ^{س}، ص = لطـ س كلما تزايدت قيمة س

كل دالة هي معكوس الأخرى: إذا كان د(س) = هـ^{س} إذًا د$^{-١}$(س) = لطـ س، وإذا كان ف(س) = لطـ س إذًا ف$^{-١}$(س) = هـ^{س}.

دعم الطلبة

على الطلبة قضاء بعض الوقت في التدرّب على الخطوات المطلوبة لإيجاد معكوس الدالة وذلك خلال قيامهم بهذه العملية بالنسبة إلى دوال اللوغاريتم الطبيعي والأس الطبيعي. يبيّن المثال الأول أدناه الخطوات التي تعلموها سابقًا، ويبيّن المثال الثاني خطوات مماثلة، ولكنه يتضمن الخطوة الإضافية للتحويل من صيغة إلى أخرى.

أوجد معكوس الدالة د(س) = $\frac{٣س - ١}{٢}$

د(س) = $\frac{٣س - ١}{٢}$	اكتب ص مكان د(س)
ص = $\frac{٣س - ١}{٢}$	بدّل ما بين س ، ص
س = $\frac{٣ص - ١}{٢}$	أعد الترتيب للحصول على ص
٢ س = ٣ص – ١	
٢ س + ١ = ٣ص	
ص = $\frac{٢س + ١}{٣}$	عوّض د$^{-١}$(س) مكان ص
د$^{-١}$(س) = $\frac{٢س + ١}{٣}$	

أوجد معكوس الدالة ع (س) = هـ$^{س-١}$

ع(س) = هـ$^{س-١}$	اكتب ص مكان ع(س)
ص = هـ$^{س-١}$	بدّل ما بين س ، ص
س = هـ$^{ص-١}$	خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين
لطـس = لطـ هـ$^{ص-١}$	استخدم لـو $_{أ}$أ^{ب} = ب
لطـس = ص – ١	
ص = ١ + لطـ س	عوّض ع$^{-١}$(س) مكان ص
ع$^{-١}$(س) = ١ + لطـ س	

وعلى الطلبة أن ينتبهوا إلى الطريقة البسيطة التي يمكن أن يستخدموها للتحقق من كونهم وجدوا المعكوس بشكل صحيح. وهذه الطريقة هي أن يعوّضوا في الدالة عددًا (أ) أو عددين صحيحين عشوائيين (أ)، (ب)، ثم يجدوا قيمة الدالة، ومن ثم يعوضوا قيمة الدالة في دالة المعكوس. ليحصلوا على العدد (أ) مرة أخرى.

إذا كان د (أ) = م، د(ب) = ن

∴ يجب أن يكون صحيحًا أن د$^{-١}$(م) = أ، د$^{-١}$(ن) = ب.

قدم الدعم الكافي للطلبة عند حل السؤال ٦ الجزئية ب من تمارين ١ – ٢ فهم قد يحتاجون إلى رسوم بيانية منفصلة و دقيقة بحيث تبرز القيم المراد تحديدها على المنحنى والمحاور الإحداثية بشكل واضح، وقد يحتاجون إلى كتابة الدالة العكسية جبريًا ليستطيعوا من خلالها التعويض للتحقق من قيمة الدالة، أعطهم الوقت الكافي للتعامل مع مثل هذه المنحنيات وبخاصة التمثيلات البيانية التي تحوي منحنيين معًا.

تحدّي الطلبة

بمجرد أن يكمل الطلبة التمرين ٧ من تمارين ١-٢، يمكنك تحدّيهم للعودة إلى الأسئلة من ١ إلى ٦ مرة أخرى لمعرفة ما إذا كان بإمكانهم استخدام التحويلات بين الصيغة اللوغاريتمية والصيغة الأسية لتقليل مقدار العمل الذي يجب القيام به للعثور على الدوال العكسية.

لإيجاد معكوس ع(س) = هـ$^{س-١}$ في المثال أعلاه، يمكننا حذف السطر الرابع من العمل عن طريق تحويل س = هـ$^{ص-١}$ إلى الصيغة اللوغاريتمية وكتابتها بالصيغة ص - ١ = لط س.

وعلى مثال ما ورد في تمارين ١-٢، التمرين ٧ الجزئية و، يمكننا تحويل س = لط (٤ص) إلى الصيغة الأسية وكتابتها: هـ^{س} = ٤ص (لذا لا حاجة إلى الخطوة الوسيطة هـ^{س} = هـ^{لط٤ص}).

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-٢

مصادر أخرى مفيدة

Exponential and natural log functions, multiple choice quiz (TES) Exponential and natural log functions (https://www.tes.com/teaching-resource/exponential-and-natural-log-functions-6146833)

١-٣ الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ

المفردات

الصيغة الأسّية للأساس هـ: العدد هـ مرفوعًا لقوّة معيّنة، وتُكتب هـ^{س}

الصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ: استخدام العدد هـ أساسًا للوغاريتم وتُكتب لط س

ملاحظات للمعلِّمين

سيتعلم الطلبة في هذا الدرس كيفية التحويل بين الصيغتَين الأسّية واللوغاريتمية للأساس هـ

أفكار للتعليم

تعلم الطلبة سابقًا كيفية التحويل من الصيغة الأسّية إلى الصيغة اللوغاريتمية، وبالعكس كذلك.

يمكن اختصار التحويل من خلال ص = أ^{س} ⇔ س = لـو$_{أ}$ ص

أما الأساس هـ، فيتحوّل إلى ص = هـ^{س} ⇔ س = لـو$_{هـ}$ ص، ونكتبه على الشكل س = لط ص

يمكنك استخدام المخطط التالي لتوضيح التحويل للطلبة.

الصيغة الأسيّة الطبيعية	الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية	كيف تكتب الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية؟
القيمة ← ص = هـ$^{\text{الأسّ}}$ ← الأسّ ↑ الأساس	الأسّ ← س = لـو$_{هـ}$ ص ← القيمة ↑ الأساس	الأسّ ← س = لط ص ← القيمة ↑ لوغاريتم الأساس هـ

أعطهم العديد من الأمثلة للتدرب على القيام بهذا التحويل، واطلب إليهم كتابة العلاقة بين الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي بالكلمات، مثلًا:

- لط ١ = ٠ لأن هـ^{٠} = ١
- لط ٥ ≈ ١,٦١ لأن هـ^{١,٦١} ≈ ٥
- لط ٢٠ ≈ ٣ لأن هـ^{٣} ≈ ٢٠

دعم الطلبة

قد يساعد الطلبة المتأخرين أن تسمح لهم، على الأقل بداية، أن يستخدموا رمز لـو$_{هـ}$ للوغاريتم الطبيعي بدلًا من رمز لط. سيكون هذا مألوفًا لديهم، لأنه يتيح لهم رؤية الأساس، كما فعلوا عند دراستهم للوغاريتم للأساس العام أ. لكن يجب تنبيههم إلى أنه مع كون كتابة لـو$_{هـ}$ غير خاطئة، يجب أن لا يتوقعوا رؤية هذا الرمز في الكتب وعلى صفحات الإنترنت والاختبارات والامتحانات.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-٣

١-٤ حلّ المعادلات الأسّية واللوغاريتمية الطبيعية

المفردات

المعادلة الأسّية الطبيعية: معادلة يكون المتغيّر فيها أسًا وأساسها الأساس الطبيعي هـ، وتُكتب ص = هـ^{س}

المعادلة اللوغاريتمية الطبيعية: معادلة لوغاريتمية يكون أساس اللوغاريتم فيها الأساس الطبيعي هـ مثل: ص = لط س

ملاحظات للمعلمين

تعلم الطلبة سابقًا حل المعادلات اللوغاريتمية وحل المعادلات الأسّية باستخدام اللوغاريتم ذي الأساس ١٠

سيكون من الضروري أن تشرح لهم ما يعني أن تكتب الإجابة بدلالة اللوغاريتم الطبيعي أو بدلالة هـ أو بصيغة دقيقة. ويعني هذا بالفعل أن الطلبة يحتاجون إلى القيام بعدد أقل من الخطوات في عملهم: يمكن كتابة إجابة على شكل س = لط ١٤ ولا نحتاج إلى تغييرها إلى س = ٢,٦٤؛ يمكن كتابة إجابة على شكل س = هـ^{٢} ولا نحتاج إلى تغييرها إلى س = ٧,٣٩

قد يحتاج الطلبة إلى مراجعة قوانين الأسس وقوانين اللوغاريتمات قبل البدء بهذا الدرس لأن هذه القوانين ستستخدم بكثرة في حل المعادلات.

اطلب إلى الطلبة تقديم الأمثلة على استخدامات القوانين التالية:

للأساس أ	للأساس هـ	مثال
أ^{م} × أ^{ن} = أ$^{م+ن}$	هـ^{م} × هـ^{ن} = هـ$^{م+ن}$	هـ^{٢} × هـ^{٣} = هـ^{٥}
أ^{م} ÷ أ^{ن} = أ$^{م-ن}$	هـ^{م} ÷ هـ^{ن} = هـ$^{م-ن}$	هـ^{٧} ÷ هـ^{٣} = هـ^{٤}
لـو$_{أ}$ س + لـو$_{أ}$ ص = لـو$_{أ}$ س ص	لط س + لط ص = لط س ص	لط ٣ + لط ٧ = لط (٣ × ٧) = لط ٢١
لـو$_{أ}$ س − لـو$_{أ}$ ص = لـو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$	لط س − لط ص = لط $\frac{س}{ص}$	لط ٤٠ − لط ٤ = لط (٤٠ ÷ ٤) = لط ١٠
لـو$_{أ}$ أ^{ب} = ب	لط هـ^{ب} = ب	لط هـ^{٦} = ٦ لط هـ = ٦ × ١ = ٦
أ$^{لـو_{أ}س}$ = س	هـ$^{لط س}$ = س	هـ$^{لط ٨}$ = ٨

أفكار للتعليم

ذكّر الطلبة بكيفية حلّ المعادلات الأسّية واللوغاريتمية مستخدمًا أمثلة بسيطة مثل:

أ) ٥^{س} = ٤٧ — خذ اللوغاريتم الاعتيادي للطرفين

لـو ٥^{س} = لـو ٤٧ — استخدم قانون القوة

س لـو ٥ = لـو ٤٧ — اقسم الطرفين على لـو ٥

$$س = \frac{لـو ٤٧}{لـو ٥}$$

$$\approx ٢,٣٩$$

ب) لـو س = ٢ — اكتب في الصيغة الأسيّة

$$س = ١٠^{٢}$$

$$س = ١٠٠$$

ج) $\log_{2} س = ٣,٥$ اكتب في الصيغة الأسيّة

$٢^{٣,٥} = س$

$س \approx ١١,٣$

تأكّد من إجابتَي الفرعَين أ ، ب باستخدام الحاسبة لتبيّن أن $٥^{٢,٣٩} \approx ٤٧$، $\log ١٠٠ = ٢$

لا تختلف عملية حلّ المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية الطبيعية عن تلك المستخدمة لحلّ المعادلات عند استخدام أساسات أخرى.

نستخدم هنا الأمثلة الثلاثة أعلاه (بالإضافة إلى مثال آخر) مع تغيير الأساس إلى هـ.

أ) $هـ^{س} = ٤٧$ اكتب في صيغة اللوغاريتم الطبيعي

$س = \ln ٤٧$

$س \approx ٣,٨٥$

ب) $هـ^{س+٤} = \frac{٢٠٠٠}{هـ^{٤س}}$ اضرب الطرفين بـ $هـ^{٤س}$

$هـ^{س+٤} \times هـ^{٤س} = ٢٠٠٠$ استخدم $هـ^{م} \times هـ^{ن} = هـ^{م+ن}$

$هـ^{س+٤+٤س} = ٢٠٠٠$

$هـ^{٥س+٤} = ٢٠٠٠$ خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$\ln هـ^{٥س+٤} = \ln ٢٠٠٠$ استخدم $\ln هـ^{ص} = ص$

$٥س + ٤ = \ln ٢٠٠٠$

$س = \frac{١}{٥}(-٤ + \ln ٢٠٠٠)$

$س \approx ٠,٧٢$

ج) $\ln س = ٢$ اكتب في الصيغة الأسيّة

$هـ^{٢} = س$

$س = هـ^{٢}$

$س \approx ٧,٣٩$

د) $\ln س^{٢} = ٣ - \ln س^{٣}$ استخدم قانون القوّة

$٢\ln س + ٣\ln س = ٣$

$٥\ln س = ٣$

$\ln س = ٠,٦$ اكتب في الصيغة الأسيّة

$س = هـ^{٠,٦}$

$س \approx ١,٨٢$

دعم الطلبة

من الأمور المهمة التي يجب أخذها بعين الاعتبار خلال عملية حل المعادلات التي تتضمن اللوغاريتمات هي أن الطلبة يجب أن يكتبوا عملهم بوضوح عند كل خطوة. لأجل هذا، يجب أن تؤكد لهم أنه إذا كانت خطوة

ما عبارة عن ٢س + ١ = لط ٩، فيجب أن تكون الخطوة التالية ٢س = −١ + لط ٩، وليس ٢س = لط ٩ − ١ لأنه يمكن ببساطة أن تعني للطالب خطأً أنها ٢س = لط ٨ أكّد لهم أيضًا أنه إذا كانت خطوة ما عبارة عن ٣س = لط ٤، فيجب أن تكون الخطوة التالية س = $\frac{١}{٣}$ لط ٤ أو س = $\frac{\text{لط } ٤}{٣}$، وليس س = لط $\frac{٤}{٣}$ (لأننا نقوم بقسمة لوغاريتم العدد ٤ على العدد ٣ وليس لوغاريتم العدد ٤ على العدد ٣).

تحدّي الطلبة

تقدم الأمثلة ١٠، ١١، ١٢ الواردة في كتاب الطالب معادلات يتطلب حلها جهدًا، ويجب أن تُدرس بانتباه من قبل الطلبة وستساعدهم في حل التمرينَين ٦، ٧ في تمارين ١-٤.

في التمرين ٨ من هذه التمارين، تستخدم دالة أساس طبيعي لنمذجة مثال واقعي.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-٤

١-٥ تحويل علاقة إلى صيغة خطية باستخدام اللوغاريتم الطبيعي

المفردات

الصيغة الخطيّة: هي علاقة بين متغيّرَين، س ، ص، يمكن كتابتها في الصيغة ص = م س + جـ. ويمكن تمثيل علاقة خطية من خلال التمثيل البياني لمستقيم.

ملاحظات للمعلِّمين

سيحتاج الطلبة إلى تطوير مهارة جديدة تتعلق بتمييز ما إذا كانت معادلة ما في الصيغة الخطية ص = م س + جـ، وهي الحالة التي يكون فيها ص بدلالة ص، س بدلالة س، م، جـ ثابتَين.

بعد تعريف الطلبة على الحالات المطلوبة للعلاقات (ص = ك $س^{ن}$، ص = $أ^{ق(س)}$، ص = $هـ^{ع(س)}$)، سيكون من المفيد أن تقدم لهم بعض الأمثلة لمعادلات في الصيغة الخطية، كالتي في الجدول الآتي:

العلاقة	الصيغة اللوغاريتمية	المعادلة الخطية ص = م س + جـ			
		ص	س	م	جـ
ص = ٣$س^{٢}$	لطـ ص = ٢ لطـ س + لطـ ٣	لطـ ص	لطـ س	٢	لطـ ٣
ص = ٥ $س^{٤+}$	لطـ ص = (لطـ ٥) س + ٤ لطـ ٥	لطـ ص	س	لطـ ٥	٤ لطـ ٥
ص = $هـ^{٢س+٣}$	لطـ ص = ٢س + ٣	لطـ ص	س	٢	٣

عند استخدام اللوغاريتمات للقيام بالتحويلات الخطية، يمكن استخدام أي أساس. إلا أنه يتوقع من الطلبة استخدام الأساس هـ للإجابات في تمارين ١-٥

أفكار للتعليم

نحوّل ص = ٣$س^{٢}$ إلى الصيغة الخطية كما يلي:

ص = ٣$س^{٢}$	بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين
لطـ ص = لطـ ٣$س^{٢}$	باستخدام قانون الضرب
لطـ ص = لطـ ٣ + لطـ $س^{٢}$	باستخدام قانون القوة
لطـ ص = لطـ ٣ + ٢ لطـ س	بإعادة ترتيب الحدود
لطـ ص = ٢ لطـ س + لطـ ٣	بالمقارنة مع الصيغة الخطية

ص = م س + جـ

ص = لطـ ص، س = لطـ س، م = ٢، جـ = لطـ ٣

الآن، نحوّل ص = ٥$^{س+٤}$ إلى الصيغة الخطية كما يلي:

ص = ٥$^{س+٤}$	بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين
لط ص = لط ٥$^{س+٤}$	باستخدام قانون القوّة
لط ص = (س+٤) لط ٥	بالتوزيع
لط ص = س لط ٥ + ٤ لط ٥	لاحظ أن س لط ٥ هي نفسها (لط ٥) س
	بالمقارنة مع الصيغة الخطية

ص$_{هـ}$ = م س$_{هـ}$ + جـ

ص$_{هـ}$ = لط ص، س$_{هـ}$ = س، م = لط ٥، جـ = ٤ لط ٥

وأخيرًا، نحوّل ص = ٥$^{٢س+٤}$ إلى الصيغة الخطية كما يلي:

ص = هـ$^{٢س+٣}$	بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين
لط ص = لط هـ$^{٢س+٣}$	باستخدام قانون القوّة
لط ص = (٢س+٣) لط هـ	باستخدام لط هـ = ١
لط ص = ٢س + ٣	بالمقارنة مع الصيغة الخطية

ص$_{هـ}$ = م س$_{هـ}$ + جـ

ص$_{هـ}$ = لط ص، س$_{هـ}$ = س، م = ٢، جـ = ٣

دعم الطلبة

يمكن أن تحتاج إلى إعادة تعريف الطلبة بميل المستقيم ومقطعه الصادي، كما أنهم سيحتاجون مرة أخرى إلى أن يكونوا متمكّنين من استخدام قوانين القوى وقوانين اللوغاريتمات وذلك للتعامل مع المعادلات.

من الممكن أن يجد بعض الطلبة صعوبة في العمل في هذا الدرس. ستحتاج في هذه الحالة إلى العودة إلى الدرس السابق (حل المعادلات) وإعطائهم مزيدًا من التمارين على تطبيق قوانين اللوغاريتمات.

تحدي الطلبة

يجب أن تشكل التمارين الثلاثة في تمارين ١–٥ وكذلك التمرين ٦ في تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى تحدّيًا حتى لأكثر الطلبة تقدمًا.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١–٥

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

مصادر أخرى مفيدة

Transformations of y = ln x (TES) Transformations of the graph of y = lnx | Teaching Resources (tes.com) https://www.tes.com/teaching-resource/transformations-of-the-graph-of-y-equals-lnx-6433534

الأسس واللوغاريتمات الطبيعية

شريحة عرض توضيح إلكتروني ١-١

الرياضيّات الأساسية للصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الأوّل

تحويل علاقة غير خطية إلى صيغة خطية

لتحويل العلاقة ص = ك أ^س

إلى الصيغة الخطية ص = م س + جـ

نتبع الخطوات الآتية:

ص = ك أ^س	خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفَين
لطـ ص = لطـ ك أ^س	استخدم قانون الضرب للوغاريتمات
لطـ ص = لطـ ك + لطـ أ^س	استخدم قانون القوة للوغاريتمات
لطـ ص = لطـ ك + س لطـ أ	أعد الترتيب
لطـ ص = (لطـ أ) س + لطـ ك	قارن هذه مع الصيغة الخطية

ص = م س + جـ

الميل (م) = لطـ أ

المقطع الصادي (جـ) = لطـ ك

مثال

حوّل ص = ٥ x ٣^س إلى الصيغة الخطية.

لط ص = لط (٥ x ٣^س)

لط ص = لط ٥ + لط ٣^س

لط ص = (لط ٣) س + لط ٥ قارن مع ص = م س + جـ

الميل = لط ٣

المقطع الصادي = لط ٥

لتحويل العلاقة ص = ك س^ن

إلى الصيغة الخطية ص = م س + جـ

نتبع الخطوات الآتية:

$ص = ك\ س^{ن}$	خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفَين
$لط\ ص = لط\ ك\ س^{ن}$	استخدم قانون الضرب للوغاريتمات
$لط\ ص = لط\ ك + لط\ س^{ن}$	استخدم قانون القوة للوغاريتمات
$لط\ ص = لط\ ك + ن\ لط\ س$	أعد الترتيب
$لط\ ص = ن\ لط\ س + لط\ ك$	قارن هذه مع الصيغة الخطية

$ص = م\ س + جـ$

الميل (م) = ن

المقطع الصادي (جـ) = لط ك

مثال

حوّل $ص = ٤\ س^{٦}$ إلى الصيغة الخطية.

$لط\ ص = لط\ ٤\ س^{٦}$

$لط\ ص = لط\ ٤ + لط\ س^{٦}$

$لط\ ص = ٦\ لط\ س + لط\ ٤$ قارن مع $ص = م\ س + جـ$

الميل = ٦

المقطع الصادي = لط ٤

ملخص

لتحويل ص = ك $أ^{س}$، استخدم $س\sim$ = س، $ص\sim$ = لط ص،

لتجد م = لط أ ، جـ = لط ك

لتحويل ص = ك $س^{ن}$، استخدم $س\sim$ = لط س، $ص\sim$ = لط ص،

لتجد م = ن، جـ = لط ك

(يمثل م، جـ الميل والمقطع الصادي للمستقيم)

إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة الأولى: الأسس واللوغاريتمات الطبيعية

إجابات معرفة قبلية

١) ٤٨٢٦٠ ريالًا عمانيًا

٢) $د^{-١}(س) = \frac{س + ٣}{٢}$

٣) أ) $لـو_{٤} ٦٤ = ٣$ ب) $٢^{-٥} = \frac{١}{٣٢}$

٤) س = ٤,٦٣

تمارين ١-١

١) أ) ٢٠,٠٨٦ ب) ١٤,٨٨٠
ج) ٢,٢٢٦ د) ٣,٤٩٠
هـ) ١,٩٤٨

٢) أ) ٠,١٣٥ ب) ٠,٧٤١
ج) ٠,٢٠٢ د) ٠,٩١٤
هـ) ٠,٢٦٤

٣) أ) ١,٦٤٩ ب) ٤,٤٨٢
ج) ٠,٥١٣ د) ٢٧,٤٧٥
هـ) ٠,٠٨٦

٤) أ) ١) ٩,٠ ٢) ٥,٥
٣) ٠,٨ ٤) ٠,٥
ب) ١) ١,٤
٢) ١,٧
٣) ٠,٥-

٥) أ) ١٤٧٢٩ ب) ٤٠٣
ج) ٣٧

٦) أ) س = ٠
ب) ١) س < ٠
٢) س > ٠
ج) انعكاس حول المستقيم س = ٠ / المحور الصادي.

تمارين ١-٢

١) أ) ١,٠٩٩ ب) ٠,٣٣٦
ج) ٠,١٠٥- د) ١,٨٩٧-
هـ) ٠,٢٥١

٢) أ) ٢ ب) ٣٠
ج) ٩ د) ٧
هـ) ٢١

٣) أ) ١١١ ب) ١
ج) ٢٦ د) ٣
هـ) $\frac{١}{٦}$

٤) أ) ١) ١,٥ ٢) ٠,٧-
٣) ٤,٨ ٤) ٢,٧
ب) ص = س

٥) أ) التمثيل ج.
ب) ١) ص + ١٠ = $هـ^{٠,٢س}$
ص = $هـ^{٠,٢س}$ - ١٠
$د^{-١}(س) = هـ^{٠,٢س} - ١٠$
٢) ٩-

٦) أ) $د^{-١}(س) = -لط س$ ، $د^{-١}(س) = لط \frac{١}{س}$ صحيحان.
ب) ١) ٤,٥
٢) ٠,٨
٣) ٢,١-
٤) ١,٦

٧) أ $د^{-١}(س) = هـ^{٣س}$

ب $ف^{-١}(س) = هـ^{\frac{س}{٢}}$

ج $ح^{-١}(س) = لط \frac{س}{٥}$

د $ك^{-١}(س) = ٢ + لط س$

هـ $م^{-١}: س \leftarrow \frac{١}{٥} لط ٢س$

و $د^{-١}(س) = \frac{١}{٤} هـ^{س}$

ز $ع^{-١}(س) = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{س}{٣}}$

تمارين ١-٣

١) أ لط س = ١٠

ب لط ص = −١

ج لط٢ع = ٤

٢) أ ل = $هـ^{٧}$

ب ق = $هـ^{-٣}$

ج ر = $هـ^{٩}$

٣) أ ١) س = $هـ^{٧}$

٢) س = $\frac{١}{٢} هـ^{١٠}$

ب ١) س = لط ٣

٢) س = $\frac{١}{٢}$ لط ١٥

تمارين ١-٤

١) أ س = ٥

ب س = ٣٦

ج س = −٠,٥

٢) أ س = ٠,٨

ب س = ٥

ج س = −٢

د س = ١٥

هـ ١٦٤

٣) أ س = ٢,٨٩

ب س = ١,٦١

ج س = ١,٠٨

٤) أ س = لط ١٣

ب س = $\frac{١}{٣}$ لط ٧

ج س = $\frac{١}{٢}$ (−١ + لط ٦)

٥) أ س = ١٤٨

ب س = ٠,٠١٨٣

ج س = ٢,٠٥

٦) أ س = ٢,٥

ب س = $هـ^{٣}$ أو س = ٢٠,١

٧) أ س = ٤ + لط ٢

ب س = ١ + لط ٦

ج س = $\frac{١}{٢}$ (−٥ + لط ٧)

د س = $\frac{١}{٢}$ (١ + لط ١٢)

٨) أ (١) ١٣٦

(٢) ٣٦٩

ب بعد ٤٦ يومًا (في اليوم ٤٧)

ج تزايد عدد الإصابات بمقدار ٣٦٩ − ١٣٦ = ١٤٧

تزايد عدد الإصابات بعامل $\frac{٣٦٩}{١٣٦} = \frac{٥٠ \times هـ^{٢}}{٥٠ \times هـ^{١}} = هـ$

تمارين ١-٥

١) ص = $٣س^{٤}$

لط ص = لط $٣س^{٤}$

= لط ٣ + لط $س^{٤}$

= ٤ لط س + لط ٣

ص = لط ص، س = لط س، م = ٤، جـ = لط ٣

٢) أ لط ص = ٥ س + ٣؛

ـــ = س، صـ = لط ص، م = ٥، جـ = ٣

ب لطـص = ٣ لطـس + لطـ٢

سـ = لطـس، صـ = لطـ ص، م = ٣، جـ = لطـ٢

ج لطـ ص = (لطـ٢) س + لطـ٧

سـ = س، صـ = لطـ ص، م = لطـ٢، جـ = لطـ٧

٣) أ لطـص = أ س + ب

سـ = س، صـ = لطـص، م = أ، جـ = ب

ب لطـ ص = ب لطـس + لطـأ

سـ = لطـس، صـ = لطـ ص، م = ب، جـ = لطـأ

ج لطـ ص = −ب لطـ س + لطـ أ،

سـ = لطـ س، صـ = لطـ ص، م = −ب، جـ = لطـأ

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) س = ٢

٢) أ س = ٢,١٤ ب س = ٠,٧٩

ج س = ٤,٠٢ د ٣,٤٧

٣) $ل = \frac{٢ق^{٢}}{٣ + ق}$

٤) أ ٢ لطـ (س + ٣) = لطـ (س^{٢} + ١٥)

لطـ (س + ٣)^{٢} = لطـ (س^{٢} + ١٥)

(س + ٣)^{٢} = س^{٢} + ١٥

س^{٢} + ٦س + ٩ = س^{٢} + ١٥

٦س + ٩ = ١٥

ب س = ١

٥) ج = ٤,٣

٦) أ لطـ ص = ٢س − ١

سـ = س، صـ = لطـ ص، م = ٢، جـ = −١

ب لطـ ص = س لطـ٣ − لطـ٢

سـ = س، صـ = لطـص، م = لطـ٣،

جـ = − لطـ٢ أو جـ = لطـ$\frac{١}{٢}$

٧) أ عند ن = ٠، ١٢٤ = أ × هـ^{٢}

$أ = \frac{١٢٤٠}{هـ^{٢}} = ١٦٨$

ب ١٠٠٠٠٠٠٠ = ١٦٨ × هـ$^{ن+٢}$

$هـ^{ن+٢} = \frac{١٠٠٠٠٠٠٠}{١٦٨}$

$لطـ هـ^{ن+٢} = لطـ \frac{١٠٠٠٠٠٠٠}{١٦٨}$

$ن + ٢ = لطـ \frac{١٠٠٠٠٠٠٠}{١٦٨}$

$ن = −٢ + لطـ \frac{١٠٠٠٠٠٠٠}{١٦٨}$

ن = ٨,٩٩

بعد ٩ أيام.

ج لطـ ل = ن + ٢ + لطـ١٦٨

إجابات تمارين كتاب النشاط
الوحدة الأولى:
الأسس واللوغاريتمات الطبيعية

تمارين ١-١

١) أ) ٧,٣٨٩
ب) ٠,٢٨٢
ج) ٠,٦٣٢

٢) أ) ٠,١٣٢ ب) ٠,٤٩٧
ج) ٠,١٢٢ د) ٠,٩٥١
هـ) ٠,١٨٩

٣) أ) ١,٩٢٨ ب) ٤,٤٨٢
ج) ٠,٨١٩ د) ١٢,٦٩٦
هـ) ٠,١٨٥

٤) أ) ١) ٦,٠
٢) ١,٨
٣) ٠,٦
٤) ٠,٣

ب) ١) ٢,١
٢) ١,٦
٣) ٠

٥) أ) ٢٢١٦٥
ب) ١٦٢٤٠٩

٦) أ) ١) ٢ ٢) ٠
ب) ١) ٣ ٢) ١

تمارين ١-٢

١) أ) ١,٦٠٩
ب) ١,٢٨١
ج) −٠,٢٨٨
د) ٢,٠٠١
هـ) −١,٢٥٣

٢) أ) ٤
ب) ١٥
ج) ٨
د) ١٠
هـ) ٣

٣) أ) ٩٩
ب) ١١
ج) ٣٠
د) ٠
هـ) $\frac{٩}{٢٠}$ أو ٠,٤٥

٤) أ) ١,٧
ب) ٠,٤
ج) ٣,٦
د) −٦,٧

٥) أ) $هـ^{٢س} = هـ^{لط(ص-١)}$
$هـ^{٢س} = ص - ١$
$ص = ١ + هـ^{٢س}$
$د^{-١}(س) = ١ + هـ^{٢س}$
ب) ٢

٦) أ) ٦,٠ ب) −١,٧

٧) أ) $د^{-١}(س) = ٢هـ^{س}$
ب) $ف^{-١}(س) = ٢هـ^{-س}$

تمارين ١-٣

١) أ) لطـس = ٧

ب) لطـص = −٢

ج) لطـ٣ع = ٥ أو لطـع = ٥ − لطـ٣

٢) أ) أ = هـ^{١١}

ب) ب^{٣} = هـ$^{-٤}$ أو ب = هـ$^{-\frac{٤}{٣}}$

ج) ٢ج = هـ^{٩} أو ج = $\frac{١}{٢}$ هـ^{٩}

٣) أ) ١) س = هـ^{٣} ٢) س = $\frac{١}{٣}$ هـ^{٣٠}

ب) ١) س = لطـ٥ ٢) س = $\frac{١}{٣}$ لطـ٣,٥

تمارين ١-٤

١) أ) س = ٧

ب) س = ١٦

ج) س = ٢

٢) أ) س = ٠,٧ ب) س = ٦

ج) س = ٤ د) س = −٧

هـ) ٢

٣) أ) س = ٠,٦٩

ب) س = ١,٥٠

ج) س = ٤,٩١

٤) أ) س = لطـ٢

ب) س = $\frac{١}{٢}$ لطـ٨

ج) س = $\frac{١}{٣}$ (١ + لطـ٧)

٥) أ) س = ٤٠٣

ب) س = ٠,٠٠٦٧٤

ج) س = ١,٧٢

٦) أ) س = $-\frac{١}{٣}$

ب) س = هـ^{١٠٤} = ٤,٠٥٥

٧) أ) س = ٣ + لطـ٣

ب) س = −١ + لطـ٥

ج) س = $\frac{١}{٣}$ (٢ − لطـ١)

د) س = $\frac{١}{٨}$ (٣ + لطـ٤)

٨) أ) ١٨٣٩٤

ب) ١

تمارين ١-٥

١) م = ٣، ك = ٢

٢) أ) سـ = س، صـ = لطـص، م = −٢، جـ = ٣

ب) سـ = س، صـ = لطـ ص، م = ٢ لطـ٣

أو لطـ٩، جـ = لطـ٥

ج) سـ = لطـس، صـ = لطـص، م = −١، جـ = لطـ٣

٣) أ) سـ = س، صـ = لطـص، م = − أ، جـ = ب

ب) سـ = لطـس، صـ = لطـص، م = ب − ١،

جـ = لطـ (أ + ١)

ج) سـ = لطـس، صـ = لطـص، م = −٢ب،

جـ = لطـ٣أ أو لطـأ + لطـ٣

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) س = ٣

٢) أ) س = ٠,٦٩ ب) س = ٣,٣٨

ج) ٠,٢٧ د) س = ٣,٥٥

٣) أ) $أ = \frac{٣ - ب}{٣ ب^{٣}}$

٤) أ) هـ $^{لط(س-١)^{٢}}$ = هـ $^{لط(٥+س^{٢})}$

$س^{٢} - ٢س + ١ = ٥ + س^{٢}$

$١ - ٢س = ٥$

ب) س = −٢

٥) ج = ٩,٦١

٦) أ) سـ = س ، صـ = لط ص، م = −٢، جـ = ١

ب) سـ = س، صـ = لط ص، م = لط ٦، جـ = لط $\frac{٦}{٥}$

٧) أ) ٤٢٠٠ = ك × هـ $^{٠,١ + ٠}$

ك = $\frac{٤٢٠٠}{هـ^{٠,١}}$ = ٣٨٠٠

ب) ٧٥٠٠٠٠ = ٣٨٠٠ × هـ $ز^{ر + ٠,١}$

هـ $ز^{ر + ٠,١}$ = $\frac{٧٥٠٠٠٠}{٣٨٠٠}$

ز + ٠,١ = لط $\frac{٣٧٥٠}{١٩}$

ز = ٥,١٨

بعد ٥ أسابيع.

ج) لط ل = ز + ٠,١ + لط ٣٨٠٠

أو لط ل = ز + ٨,٣٤

الوحدة الأولى: حلول التمارين
الأسس واللوغاريتمات الطبيعية

تمارين ١-١

١) أ) e^x 3 = ٢٠,٠٨٦

ب) e^x 2 , 7 = ١٤,٨٨٠

ج) e^x 0 , 8 = ٢,٢٢٦

د) e^x 1 , 2 5 = ٣,٤٩٠

هـ) e^x 2 $a\frac{b}{c}$ 3 = ١,٩٤٨

٢) أ) e^x 2 $\pm$ = ٠,١٣٥

ب) e^x 0 , 3 $\pm$ = ٠,٧٤١

ج) e^x 1 , 6 $\pm$ = ٠,٢٠٢

د) e^x 0 , 0 9 $\pm$ = ٠,٩١٤

هـ) e^x 4 $\pm$ $a\frac{b}{c}$ 3 = ٠,٢٦٤

٣) أ) $\sqrt{}$ e^x 1 = ١,٦٤٩

أو e^x 0 , 5 = ١,٦٤٩

ب) $\sqrt{}$ e^x 5 = ١٢,١٨٢

أو e^x 5 ÷ 2 = ١٢,١٨٢

ج) e^x − 2 ÷ 3 $\pm$ = ٠,٥١٣

د) e^x 3 $\pm$ e^x 2 = ٢٧,٤٧٥

هـ) e^x 2 $\pm$ − e^x 3 $\pm$ = ٠,٠٨٦

٤) أ) ١) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = ٢,٢ يعطي ص = د(س) = ٩,٠

٢) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = ١,٧ يعطي ص = د(س) = ٥,٥

٣) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = −٠,٢ يعطي ص = د(س) = ٠,٨

٤) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = −٠,٧ يعطي ص = د(س) = ٠,٥

ب) ١) المستقيم الأفقي الذي نرسمه من ص = د(س) = ٤ إلى المنحنى يعطي س = ١,٤

٢) المستقيم الأفقي الذي نرسمه من ص = د(س) = ٥,٦ إلى المنحنى يعطي س = ١,٧

٣) المستقيم الأفقي الذي نرسمه من ص = د(س) = ٠,٦ إلى المنحنى يعطي س = −٠,٥

٥) أ) $هـ^{٩,٦} = هـ^{٧,٢ + ٢,٤}$

$= هـ^{٧,٢} \times هـ^{٢,٤}$

$= ١٣٣٩ \times ١١$

$= ١٤٧٢٩$

ب) $هـ^{٦} = هـ^{٧,٢ - ١,٢}$

$= هـ^{٧,٢} \div هـ^{١,٢}$

$= ١٣٣٩ \div ٣,٣٢$

$= ٤٠٣$

ج) $\sqrt{١٣٣٩}\, هـ^{\sqrt{٧,٢}} = هـ^{٣,٦}$

$= هـ^{(٢,٤ + ١,٢) - ٧,٢}$

$= هـ^{٧,٢} \div (هـ^{٢,٤} \times هـ^{١,٢})$

$= ١٣٣٩ \div (١١ \times ٣,٣٢)$

$= ٣٧$

حل آخر:

$هـ^{٣,٦} = هـ^{١,٢} \times هـ^{٢,٤}$

٦) أ) يتقاطع المنحنيان في النقطة (٠، ١) لأن

$هـ^{٠} = هـ^{-٠} = ١$

للدالتَين القيمة نفسها عند س = ٠

ب) ١) د(س) > ع(س) لقيم س الموجبة، س > ٠

٢) د(س) > ع(س) لقيم س السالبة، س > ٠

ج) انعكاس حول المستقيم س = ٠ (المحور الصادي).

تمارين ١-٢

١) أ) $\ln(3) = ١,٠٩٩$

ب) $\ln(1,4) = ٠,٣٣٦$

ج) $\ln(0,9) = -٠,١٠٥$

د) $\ln(0,15) = -١,٨٩٧$

هـ) $\ln(9\frac{7}{c}) = ٠,٢٥١$

٢) استخدم $هـ^{لط٤س} = س$

أ) $هـ^{لط٢} = ٢$

ب) $٥\, هـ^{لط٦} = ٥ \times ٦ = ٣٠$

ج) $هـ^{٢لط٣} = هـ^{لط٣^{٢}} = ٣^{٢} = ٩$

د) $هـ^{\frac{٢}{٢}لط٤٩} = هـ^{٢لط٤٩^{(\frac{٢}{٢})}} = لط\sqrt{٤٩} = ٧$

هـ) $هـ^{لط٣ + لط٧} = هـ^{لطس} \times هـ^{لطس}$

استخدم $هـ^{أ+ب} = هـ^{أ} \times هـ^{ب}$

$= ٣ \times ٧$

$= ٢١$

٣) استخدم $هـ^{لط س} = س$، لط $هـ^{س} = س$.

أ) $هـ^{لط١١١} = ١١١$

ب) $هـ^{لط٤} - لط\, هـ^{٣} = ٤ - ٣ = ١$

ج) $٣\, هـ^{لط٥} + لط\, هـ^{١١} = ٣ \times ٥ + ١١ = ٢٦$

د) $٣\, لط\, هـ^{٩} - ٤\, لط\, هـ^{٦} = ٣ \times ٩ - ٤ \times ٦$

$= ٢٧ - ٢٤ = ٣$

هـ) $لط\sqrt{هـ} - لط\sqrt{٢}هـ = لط\, هـ^{\frac{١}{٢}} - لط\, هـ^{\frac{١}{٣}}$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

٤) أ) ١) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = ٤,٥ إلى الأعلى يقابل ص = د(س) عند ص = ١,٥

٢) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = ٠,٥ إلى الأسفل يقابل ص = د(س) عند ص = -٠,٧

٣) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = ٥ إلى الأعلى يقابل ص = د(س) عند ص = ١,٦

$\therefore ٣ص = ٣ \times ١,٦ = ٤,٨$ = ٣ لط ٥

٤) هـ - لط ١ = ٢,٧١٨ - ٠ = ٢,٧

ب ص=س، ينتج منحنى الدالة دائمًا عند انعاكسه حول المستقيم ص=س منحنى معكوس الدالة.

٥) أ التمثيل البياني ج؛ ينتج منحنى الدالة ص = د(س) عند انعاكسه حول المستقيم ص = س التمثيل البياني ج وهو منحنى معكوس الدالة د(س).

ب ١) ص + ١٠ = هـ^{٠,٢س}

ص = هـ^{٠,٢س} − ١٠

د$^{-١}$(س) = هـ^{٠,٢س} − ١٠

٢) د$^{-١}$(٠) = هـ^{٠} − ١٠ = ١ − ١٠ = −٩

٦) أ د(س) = هـ$^{-س}$

ص = هـ$^{-س}$

س = هـ$^{-ص}$

لطـ س = لطـ هـ$^{-ص}$

لطـ س = −ص

ص = −لطـ س

د$^{-١}$(س) = − لطـ س

أو د$^{-١}$(س) = لطـ $\frac{١}{س}$

ب ١) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = − ١,٥ إلى الأعلى يقابل ص = د(س) عند ص = ٤,٥

٢) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = ٠,٢ إلى الأعلى يقابل ص = د(س) عند ص = ٠,٨

٣) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = ٨ إلى الأسفل يقابل ص = د$^{-١}$(س) عند = −٢,١

٤) المستقيم الرأسي الذي نرسمه من س = $\frac{١}{٥}$ إلى الأعلى يقابل ص = د$^{-١}$(س) عند ص = ١,٦

٧) أ د (س) = $\frac{١}{٣}$ لطـ س

ص = $\frac{١}{٣}$ لطـ س

س = $\frac{١}{٣}$ لطـ ص

٣س = لطـ ص

هـ^{٣س} = هـ$^{لطـ ص}$

ص = هـ^{٣س}

د$^{-١}$(س) = هـ^{٣س}

ب ف(س) = لطـ س^{٢}

ص = لطـ س^{٢}

س = لطـ ص^{٢}

هـ^{س} = هـ$^{لطـ ص^{٢}}$

هـ^{س} = ص^{٢}

ص = هـ$^{\frac{س}{٢}}$

ف$^{-١}$(س) = هـ$^{س÷٢}$

ج ح(س) = ٥ هـ^{س}

ص = ٥ هـ^{س}

س = ٥ هـ^{ص}

لطـ $\frac{س}{٥}$ = لطـ هـ^{ص}

لطـ $\frac{س}{٥}$ = ص

ص = لطـ $\frac{س}{٥}$

ح$^{-١}$(س) = لطـ $\frac{س}{٥}$

د ك(س) = هـ$^{س-٢}$

ص = هـ$^{س-٢}$

س = هـ$^{ص-٢}$

لطـ س = لطـ هـ$^{ص-٢}$

لطـ س = ص − ٢

ص = ٢ + لطـ س

ك$^{-١}$(س) = ٢ + لطـ س

هـ م: س ← $\frac{١}{٢}$ هـ^{٥س}

ص = $\frac{١}{٢}$ هـ^{٥س}

س = $\frac{١}{٢}$ هـ^{٥ص}

$٢س = هـ^{٥ص}$

$٥ص = لطـ ٢س$

$ص = \frac{١}{٥} لطـ ٢س$

$م^{-١}: س \leftarrow \frac{١}{٥} لطـ ٢س$

و $ص = لطـ ٤س$

$س = لطـ ٤ص$

$هـ^{س} = ٤ص$

$ص = \frac{١}{٤} هـ^{س}$

$د^{-١}(س) = \frac{١}{٤} هـ^{س}$

ز $ع(س) = لطـ س^{٢} + لطـ س - لطـ \frac{١}{٨}$

$= ٢ لطـ س + لطـ س + لطـ ٨$

$ص = ٣ لطـ س + لطـ ٨$

$س = ٣ لطـ ص + لطـ ٨$

$س = لطـ ص^{٣} + لطـ ٨$

$س = لطـ ٨ص^{٣}$

$هـ^{س} = ٨ص^{٣}$

خذ الجذر التكعيبي للطرفَين

$٢ص = هـ^{\frac{س}{٣}}$

$ص = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{س}{٣}}$

$ع^{-١}(س) = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{س}{٣}}$

تمارين ١-٣

١) أ الأساس هو هـ، القوة هي ١٠، القيمة هي س: لطـ س = ١٠

ب $ص = \frac{١}{هـ} = هـ^{-١}$ ∴ الأساس هو هـ، القوة هي -١، القيمة هي ص: لطـ ص = -١

ج $٢ع = هـ^{٤}$ ∴ الأساس هو هـ، القوة هي ٤، القيمة هي ٢ع: لطـ٢ع = ٤

٢) أ الأساس هو هـ، القوة هي ٧، القيمة هي ل: ل = $هـ^{٧}$

ب لطـ ق = -٣ ∴ الأساس هو هـ، القوة هي -٣، القيمة هي ق: ق = $هـ^{-٣}$

ج الأساس هو هـ، القوة هي ٢٧، القيمة هي ر^{٣}: ر^{٣} = هـ^{٢٧}

بسّطها إلى ر = هـ^{٩}. أو استخدم ٣ لط ر = ٢٧ ∴ لط ر = ٩ ∴ ر = هـ^{٩}.

٣) أ (١) لط س = ٧ ⇔ س = هـ^{٧}

(٢) لط ٢س = ١٠ ⇔ ٢س = هـ^{١٠} ⇔ س = $\frac{١}{٢}$ هـ^{١٠}

ب (١) هـ^{س} = ٣ ⇔ س = لط ٣

(٢) $\frac{١}{٣}$ هـ^{٢س} = ٥ ⇔ هـ^{٢س} = ١٥ ⇔ ٢ س = لط ١٥ ⇔ س = $\frac{١}{٢}$ لط ١٥

تمارين ١-٤

١) أ هـ^{لط٤س} = ٢٠

٤س = ٢٠

س = ٥

ب هـ$^{لط\sqrt{٧س}}$ = ٦

$\sqrt{٧س}$ = ٦

س = ٣٦

ج ٤ ^{لط٩س} + ١٨ = ٠

٤ ^{لط٩س} = −١٨

٩س = $\frac{-١٨}{٤}$

س = −٠,٥

٢) أ لط هـ^{١,٦} = ٢س

١,٦ = ٢س

س = ٠,٨

ب هـ^{لطس} − ٤ = ١

س − ٤ = ١

س = ٥

ج لط هـ^{٢س} − ٤ = ٥س + ٢

٢س − ٤ = ٥س + ٢

٣س = −٦

س = −٢

د لط هـ^{س} − ١٣ − لط هـ^{٢} = ٠

س − ١٣ − ٢ = ٠

س = ١٥

هـ هـ^{لطس} − ٢ ^{لطهـ٦} = ١٠٠

س − ٦٤ = ١٠٠

س = ١٠٠ + ٦٤

س = ١٦٤

٣) أ هـ^{س} = ١٨

س = لط ١٨

= ٢,٨٩

ب هـ^{٢س} = ٢٥

٢س = لط ٢٥

س = ١,٦١

ج هـ$^{س+١}$ = ٨

س + ١ = لط ٨

س = ١,٠٨

٤) أ هـ^{س} = ١٣

س = لط ١٣

ب هـ^{٣س} = ٧

$٣س = لط ٧$

$س = \frac{١}{٣} لط ٧$

ج) $هـ^{٢س+١} = ٦$

$٢س + ١ = لط ٦$

$س = \frac{١}{٢}(-١ + لط ٦)$

٥) أ) $لط س = ٥$

$س = هـ^{٥} = ١٤٨$

ب) $لط س = -٤$

$س = هـ^{-٤} = ٠,٠١٨٣$

ج) $لط(س - ٢) = -٣$

$س - ٢ = هـ^{-٣}$

$س = ٢ + هـ^{-٣} = ٢,٠٥$

٦) أ) $٢ لط(٥ - س) = لط س^{٢}$

$لط(٥ - س)^{٢} = لط س^{٢}$

$(٥ - س)^{٢} = س^{٢}$

$٥ - س = س$

$س = ٢,٥$

ب) $لط \sqrt{س} = \frac{٣}{٢}$

$لط س^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}$

$\frac{١}{٢} لط س = \frac{٣}{٢}$

$لط س = ٣$

$س = هـ^{٣}$

$\approx ٢٠,١$

٧) أ) $\frac{هـ^{س}}{٢} = هـ^{٤}$

$هـ^{س} = ٢ هـ^{٤}$

$لط هـ^{س} = لط (٢هـ^{٤})$

$س = لط ٢ + لط هـ^{٤}$

$س = ٤ + لط ٢$

ب) $هـ^{٢س} = \frac{هـ^{٣س-١}}{٦}$

$٦ = \frac{هـ^{٣س-١}}{هـ^{٢س}}$

$هـ^{٣س-١-٢س} = ٦$

$هـ^{س-١} = ٦$

$لط هـ^{س-١} = لط ٦$

$س - ١ = لط ٦$

$س = ١ + لط ٦$

ج) $هـ^{-٤س} = \frac{٧}{هـ^{١+٣س}}$

$هـ^{-٤س} \times هـ^{١+٣س} = ٧$

$هـ^{-٤س+١+٣س} = ٧$

$هـ^{٥+٢س} = ٧$

$لط هـ^{٥+٢س} = لط ٧$

$٥ + ٢س = لط ٧$

$٢س - ١ = لط ١٢$

$س = \frac{١}{٢}(-٥ + لط ٧)$

د) $هـ^{٣س+١} = ١٢ هـ^{س+٢}$

$هـ^{٣س+١} \div هـ^{س+٢} = ١٢$

$هـ^{٣س+١-س-٢} = ١٢$

$هـ^{٢س-١} = ١٢$

$لط هـ^{٢س-١} = لط ١٢$

$س = \frac{١}{٢}(١ + لط ١٢)$

٨) أ) ١) $ل = ٥٠ \times هـ^{٠,١ \times ١٠}$

$= ٥٠ \times هـ^{١}$

$= ١٣٦$

٢) $ل = ٥٠ \times هـ^{٠,١ \times ٢٠}$

$= ٥٠ \times هـ^{٢}$

$= ٣٦٩$

ب $٥٠ \times هـ^{٠,١ ز} = ٥٠٠٠$

$هـ^{٠,١ ز} = ١٠٠$

حوّل إلى الصيغة اللوغاريتمية

لط $١٠٠ = ٠,١$ ز

$ز = \frac{\text{لط } ١٠٠}{٠,١}$

$= ٤٦,٠٥$

بعد ٤٦ يومًا (في اليوم ٤٧)

ج تزايد عدد الإصابات بمقدار ٣٦٩ – ١٣٦ = ١٤٧

تزايد عدد الإصابات بعامل $\frac{٣٦٩}{١٣٦} = \frac{٥٠ \times هـ^{٢}}{٥٠ \times هـ^{١}} = هـ$

تمارين ١-٥

١) ص $= ٣س^{٤}$

خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

لط ص = لط $٣س^{٤}$

استخدم قانون الضرب

= لط ٣ + لط $س^{٤}$

استخدم قانون القوّة

= لط ٣ + ٤ لط س

قارن مع صـ = م سـ + جـ

لط ص = ٤ لط س + لط ٣

سـ = لط س، صـ = لط ص، م = ٤، جـ = لط ٣

٢) أ ص $= هـ^{٥س+٣}$

خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

لط ص = لط $هـ^{٥س+٣}$

استخدم لط $هـ^{ص} = ص$

لط ص = ٥ س + ٣

قارن مع صـ = م سـ + جـ

سـ = س، صـ = لط ص، م = ٥، جـ = ٣

ب ص $= ٢س^{٣}$

خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

لط ص = لط $٢س^{٣}$

استخدم قانون الضرب

لط ص = لط $س^{٣}$ + لط ٢

استخدم قانون القوّة

لط ص = ٣ لط س + لط ٢

قارن مع صـ = م سـ + جـ

سـ = لط س، صـ = لط ص، م = ٣، جـ = لط ٢

ج ص $= ٧ \times ٢^{س}$

لط ص = لط (٧×٢^{س})

لط ص = لط ٧ + لط ٢^{س}

لط ص = س لط ٢ + لط ٧

سـ = س، صـ = لط ص، م = لط ٢، جـ = لط ٧

٣) أ) ص = هـ$^{أس+ب}$ — خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

لط ص = لط هـ$^{أس+ب}$ — استخدم لط هـ^{ص} = ص

لط ص = أ س + ب — قارن مع صـ = م سـ + جـ

سـ = س، صـ = لط ص، م = أ، جـ = ب

ب) ص = أس^{ب} — خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

لط ص = لط أس^{ب} — استخدم قانون الضرب

لط ص = لط أ + لط س^{ب} — استخدم قانون القوة

لط ص = ب لط س + لط أ — قارن مع صـ = م سـ + جـ

سـ = لط س، صـ = لط ص، م = ب، جـ = لط أ

ج) صـ = $\frac{أ}{س^{ب}}$ — خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

لط ص = لط $\frac{أ}{س^{ب}}$ — استخدم قانون القسمة

لط ص = لط أ − لط س^{ب} — استخدم قانون القوة

لط ص = − ب لط س + لط أ — قارن مع صـ = م سـ + جـ

سـ = لط س، صـ = لط ص، م = − ب، جـ = لط أ

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) لط (٥س + ٤) = لط س + لط ٧ — استخدم قانون الضرب

لط (٥س + ٤) = لط ٧س — إذا كان لط ل = لط ق ∴ ل = ق

٥س + ٤ = ٧س

س = ٢

٢) أ) ٢ هـ^{س} − ١٧ = ٠ — بسّط

هـ^{س} = ٨,٥ — خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

لط هـ^{س} = لط ٨,٥ — استخدم لط هـ^{ص} = ص

س = لط ٨,٥

س = ٢,١٤

ب) هـ$^{س+١}$ − ٦ = ٠

هـ$^{س+١}$ = ٦ — خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

لط هـ$^{س+١}$ = لط ٦ — استخدم لط هـ^{ص} = ص

س + ١ = لط ٦

س = −١ + لط ٦

= ٠,٧٩

ج) لط س + لط ٥ = ٣ — استخدم قانون الضرب

لط ٥س = ٣

هـ$^{لط ٥س}$ = هـ^{٣} — حوّل إلى الصيغة الأسّية

٥س = هـ^{٣}

س = $\frac{١}{٥}$ هـ^{٣}

= ٤,٠٢

د) لط (س − ٣) = لط س − ٢ — أعد ترتيبها

لط (س − ٣) − لط س = −٢ — استخدم قانون القسمة

لط $\frac{س-٣}{س}$ = −٢ — حوّل إلى الصيغة الأسّية

$\frac{س-٣}{س}$ = هـ$^{-٢}$ — أعد الترتيب بانتباه

$$١ - \frac{٣}{س} = هـ^{-٢}$$

$$١ - هـ^{-٢} = \frac{٣}{س}$$

$$س = \frac{٣}{١ - هـ^{-٢}}$$

$$= ٣,٤٧$$

٣) $لط ل + لط \frac{١}{٢} = ٢ لط ق - لط (٣ + ق)$

$لط ل - لط ٢ = لط ق^{٢} - لط (٣ + ق)$

$لط ل = لط ق^{٢} + لط ٢ - لط (٣ + ق)$

$لط ل = لط \left(\frac{٢ق^{٢}}{٣ + ق} \right)$

إذا كان لط ل = لط ق ∴ ل = ق

$ل = \frac{٢ق^{٢}}{٣ + ق}$

٤) أ $٢ لط (س + ٣) = لط (س^{٢} + ١٥)$

استخدم قانون القوّة

$لط (س + ٣)^{٢} = لط (س^{٢} + ١٥)$

إذا كان لط ل = لط ق ∴ ل = ق

$(س + ٣)^{٢} = س^{٢} + ١٥$

فكّ الأقواس وبسّط

$س^{٢} + ٦س + ٩ = س^{٢} + ١٥$

$٦س + ٩ = ١٥$

ب $٦س + ٩ = ١٥$

$س = \frac{١٥ - ٩}{٦} = ١$

٥) $د(س) = ٢ هـ^{س - ٥}$

$ص = ٢ هـ^{س - ٥}$

$س = ٢ هـ^{ص - ٥}$

$\frac{س}{٢} = هـ^{ص - ٥}$

$لط \frac{س}{٢} = لط هـ^{ص - ٥}$

$لط \frac{س}{٢} = ص - ٥$

$ص = لط س - (لط ٢) + ٥$

$د^{-١}(س) = ٥ + لط س - لط ٢$

$ج = ٥ - لط ٢ = ٤,٣$

٦) أ) $ص = هـ^{٢س-١}$

$لط ص = لط هـ^{٢س-١}$

$لط ص = ٢س - ١$

$س_{ن} = س$، $ص_{ن} = لط ص$، $م = ٢$، $جـ = -١$

ب) $٢ ص = ٣^{س}$

$لط ٢ ص = لط ٣^{س}$

$لط ٢ + لط ص = س لط ٣$

$لط ص = س لط ٣ - لط ٢$

$س_{ن} = س$، $ص_{ن} = لط ص$، $م = لط ٣$،

$جـ = - لط ٢$ أو $جـ = لط \frac{١}{٢}$

٧) أ) عند ن = ٠، $١٢٤٠ = أ \times هـ^{٢}$

$$أ = \frac{١٢٤٠}{هـ^{٢}}$$

$= ١٦٨$

ب) $١٠٠٠٠٠٠٠ = ١٦٨ \times هـ^{ن+٢}$

$$هـ^{ن+٢} = \frac{١٠٠٠٠٠٠٠}{١٦٨}$$

$$لط هـ^{ن+٢} = لط \frac{١٠٠٠٠٠٠٠}{١٦٨}$$

$$ن + ٢ = لط \frac{١٠٠٠٠٠٠٠}{١٦٨}$$

$$ن = -٢ + لط \frac{١٠٠٠٠٠٠٠}{١٦٨}$$

$ن = ٨,٩٩$

بعد ٩ أيام.

ج) $ل = ١٦٨ \times هـ^{ن+٢}$

$لط ل = لط (١٦٨ \times هـ^{ن+٢})$

$لط ل = لط ١٦٨ + لط هـ^{ن+٢}$

$لط ل = ن + ٢ + لط ١٦٨$

$لط ل = (لط ١٦٨) + (ن + ٢)$

الوحدة الثانية
التفاضل
Differentiation

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الأهداف التعليمية	عدد الحصص	مصادر من كتاب الطالب	مصادر أخرى	المفردات
٢-١ المشتقة الأولى	٢-١ يفهم أن ميل المنحنى عند نقطة محدّدة هو ميل خط المماس عند تلك النقطة، ويستخدم الرموز د′(س)، د″(س)، $\frac{ص}{س}$(ص)، $\frac{ص}{س}\left(\frac{ص}{س}\right)$، $\frac{ص}{س}$، $\frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$ للمشتقتَين الأولى والثانية. ٢-٢ يجد المشتقة الأولى لدوال في الصيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن) بالإضافة إلى مفاهيم الضرب بالثابت، وجمع الدوال وطرحها.	٧	استكشف ١ الأمثلة من ١ إلى ٤ تمارين ٢-١		التفاضل (الاشتقاق) إيجاد المشتقة المشتقة دالة الميل مماس
٢-٢ الميل عند نقطة	٢-٣ يجد الميل ومعادلة خط المماس عند النقاط حيث تكون الدوال قابلة للاشتقاق لدوال في الصيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن) بالإضافة إلى مفاهيم الضرب بالثابت، وجمع الدوال وطرحها.	٧	استكشف ٢ المثالان ٥، ٦ تمارين ٢-٢		
٢-٣ معادلة المماس	٢-٣ يجد الميل ومعادلة خط المماس عند النقاط حيث تكون الدوال قابلة للاشتقاق لدوال في الصيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن) بالإضافة إلى مفاهيم الضرب بالثابت، وجمع الدوال وطرحها.	٧	الأمثلة من ٧ إلى ٩ تمارين ٢-٣	شريحة عرض توضيح إلكتروني ٢-١	

٢-٤ المشتقة الثانية	٢-١ يفهم أن ميل المنحنى عند نقطة محدّدة هو ميل خط المماس عند تلك النقطة، ويستخدم الرموز د′(س)، د″(س)، $\frac{ء}{ءس}$(ص)، $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$، $\frac{ءص}{ءس}$، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ للمشتقتَين الأولى والثانية. ٢-٤ يجد المشتقة الثانية لدوال في الصيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن) بالإضافة إلى مفاهيم الضرب بالثابت، وجمع الدوال وطرحها.	٦	المثالان ١٠، ١١ تمارين ٢-٤		المشتقة الأولى المشتقة الثانية
٢-٥ الدوال المتزايدة والمتناقصة	٢-٥ يستخدم المشتقة لدراسة التزايد أو التناقص للدالة د(س) ضمن فترة معطاة بحيث لا تضم نقاطًا حرجة، وحيث تكون د(س) دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (دالة تربيعية) على الأكثر.	٥	استكشف ٣ المثالان ١٢، ١٣ تمارين ٢-٥		دوال متزايدة دوال متناقصة
تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية		٤			

٢-١ المشتقة الأولى

المفردات

التفاضل (الاشتقاق): عملية إيجاد المشتقة أو دالة الميل لدالة ما.

إيجاد المشتقة: وهو القيام بعملية الاشتقاق.

المشتقة: هي دالة الميل عند أية نقطة على منحنى، ونرمز إليها بـ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

دالة الميل: تسمى د′(س) دالة الميل (اسم آخر للمشتقة) للمنحنى ص = د(س).

مماس: مستقيم يمس المنحنى في نقطة واحدة.

ملاحظات للمعلِّمين

يقدّم هذا الدرس أنواعًا عديدة لترميز المشتقة. من المفيد أن تذكّر الطلبة بأهمية الاستخدام الصحيح للترميز في خطوات الحل المتبعة لديهم، وأن تؤكد على أنه من الأحسن عمومًا استخدام الرمز نفسه الوارد في السؤال.

عند الإشارة إلى الدوال، فإن الصيغ القياسية المستخدمة هي د(س)، د′(س) (ولاحقًا د″(س))، ولكن عند الإشارة إلى المنحنيات، فإن الصيغ القياسية المستخدمة هي ص، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ (ولاحقًا $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢}$)، وبالإجمال لا توجد قوانين تحتم هذا الاستخدام، بل تستخدم عمومًا بشكل متقاطع.

سنتعامل في هذا الدرس مع المنحنيات القابلة للاشتقاق فقط أي المتصلة على فترة (وهذا يعني أنها غير منقطعة ويمكن رسمها دون رفع القلم عن الورقة). حيث يكون للمنحنى ميل عند كل نقطة في تلك الفترة، ويقال عندها إن دالة المنحى قابلة للاشتقاق (أي يمكن أن نجد مشتقة الدالة وتكون دالة الميل معرّفة عند جميع النقاط في الفترة).

لاحظ أنه بالنسبة إلى الدوال النسبية، مثل د(س) = $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ١}$ المقام لا يمكن أن يكون مساويًا للصفر لأن القسمة على صفر غير معرّفة (بالنسبة إلى الدالة أعلاه، لا يمكن أن تكون س مساوية للعدد ١، وبالتالي فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ١).

أفكار للتعليم

توجد طرق مختلفة لتعريف الطلبة على الاشتقاق. وكمدخل إلى إيجاد ميل المنحنى، يمكن أن يعمل الطلبة على استكشف ١ في مجموعات صغيرة، بهدف التحقّق من خطوط المماس التي يبدو أن لكل منها ميلًا مختلفًا عن الآخر، وذلك تبعًا لمستوى الدقة المتبع في رسمها.

أكّد على أن رسم مماس ما يمكن أن يقدم فقط قيمة تقريبية لميل المنحنى.

بعض المصادر المفيدة الأخرى تتضمن: 10 Differentiation, Exploring the gradient on a curve

(باستخدام http://www.cambridge.org/links/mctd6225 Desmos أو GeoGebra, MEI)

يعرّف المثال ١ الطلبة أيضًا على قوى س التي ليست أعدادًا صحيحة موجبة، مثل دوال مقلوب القوى والجذور.

تتعامل الأمثلة ٢، ٣، ٤ مع الضرب بثوابت وجمع و/أو طرح الدوال.

تقدم التمارين ١ إلى ٣ في تمارين ٢-١ تدريبًا على اشتقاق حدّ واحد أو مجموعة حدود مع معاملات مختلفة، باستخدام أنواع مختلفة من الرموز.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

يمكن إيجاد ميل مستقيم يمر بالنقطتَين (س١، ص١)، (س٢، ص٢) من خلال $\frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$ أو $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

يجب أن يكون ترتيب طرح الإحداثيات في البسط هو ذاته الوارد في المقام.

١. أ) أ: $\frac{٠,٦ - ٦}{١,٤ - ٧} = ٠,٩٦$

ب) ب: $\frac{٠,٨ - ٦,٤}{٢ - ٨} = ٠,٩٣$

ج) ج: $\frac{٠,٩ - ٦,٥}{٢,٥ - ٧,٩} = ١,٠٤$

٢. أ) أ: $\frac{٠,٩٥ - ٧,٠٥}{٢,١ - ٨,٢} = ١$

ب) أي من:

ميل المنحنى عند س = ٥ هو ذاته ميل المماس عند س = ٥

ميل المماس عند س = ٥ هو ذاته ميل المنحنى عند س = ٥

دعم الطلبة

سيجد بعض الطلبة صعوبة في تحويل بعض الدوال مثل مقلوب القوى أو الجذور، وذلك لتسهيل اشتقاقها. يمكنك أن تساعدهم من خلال وضع مجموعة من الدوال المختارة على اللوح أو في شرائح عرض إلكتروني، وأن تطلب إليهم كتابتها في الصيغة التي سيستخدمونها للاشتقاق.

يجب أيضًا أن يكون واضحًا للطلبة أن الحدّ الثابت يساوي ثابتًا مضروبًا في المتغير س مرفوعًا إلى أسّ صفر. على سبيل المثال، الثابت ٧ = ٧ × س٠

تحدّي الطلبة

من المرجّح أن يواجه معظم الطلبة صعوبة في التعامل مع الأسئلة التي تحتاج فيها الدالة إلى تبسيط بحيث يمكن تطبيق قوانين الاشتقاق عليها، لأنها ستتضمن تبسيط الأسس، ومهارات التعامل مع الأسس السالبة والكسرية. يمكن إيجاد مثل هذه الدوال في التمرين ٢ (الجزئيات من د إلى ح) والتمرين ٣ من تمارين ٢-١

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢-١

مصادر أخرى مفيدة

اختبار متعدّد الاحتمال في Differentiating polynomials (http://www.cambridge.org/links/mctd6235) (Univie)

٢-٢ الميل عند نقطة

ملاحظات للمعلِّمين

سيطوّر الطلبة في هذا الدرس فهمًا لدالة الميل، وسيجدون ميل المنحنى عند نقطة عليه من خلال التعويض بالإحداثي السيني للنقطة في دالة الميل للمنحنى.

يقدم استكشف ٢ للطلبة فرصة للربط بين المنحنى ودالة الميل المناسبة له. إن اتقان الطلبة لإيجاد الميل يسهّل عليهم مهمة كتابة معادلة المماس في الدرس القادم.

أفكار للتعليم

يجب أن يكون مفهوم التعويض قد أصبح مألوفًا لكل الطلبة الآن.

من المفيد أن تطلب إلى الطلبة في نهاية الدرس أن يحلّوا بعض المسائل التي تتضمن التعويض، وكذلك حل معادلات خطية من خلال تكليفهم أن يملأوا الخانات الفارغة في جدول كالآتي: (وضعت الإجابات في الجدول باللون الأحمر).

الدالة	دالة الميل	الميل عند س = ٢	قيمة (قيم) س حيث الميل = ٤
ص = س^{٢} + ١٠ س − ٨	$\frac{ص}{س}$ = ٢ س + ١٠	١٤	س = −٣
ص = ٥ + ٦ س − س^{٢}	$\frac{ص}{س}$ = ٦ − ٢ س	٢	س = ١
د(س) = ٣ س^{٢} + ٧	د′(س) = ٦س	١٢	س = $\frac{٢}{٣}$
د(س) = $\frac{١}{س}$ − ٣	د′(س) = س$^{-٢}$ = $\frac{١}{س^{٢}}$	س = $\frac{١}{٤}$	س = ± $\frac{١}{٢}$

في الجزء الأول من المثال ٥، طُلب منا إيجاد د′(س) للدالة د(س) = ٨ + ١١س − س^{٢}

في هذه الحالة، يجب اشتقاق كل حد من الحدود الثلاثة على النحو التالي:

١) ٨ = ٨س^{٠} ومشتقته هي ٨ × ٠ × س$^{٠-١}$ = ٠

٢) + ١١س = ١١ × س^{١} ومشتقته هي ١١ × ١ × س$^{١-١}$ = ١١

٣) −س^{٢} = −١ × س^{٢} ومشتقته هي −١ × ٢ × س$^{٢-١}$ = −٢س

وبالتالي د′(س) = ٠ + ١١ − ٢س = ١١ − ٢س

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

ابدأ حل استكشف ٢ مع الطلبة من خلال سؤالهم عن نوع المنحنى الذي له الميل نفسه عند كل نقاطه. يجب أن يتعرفوا بسهولة على أنه مستقيم، وعلى أنه المعادلة ٣، يرتبط هذا الأمر بوضوح مع دالة الميل في الجزئية (أ).

الإجابات هي: ١) ب ٢) د ٣) أ ٤) ج

دعم الطلبة

شجّع الطلبة على التحقق من حصولهم على الميل الصحيح من خلال التعويض. يمكنهم القيام بذلك عن طريق إجراء التعويض مرّتين على الأقل للتأكد من أن الإجابة هي نفسها في كل مرّة. سيكون هذا مهمًا بالتحديد عندما تكون دالة الميل تربيعية أو دالة مقلوب القوى، وعندما لا تكون قيمة س التي يريدون تعويضها عددًا صحيحًا موجبًا.

أكّد للطلبة أن ميل المماس عند نقطة ما على المنحنى هو نفسه ميل المنحنى عند تلك النقطة. بمجرد إيجاد ميل المماس عند نقطة ما، تنتفي الحاجة إلى إيجاد ميل المنحنى عند تلك النقطة.

يبيّن الجزء الثاني من المثال ٥ عملية تعويض الإحداثي السيني في صيغة $\frac{ص}{س}$ = ١١ − ٢س لإيجاد الميل عند نقطتين محدّدتين على المنحنى. عندما نعوّض س بـ ٤، فإن قيمة ١١ − ٢س تساوي ٣، وبالتالي فإن ميل المنحنى عند س = ٤ هو ٣. وعندما نعوّض س بـ(−٣) فإن قيمة ١١ − ٢س تساوي ١٧، وبالتالي يكون ميل المنحنى يساوي ١٧ عند س = −٣

في المثال ٦، يجب إيجاد النقطة على المنحنى حيث يكون الميل صفرًا. للقيام بذلك، من الضروري أولًا إيجاد دالة الميل (وهي ٦س + ١٢)، ثم عليك أن تساوي بينها وبين الميل المُعطى (الذي هو صفر). المعادلة الناتجة هي ٦س + ١٢ = ٠ وحلّها س = −٢

ثم يتم تعويض الإحداثي السيني −٢ في الدالة الأصلية لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة، والذي هو د(−٢) = −١٩، وبالتالي فإن النقطة التي يكون عندها الميل يساوي صفرًا هي (−٢، −١٩).

تحدّي الطلبة

يمكنك طرح أي عدد من أسئلة التحدّي الإضافية على الطلبة، بحيث يكون من الممكن إعادة كتابة الدوال المطلوب اشتقاقها في صورة قابلة للاشتقاق أولًا.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢-٢

٢-٣ معادلة المماس

ملاحظات للمعلِّمين

سيوسّع الطلبة في هذا الدرس العمل الذي أنجزوه مسبقًا في إيجاد ميل المماس عند نقطة، إلى إيجاد معادلة المماس لمنحنى.

ذكّرهم بأن استخدام دالة الميل يؤدي إلى نتيجة دقيقة، على عكس رسم المماس باستخدام المسطرة، والذي يعطي فقط نتيجة تقريبية.

إذا تم إيجاد ميل المماس، أمكن إيجاد المعادلة باستخدام أية نقطة على المماس، مع أن هذه النقطة تكون عادة نقطة التقاء المماس بالمنحنى (نقطة التماس).

إذا كان ميل المنحنى هو م ويمر بالنقطة $(س_١، ص_١)$، تكون المعادلة في الصيغة ص = م س + جـ، حيث يمكن إيجاد جـ من خلال تعويض قيمتي $س_١، ص_١$.

يمكنك، اعتمادًا على مدى إدراك الطلبة للعملية، أن تبسّط الأمر إلى عملية من خطوة واحدة من خلال استخدام $ص - ص_١ = م (س - س_١)$. إلا أنه غالبًا ما يكون الأمر صعبًا جبريًا إذا لم تكن إحدى أو أكثر من واحدة من القيم م، $س_١$، $ص_١$ أعدادًا غير صحيحة.

أفكار للتعليم

يمكنك أن تبدأ هذا الدرس بمصدر A tangent is … (http://www.cambridge.org/links/mctd6242) (Underground Mathematics)، الذي يستحث الطلبة على التفكير في تعاريف ممكنة للمماس وفي إيجاد أمثلة معاكسة. قد يبدأ الطلبة بالعمل بشكل فردي، ثم في مجموعات ثنائية لمناقشة وجهات نظرهم، ليصلوا إلى اتفاق قبل مناقشة الأمر مع مجموعات ثنائية أخرى.

وقد يكون من المفيد أن يراجع الطلبة معلوماتهم عن الميل ومعادلة المستقيم، ربما باستخدام Equations of straight lines (http://www.cambridge.org/links/mctd6243) (TES) كاختبار بسيط على ألواح بيضاء صغيرة. سيطبقون الآن معرفتهم هذه على المماس، باستخدام الاشتقاق لإيجاد دالة الميل، وبالتالي، ميل مماس عند نقطة.

يقدم Equations of tangents (http://www.cambridge.org/links/mctd6245) (TES) (chart to complete) الكثير من التمارين لخطوات العملية وسيساعد الطلبة على التمكّن من المفهوم: ستشجع الصفحتان اللتان تبدآن بـ ' Find the equation of a straight line … ' في STEM (يجب أن تنشئ حسابًا) Differentiation and integration (http://www.cambridge.org/links/mctd6246) سوف يشجع الطلبة على التفكير بانتباه في المماس والمنحنيات.

تبدأ تمارين ٢-٣ بأسئلة مباشرة تطلب معادلة مماس من معادلة منحنى وإحداثيات نقطة. يُدخل التمرين ٦ مفهوم نقطة التقاء مستقيمَين.

دعم الطلبة

يحتاج بعض الطلبة إلى تذكيرهم بأنه يمكنهم إيجاد ميل مماس عند نقطة على منحنى من خلال تعويض قيمة الإحداثي السيني لتلك النقطة في دالة الميل التي يجدونها من خلال الاشتقاق. ومتى أصبح لديهم الميل وإحداثيات نقطة، أمكنهم استخدام طرق تعلّموها في الهندسة الإحداثية لإيجاد معادلة المماس.

تتعلق الأمثلة ٧، ٨، ٩ بكيفية إيجاد معادلات المماس للمنحنيات التربيعية، والتكعيبية، والدوال النسبية.

تحدّي الطلبة

يمكن للطلبة الذين يريدون استكشاف المزيد أن يستكشفوا Tangent or normal (https://undergroundmathematics.org/calculus-of-powers/tangent-or-normal/pairs-problem) (UndergroundMathematics) شرط أن يكونوا قد تعلّموا كيفية إيجاد ميل مستقيم متعامد مع مماس (يمكن القيام بذلك من خلال نشاط Warm up من الرابط أعلاه). يمكنك أن تقدّم لهم كل المعلومات التي يحتاجون إليها للبدء بالتمارين وأن تطلب إليهم معرفة كيفية حل المسألة. يجدون كذلك أسئلة توسّعية ممكنة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢-٣

٢-٤ المشتقة الثانية

المفردات

المشتقة الأولى: يرمز إليها بـ د′(س) أو $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$؛ وهي دالة الميل عند أية نقطة على منحنى.

المشتقة الثانية: يرمز إليها بـ د″(س) أو $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$؛ وهي صيغة تنتج من إيجاد مشتقة المشتقة الأولى لدالة.

ملاحظات للمعلِّمين

يدرس الطلبة في هذا الدرس عملية إيجاد المشتقة الثانية. تأكد من فهم الطلبة وتمكنهم من استخدام الرموز المناسبة، اعتمادًا على اسم (رمز) الدالة الأصلية. يوضح المثالان ١٠، ١١ هذه العملية كما يبيّنان كيفية إيجاد قيم المشتقة الثانية، مع اقتراح لتطبيقها من خلال معرفة ما إذا كان لها قيمة موجبة أو سالبة.

أفكار للتعليم

تتعلق التمارين ١ إلى ٥ في تمارين ٢-٤ بإيجاد المشتقات الثانية لمختلف الدوال انطلاقًا من دالة أصلية، حيث تتطلب بعض هذه التمارين تعويض قيم لـ س يجب إيجادها باستخدام قيمة المشتقة الثانية. تتضمن هذه كلها حل المعادلات الخطية فقط.

يقدم التمرين ٦ مثالًا على تطبيق المشتقة الثانية، حيث تنتج دالة التسارع من المشتقة الثانية لدالة المسافة.

يمكنك أن تقدم للطلبة المزيد من المعلومات عن تطبيقات المشتقة الثانية. يستطيع الطلبة تحديد طبيعة نقاط التحول لمنحنى، وبشكل أعم، إيجاد قياس المعدل الذي تتغير على أساسه معدلات التغير، مثل السرعة، وتزايد أعداد السكان، ونمو الربح.

دعم الطلبة

على الطلبة الانتباه عند استخدام رموز المشتقة الثانية تحديدًا وذلك لتجنّب الخلط بين المشتقتَين الأولى والثانية. سيصبح الأمر مهمًا لاحقًا إذا تقدّموا أكثر لدراسة تطبيقات المشتقة الثانية.

تحدّي الطلبة

يمكن للطلبة الذين يريدون تحديًا أن يستكشفوا تطبيقات المشتقة الثانية. مثلًا، ما هي المعلومات التي تقدمها لنا عن دالة الميل؟ إذا قمت بإيجاد مشتقة المسافة بالنسبة إلى الزمن، فما معنى المشتقة الثانية؟ سيجدون مثالًا على هذا في التمرين ٦ من تمارين ٢-٤

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢-٤

٢–٥ الدوال المتزايدة والمتناقصة

المفردات

دالة متزايدة: هي دالة تتزايد قيمتها كلما تزايدت قيمة س، حيث الميل موجب دائمًا.

دالة متناقصة: هي دالة تتناقص قيمتها كلما تزايدت قيمة س، حيث الميل سالب دائمًا.

ملاحظات للمعلِّمين

من المفيد جدًا التفكير في المنحنيات بشكل موازٍ مع القيام بالخطوات الجبرية لإيجاد $\frac{ص}{س}$. سيتمكن الطلبة من الانتباه إلى أنه كلّما تزايدت قيمة س، تزايدت قيمة ص عندما تكون $\frac{ص}{س}$ موجبة.

أفكار للتعليم

يمكنك تقديم الدوال المتزايدة والمتناقصة باستخدام النشاط الوارد في استكشف ٣، والذي يشجّع الطلبة على تحديد الخصائص الأساسية للمنحنيات.

للتدرّب على حل المتباينات وتفسير النتائج يمكن أن يعمل الطلبة في مجموعات ثنائية على تمرين الربط في Increasing and decreasing functions (http://www.cambridge.org/links/mctd6253) (TES).

في تمارين ٢–٥، يقدّم التمرين ١ أسئلة على حل المعادلات ويقدّم التمرين ٢ أسئلة مباشرة على حل المتباينات.

يطلب الجزء (a) من سؤال المراجعة في

R7433 Is the gradient function increasing or decreasing on this curve?

(http://www.cambridge.org/links/mctd6254) (Underground Mathematics) إلى الطلبة تحليل دالة الميل عند نقاط مختلفة على منحنى، ومن ثم وضع نتائجهم في جدول. سيساعدهم هذا الأمر على فهم وتمييز الدوال المتزايدة والمتناقصة.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٣

١. كلّما تزايدت قيمة س، تزايدت قيمة ص.

إشارة الميل عند أي نقطة هي دائمًا موجبة.

هذه الأنواع من الدوال متزايدة

٢. كلّما تزايدت قيمة س، تناقصت قيمة ص.

إشارة الميل عند أي نقطة هي دائمًا سالبة.

هذه الأنواع من الدوال متناقصة

٣. أ) د(س) = س^{٢} متزايدة في الفترة س > ٠

ب) د(س) = س^{٢} متناقصة في الفترة س < ٠

ج) هـ(س) = – س^{٢} متزايدة في الفترة س > ٠

د) هـ(س) = – س^{٢} متناقصة في الفترة س < ٠

دعم الطلبة

قد يحتاج الطلبة إلى التدرّب على حل المتباينات الخطية، وعلى تذكّر قانون عكس الإشارة (> أو <) عند الضرب أو القسمة على عدد سالب قبل التطرق إلى مثال ١٣.

تحدّي الطلبة

يمكنك إعطاء الطلبة قائمة بالدوال التي يكون ميلها مساويًا للصفر عند قيم محدّدة لـ س، وعليك أن تطلب إليهم إعطاء وصف مناسب للدوال عند تلك النقطة (الوصف المناسب هو القول بأنّ الدالة غير متزايدة وغير متناقصة عند تلك النقطة). بعض الأمثلة التي يمكنك استخدامها هي:

١) د (س) = $س^{٢}$ − ٦س + ٨ عند س = ٣

٢) ع(س) = $س^{٢}$ − ٧س + ١٢ عند س = ٣,٥

٣) هـ(س) = $س^{٣}$ − ٢$س^{٢}$ + س + ٤ عند س = ١

٤) ق(س) = ٨$س^{٤}$ − ٤س + ٣ عند س = ٠,٥

٥) م(س) = ١٢$س^{-٢}$ − ٣س + ١١ عند س = −٢

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢−٥

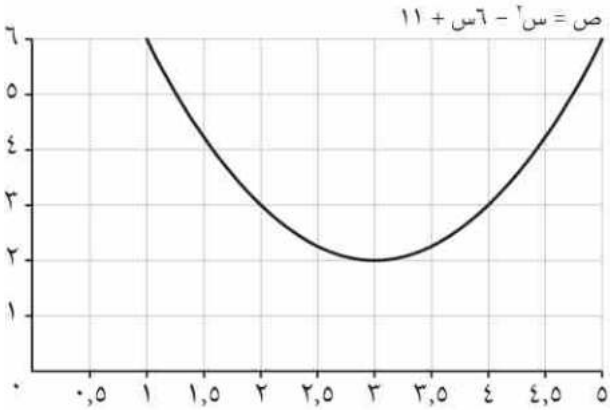
تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

معادلة المماس

شريحة عرض توضيح إلكتروني ٢-١

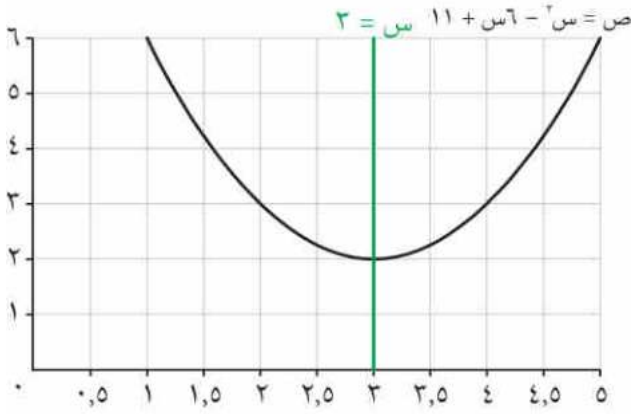
يبينّ التمثيل البياني جزءًا من منحنى معادلته ص = س^{٢} − ٦س + ١١

ما هي معادلة المستقيم الذي يشكّل خط التناظر لهذا المنحنى؟



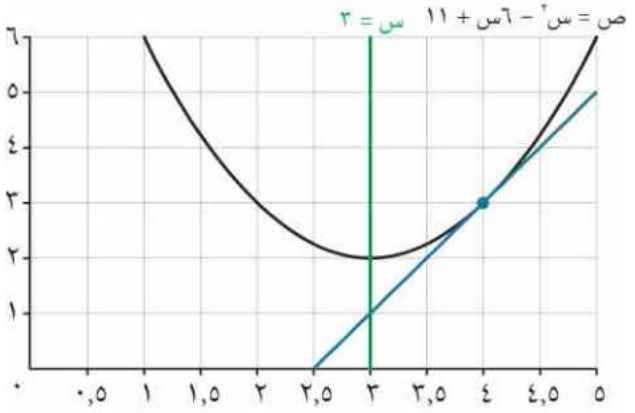
معادلة المستقيم الذي يشكل خط التناظر هي س = ٣

سنحدد الآن نقطة على المنحنى عند س = ٤ ، ص = ٣، ونرسم مماسًا عند النقطة (٤، ٣).



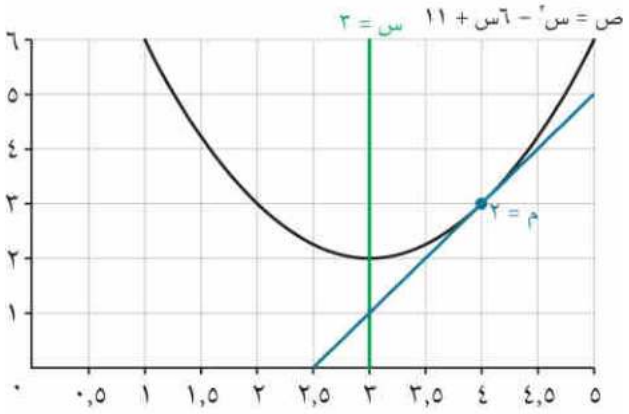
ما هو ميل المماس عند (٤، ٣)؟

لإيجاد الميل: نجد دالة الميل $\frac{ص}{س}$ ثم نعوّض بـ س = ٤



$$\frac{ص}{س} = ٢س - ٦$$

عند س = ٤، الميل $\frac{ص}{س} = ٢ \times ٤ - ٦ = ٢$



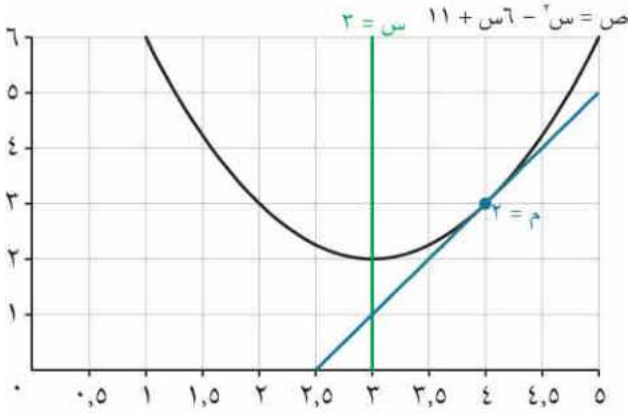
والآن، ما هي معادلة المماس؟

نعرف أن ميله يساوي ٢، وأنه يمر بالنقطة (٤، ٣)

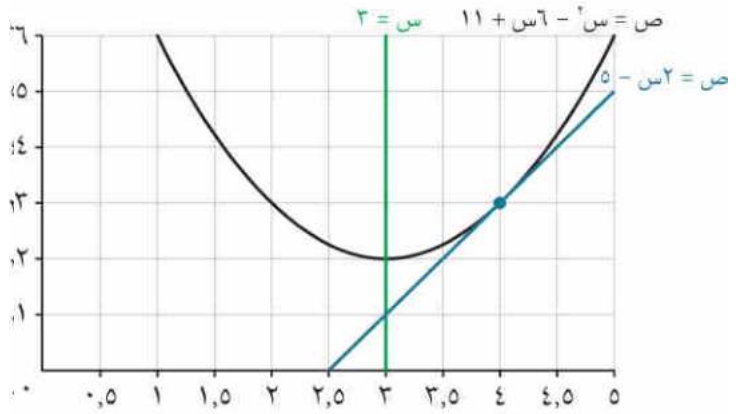
∴ معادلة المماس هي في الصيغة ص = ٢س + جـ

يمكننا إيجاد جـ من خلال تعويض س = ٤، ص = ٣ في المعادلة لنحصل على

جـ = −٥



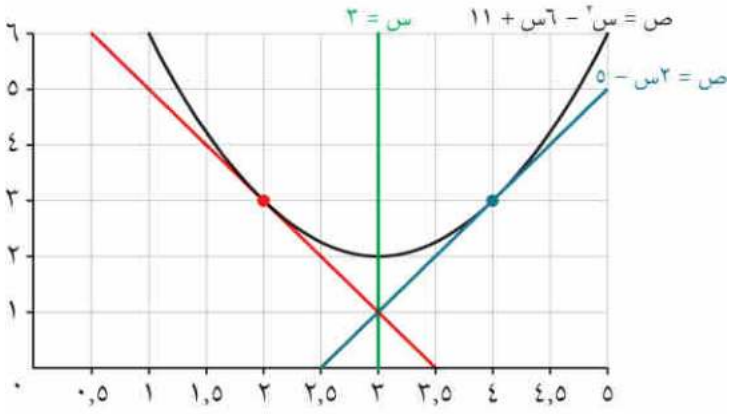
معادلة المماس عند النقطة (٤ ، ٣) هي ص = ٢س – ٥



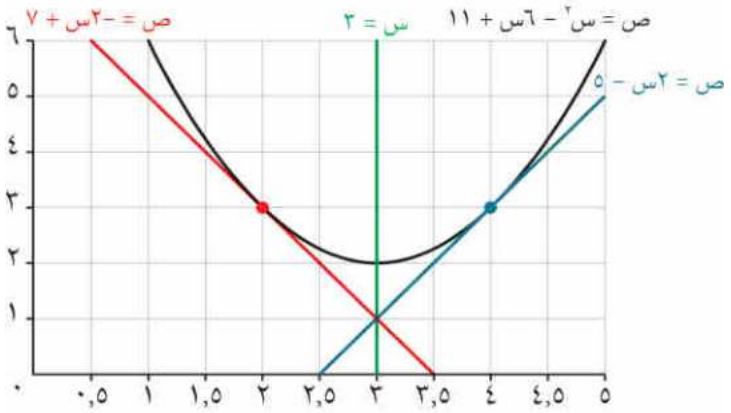
رسمنا كذلك هنا مماسًا عند النقطة حيث س = ٢ ، ص = ٣ ، أي (٢ ، ٣).

هل يمكنك إيجاد ميل ومعادلة المماس الجديد؟

هل يساعدك تناظر المخطّط على معرفة ذلك؟



معادلة المماس عند (٢، ٣) هي ص = −٢س + ٧ أو ص = ٧ − ٢س



إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة الثانية: التفاضل

إجابات معرفة قبلية

١) أ) $٣س^{\frac{٢}{٣}}$ ب) $٥س^{\frac{٢}{٣}}$

ج) $\frac{س^{\frac{١}{٢}}}{٢}$ د) $\frac{١}{٢}س^{-٢}$

هـ) $٣س^{-٢}$ و) $\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٣}}$

٢) أ) ١٨ ب) ١-

٣) ص = ٢س - ١

٤) ١

تمارين ٢-١

١) أ) $٥س^{٤}$ ب) ٥

ج) $-٤س^{-٥}$ د) $\frac{-١}{س^{٢}}$

هـ) ٠ و) $\frac{٢}{٣\sqrt{س^{٣}}}$

ز) $٣٠س^{٤}$ ح) $١١س^{٢}$

٢) أ) $٨س^{٣}$ ب) $١٥س^{٤}$

ج) $٣س^{٥}$ د) $-\frac{٣}{س^{٢}}$ أو $-٣س^{-٢}$

هـ) $-\frac{١٠}{٣س^{٣}}$ أو $-\frac{١٠س^{-٣}}{٣}$ و) ٠

ز) $٢س^{-\frac{١}{٢}}$ أو $\frac{٢}{\sqrt{س}}$ ح) $-س^{-\frac{٥}{٢}}$

٣) أ) ١٠س - ١ ب) $٦س^{٢} + ٨$

ج) $-٣ + ١٠س$ د) ٢س + ١

هـ) $١٦س^{٣} - ٢٤س$ و) $٥س^{-٢}$ أو $\frac{٥}{س^{٢}}$

ز) $١٤س + ٣س^{-٢} - ٤س^{-٣}$ أو $١٤س + \frac{٣}{س^{٢}} - \frac{٤}{س^{٣}}$

ح) $٣ - ٥س^{-٢} + \frac{١}{٤}س^{-\frac{٣}{٢}}$ أو $٣ - \frac{٥}{س^{٢}} + \frac{١}{٤\sqrt{س^{٣}}}$

ط) $٦س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٣}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{٢}{٢}}$ أو $٦\sqrt{س} + \frac{٣}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{\sqrt{س^{٣}}}$

تمارين ٢-٢

١) أ) ٧ ب) ٢-

ج) ٢- د) ١

هـ) ٣٥ و) ١٠

ز) ٥ ح) $\frac{١}{٢٧}$

٢) أ) (٥، ١٥) ب) (١، ٤)

ج) (٢، ٢٣) د) (٤-، ٧٤)

هـ) (٤، ٥٣-) و) $\left(\frac{٧}{٨}، -\frac{١١}{١٢}\right)$

٣) أ = $\frac{٢}{٣}$

٤) ب = $-\frac{١}{٢}$

٥) أ) ١ ب) س = $-\frac{٥}{٢}$

تمارين ٢-٣

١) أ) ٢س

ب) ٤

ج) ص = ٤س - ٤

٢) أ) ٨ - ٤س

ب) ٨

ج) ص = ٨س + ٦

٣) أ) ص = ٣س + ٥ ب) ص = ٣س - ٤

ج) ص = ٢١ - ٤س د) ص = س - ٣

هـ) ص = ٢- و) ص = ١١س - ٦٨

٤) دالتا الميل متساويتان/ كلتاهما تساويان ٢س/ المنحنيان متوازيان.

٥) أ) من خلال $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = ٢س - ١٢ عند س = ٥

ب) (٠، ٩)

٦) ص = ٧ - س، ص = س + ٤

٧) أ) ٢٩,٩ م

ب) ١) ٣ – ٠,٠٠٢ س

٢) ٢,٩٦ م/ثانية

تمارين ٢-٤

١) أ) ٢٤س – ٦ أو ٦(٤ س – ١)

ب) ٤س + ٥

ج) ٦ – ٤٨ س أو ٦(١ – ٨ س)

د) ٤

هـ) ٥س

و) $-\frac{٩}{٢}$ س^{٢} + ٢٠ س^{٣}

ز) $\frac{٢٠}{\text{س}^{٣}}$

ح) ١٨س + ٢٠ أو ٢(٩س + ١٠)

٢) أ) ٢٦

ب) ٢٣

ج) ١٦

٣) أ) $\frac{١}{٣}$

ب) $-\frac{٤}{٣}$

ج) $\frac{١١}{٣٠}$

٤) أ = ٤٠

٥) أ) أ = $-\frac{١}{٣}$

ب) –١١

٦) أ) ١٢٣م

ب) ١) ٣٠ – ٤س

٢) ١٠ م/ثانية^{٢}

تمارين ٢-٥

١) أ) متزايدة

ب) متناقصة

ج) متناقصة

د) متزايدة

هـ) متزايدة

و) متناقصة

ز) متزايدة

ح) متناقصة

٢) أ) س > –٥

ب) س > ١,١

ج) س > $-\frac{١}{٣}$

د) س > $-\frac{٥}{٦}$

هـ) س > –٢

و) س > $\frac{٧}{١٢}$

٣) س > ٧٥

٤) من خلال ١ – ٢ س > ٠ عند س = ١، س = ٦

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

١) ٥

٢) (٤، ٢٠)

٣) أ = ٥

٤) ص = ٣٦ – ٢٦س

٥) ٠

٦) س = $\frac{١}{٢}$

٧) متزايدة

٨) س > – ٠,٩

إجابات تمارين كتاب النشاط
الوحدة الثانية: التفاضل

تمارين ٢-١

١) أ $-٣س^{-٤}$ ب $٢١س^{٢٠}$

ج $\frac{٣}{٤}س^{-\frac{١}{٤}}$ أو $\frac{٣}{\sqrt[٤]{س^{٥}}}$ د ٠

هـ $\frac{٤\sqrt[٣]{س}}{٣}$ و $\frac{١}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}$ أو $\frac{١}{٢\sqrt{س^{٣}}}$

٢) أ $٨س$ ب $-٣س^{-٢}$ أو $-\frac{٣}{س^{٢}}$

ج $س^{٢}$ د $٢س^{-٢}$ أو $\frac{٢}{س^{٢}}$

هـ $-٥س^{-٣}$ أو $-\frac{٥}{س^{٣}}$

٣) أ $٨س$ ب $٩س^{٢}-٤$

ج $٧-٦س$ د $-٦س^{-٢}$ أو $-\frac{٦}{س^{٢}}$

هـ $٢س-٤$

تمارين ٢-٢

١) أ ٣ ب -٣

ج ٣ د ٠

هـ -٣٢

٢) أ $(٢، ٦)$ ب $(١، ٧)$

ج $\left(\frac{٥}{٣}، -\frac{٢٥}{٣}\right)$ د $(-٢، -١)$

هـ $\left(-\frac{١}{٢}، -٣٠\right)$

٣) ب = ٤

٤) أ = ٢

٥) الميل عند س = ١ يساوي ٠

تمارين ٢-٣

١) أ $٣س^{٢}$

ب ١٢

ج ص = ١٢س − ١٦

٢) أ $-٤-٦س$

ب -١٠

ج ص = ١٣ − ١٠س

٣) أ ص = ٣٦ − ١٢س ب ص = $-٤س-١١$

ج ص = ٣٩ − ٢٦س د ص = $-\frac{٢٣}{١٦}-\frac{١٣}{٢}$ س

٤) أ $(٠، ٤)$

ب ص = ٤

تمارين ٢-٤

١) أ $٣٦س^{٢}-١٢س$

ب $١٠س+٣$

ج ٦

د $١٢س+٤$

٢) أ ١٨

ب -٧٠

ج ٨٢

٣) أ س = -١

ب س = ٦

ج س = $\frac{٤}{٧}$

٤) ل = ٢

٥) أ أ = -١

ب ٩٦

تمارين ٢-٥

١) أ متزايدة
ب متناقصة
ج متناقصة
د متزايدة
هـ متناقصة
و متزايدة

٢) أ $س > \frac{٧}{٢}$
ب $س > -\frac{٣}{٢}$
ج $س > -\frac{١}{٧}$
د $س > \frac{٩}{٢}$
هـ $س > \frac{٣٣}{١٤}$
و $س > \frac{٣}{٤}$

٣) أ $س = ٣$
ب ١) متناقصة
٢) متزايدة

٤) متناقصة

٥) $س > ٦٠$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

١) -٣

٢) $(٢، ١٦)$

٣) $أ = ٢$

٤) $ص = ١٧ - ٩س$

٥) -١٢٠

٦) $س = ٢$

٧) متزايدة

٨) $س > -\frac{٢١}{٤٠}$

الوحدة الثانية: حلول التمارين

التفاضل

تمارين ٢-١

١) أ) $٥ \times س^{-٥-١} = ٥س^{٤}$

ب) $٥ \times ١ = ٥$

ج) $-٤ \times س^{-٤-١} = -٤س^{-٥}$

د) اكتب $\frac{١}{س}$ على الشكل $س^{-١}$

$-١ \times س^{-١-١} = -س^{-٢} = -\frac{١}{س^{٢}}$

هـ) اكتب ٨ على الشكل ٨ $س^{٠}$

$٠ \times ٨ س^{٠-١} = ٠$

و) اكتب $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ على الشكل $س^{\frac{٢}{٣}}$

$\frac{٢}{٣} \times س^{\frac{٢}{٣}-١} = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{\sqrt[٣]{س}}$

ز) اكتب $٢س^{٣} \times ٣س^{٢}$ على الشكل $٦س^{٥}$

$٥ \times ٦س^{٥-١} = ٣٠س^{٤}$

ح) $\frac{١١س^{٥}}{٣س^{٢}}$ على الشكل $\frac{١١}{٣} س^{٣}$

$\frac{١١}{٣} \times ٣ س^{٣-١} = ١١ س^{٢}$

٢) أ) $٢ \times ٤س^{٤-١} = ٨س^{٣}$

ب) $٣ \times ٥ س^{٤} = ١٥س^{٤}$

ج) $\frac{١}{٢} \times ٦س^{٦-١} = ٣س^{٥}$

د) اكتب $\frac{٣}{س}$ على الشكل $٣س^{-١}$

$٣ \times -١ س^{-١-١} = -٣س^{-٢} = -\frac{٣}{س^{٢}}$

هـ) اكتب $\frac{٥}{٣س^{٢}}$ على الشكل $\frac{٥}{٣} س^{-٢٠}$

$\frac{٥}{٣} \times (-٢)س^{-٢-١} = -\frac{١٠}{٣} س^{-٣} = -\frac{١٠}{٣س^{٣}}$

و) اكتب -٢ على الشكل $-٢س^{٠}$

$-٢ \times ٠ س^{٠-١} = ٠$

ز) اكتب $\frac{٤س}{\sqrt[٧]{س}}$ على الشكل $٤س^{١-\frac{١}{٢}} = ٤س^{\frac{١}{٢}}$

$٤ \times \frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}-١} = ٢س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{\sqrt[٧]{س}}$

ح) اكتب $\frac{٢\sqrt[٧]{س}}{٣س^{٢}}$ على الشكل $\frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٢}-٢} = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{٥}{٢}}$

$\frac{٢}{٣} \times \left(-\frac{٣}{٢}\right) س^{-\frac{٣}{٢}-١} = -س^{-\frac{٥}{٢}}$

٣) أ) $\frac{ص}{س} = ٥ \frac{ء}{ء س} (س^{٢}) - \frac{ء}{ء س} (س) + ١ \frac{ء}{ء س} (س^{٠})$

$= ٥ \times ٢س^{٢-١} - ١$

$= ١٠س - ١$

ب) $\frac{ص}{س} = ٢ \frac{ء}{ء س} (س^{٣}) + ٨ \frac{ء}{ء س} (س) + ٤ \frac{ء}{ء س} (س^{٠})$

$= ٢ \times ٣س^{٣-١} + ٨ \times ١س^{١-١}$

$= ٦س^{٢} + ٨$

ج) $\frac{ص}{س} = ٧ \frac{ء}{ء س} (س^{٠}) - ٣ \frac{ء}{ء س} (س) - ٥ \frac{ء}{ء س} (س^{٢})$

$= ٠ - ٣ \times س^{١-١} - ٥ \times ٢س^{٢-١}$

$= -٣ - ١٠س$

د) $ص = س^{٢} + س - ٢٠$

$\frac{ص}{س} = \frac{ء}{ء س} (س^{٢}) + \frac{ء}{ء س} (س) - ٢٠ \frac{ء}{ء س} (س^{٠})$

$= ٢ \times س^{٢-١} + ١س^{١-١} - ٠$

$= ٢س + ١$

هـ ص = ٤س^{٤} − ١٢س^{٢} + ٩

$\frac{ص}{س}$ = ٤ $\frac{ص}{س}$(س^{٤}) − ١٢ $\frac{ص}{س}$(س^{٢}) + ٩ $\frac{ص}{س}$ (س^{٠})

= ٤ × ٤س$^{٤-١}$ − ١٢ × ٢س$^{٢-١}$ + ٠

= ١٦س^{٣} − ٢٤س

و ص = $\frac{٢س-٥}{س}$ = ٢ − $\frac{٥}{س}$ = ٢ − ٥ س$^{-١}$

$\frac{ص}{س}$ = ٢ $\frac{ص}{س}$(س^{٠}) − ٥ $\frac{ص}{س}$ (س$^{-١}$)

= ٠ − ٥ × −١س$^{-١-١}$

= ٥س$^{-٢}$ = $\frac{٥}{س^{٢}}$

ز ص = ٧س^{٢} − ٣س$^{-١}$ + ٢س$^{-٢}$

$\frac{ص}{س}$ = ٧ $\frac{ص}{س}$(س^{٢}) − ٣ $\frac{ص}{س}$(س$^{-١}$) + ٢ $\frac{ص}{س}$(س$^{-٢}$)

= ٧ × ٢س$^{٢-١}$ − ٣ × (−١)س$^{-١-١}$ + ٢ × (−٢)س$^{-٢-١}$

= ١٤س + ٣س$^{-٢}$ − ٤س$^{-٣}$

= ١٤س + $\frac{٣}{س^{٢}}$ − $\frac{٤}{س^{٣}}$

ح ص = ٣س + ٥س$^{-١}$ − $\frac{١}{٢}$س$^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ص}{س}$ = ٣ $\frac{ص}{س}$(س^{١}) + ٥ $\frac{ص}{س}$(س$^{-١}$) − $\frac{١}{٢}$ $\frac{ص}{س}$(س$^{-\frac{١}{٢}}$)

= ٣ × س$^{١-١}$ + ٥ × (−١) س$^{-١-١}$ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}-١}$

= ٣ − ٥س$^{-٢}$ + $\frac{١}{٤}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$

= ٣ − $\frac{٥}{س^{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt[٤]{س^{٣}}}$

ط ص = ٤س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٣س$^{\frac{١}{٢}}$ − ٢س$^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ص}{س}$ = ٤ $\frac{ص}{س}$(س$^{\frac{٣}{٢}}$) + ٣ $\frac{ص}{س}$(س$^{\frac{١}{٢}}$) − ٢ $\frac{ص}{س}$(س$^{-\frac{١}{٢}}$)

= ٤ × $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{٣}{٢}-١}$ + ٣ × $\frac{١}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}-١}$ − ٢ × (−$\frac{١}{٢}$) س$^{-\frac{١}{٢}-١}$

= $\frac{١٢}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ + $\frac{٣}{٢}$س$^{-\frac{١}{٢}}$ + س$^{-\frac{٣}{٢}}$

= ٦$\sqrt{س}$ + $\frac{٣}{٢\sqrt{س}}$ + $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

تمارين ٢-٢

١) أ $\frac{ص}{س}$ = ٤س − ١، عند س = ٢، الميل = ٤ × ٢ − ١ = ٧

ب $\frac{ص}{س}$ = ١٠ − ٤س، عند س = ٣، الميل = ١٠ − ٤ × ٣ = −٢

ج $\frac{ص}{س}$ = س − ٥، عند س = ٣، الميل = ٣ − ٥ = −٢

د $\frac{ص}{س}$ = ٩س^{٢} − ٨ س + ١، عند س = ٠، الميل = ١

هـ $\frac{ص}{س}$ = ١١ + ٦س^{٢}، عند س = −٢، الميل = ١١ + ٦ × (−٢)^{٢} = ٣٥

و $\frac{ص}{س}$ = ٧ + $\frac{١٢}{س^{٢}}$، عند س = ٢، الميل = ٧ + $\frac{١٢}{٤}$ = ١٠

ز $\frac{ص}{س}$ = ٤٥ س^{٨} − ٤٠، عند س = ١، الميل = ٤٥ − ٤٠ = ٥

ح ص = ١٦ س$^{-\frac{١}{٢}}$ + $\frac{١}{٣}$س

$\frac{ص}{س}$ = $-\frac{١}{٢}$ × ١٦ س$^{-\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{١}{٣}$

$= -\frac{٨}{\sqrt{س^{٣}}} + \frac{١}{٣}$

عند س = ٩

الميل = $-\frac{٨}{\sqrt{٩^{٣}}} + \frac{١}{٣} = -\frac{٨}{٢٧} + \frac{١}{٣} = \frac{١}{٢٧}$

٢) أ د′(س) = ٨ − ٢س = −٢ تعطي س = ٥

عندما س = ٥، ص = د(٥) = ٨ × ٥ − ٥^{٢} = ١٥

النقطة هي عند (٥، ١٥)

ب د′(س) = ٤ س + ٥ = ٩ تعطي س = ١

عندما س = ١

ص = د(١) = ٢(١)^{٢} + ٥(١) − ٣ = ٤

النقطة هي عند (١، ٤)

ج د′(س) = ١٢ س − ٤ = ٢٠ تعطي س = ٢

عندما س = ٢

ص = د(٢) = ٦(٢)^{٢} − ٤(٢) + ٧ = ٢٣

النقطة هي عند (٢، ٢٣)

د د′(س) = − = − ٣٢ − ٨س = ٠ تعطي س = −٤

عندما س = −٤

ص = د(−٤) = ١٠ − ٣٢(−٤) − ٤(−٤)^{٢} = ٧٤

النقطة هي عند (−٤، ٧٤)

هـ د(س) = ١٩ − ٣٦ س

د′(س) = $\frac{١}{٢}$ × −٣٦ س$^{-\frac{١}{٢}}$

د′(س) = $-\frac{١٨}{\sqrt{س}}$ = − ٩ تعطي س = ٤

عندما س = ٤، ص = د(٤) = ١٩ − ٣٦ $\sqrt{٤}$ = −٥٣

النقطة هي عند (٤، −٥٣)

و د(س) = ٦س^{٢} − ١٣س + ٦

د′(س) = ١٢س − ١٣ = −٢ تعطي س = $\frac{١١}{١٢}$

عندما س = $\frac{١١}{١٢}$

ص = د$\left(\frac{١١}{١٢}\right)$ = ٦$\left(\frac{١١}{١٢}\right)^{٢}$ − ١٣$\left(\frac{١١}{١٢}\right)$ + ٦ = $-\frac{٧}{٨}$

النقطة هي عند $\left(\frac{١١}{١٢}، -\frac{٧}{٨}\right)$

٣) د′(س) = ٣ أ س^{٢} − ٦س = ٠ حين س = ٣

٣ أ (٣)^{٢} − ٦(٣) = ٠

٢٧ أ = ١٨

أ = $\frac{٢}{٣}$

٤) −٢ + ٨س − ٣ ب س^{٢} = ٢٠ عند النقطة حين س = ٢

−٢ + ٨(٢) − ٣ ب(٢)^{٢} = ٢٠

١٤ − ١٢ ب = ٢٠

ب = $-\frac{١}{٢}$

٥) أ د′(س) = ٢ س^{٢} − س^{٢} − ١٩

حيث س = ٤، د′(٤) = ٢(٤)^{٢} − ٣(٤) − ١٩ = ١

ب ٢س^{٢} − ٣ س − ١٩ = ١

٢س^{٢} − ٣س − ٢٠ = ٠

(س − ٤)(٢س + ٥) = ٠

س = ٤ (معطى)

س = $-\frac{٥}{٢}$

تمارين ٢-٣

١) أ $\frac{ء}{ء س}(س^{٢}) = ٢ س^{٢-١} = ٢ س$

ب $٢ \times ٢ = ٤$

ج ص = ٤س + جـ من خلال (٢، ٤)

جـ = ص − ٤س

$= ٤ - ٤ \times ٢$

$= ٨$

المعادلة هي ص = ٤س − ٤

٢) أ $\frac{ء}{ء س}(٦ + ٨س - ٢س^{٢}) = ٠ + ٨ - ٢ \times ٢ س$

$= ٨ - ٤ س$

ب $٨ - ٤ \times ٠ = ٨$

ج ص = ٨س + جـ من خلال (٠، ٦)

جـ = ص − ٨س

$= ٦ - ٨ \times ٠$

$= ٦$

المعادلة هي ص = ٨س + ٦

٣) أ $\frac{ء ص}{ء س} = ٣ س^{٢}$

عند س = ١، الميل $= ٣ \times ١^{٢} = ٣$

على المنحنى عند س = ١، ص = ١ + ٧ = ٨

ص = ٣س + جـ من خلال (١، ٨)

جـ = ٨ − ٣ × ١ = ٥

المعادلة هي ص = ٣س + ٥

ب $\frac{ء ص}{ء س} = س + ١$

عند س = ٢، الميل = ٢ + ١ = ٣

على المنحنى عند س = ٢،

ص $= \frac{١}{٢} \times ٢^{٢} + ٢ - ٢ = ٢$

ص = ٣س + جـ من خلال (٢، ٢)

جـ = ٢ − ٣ × ٢ = −٤

المعادلة هي ص = ٣س − ٤

ج) $\frac{ص}{س}$ = −٢ − ٢س

عند س = ١، الميل = −٢ − ٢ × ١ = −٤

على المنحنى عند س = ١،

ص = ٢٠ − ٢ × ١ − ٢١ = ١٧

ص = −٤ س + جـ من خلال (١، ١٧)

جـ = ١٧ + ٤ × ١ = ٢١

المعادلة هي ص = ٢١ − ٤س

د) $\frac{ص}{س}$ = ٤س٣ − ٣

عند س = ١، الميل = ٤ (١)٣ − ٣(١) = ١

على المنحنى عند س = ١،

ص = (١)٤ − ٣(١) = −٢

ص = س + جـ من خلال (١، −٢)

جـ = −٢ − ١ = −٣

المعادلة هي ص = س − ٣

هـ) $\frac{ص}{س}$ = − $\frac{١}{س٢}$ + ١

عند س = −١، الميل = − $\frac{١}{(-١)٢}$ + ١ = ٠

على المنحنى عند س = −١،

ص = $\frac{١}{-١}$ + (−١) = −٢

ص = جـ من خلال (−١، −٢)

جـ = − ٢

المعادلة هي ص = −٢

و) ص = ٢ س٢ − ٩س − ١٨

$\frac{ص}{س}$ = ٤ س − ٩

عند س = ٥، الميل = ٤ × ٥ − ٩ = ١١

على المنحنى عند س = ٥،

ص = (٢ × ٥ + ٣)(٥ − ٦) = −١٣

ص = ١١ س + جـ من خلال (٥، −١٣)

جـ = −١٣ − ١١ × ٥ = −٦٨

المعادلة هي ص = ١١س − ٦٨

٤) دالتا الميل هما د′(س) = ٢س، ف′(س) = ٢س

دالتا الميل متساويتان/ كلتاهما تساويان ٢س/ المنحنيان متوازيان.

٥) أ) د′(س) = ٢س − ١٢

د′(٥) = ٢ × ٥ − ١٢ = −٢

ب) معادلة المماس هي ص = −٢س + جـ من خلال (٥، ٨)

جـ = ص + ٢س = ٨ + ٢ × ٥ = ١٨

المعادلة هي ص = −٢س + ١٨

على المحور السيني، ص = ٠

∴ ٠ = −٢ س + ١٨ ∴ س = ٩

يقطع المماس المحور السيني عند (٩، ٠)

٦) $\frac{ك}{س}$ (س٢ − ٣س + ٨) = ٢س − ٣

عند س = ١، الميل = ٢ (١) −٣ = −١

على المنحنى عند س = ١، ص = (١)٢ − ٣(١) + ٨ = ٦

ص = − س + جـ من خلال (١، ٦)

جـ = ٦ + ١ = ٧

معادلة المماس عند س = ١ هي ص = ٧ − س

$\frac{ك}{س}$ (س٢ − ٣س + ٨) = ٢س − ٣

عند س = ٢، الميل = ٢ (٢) − ٣ = ١

على المنحنى عند س = ٢، ص = $(٢)^{٢}$ − ٣(٢) + ٨ = ٦

ص = س + جـ من خلال (٢، ٦)

جـ = ٦ − ٢ = ٤

معادلة المماس عند س = ٢ هي ص = س + ٤

٧) أ) ص = ٣ س − ٠,٠٠١ $س^{٢}$

= ٣ × ١٠ − ٠,٠٠١ × $١٠^{٢}$

= ٣٠ − ٠,١

= ٢٩,٩ م

ب) ١) $\frac{ء}{ء س}$ (٣س − ٠,٠٠١ $س^{٢}$) = ٣ $\frac{ء}{ء س}$(س) − ٠,٠٠١ $\frac{ء}{ء س}$($س^{٢}$)

= ٣ − ٠,٠٠١ × ٢س

= ٣ − ٠,٠٠٢ س

٢) عند س = ٢٠، السرعة = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ − ٠,٠٠٢ × ٢٠ = ٢,٩٦ م/ثانية

تمارين ٢-٤

١) أ $ص = ٤س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٦$

$$\frac{ع ص}{ع س} = ١٢س^{٢} - ٦س - ٩$$

$$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٢٤س - ٦ \text{ أو } ٦(٤س - ١)$$

ب $ص = \frac{٢}{٣} س^{٣} + \frac{٥}{٢} س^{٢} - ١٥$

$$\frac{ع ص}{ع س} = ٢س^{٢} + ٥س$$

$$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٤س + ٥$$

ج $ص = ٢٠ - ٧س + ٣س^{٢} - ٨س^{٣}$

$$\frac{ع ص}{ع س} = -٧ + ٦س - ٢٤س^{٢}$$

$$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٦ - ٤٨س \text{ أو } ٦(١ - ٨س)$$

د $ص = ٢س^{٢} + ٧س - ٣$

$$\frac{ع ص}{ع س} = ٤س + ٧$$

$$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٤$$

هـ $د(س) = \frac{٥}{٦} س^{٣} + ١٧س$

$د'(س) = \frac{٥}{٢} س^{٢} + ١٧$

$د''(س) = ٥س$

و $د(س) = ١ - \frac{٣}{٨} س^{٤} + س^{٥}$

$د'(س) = -\frac{٣}{٢} س^{٣} + ٥س^{٤}$

$د''(س) = -\frac{٩}{٢} س^{٢} + ٢٠س^{٣}$

ز $د(س) = \frac{١٠}{س} = ١٠س^{-١}$

$د'(س) = -١٠س^{-٢}$

$د''(س) = -١٠ \times -٢س^{-٣}$

$$د''(س) = \frac{٢٠}{س^{٣}}$$

ح $د(س) = (٣س^{٢} - ٢س + ٦)(س + ٤)$

$د(س) = ٣س^{٣} + ١٠س^{٢} - ٢س + ٢٤$

$د'(س) = ٩س^{٢} + ٢٠س - ٢$

$د''(س) = ١٨س + ٢٠$

٢) أ $د(٢) = (٢)^{٣} + ٢(٢)^{٢} + ٣(٢) + ٤ = ٢٦$

ب $د'(س) = ٣س^{٢} + ٤س + ٣$

$د'(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٤(٢) + ٣ = ٢٣$

ج $د''(س) = ٦س + ٤$

$د''(٢) = ٦(٢) + ٤ = ١٦$

٣) أ $ص = ٨س^{٣} + ٥س^{٢} - ١٢س + ٢$

$$\frac{ع ص}{ع س} = ٢٤س^{٢} + ١٠س - ١٢$$

$$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٤٨س + ١٠$$

$٤٨س + ١٠ = ٢٦$

$$س = \frac{٢٦ - ١٠}{٤٨} = \frac{١}{٣}$$

ب $د(س) = \frac{٣}{٤} س^{٣} + ٨س^{٢}$

$د'(س) = \frac{٩}{٤} س^{٢} + ١٦س$

$د''(س) = \frac{٩}{٢} س + ١٦$

$د''(س) = ١٠$

$\frac{٩}{٢} س + ١٦ = ١٠$

$$س = \frac{٢}{٩} \times (١٠ - ١٦) = -\frac{٤}{٣}$$

ج $د(س) = ٦س^{٣} - ٣س^{٢} + س$

د′(س) = ١٨س^{٢} − ٦س + ١

د′′(س) = ٣٦س − ٦

ف(س) = ٢س + ٨س^{٢} − ٤س^{٣}

ف′(س) = ٢ + ١٦س − ١٢س^{٢}

ف′′(س) = ١٦ − ٢٤س

د′′(س) = ف′′(س)

٣٦س − ٦ = ١٦ − ٢٤س

٦٠س = ٢٢

س = $\frac{١١}{٣٠}$

٤) ص = ٧س^{٣} − أس^{٢} + ٥س

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢١س^{٢} − ٢أس + ٥

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٤٢س − ٢أ

عند س = ٢، $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٨٤ − ٢أ

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٤

٨٤ − ٢أ = ٤

أ = $\frac{٤ - ٨٤}{-٢}$ = ٤٠

٥) أ) د(س) = ٣٠ − ٢س + ٣س^{٢} − س^{٣}

د′(س) = −٢ + ٦س − ٣س^{٢}

د′′(س) = ٦ − ٦س

د′′(أ) = ٨

٦ − ٦أ = ٨

أ = $\frac{٦ - ٨}{٦}$ = $-\frac{١}{٣}$

ب) ٣أ = ٣ × $-\frac{١}{٣}$ = −١

د′(س) = −٢ + ٦س − ٣س^{٢}

د′(−١) = −٢ + ٦(−١) − ٣(−١)^{٢}

= −٢ − ٦ − ٣

= −١١

٦) أ) ص = ٢(٣) + ١٥(٣)^{٢} − $\frac{٢}{٣}$(٣)^{٣}

= ٦ + ١٣٥ − ١٨

= ١٢٣م

ب) ١) ص = ٢س + ١٥س^{٢} − $\frac{٢}{٣}$س^{٣}

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ + ٣٠س − ٢س^{٢}

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٣٠ − ٤س

٢) عند س = ٥، $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٣٠ − ٤ × ٥

= ١٠ م/ثانية^{٢}

تمارين ٢-٥

١) أ $\frac{ص}{س} = ٢س - ٦$، عدد س = ٤، $\frac{ص}{س} = ٢ > ٠$، متزايدة

ب $\frac{ص}{س} = ٢س - ٨$، عدد س = ٣، $\frac{ص}{س} = -٢ > ٠$، متناقصة

ج $\frac{ص}{س} = -١ - ٢س$، عدد س = ١، $\frac{ص}{س} = -٣ > ٠$، متناقصة

د د′(س) = ٤س + ٥، د′(−١) = ١ > ٠، متزايدة

هـ د′(س) = ٣ − س، عدد د′$(-\frac{١}{٢})$ = $٣\frac{١}{٢} > ٠$، متزايدة

و د(س) = ٤٠ − ١١س − ٢س^{٢}

د′(س) = −١١ − ٤س؛ د′$\left(-\frac{٥}{٢}\right)$ = −١ > ٠، متناقصة

ز د′(س) = ٦س − ١٤

د′(٣) = ٦ × ٣ − ١٤ = ٤ > ٠ ∴ الدالة متزايدة.

عند س = ٩، د′(٩) = ٦ × ٩ − ١٤ = ٤٠ > ٠ ∴ الدالة متزايدة.

معامل س^{٢} موجب ∴ الدالة متزايدة في ٣ ≤ س ≤ ٩

ح د′(س) = − ١٥ − ٦س

د′(−١) = −٩ > ٠ ∴ الدالة متناقصة عند س = −١

د′(٢) = −٢٧ > ٠ ∴ الدالة متناقصة عند س = ٢

معامل س^{٢} سالب ∴ الدالة متناقصة في −١ ≤ س ≤ ٢

٢) أ د′(س) = ٢س + ١٠

٢س + ١٠ > ٠ عندما س > −٥

ب د′(س) = ١٠س −١١

١٠س − ١١ > ٠ عندما س > ١,١

ج د′(س) = $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$

$\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ > ٠ عندما س > $-\frac{١}{٣}$

د د′(س) = − ٢ − $\frac{١٢}{٥}$ س

− ٢ − $\frac{١٢}{٥}$ س > ٠ عندما س < $-\frac{٥}{٦}$

هـ د′(س) = − ١٤ − ٧س

− ١٤ − ٧س > ٠ عندما س < −٢

و د(س) = ٦س^{٢} − ٧س − ٢٠

د′(س) = ١٢س − ٧

١٢س − ٧ < ٠ عندما س < $\frac{٧}{١٢}$

٣) ل′(س) = ٠,٠٠٨ س − ٠,٦

٠,٠٠٨ س − ٠,٦ < ٠ عندما س < ٧٥

٤) د′(س) = ١ − ٢س

د′(١) = −١ < ٠ ∴ د(س) متناقصة عند س = ١

د′(٦) = −١١ < ٠ ∴ د(س) متناقصة عند س = ٦

معامل س^{٢} سالب ∴ الدالة د(س) متناقصة على طول الفترة ١ ≤ س ≤ ٦

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

١) د′(س) = −٨ س − ١١

د′(−٢) = ١٦ − ١١ = ٥

الميل هو ٥

٢) د′(س) = ٩ − ٢س

٩ − ٢س = ١ عند س = ٤

على المنحنى عند س = ٤، ص = ٣٦ − ١٦ = ٢٠

النقطة هي عند (٤، ٢٠)

٣) د′(س) = ٣أس^{٢} + ١٠س + ٢

د′(−١) = ٣أ − ١٠ + ٢

٣أ − ١٠ + ٢ = ٧

أ = ٥

٤) د′(س) = ٢ − ١٤س

د′(س) = ٢ − ١٤ × ٢ = − ٢٦

المعادلة في الصيغة ص = −٢٦س + جـ من خلال

النقطة (٢، −١٦)

جـ = −١٦ + ٢٦ × ٢ = ٣٦

المعادلة هي ص = ٣٦ − ٢٦س

٥) د′(س) = ١٢ − ٦س^{٥} − ١٥س^{٢}

د′′(س) = −٣٠س^{٤} − ٣٠س

د′′(−١) = −٣٠ + ٣٠ = ٠

٦) د′(س) = ٩س^{٢} − ٢س + ٩

د′(س) = ١٨س − ٢

١٨س − ٢ = ٧

س = $\frac{١}{٢}$

٧) د′(س) = −٣ − ٤س

د′(−١) = ١ < ٠؛ متزايدة

٨) د′(س) = − $\frac{٩}{٢}$ − ٥س

− $\frac{٩}{٢}$ − ٥س < ٠ عندما س < − ٠.

الوحدة الثالثة
المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة (المنفصلة)
Discrete random variables

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الأهداف التعليمية	عدد الحصص	مصادر من كتاب الطالب	مصادر أخرى	المفردات
٣-١ المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)	٣-١ يُحدّد ويعرّف المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة.	٦	المثالان ١، ٢ تمارين ٣-١		المتغيّر العشوائي المتقطّع (المنفصل)
٣-٢ التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع	٣-٢ يقرأ المعلومات من جدول توزيع احتمالي متعلّق بحالة معطاة تتضمّن متغيّرًا عشوائيًا متقطعًا (س). ٣-٤ يستخدم ويفسّر جداول التوزيع الاحتمالي المتعلِّقة بحالة معطاة تتضمّن متغيّرًا عشوائيًا متقطعًا (س)، وذلك في أمثلة من الحياة الواقعية.	٧	الأمثلة ٣-٥ تمارين ٣-٢		التوزيع الاحتمالي
٣-٣ القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المتقطع	٣-٣ يحسب التوقّع ت(س) والتباين ع^{٢} (س) لمتغيّر عشوائي متقطع باستخدام: التوقّع = ت(س) = $\sum$ س ل(س) التباين = ع^{٢}(س) = $\sum$ س^{٢} ل(س) − (ت(س))^{٢} ٣-٤ يستخدم ويفسّر جداول التوزيع الاحتمالي المتعلِّقة بحالة معطاة تتضمّن متغيّرًا عشوائيًا متقطعًا (س)، وذلك في أمثلة من الحياة الواقعية.	٨	المثالان ٦، ٧ تمارين ٣-٣	شريحة عرض توضيح إلكتروني ٣-١	القيمة المتوقّعة التباين
تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة		٣			

٣-١ المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة (المنفصلة)

المفردات

المتغيّر العشوائي المتقطّع (المنفصل): هو متغيّر يمكن أن يأخذ مجموعة قيم قابلة للعد ضمن فترة معيّنة (مجال)، وتحدث هذه القيم بشكل عشوائي.

ملاحظات للمعلِّمين

من المهم أن يفهم الطلبة الفرق بين المتغيّر العشوائي المتّصل والمتغيّر العشوائي المتقطع.

توجد عدّة طرق لشرح الاختلافات بينهما، وقد تكون الطريقة الأسهل هي أن نقول إن المتغيّر العشوائي المتقطّع يكون غالبًا قابلًا للعد (عدد الأشخاص، عدد نتائج "صورة"، وهكذا...) ويمكن أن تُتَّخذ مجموعة محدّدة من القيم (قابلة للعد) ضمن مجال معيّن، بينما المتغيّرات العشوائيّة المتّصلة التي يتم عادة قياسها يمكن أن تتخذ عددًا غير محدد من القيم (غير قابلة للعد) ضمن مجال معيّن.

يمكن دائمًا أن تعطى قيم المتغيّر العشوائي المتصل بدرجة عالية من الدقّة، بينما لا يمكن فعل ذلك دائمًا مع المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة.

من أمثلة المتغيّرات العشوائية المتقطِّعة عدد الطلبة في الصفوف في مدرستك، وعدد الإخوة والأخوات لدى الطلبة في صفّك.

ومن أمثلة المتغيّرات العشوائية المتصلة الأوقات التي يستغرقها الطلبة في صفك للذهاب من المنزل إلى المدرسة، وأطوال الطلبة في إلخ...

لاحظ أنه يمكن عدّ قيم المتغيّرات العشوائية المتقطِّعة، ولكن يمكن قياس قيم المتغيّرات العشوائية المتصلة.

قد تأخذ كمية ما، مثل عدد الكراسي الموجودة في فصلك الدراسي، قيمة واحدة فقط، لذلك لا تُعتبر متغيرًا عشوائيًا متقطعًا لأنها قيمة واحدة (قيمة ثابتة).

أفكار للتعليم

إذا فهم الطلبة تعريف المتغيّر العشوائي المتقطّع، فانتقل بهم إلى الحديث عن القيم الممكنة التي قد يتخذها المتغيّر.

اطلب إلى الطلبة أن يعدّدوا مثلًا العدد الممكن لـ:

- أشخاص على دراجة نارية عابرة (١ أو ٢).
- ركاب في سيارة أجرة تتّسع لستّة مقاعد (٠ أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦)
- الذكور في مجموعة تتضمّن ٥ أطفال يكون فيها على الأقل فتاتان (٠ أو ١ أو ٢ أو ٣)

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية واطلب إلى كل طالب أن يكتب قائمة مختلطة من ثلاثة متغيرات عشوائية متقطعة وثلاثة متغيرات عشوائية متصلة. يمكن بعد ذلك أن يتبادل الطالب القائمة مع زميله في المجموعة، فتكون مهمة كل منهما تصنيف المتغيرات إلى النوعَين المختلفَين.

يمكن هنا ملاحظة أنه إذا كانت توجد قيمة واحدة فقط قد يأخذها المتغيّر (مثلًا، عدد أخوات جمال) فلن يتعلّق الموضوع عندئذ بمتغيّر، بل بعدد ثابت.

دعم الطلبة

تجد في موقع:

Khan Academy (https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability/random-variables-stats-library/random-variables-discrete/v/discrete-and-continuous-random-variables)

مقطع فيديو قصير يشرح الفرق بين المتغيّرات العشوائية المتقطِّعة وتلك المتّصلة.

تحدّي الطلبة

يمكنك إعطاء الطلبة قائمة بالقيم المحتملة لبعض المتغيّرات العشوائية المتقطِّعة، والطلب إليهم تقديم الوصف المناسب لكل متغيّر.

على سبيل المثال:

١) س ∋ {١، ٢، ٣، ٦}، الوصف: عامل من عوامل العدد ٦

٢) ص ∋ {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}، الوصف: عدد من الأعداد الأوّلية الأصغر من ٨

٣) ع ∋ {١، ٩، ٢٥، ٤٩، ٨١}، الوصف: عدد من الأعداد المربّعة الفردية الأصغر من ١٠٠

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٣-١

٣-٢ التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع

المفردات

التوزيع الاحتمالي: هو عرض للقيم الممكنة لمتغير عشوائي متقطع واحتمالاتها.

ملاحظات للمعلِّمين

يجب أن يتقن الطلبة قراءة جدول التوزيع الاحتمالي. بحيث يكون الصف الأول لقيم المتغير (نشير إليها بحرف س مثلًا)، والصف الثاني لاحتمالات قيم المتغيّر (س)

كما يجب أن يدرك الطلبة أن مجموع الاحتمالات يساوي ١

فعادة ما يخطئون في ذلك وبالتالي تصبح باقي الإجابات خاطئة إذا لم يتم تصحيح هذا الخطأ.

أفكار للتعليم

قدّم إلى الطلبة أمثلة على التوزيعات الاحتمالية حيث ينقص واحد (أو أكثر من واحد) من الاحتمالات. لإيجاد القيمة الناقصة، يجب أن يكتبوا ويحلوا المعادلة، حيث يكون في كل الحالات مجموع الاحتمالات مساويًا للواحد.

إليك بعض الأمثلة:

و	٢	٣	٤	٥
ل(و)	٠,٢	٠,٣	أ	٠,٤

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	٠,١٢	٠,١٤	١ – ب	٠,١٦	٠,١٨

ص	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠
ل(ص)	$\frac{١}{١٠}$	$\frac{٢}{١٥}$	$\frac{٧}{٦٠}$	$\frac{١}{٢٠}$	$\frac{١}{١٠}$ – ج٢	$\frac{١١}{٦٠}$

ع	٢	٣	٤	٥
ل(ع)	$\frac{د}{٢٤}$	$\frac{د}{٦}$	$\frac{د}{١٢}$	$\frac{د}{٤}$

(إجابات الأسئلة أعلاه: أ = ٠,١، ب = ٠,٦، ج = $\frac{٣١}{١٢٠}$، د = $\frac{٢٤}{١٣}$)

دعم الطلبة

امنح الطلبة، الذين يواجهون صعوبة في حساب الكسور، الفرصة للتدرّب على إيجاد الاحتمالات المفقودة من جدول توزيع الاحتمالات باستخدام مفتاح الكسر في حاسباتهم. قد يكون من المناسب إعطاء أمثلة مشابهة أو أبسط من تلك الموجودة في الجدولين الثالث والرابع السابقين.

تحدّي الطلبة

إذا اعتقدت أن الطلبة قد أتقنوا الحل، يمكن أن تطرح عليهم بعض الأسئلة الإضافية، مماثلة لتلك المطروحة أعلاه، ولكن حيث تكون المعادلة الناتجة تربيعية، عوضًا من خطّية. فسيتضمن هذا أيضًا رفض أحد الحلّين.

إليك بعض الأمثلة:

س	٢	٣	٤	٥
ل(س)	أ	٠,٢٢	أ^{٢}	٠,٢٢

ص	٠	١	٢	٣	٤
ل(ص)	٠,٠٥	ب^{٢}	ب + ١,٠	٢ب + ٠,٠٥	٠,١٦

ع	٠	١	٢	٣	٤
ل(ع)	ج^{٢}	ج٢	$\frac{ج}{٢}$	٣ج − $\frac{٤}{٥}$ (٣ج − ٠,٨)	$\frac{١٣}{٥٠}$

(إجابات الأسئلة أعلاه: أ = ٠,٤، ب = ٠,٢، ج = $\frac{٠,٢}{١٢٠}$)

مصادر أخرى مفيدة

تتيح صفحة الويب (https://nrich.maths.org/4488) للطلبة التحقق من كيفية إعادة تسمية الأقراص الدوارة (سبينير) لإنتاج توزيعات نظرية تكرارية (أو احتمالية) متطابقة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٣-٢

٣-٣ القيمة المتوقّعة والتباين للمتغيّر العشوائي المتقطّع

المفردات

القيمة المتوقعة: هي قيمة الوسط الحسابي للمتغيّر العشوائي المتقطّع، ويُرمز إليها بالرمز ت(س).

التباين: هو قياس لانتشار قيم المتغيّر العشوائي المتقطّع، ويُرمز إليه بالرمز ع^{٢}(س).

ملاحظات للمعلِّمين

سيجد معظم الطلبة هذه الحسابات مباشرة عندما يعرفون العلاقة بين هذه الخطوات من جهة وخطوات الحل من جهة ثانية، لإيجاد الوسط والتباين لتوزيع تكراري مجمّع. وهذا يعزز أهمية استخدام الصيغة $\frac{\sum س^{٢} ك}{\sum ك} - \bar{س}^{٢}$ للتباين كونها الأكثر فاعلية (خلافًا للصيغة $\frac{\sum ك (س - \bar{س})^{٢}}{\sum ك}$).

وفيما يبيّن المثالان ٦، ٧ الحسابات المفصلة والشروح القياسية لها، من الممكن أيضًا (وغالبًا ما يكون أكثر فاعلية) أن توسّع الجدول الأصلي وأن تعمل عليه من خلال كتابة صفوف إضافية لقيم س ل (س)، س^{٢} ل(س) (أو ص ل (ص)، ص^{٢} ل(ص)) ومجموعَيهما بالطريقة نفسها التي اتبعت للجداول التكرارية.

يمكنك استخدام شريحة العرض الإلكتروني ٣-١ لتشرح للطلبة كيفية القيام بالحسابات من خلال توسيع جدول التوزيع الاحتمالي.

إذا استخدمت جدولًا للحسابات في المثال ٧ كالجدول الموسع في المثال ٦، فسيكون على الشكل الآتي:

ص	١	٤	أ = ١٠	١٢	المجموع
ل(ص)	٠,٣	٠,٤	٠,٢	٠,١	١
ص×ل(ص)	٠,٣	١,٦	٢	١,٢	٥,١
ص^{٢}×ل(ص)	٠,٣	٦,٤	٢٠	١٤,٤	٤١,١

ت(ص) = ٥,١ (معطى)

التباين = ٤١,١ - ٥,١^{٢} = ١٥,٠٩

تأكد من فهم الطلبة للقيم التي يستخدمونها في عملية الضرب عند حساب قيم س^{٢} ل (س). يخطئ الطلبة عادة في حساب إما س ل^{٢}(س)، أو (س ل(س))^{٢}

أفكار للتعليم

ذكّر الطلبة بكيفية إيجاد تباين توزيع تكراري. ثم استخدم التوزيع الاحتمالي بالطريقة نفسها، ولكن بدّل ك، $\bar{س}$ بـ ل(س)، ت(س) على الترتيب للحصول على صيغة لتباين متغيّر عشوائي متقطّع.

دعم الطلبة

يمكنك أن تقترح على بعض الطلبة الذين يجدون صعوبة في استخدام الصيغ أن يكملوا حسابات القيمة المتوقعة في التمرينَين ١، ٢ من تمارين ٣-٣، وذلك قبل الانتقال إلى حساب التباين. بطريقة بديلة، أعطهم بعض الأسئلة ليحلوها بحيث تتضمن حساب القيمة المتوقّعة فقط قبل البدء بالتمارين. إليك بعض جداول التوزيع الاحتمالي المناسبة التي يمكن استخدامها:

س	١	٢	٣
ل(س)	٠,٣	٠,٥	٠,٢

ص	٢	٤	٦	٨
ل(ص)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤

ع	٠	٥	١٠	١٥	٢٠
ل(ع)	٠,٤	٠,٢٤	٠,١٦	٠,١٢	٠,٠٨

(إجابات الأسئلة أعلاه: ت(س) = ١,٩، ت(ص) = ٦، ت(ع) = ٦,٢)

تحدّي الطلبة

يعتمد السؤالان ٢ و ٣ الواردان في تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة على مواقف من الحياة الواقعية، والتي تُعدّ تحديًا لمعظم الطلبة.

في التمرين ٣ من تمارين مراجعة نهاية الوحدة يطلب إلى الطلبة، أن يجدوا القيمة المتوقّعة للأرباح على الاستثمار. يتم ذلك عن طريق إيجاد القيمة المتوقّعة للنسبة المئوية للأرباح أولًا (باستخدام البيانات الواردة في الجدول) ثم ضرب الناتج في المبلغ المستثمر:

القيمة المتوقعة للأرباح = القيمة المتوقعة للنسبة المئوية للأرباح × المبلغ المستثمر.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٣-٣

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثالثة

مصادر أخرى مفيدة

إذا احتاج الطلبة إلى المزيد من الشرح، يمكنهم مراجعة العمليات الأساسية في هذه الوحدة، مع أمثلة محلولة مختلفة، في المواقع الثلاثة الآتية:

Expectation and variance (http://www.cambridge.org/links/mctd6882)

Expectation and Variance; Chebyshev's Theorem (http://www.cambridge.org/links/mctd6883)

يتضمن الموقع Random Variables: Mean, Variance and Standard Deviation

(http://www.cambridge.org/links/mctd6879) عددًا من الأمثلة على إيجاد القيمة المتوقعة والتباين لمتغير عشوائي متقطع، إضافة إلى اختبار متعدد الخيارات، مع أجوبته المحلولة، في أسفل الصفحة.

القيمة المتوقعة و التباين

شريحة عرض توضيح إلكتروني ٣-١

كيف تحسب

القيمة المتوقعة و التباين

باستخدام

جدول التوزيع الاحتمالي

إليك جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع (س).

س	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
ل (س)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٢٥	٠,١٥	١

س ∋ {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}، ∑ ل(س) = ١

حساب ت (س)

لإيجاد ت (س):

- نضرب كل قيمة للمتغيّر (س) في قيمة احتمالها .
- نجمع النتائج.

نكتب في الجدول صفًا جديدًا لقيم س ل (س)

حساب ت (س)

س	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
ل (س)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٢٥	٠,١٥	$\sum$ ل (س) = ١
س ل (س)	= ٠,١ X ٤ ٠,٤	= ٠,٢ X ٥ ١,٠	= ٠,٣ X ٦ ١,٨	= ٠,٢٥ X ٧ ١,٧٥	= ٠,١٥ X ٨ ١,٢	$\sum$ س ل (س) = ٦,١٥

ت (س) = $\sum$ س ل (س) = ٦,١٥

حساب ع^{٢}(س)

لإيجاد ع^{٢}(س):

- نضرب مربع كل قيمة للمتغيّر (س) في قيمة احتمال تلك القيمة للمتغيّر (س).
- نضيف في الجدول صفًا جديدًا لقيم س^{٢} ل (س)
- نجمع النتائج.
- نطرح مربع ت (س) من ناتج جمع قيم (س^{٢} ل (س))

حساب ع^{٢}(س)

س	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
ل (س)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٢٥	٠,١٥	١
س ل (س)	٠,٤	١,٠	١,٨	١,٧٥	١,٢	٦,١٥
س^{٢} ل (س)	= ٠,١ x ٤^{٢} ١,٦	= ٠,٢ x ٥^{٢} ٥,٠	= ٠,٣ x ٦^{٢} ١٠,٨	= ٠,٢٥ x ٧^{٢} ١٢,٢٥	= ٠,١٥ x ٨^{٢} ٩,٦	٣٩,٢٥

حساب ع^{٢}(س)

لإيجاد ع^{٢}(س)، نحتاج إلى أن نجد قيمتَي:

$$\Sigma س^{٢} ل(س) = ٣٩,٢٥ ،\ ت(س) = \Sigma س ل(س) = ٦,١٥$$

$$ع^{٢}(س) = \Sigma س^{٢} ل(س) - (ت(س))^{٢}$$

$$= ٣٩,٢٥ - ٦,١٥^{٢}$$

$$= ١,٤٢٧٥$$

ع(س)

يساوي الانحراف المعياري، ع(س)، جذر التباين:

$$ع(س) = \sqrt{ع^{٢}(س)}$$

$$= \sqrt{١,٤٢٧٥}$$

= ١,١٩ (إلى أقرب منزلتين عشريتين)

إجابات تمارين كتاب الطالب
الوحدة الثالثة: المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة (المنفصلة)

إجابات معرفة قبلية

١) ٣٠

٢) $\frac{١}{٣٦}$

٣) أ

الاختيار الأوّل			
	ح	ز	ز
ح	✕	زح	زح
ز	حز	✕	زز
ز	حز	زز	✕

الاختيار الثاني

ب $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

تمارين ٣-١

١) أ ١) ١٤ ٢) ٦

ب س ∈ {٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤}

ج ١٠

٢) أ ج ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

ب ١) ٤ (ف ∈ {٠، ١، ٢، ٣})

٢) ٣ (ب ∈ {٠، ١، ٢})

٣) أ خ ∈ {٠، ١، ٢}

ب خ' ∈ {٢، ٣، ٤}

٤) ن = ٦

٥) أ ١) مثلًا: ١، ١، ١ (أي الخيارات التي تعطي مجموعًا أكبر من الضرب).

٢) ١، ٢، ٣.

٣) مثلًا: ٣، ٣، ٣ (أي الخيارات التي تعطي مجموعًا أصغر من الضرب).

ب ١) ٢٤

٢) ٨

٦) أ و ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

ب ١) م ∈ {٠، ١} لا يتغيّر

٢) ج ∈ {٠، ١، ٢، ٣} يتغيّر إلى ج ∈ {٠، ١، ٢}

٧) أ عدد أطوال الأشجار الممكنة غير قابل للعد / المتغيّر متصل وليس متقطعًا.

ب توجد قيمة واحدة ممكنة فقط، إذًا عدد البطاقات ليس متغيِّرًا (إنّه عدد ثابت).

تمارين ٣-٢

١) أ ٠,٥ ب ٠,٨

ج ٠,٧ د ٠,٩

هـ ٠

٢) أ ج = ٠,٠٦

ب ١) ٠,٢٤

٢) ٠,٣٩

ج ٠,٧٢

٣) أ من خلال $\sum$ ل(ص) = ١ ($\frac{٩}{٢٠}$ + $\frac{أ}{٢٠}$ + أ = ١)

ب $\frac{١٣٧}{٤٢٠}$

٤) أ $\frac{٢}{٢١}$

ب $\frac{١٩}{٢١}$

تمارين ٣-٣

١) أ) ت(س) = ٢,١

ب) ع^{٢}(س) = ٠,٩٣

٢) أ) ل = ٠,٢

ب) ت(ص) = ١,٨٤

ج) ع^{٢}(س) = ٠,٨٩٤٤

د) ع(ص) = ٠,٩٤٦

٣) أ) ت(ز) = ٥ ب) ع^{٢}(ز) = ١١,٥

٤) أ) م = ١٦ ب) ع^{٢}(و) = ٣١,٣٩٥٦

٥) أ) ب = ١١

ب) ع^{٢}(غ) = ٧٩,٨

٦) أ) من خلال ضرب القيم ١٠، ٢٠، ٧٠، ١٠٠ في احتمالاتها ٠,٠٥، ٠,١، ٠,٣٥، ٠,٥

ب) ع^{٢}(ر) = ٨٣١

٧) أ) ٣٨٠٠ ريال عُماني.

ب) ١١٧٥٦٠٠٠ ريال عُماني

٨) أ)

الدورة الأولى / الدورة الثانية	+	٢	٣	٥	٦
	٢	٤	٥	٧	٨
	٣	٥	٦	٨	٩
	٥	٧	٨	١٠	١١
	٦	٨	٩	١١	١٢

ب)

ت	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(ت)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

ج) ١) ٢٥٠

٢) ١٨٧ أو ١٨٨

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) أ) ك = $\frac{٩}{١٤}$

ب) ت(س) = $\frac{٣٣}{١٤}$

٢) أ) ٢,٤٤

ب) ع^{٢}(أ) = ٠,٨٨٦٤

٣) ٦٦٧٥ ريال عُماني.

٤) أ) أ = ٢

ب) ع^{٢}(س) = $\frac{٢٨}{٩}$ أو ٣ $\frac{١}{٩}$

٥) أ) لأنه تمّ اختيار مجموعة ٣ أقراص فيديو

ب) ١) ع^{٢}(م) = ٠,٣٦

٢) ع^{٢}(د) = ٠,٣٦

ج) ع^{٢} (م) = ع^{٢} (د)

إجابات تمارين كتاب النشاط
الوحدة الثالثة: المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة (المنفصلة)

تمارين ٣-١

١) أ) ١) ٨

٢) ٤

ب) م ∈ {٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

ج) ٦

٢) أ) هـ ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

ب) ز عدد مرات ظهور "كتابة".

٣) أ) س ∈ {١، ٢، ٣}

ب) ص ∈ {٠، ١، ٢}

٤) أ) خمسة، س ∈ {٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}

ب) لا يوجد عدد متساوٍ من الطرق للحصول على كل قيمة للمتغير (س).

٥) أ) ١) (١، ١)

٢) (٣، ٣)

٣) (٤، ٥)

ب) ١) ٢٥

٢) ١٠

تمارين ٣-٢

١) أ) ٠,٧

ب) ٠,٦٦

ج) ٠,٧٨

د) ٠

هـ) ١

٢) أ) أ = ٠,٠٩

ب) ١) ٠,٣٦

٢) ٠,٣٧

ج) ٠,٦٦

٣) أ) ب = $\frac{٥٠}{٧}$

ب) $\frac{٩}{٢٠}$ = ٠,٤٥

٤) أ)

الدورة الأولى

+	٢	٣	٤	٥
٢	٤	٥	٦	٧
٣	٥	٦	٧	٨
٤	٦	٧	٨	٩
٥	٧	٨	٩	١٠

الدورة الثانية

ب) ١) $\frac{٥}{١٦}$

٢) $\frac{٦}{١٦}$ = $\frac{٣}{٨}$

تمارين ٣-٣

١) أ) أ = ٠,٠١

ب) ١) ت(ص) = ٧,٧

٢) ع^{٢}(ص) = ١,٦٥

٢) أ) ب = ٨

ب) ع^{٢}(ق) = ٦٠,٠٤

ج) ع(ق) = ٧,٧٥

٣) أ) ت(ر) = ٥,٥ ب) ع^{٢}(ر) = ٢,٢٥

٤) أ

النرد الثاني \ النرد الأوّل	١	٢	٣	٤	٥	٦
العامل المشترك الأكبر						
١	١	١	١	١	١	١
٢	١	٢	١	٢	١	٢
٣	١	١	٣	١	١	٣
٤	١	٢	١	٤	١	٢
٥	١	١	١	١	٥	١
٦	١	٢	٣	٢	١	٦

ب ١) ت (س) = $\frac{٦١}{٣٦}$

٢) $\frac{١٣}{٣٦}$

ج ع^{٢} (س) = ١,٤٣

٥) أ ٠,٨٠٧

ب ٠,٣١٥

ج من خلال ع^{٢} (س) = ٠,٦٩٥ – ٠,٣١٥^{٢}

= ٠,٥٩٥٧٧٥

ع(س) = $\sqrt{٠,٥٩٥٧٧٥}$ ≈ ٠,٧٧

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) أ ت(س) = ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٢ + ٣ × ٠,٣ + ٤ × ٠,٤ + ٥ × ٠,٤ = ٤

ب ع^{٢}(س) = ١

٢) أ ق = ٢٤

ب ١٣١٤,٤

٣) ٠,١٤٢ × ٤٠٠٠٠ ÷ ٥ = ١١٣٦ ريال عُماني.

الوحدة الثالثة: حلول التمارين
المتغيّرات العشوائيّة المتقطّعة (المنفصلة)

تمارين ٣-١

١)

الدورة الأولى / الدورة الثانية	+	٣	٤	٦	٧
	٣	٦	٧	٩	١٠
	٤	٧	٨	١٠	١١
	٦	٩	١٠	١٢	١٣
	٧	١٠	١١	١٣	١٤

أ) ١) ١٤ ٢) ٦

ب) س ∈ {٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤}

ج) ١٠

٢) أ) عدد الأولاد الذين يكملون السباق في ذلك الوقت هو ٠ إلى ٥: ج ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

ب) ١) عدد الأولاد من الصف العاشر الذين يكملون السباق في ذلك الوقت هو ٠ إلى ٣:

ف ∈ {٠، ١، ٢، ٣}، إذًا توجد ٤ قيم ممكنة لـ (ف).

٢) عدد الأولاد من الصف التاسع الذين يكملون السباق في ذلك الوقت هو ٠ إلى ٢:

ب ∈ {٠، ١، ٢}، ∴ توجد ٣ قيم ممكنة لـ (ب).

٣) أ) يمكن أن يكون عدد حبات التفاح الخضراء المختارة من ٠ إلى ٢، ∴ خ ∈ {٠، ١، ٢}

ب) توجد حبتان من التفاح الأخضر فقط، ∴ توجد على الأقل حبتان من التفاح غير الأخضر يجب اختيارهما، إذًا خ' ∈ {٢، ٣، ٤}

٤) أكبر القيم ٥ وأصغرها ١ ∴ ن = ٥ + ١ = ٦

٥) أ)

نواتج الأسهم الثلاثة (بأي ترتيب)	مجموع النواتج س	حاصل ضرب النواتج ص	يناسب إجابة الجزئية:
١، ١، ١	٣	١	١
١، ١، ٢	٤	٢	١
١، ١، ٣	٥	٣	١
١، ٢، ٢	٥	٤	١
١، ٢، ٣	٦	٦	٢
١، ٣، ٣	٧	٩	٣
٢، ٢، ٢	٦	٨	٣
٢، ٢، ٣	٧	١٢	٣
٢، ٣، ٣	٨	١٨	٣
٣، ٣، ٣	٩	٢٧	٣

ب) ١) (٣ × ٣ × ٣) − (١ + ١ + ١) = ٢٧ − ٣ = ٢٤

٢) (٣ + ٣ + ٣) − (١ × ١ × ١) = ٩ − ٣ = ٨

٦) أ) يمكن اختيار حتى ٤ نساء، ∴ و ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

ب) ١) لا يوجد تغيير؛ توجد مقاعد تكفي لرجل واحد على الأكثر؛ م ∈ {٠، ١}

٢) توجد الآن أماكن كافية فقط لولدَين على الأكثر؛

ج ∈ {٠، ١، ٢، ٣} يتغيّر إلى ج ∈ {٠، ١، ٢}

٧) أ) عدد أطوال الأشجار الممكنة غير قابل للعد (لأنه يجب قياسها) / المتغيّر متصل وليس متقطعًا.

ب) هذا ليس متغيرًا / إنه ثابت وله قيمة واحدة ممكنة فقط.

تمارين ٣-٢

١) أ ل(س > ٣) = ل(١) + ل(٢) = ٠,٢ + ٠,٣ = ٠,٥

ب ل(س ≤ ٢) = ل(٢) + ل(٣) + ل(٤) = ٠,٣ + ٠,٤ + ٠,١ = ٠,٨

ج ل(س ≠ ٢) = ١ − ل(٢) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

د ل(١ ≤ س > ٤) = ل(١) + ل(٢) + ل(٣) = ٠,٢ + ٠,٣ + ٠,٤ = ٠,٩

هـ ل(س > ٤) = ٠

٢) أ ج + ج + ٠,١٢ + ٢ج − ٠,٠٨ + ٠,٣٥ + ٠,١٨ + ٣ج + ٠,٠١ = ١

٧ج + ٠,٥٨ = ١

$$ج = \frac{١ - ٠,٥٨}{٧}$$

= ٠,٠٦

ب ١) ل(ع ≤ ١) = ج + ج + ٠,١٢

= ٢ج + ٠,١٢

= ٠,١٢ + ٠,١٢

= ٠,٢٤

٢) ل(١ ≤ ع ≤ ٣) = ٢ج − ٠,٠٨ + ٠,٣٥

= ٢ج + ٠,٢٧

= ٠,١٢ + ٠,٢٧

= ٠,٣٩

ج ل(فردي) = ج + ٠,١٢ + ٠,٣٥ + ٣ج + ٠,٠١

= ٤ج + ٠,٤٨

= ٠,٢٤ + ٠,٤٨

= ٠,٧٢

٣)

ص	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(ص)	$\frac{١}{٢٠}$	$\frac{٣}{٢٠}$	$\frac{٥}{٢٠}$	$\frac{أ}{٢٠}$	$\frac{١}{٢٠}$ أ −	$\frac{١}{٢٠}$

أ) $\frac{١}{٢٠} + \frac{٣}{٢٠} + \frac{٥}{٢٠} + \frac{أ}{٢٠} + أ - \frac{١}{٢٠} = ١$

$\frac{٩}{٢٠} + \frac{أ}{٢٠} + أ = ١$

$\frac{٩ + أ + ٢٠أ}{٢٠} = ١$

$٢٠ = ٩ + ٢١أ$

$أ = \frac{٢٠ - ٩}{٢١} = \frac{١١}{٢٠}$

ب) ل(أولي) = ل(٢) + ل(٣) + ل(٥)

$= \frac{١}{٢٠} + \frac{أ}{٢٠} + \frac{٥}{٢٠}$

$= \frac{٦}{٢٠} + \frac{١١}{٢١}$

$= \frac{٦}{٢٠} + \frac{١١}{٤٢٠}$

$= \frac{١٣٧}{٤٢٠}$

٤) أ) $\frac{٣}{٧} + \frac{١٠}{٢١} + أ = ١$ يعطي $أ = \frac{٢}{٢١}$

ب) $\frac{٣}{٧} + \frac{١٠}{٢١} = \frac{١٩}{٢١}$

تمارين ٣-٣

١) أ) ت(س) = (٠ × ٠,١) + (١ × ٠,١٢) + (٢ × ٠,٣٦) + (٣ × ٠,٤٢)

= ٠ + ٠,١٢ + ٠,٧٢ + ١,٢٦

= ٢,١

ب) ع^{٢}(س) = (٠^{٢} × ٠,١) + (١^{٢} × ٠,١٢) + (٢^{٢} × ٠,٣٦) + (٣^{٢} × ٠,٤٢) − ٢,١^{٢}

= ٠ + ٠,١٢ + ١,٤٤ − ٣,٧٨ − ٤,٤١

= ٠,٩٣

٢) أ) $٠,٠٣ + ٢ل + ٠,٣٢ + ل + ٠,٠٥ = ١$

$٣ل + ٠,٤ = ١$

$ل = \frac{١ - ٠,٤}{٣}$

$= ٠,٢$

ب) $ت(ص) = (٠ \times ٠,٠٣) + (١ \times ٠,٤) + (٢ \times ٠,٣٢) + (٣ \times ٠,٢) + (٤ \times ٠,٠٥)$

$= ١,٨٤$

ج) $ع^{٢}(ص) = (^{٢}٠ \times ٠,٠٣) + (^{٢}١ \times ٠,٤) + (^{٢}٢ \times ٠,٣٢) + (^{٢}٣ \times ٠,٢) + (^{٢}٤ \times ٠,٠٥) - ^{٢}١,٨٤ = ٤,٢٨ - ٣,٣٨٥٦ = ٠,٨٩٤٤$

د) $ع(ص) = \sqrt{٠,٨٩٤٤} = ٠,٩٤٦$

٣) أ) لكل قيم (ز) الاحتمال نفسه وهو ٠,٢٥

$ت(ز) = (١ \times ٠,٢٥) + (٣ \times ٠,٢٥) + (٦ \times ٠,٢٥) + (١٠ \times ٠,٢٥)$

$= (١ + ٣ + ٦ + ١٠) \times ٠,٢٥$

$= ٢٠ \times ٠,٢٥$

$= ٥$

ب) $ع^{٢}(ز) = (^{٢}١ + ^{٢}٣ + ^{٢}٦ + ^{٢}١٠) \times ٠,٢٥ - ^{٢}٥$

$= ١٤٦ \times ٠,٢٥ - ٢٥$

$= ١١,٥$

٤) أ) $(١ \times ٠,٤) + (٣ \times ٠,٢٨) + (٦ \times ٠,١٤) + ٠,١٨ م = ٥,٣٨$

$٢,٥ + ٠,١٨ م = ٥,٣٨$

$م = \frac{٥,٣٨ - ٢,٥}{٠,١٨} = ١٦$

ب) $ع^{٢}(ص) = (^{٢}١ \times ٠,٤) + (^{٢}٣ \times ٠,٢٨) + (^{٢}٦ \times ٠,١٤) + (^{٢}١٦ \times ٠,١٨) - ^{٢}٥,٣٨$

$= ٦٠,٣٤ - ٢٨,٩٤٤٤$

$= ٣١,٣٩٥٦$

٥) أ) $(٢ \times ٠,٣) + (٧ \times ٠,٣) + ٠,١ ب + (٢٤ \times ٠,٣) = ب$

$٠,١ ب + ٩,٩ = ب$

$٠,٩ ب = ٩,٩$

$ب = ١١$

ب) $ع^{٢}(غ) = (^{٢}٢ \times ٠,٣) + (^{٢}٧ \times ٠,٣) + (^{٢}١١ \times ٠,١) + (^{٢}٢٤ \times ٠,٣) - ^{٢}١١$

$= ٢٠٠,٨ - ١٢١$

$= ٧٩,٨$

٦) أ) $ت(ر) = ١٠ \times \frac{١٠}{٢٠٠} + ٢٠ \times \frac{٢٠}{٢٠٠} + ٧٠ \times \frac{٧٠}{٢٠٠} + ١٠٠ \times \frac{١٠٠}{٢٠٠}$

$= ٠,٥ + ٢ + ٢٤,٥ + ٥٠$

$= ٧٧$

ب) $ع^{٢}(ر) = ١٠^{٢} \times \frac{١٠}{٢٠٠} + ٢٠^{٢} \times \frac{٢٠}{٢٠٠} + ٧٠^{٢} \times \frac{٧٠}{٢٠٠} + ١٠٠^{٢} \times \frac{١٠٠}{٢٠٠} - ٧٧^{٢}$

$= ٥ + ٤٠ + ١٧١٥ + ٥٠٠٠ - ٥٩٢٩$

$= ٨٣١$

٧) أ) ت(الأرباح) $= (-١٠٠٠٠ \times ٠,٢٤) + (٠ \times ٠,٣٣) + (١٠٠٠٠ \times ٠,٢٨) + (٢٠٠٠٠ \times ٠,١١) + (٣٠٠٠٠ \times ٠,٠٤) = ٣٨٠٠$ ريال عُماني.

ب) $ع^{٢}$(الأرباح) $= [(-١٠٠٠٠)^{٢} \times ٠,٢٤] + (٠^{٢} \times ٠,٣٣) + (١٠٠٠٠^{٢} \times ٠,٢٨) + (٢٠٠٠٠^{٢} \times ٠,١١) + (٣٠٠٠٠^{٢} \times ٠,٠٤) - ٣٨٠٠^{٢}$

$= ١٣٢٠٠٠٠٠٠ - ١٤٤٤٠٠٠٠$

$= ١١٧٥٦٠٠٠٠$ ريال عُماني

٨) أ)

الدورة الأولى

+	٢	٣	٥	٦
٢	٤	٥	٧	٨
٣	٥	٦	٨	٩
٥	٧	٨	١٠	١١
٦	٨	٩	١١	١٢

الدورة الثانية

ب) من مخطط الأحتمال نلاحظ أن المجموع (٧) ، (٩) ظهر مرتين لكل منهما

$\therefore$ ل (٧) = ل (٩) = $\frac{٢}{١٦}$

ت	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(ت)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

ج) ١) ل(٨) $\times$ ١٠٠٠ = $\frac{٤}{١٦} \times$ ١٠٠٠ = ٢٥٠

٢) [ل(١١) + ل(١٢)] $\times$ ١٠٠٠ = $\left(\frac{١}{١٦} + \frac{٢}{١٦}\right) \times$ ١٠٠٠ = $\frac{٣}{١٦} \times$ ١٠٠٠ = ١٨٧,٥

العدد المتوقع هو ١٨٧ أو ١٨٨

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) أ) $١ - ك + ٢ - ٣ك + ٣ - ٤ك + ٤ - ٦ك = ١$

$١٠ - ١٤ك = ١$

$ك = \frac{١ - ١٠}{١٤}$

$= \frac{٩}{١٤}$

ب) $ت(س) = ١ \times \frac{٥}{١٤} + ٢ \times \frac{١}{١٤} + ٣ \times \frac{٣}{٧} + ٤ \times \frac{١}{٧} = \frac{٣٣}{١٤} = ٢\frac{٥}{١٤}$

٢) أ) $ت(أ) = (٠ \times ٠,٠٤) + (١ \times ٠,٠٨) + (٢ \times ٠,٤) + (٣ \times ٠,٣٦) + (٤ \times ٠,١٢)$

$= ٢,٤٤$

ب) $ع^{٢}(أ) = (٠^{٢} \times ٠,٠٤) + (١^{٢} \times ٠,٠٨) + (٢^{٢} \times ٠,٤) + (٣^{٢} \times ٠,٣٦) + (٤^{٢} \times ٠,١٢) - ٢,٤٤^{٢}$

$= ٦,٨٤ - ٥,٩٥٣٦$

$= ٠,٨٨٦٤$

٣) $ت(٪) = (١ \times ٠,٠٥) + (٥ \times ٠,١) + (١٠ \times ٠,٥) + (١٥ \times ٠,٢) + (٢٠ \times ٠,٠٥) + (٤٠ \times ٠,٠٣) + (٤٥ \times ٠,٠٢) + (٥٠ \times ٠,٠١)$

$= ١٣,٣٥$

١٣,٣٥٪ من ٥٠٠٠٠ = ٦٦٧٥ ريال عُماني.

٤) أ) يجب أن يكون مجموع مقامات الكسور في الجدول حتى ٩

وبالتالي $١ + ٣ + أ + ١ + أ = ٩$، الأمر الذي يعطي $أ = ٢$

ب) $ع^{٢}(س) = ٠^{٢} \times \frac{١}{٩} + ١^{٢} \times \frac{٣}{٩} + ٢^{٢} \times \frac{٢}{٩} + ٤^{٢} \times \frac{١}{٩} + ٥^{٢} \times \frac{٢}{٩} - [٠ \times \frac{١}{٩} + ١ \times \frac{٣}{٩} + ٢ \times \frac{٢}{٩} + ٤ \times \frac{١}{٩} + ٥ \times \frac{٢}{٩}]^{٢}$

$= \frac{٧٧}{٩} - (\frac{٢١}{٩})^{٢}$

$= \frac{٢٨}{٩} = ٣\frac{١}{٩}$

٥) أ) تمّ اختيار ٣ أقراص، إذًا فالمجموع المتوقّع لعدد الأفلام والوثائقيات هو ٣

ب) ١) $ت(م) = ١ \times ٠,٣ + ٢ \times ٠,٦ + ٣ \times ٠,١ = ١,٨$

$ع^{٢}(م) = ١^{٢} \times ٠,٣ + ٢^{٢} \times ٠,٦ + ٣^{٢} \times ٠,١ - ١,٨^{٢} = ٠,٣٦$

٢) $ت(د) = ٠ \times ٠,١ + ١ \times ٠,٦ + ٢ \times ٠,٣ = ١,٢$

$ع^{٢}(د) = ٠^{٢} \times ٠,١ + ١^{٢} \times ٠,٦ + ٢^{٢} \times ٠,٣ - ١,٢^{٢} = ٠,٣٦$

ج) $ع^{٢}(م) = ع^{٢}(د)$

تم بحمد الله

الرياضيات الأساسية

دليل المعلّم

الصف الثاني عشر

يتوافر في دليل المعلم الدعم لتخطيط الدروس وتقديمها بأسلوب واضح، تغني المعلمين عن بذل الوقت والجهد في تحضير لدروس والإجابة عن المسائل المطروحة في كتاب الطالب.

من ميزات دليل المعلم أنه يقدّم:

- أفكارًا وإرشادات داعمة لكل وحدة، بما في ذلك شرائح باوربوينت PowerPoint لعرضها أمام طلبة الصف.
- توجيهات حول كيفية مساعدة الطلبة على التقدم في الموضوعات.
- إجابات عن جميع الأسئلة والتمارين الواردة في كتاب الطالب وكتاب الأنشطة.

يشمل منهج الرياضيات للصف الثاني عشر من هذه السلسة أيضًا:

- كتاب الطالب
- كتاب النشاط

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om