سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040

بثقة نتقدم
Moving Forward with Confidence

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

دليل المعلّم

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

دليل المعلّم

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف الحادي عشر – من سلسلة
كامبريدج Cambridge AS & International A Level Pure Mathematics 1 –
للمؤلف سو بمبرتن، و Mathematics 1 و Probability & Statistics 1 للمؤلف دين
تشارلمز و Cambridge International AS & A Level Further Mathematics
للمؤلفين لي ماكلفي و مارتين كروزير.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.
لا تتحمَّل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه وفرة المواقع الإلكترونية
المستخدمة في هذا الكتاب ومصداقيتها، ولا تؤكِّد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق
وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمَّت مواءمة الكتاب

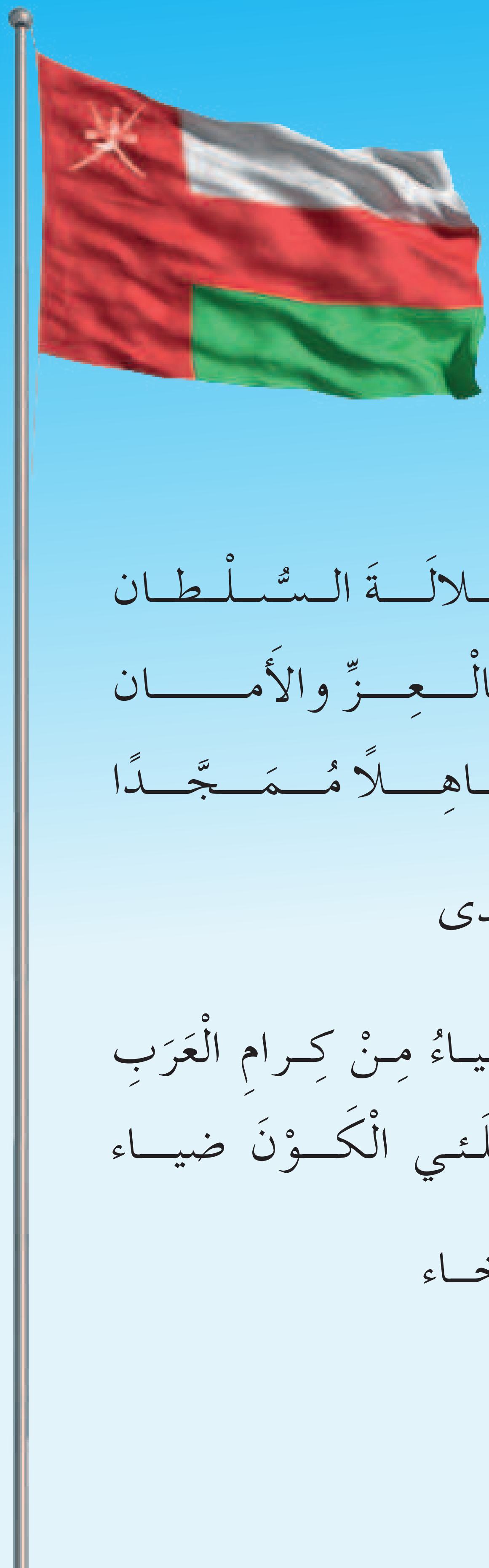
بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
-طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم
-حفظه اللّه ورعاه-

سلطنـــــة عُمـــــان

(المحافظات والولايات)



النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا   جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان   بِالْعِزِّ والأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا   عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي   أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء   وَامْلَئي الْكَوْنَ ضياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المُقدِّمة

صُمّم هذا الدليل ليساعد المعلمين على استخدام المواد التعليمية لتدريس منهج الرياضيات الأساسية للصف الحادي عشر.

اعتمدنا في إعداد هذا الدليل على مصادر عالية الجودة لتشجيع الطلبة على التعلم الطرائق المعتمدة أبحاث التدريس العلمية، ولمساعدتهم على تطوير فهم عميق للموضوع. تعدّ مهارة التواصل رياضيًا مهمة ليس فقط لهدف تعلم المادة، ولكن لمساعدة الطلبة على تطوير المهارات التي يحتاجون إليها للتعاون، والتفكير والتحليل، واتخاذ القرارات المناسبة في بيئة العمل وفي مناحي الحياة المختلفة.

في هذا الدليل نناقش كل موضوع، نقترح مصادر للتعلم، ونبحث في كيفية دعم بعض الطلبة وتحدي آخرين.

في الواقع أنت تعرف الطلبة الذين ترافقهم حقّ المعرفة، لذا فإنه يمكنك وضع مخطط التدريس الخاص بك باختيار المناسب ممّا نقدمه لك في هذا الدليل، أو من مصادرك الخاصة.

لقد وضعنا في هذا الدليل شروحات وتوجيهات وكثيرًا من الأفكار العملية لكيفية استخدام مصادرإضافية في غرفة الصف. كما أننا سلطنا الضوء على أمثلة، وأسئلة وتمارين وأنشطة 'استكشف'، الموجودة في كتاب الطالب فضلًا عن الملاحظات المدوّنة لكيفية استخدامها في معالجة سوء الفهم وأخطاء شائعة معينة.

تتضمن كل وحدة من وحدات الدليل شرائح عرض إلكتروني (باوربوينت) يمكنك أن تستخدمها كما هي أو تعدلها لإدارة المناقشة الصفية. بعض هذه الشرائح مبني على أمثلة من كتاب الطالب، وبعضها الآخرمكمل لها. في بعض الوحدات تتوافر مصادر إضافية مثل بطاقات الفرز أو "أوراق ملء الفراغ" وغيرها. يمكنك أن توائم هذه الأنشطة لتستخدمها في موضوعات أخرى.

هدفنا أن تعمد هذه المصادر إلى توفير الوقت، وأن ترسّخ معرفتك في هذا الدليل، وتعزّز الثقة في قدراتك لتزوّد الطلبة بأفضل الخبرات.

نأمل أن يحقق هذا الدليل لك وللطلبة المزيد من المنفعة والاستمتاع.

الوحدة الأولى
المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

مُخطَّط توزيع الحصص

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
١-١	الإكمال إلى مربّع	٢	١-١ يكتب المعادلة التربيعية ص = أس^{٢} + ب س + جـ (حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ $\neq$ ٠) بصيغة الإكمال إلى مربّع.	الإكمال إلى مربع
١-٢	التمثيل البياني للدالة التربيعية	٢	١-٢ يستخدم صيغة الإكمال إلى مربّع ليحدّد رأس المنحنى التربيعي، ويعرف ما إذا كانت القيمة عظمى أو صغرى.	نقطة القيمة الصغرى، نقطة القيمة العظمى، نقطة الثبات، نقطة التحول
١-٣	جذور المعادلة التربيعية	٢	١-٣ يجد المميّز ويستخدمه ليجد عدد الجذور في المعادلة التربيعية.	الجذور، المميّز
١-٤	الصيغة التربيعية	٢	١-٤ يحلّ المعادلات التربيعية بمجهول واحد باستخدام الصيغة التربيعية.	الصيغة التربيعيّة
١-٥	حلّ المعادلات الآنية (معادلة خطيّة ومعادلة تربيعية)	٢	١-٥ يحلّ معادلتَين إحداهما تربيعية والأخرى خطيّة آنيًّا.	
١-٦	حلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا	٢	١-٦ يحلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا، باستخدام التعويض ص = د(س) ليشكّل معادلة تربيعية ويحلّها.	
١-٧	حلّ المتباينات التربيعيّة	٣	١-٧ يحلّ متباينات تربيعية بمجهول واحد باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل، الإكمال إلى مربّع، أو الصيغة التربيعية.	
١-٨ (PPT) ورقة عمل ١	التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية	٢	١-٨ يجد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية. ١-٩ يرسم المنحنى لدالّة تربيعية، ويحدّد شكلها العام، والأجزاء المقطوعة مع المحورَين، وإحداثيات رأس المنحنى، ومحور التماثل.	
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى	١		

١-١ الإكمال إلى مربّع

ملاحظات للمعلمين

يُعدّ الإكمال إلى مربّع أسلوبًا مفيدًا لحلّ المعادلات التربيعية ولفهم شكل منحنى الدالة التربيعية وموقع رأس المنحنى (النقطة العظمى أو النقطة الصغرى) كما سيرد في الدرس ١-٢

أفكار للتعليم

يمكنك، في هذا الدرس من كتاب الطالب، أن تظهر للطلبة طريقتَين ممكنتَين للإكمال إلى مربّع، تتمثّل إحداهما بالعبارة الجبرية (التربيعية) حيث إن معامل س^{٢} هو ١، في حين أن الثانية تتمثّل بالعبارة الجبرية حيث إن معامل س^{٢} لا يساوي ١ (موجب أو سالب). عندما يكتسب الطلبة مهارة إيجاد صورة المربع الكامل، سيساعد الطلبة على حلّ المعادلات بسهولة، وعلى تبسيط الجذور في إجاباتهم. تنتهي تمارين ١-١ ببعض الأسئلة حيث يعطي إكمال المربّع معلومات إضافية خلال السياق الفيزيائي، مثل ارتفاع المقذوفات ومداها.

يمكن للطلبة استخدام عملية الإكمال إلى مربّع على أنها واحدة من الطرائق لتعريف أو لشرح المعادلة التربيعية. هذه المهمة اختيارية وذات صلة بالدرس، لذلك يمكن للمعلمين اختيار ما إذا كانوا سيستخدمونها أم لا.

تربط المسألة الاختيارية Which quadratic (Underground Mathematics) إكمال المربّع بين العبارة الجبرية مع منحناها، وتتداخل مسألة Which parabola (Underground Mathematics) مع العمل لاحقًا على جذور المعادلة التربيعية في الدرس ١-٣ من هذه الوحدة.

دعم الطلبة

قد يجد بعض الطلبة صعوبة في الإكمال إلى مربّع، خصوصًا عندما يكون معامل س^{٢} غير العدد ١، ولذلك تفيد التمارين من ٢ إلى ٥ من تمارين ١-١أ، والتمرين ٢ من تمارين ١-١ب في مجال تدريب الطلبة. في هذا الدرس قد يتم اختيار بعض الطلبة ليستفيدوا من التدريبات الإضافية التي تتعامل مع تبسيط الجذور أو مع الكسور.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-١أ

تمارين ١-١ب

مصادر تعليمية اختيارية مفيدة

يمكن استخدام Quadratic Equations (BBC Bitesize) لإيجاد الحلّ بالإكمال إلى مربع.

١-٢ التمثيل البياني للدالة التربيعية

ملاحظات للمعلمين

ربّما لا يعرف الطلبة أن المعامل ل في صورة الإكمال إلى مربع ل (س − ك)^{٢} + ر لا يؤثر على إحداثيات الرأس.

أفكار للتعليم

يركز هذا الدرس على التمثيلات البيانية للدوال التربيعية، مع مقطعيها من المحورين، ونقطتَي القيمة العظمى والقيمة الصغرى (بدون استخدام الخواص الرياضية). قد تكون استخدمت التمثيلات البيانية في الدروس السابقة، وأن الطلبة درسوها، لكن الأهم إدراكهم أن المطلوب هو تمثيل بياني يساعدهم على فهم الخواص المهمة (مثل المقطعيَن السيني والصادي، الرأس، شكل المنحنى، محور التماثل)، وليس المطلوب تمثيل بياني دقيق يقوم بتحديد مواقع النقاط في المستوى الإحداثي. ولرسم المنحنى، سيتعلّم الطلبة طرائق مختلفة كاستخدام الجذور لمعرفة محور التماثل، أو إيجاد صورة الإكمال إلى مربع، إضافة إلى صورة الدالة التربيعية ص = أ س^{٢} + ب س + جـ

تساعد المصادر الاختيارية (Underground Mathematics) الواردة في Pick a card و Name that graph الطلبة على التمييز بين المنحنيات بمعرفة خواصها. ولفهم المقصود، يمكنك الاطلاع على المصادر (NRICH) Parabolic patterns و (Underground Mathematics) Which parabola وهي ألغاز قد يجدها الطلبة مثيرة للاهتمام.

كما يمكن للطلبة استخدام برمجيات التمثيلات البيانية مثل Desmos أو GeoGebra التي تفيد كثيرًا في هذه المواضيع، ولكن يجب تشجيعهم على توقع شكل المنحنى وخواصه ورسمه قبل استخدام برمجيات التمثيلات البيانية.

سيربط الطلبة في الدرس ١-٣ بين حلول المعادلة التربيعية (عدد الجذور) والمميّز.

دعم الطلبة

قد يضطرّ الطلبة الذين يواجهون صعوبات في رسم المنحنيات إلى العمل على فهمها قبل البدء في رسمها.

تحدي الطلبة

في المصدر البديل Name that graph again، قد يطوّر الطلبة مهاراتهم في التقويم والتحليل بمعرفة عدد الطرائق التي يمكن أن يجدوها لتحديد معادلة المنحنى التربيعي.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-٢

مصادر تعليمية اختيارية مفيدة

Build a Bigger Field (وهو مصدر تفاعلي اختياري باستخدام Desmos).

٣-١ جذور المعادلة التربيعية

ملاحظات للمعلمين

قد يجد الطلبة صعوبة في استخدام المميّز في المعادلات التربيعية الجديدة لإيجاد قيم المعامل المجهول. يمكن تقديم مثال محلول مع وجود فراغات لملئها؛ ليألف الطلبة التفكير المطلوب في حلّ المعادلات أو المتباينات، وكذلك العلاقة بين المنحنيات التي يجب أن يرسموها.

أفكار للتعليم

في هذا الدرس، يتم تقديم معادلات تربيعية يكون فيها المميز مختلفًا (سالب، موجب، صفر)، يحدّد من خلاله عدد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني. تستخدم في كل الأمثلة المميز ب^{٢} - ٤أجـ لتشكّل معادلة جديدة، ومن ثمّ إيجاد قيم المعامل المجهول.

دعم الطلبة

اطلب إلى الطلبة البدء بحساب قيمة المميّز لمعادلات تربيعية مختارة، واستنتاج عدد الجذور التي توجد لكل منها (تمارين ١-٣ السؤالان ١، ٢). فعندما يألف الطلبة المعلومات المعطاة عن المميّز، يمكنهم عندئذٍ استخدامها في حلّ معادلات لها معاملات مجهولة (كما في الأمثلة المحلولة في كتاب الطالب).

تحدي الطلبة

يمكن أن يحلّ الطلبة المجيدون الأسئلة (٣، ٤، ٥) من تمارين ١-٣ التي يعتمد في حلها على الصيغة التربيعية والمميز، ويمكن الاستعانة بـ: Discriminating (Underground Mathematics) للحصول على أنشطة إضافية.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-٣

٤-١ الصيغة التربيعية

ملاحظات للمعلمين

قد يحتاج الطلبة إلى تذكيرهم بترتيب حدود المعادلة في الصورة الصحيحة أس^{٢} + ب س+ جـ = ٠ كي يحدّدوا القيم التي سيستخدمونها في الصيغة التربيعية.

أفكار للتعليم

يبدأ الدرس في كتاب الطالب باستنتاج الصيغة التربيعية، ولكن يمكنك أن تشجع الطلبة على التفكير في الخطوات الجبرية وعلى استخدام مصادر اختيارية للبرهان مثل تلك الموجودة في Proving the quadratic formula من مصدر (Underground Mathematics).

فالطلبة في البداية ينطلقون من الصورة العامة للمعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س+ جـ = ٠ ثم الإكمال إلى مربع، ليتوصلوا إلى الصيغة ويعمقوا فهمهم لتركيبتها. يذكر المثال ٩ كيف تستخدم الصيغة، السؤال ١ من تمارين ١-٤ يتضمن تمارين للتدريب. يقدم Quadratic solving sorter الطرائق الثلاث التي سيتبعها الطلبة في هذه الوحدة: التحليل إلى العوامل، الإكمال إلى مربع، واستخدام الصيغة التربيعية. اطلب إلى الطلبة تصنيف المعادلات بحسب الطريقة التي يستخدمونها في الحلّ، إذ يتطلب ذلك منهم اعتبار صورة كل معادلة، واختيار الطريقة التي تنتمي إليها. يجد الطلبة العمل في ثنائيات أو في مجموعات أمرًا مهمًا ومفيدًا لتعلمهم شرح بعض المسائل الحسابية وتبرير تفكيرهم إضافة إلى معرفة ما قامت به المجموعات الأخرى.

تحدي الطلبة

قد يستمتع الطلبة المجيدون في حلّ المعادلات التربيعية في الواجب الإضافي Powerful quadratics أو Irrational roots من مصدر (Underground Mathematics) أو المصادر: Mega Quadratic Equations أو Quadratic Harmony من (NRICH).

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-٤

٥-١ حلّ المعادلات الآنية (معادلة خطيّة ومعادلة تربيعية)

ملاحظات للمعلمين

قد يكون الطلبة على علم بهذا الموضوع، وعليه سيكون تكراره أشبه بمراجعة تساعد في تطوير الطلاقة في الجبر.

أفكار للتعليم

في هذا الدرس، سيتم حل المعادلات الآنية باستخدام الطرائق الجبرية، والتي تفيد الطلبة في فهم حلولهم للمعادلات على أنها نقاط تقاطع للمنحنيات عند تمثيلها بيانيًا.

تحدي الطلبة

قد يشكّل مصدر التعلم Parabella من (Underground Mathematics) تحديًا لأكثر الطلبة المجيدين عندما يفكرون في كيفية تطبيق معرفتهم على مسائل هندسية تتضمن مستقيمات متوازية تتقاطع مع المنحنى التربيعي.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١–٥

٦-١ حلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا

ملاحظات للمعلمين

في هذا الدرس، سيحل الطلبة المعادلات التربيعية التي ليست في ظاهرها معادلات تربيعية. وذلك بالتعويض عن س بدالة أخرى.

يتضمن هذا الدرس في كتاب الطالب أمثلة وتفسيرات لما يعنيه ذلك.

أفكار للتعليم

بعد مراجعة الطرائق الثلاث لحلّ المعادلات التربيعية في الدروس السابقة، سيواجه الطلبة معادلات أكثر تعقيدًا قد تكون تربيعية، أو يتم تحويلها إلى صورة تربيعية لبعض الدوال في المتغير س، مثل $س^{٢}$، $\sqrt{س}$، $٢^{س}$؛ ولذلك يحتاجون إلى أن يميزوا المعادلة التي تكون بنيتها مناسبة للحلّ بالطريقة نفسها المتبعة في حلّ المعادلة التربيعية بدلالة المتغير س

دعم الطلبة

قد يجد بعض الطلبة حلّ هذه المعادلات أمرًا سهلًا عندما يستخدمون التعويض المناسب (كما في المثالين ١١، ١٢)، لذا يصبح في مقدورهم تحليل المعادلة إلى العوامل التي تظهر في صورة معادلة تربيعية. وبعد إيجاد حلول لهذه المعادلة، يحتاجون إلى تذكّر خطوة إضافية، وهي إيجاد حل المتغيّر الأصلي.

تحدي الطلبة

قد يكون الطلبة المجيدون في الجبر قادرين على تحليل معادلات أكثر تعقيدًا إلى العوامل مباشرة، أي من دون اللجوء إلى التعويض بمتغير آخر. هؤلاء الذين يرغبون في التحدي قد يحاولون حل سؤال المراجعة R6215: How do we solve $x + 3\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0$? (Underground Mathematics)

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-٦

١-٧ حلّ المتباينات التربيعية

ملاحظات للمعلمين

قد يحاول بعض الطلبة حلّ المتباينات التربيعية من دون توضيح طريقة الحل من خلال تمثيل بياني، وغالبًا ما يؤدي ذلك إلى الأخطاء، أو إلى التخمين.

أفكار للتعليم

قد يعرف بعض الطلبة كيفية حلّ المتباينات التربيعية. يعرض هذا الدرس التمثيل البياني للمنحنى من خلال معرفة جذور المعادلة.

وتتضمن المصادر البديلة من (Underground Mathematics) Two-way algebra و Inequalities for some occasions مناقشة مفيدة بين مجموعات الطلبة.

ارشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

إجابة نواف خاطئة لأنه عندما ضرب في س فإنه ضرب عمليًا في عدد سالب، الأمر الذي يتطلب عكس رمز المتباينة. فمثلًا،

يمكن كتابة $\frac{٢س - ٤}{س} \geqslant ٧$

في صورة $٢ - \frac{٤}{س} \geqslant ٧$

وعليه يكون $-\frac{٤}{س} \geqslant ٥$

وليكون ذلك صحيحًا، فإن س يجب أن تكون عددًا سالبًا (س < ٠)، وناتج الضرب في س يعطي $-٤ \leqslant ٥س$،

والتي تكافئ $س \geqslant -\frac{٤}{٥}$

الإجابة الصحيحة هي $-\frac{٤}{٥} \leqslant س < ٠$

دعم الطلبة

تقدم بعض الأمثلة فراغات يتطلب ملؤها ليألف الطلبة التفكير في المطلوب وفي الطريقة التي تدعم تمثيلًا بيانيًا لعملهم (تزوّد ورقة عمل ١ في الدرس ١-٨ مثالًا واردًا في كتاب الطالب أو أمثلة جديدة تتكيّف مع هذه الصيغة). ويمكن أن يطوّر الطلبة حلّ المتباينات بأنفسهم بدءًا من السؤال ٢ من تمارين ١-٧ الذي لا يتطلب إعادة ترتيب جبريّ (ما عدا الجزئية (و)).

تحدي الطلبة

في التمارين ١-٧ يزوّد السؤال ٧ مادة إضافية تتطلب إعادة ترتيب جبريّ وحلّ متباينة. يُعدّ النشاط المتوافر في مصدر (NRICH) وهو بعنوان In between فرصة لاستخدام هذه الأساليب.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-٧

٨-١ التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية

ملاحظات للمعلمين

يُستخدم المميّز في هذا الدرس لتحديد التقاطع بين المستقيمات والمنحنيات التربيعية. قد يواجه الطلبة صعوبة في حلّ معادلتَي المستقيم والمنحنى آنيًّا اللذين يشكلان معادلة تربيعية جديدة تعطي معلومات عن نقاط التقاطع. ولتعميق هذا المفهوم، قد يستخدم الطلبة المميّز أولًا لتحديد العلاقة الهندسية بين المستقيم والمنحنى بإيجاد مجموعة الحلّ، ثم التحقّق من النتائج باستخدام برمجية رسم. ومن المفيد دائمًا وجود تذكير بصري عمّا أورده الجبر.

أفكار للتعليم

يطوّر المثالان ١٧، ١٨ مفهوم المعادلة أو المتباينة التربيعية، حيث تتضمن معاملًا مجهولًا. وباستخدام الشروط المختلفة للمميز ب^{٢} − ٤أجـ لإنشاء معادلة أو متباينة جديدة في المعامل المجهول، نستطيع إيجاد القيم التي تقابل المتطلبات. ولتشجع الطلبة على التفكير خلال خطوات العمل يمكن استخدام شريحة العرض التوضيحي ١ والتوقف عند كل تمرين لمساعدتهم على تمحيص المعلومات التي حصلوا عليها وكيف يمكن تطبيق المميّز لحلّ المسألة (يمكن تكييف أيّ مثال من كتاب الطالب أو من مكان آخر ليتوافق مع هذه الصيغة).

جميع التمارين من التمرين (١) إلى التمرين (٩) تتطلب إيجاد المعاملات المجهولة، كما يتطلب السؤالان ١٠، ١١ برهانًا هندسيًا يعتمد على هذا الموضوع.

جرّب السؤال المتوافر في مصدر (Underground Mathematics) R9614 حيث يتضمن ملفًا تفاعليًا باستخدام جيوجبرا GeoGebra يساعد الطلبة على رؤية دور المميّز، وكذلك ملاحظة كيف تتغيّرالعلاقة بين المستقيم والمنحنى لعدة قيم مختلفة للثابت ك.

دعم الطلبة

قد يجد بعض الطلبة في حلّ المتباينات التربيعية تحديًا لهم. ولتساعدهم على استيعاب مفهوم استخدام المميّز مع المعادلة التربيعية الجديدة الناتجة، قدّم لهم مثالًا يتضمن فراغات لملئها دعمًا لهم (راجع ورقة العمل ١ التي تقودهم خلال عمليات التفكير المطلوبة، فهي تستخدم المثال نفسه كعرض توضيحي ١ كما أن أيّ مثال من كتاب الطالب أو من أي كتاب آخر يمكن تكييفه ليتوافق مع هذه الصيغة). وعندما يصبح الطلبة متمكنين من متطلبات التفكير، فإنهم سيطورون حلولهم الخاصة للتمارين.

تحدي الطلبة

قد يعالج الطلبة براهين السؤالين ١٠، ١١ الواردَين في تمارين ١-٨

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ١-٨

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

ورقة عمل (١): الوحدة الأولى المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

املأ الفراغات لتحلّ المتباينة باستخدام المميّز

سؤال: أوجِد مجموعة قيم ك بحيث لا يتقاطع المستقيم ٢س + ص = ك مع المنحنى س ص = ٨

عوّض عن ص = ك − ٢س في المعادلة س ص = ٨ ....

فكّ الأقواس وبسّط ....

معادلة تربيعية جديدة ....

ما الشرط على المميّز؟

عدم وجود نقطة تقاطع، لذا يكون ب^{٢} − ٤أ جـ ....

حدّد قيم أ، ب، جـ من المعادلة التربيعية الجديدة: أ = ...، ب = ...، جـ = ...

عوّض القيم في المميّز ....

توصل إلى متباينة تربيعية ....

حلل المتباينة إلى العوامل لتجد القيم ....

القيم هي ....

ارسم منحنى الدالة لتحل المتباينة

وعليه، تكون مجموعة قيم ك التي تجعل المستقيم ٢س + ص = ك بحيث لا يتقاطع مع المنحنى س ص = ٨ هي

....

شرائح عرض توضيحي (PPT) المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

الوحدة الأولى:
المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

العرض التوضيحي (١)

https://ict.moe.gov.om/TeacherBook/PDF/11/OMN-T1-U1-L1-Math_G11.pdf

اختصار الرابط

https://qrs.ly/qseajw5

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

حلّ متباينة باستخدام المميّز

أوجِد مجموعة قيم ك بحيث لا يتقاطع المستقيم
٢س + ص = ك، مع المنحنى س ص = ٨

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

عوّض عن ص = ك − ٢س في المعادلة س ص = ٨

س (ك − ٢س) = ٨

٢س^{٢} − ك س + ٨ = ٠

معادلة
تربيعية
جديدة

ما الشرط على المميّز؟

أوجد مجموعة قيم ك حيث لا يتقاطع المستقيم
٢س + ص = ك مع المنحنى س ص = ٨

لا يتقاطع المستقيم والمنحنى، أي

$$ب^{٢} - ٤أجـ < ٠$$

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

استخدم المميز على المعادلة التربيعية الجديدة

$$٢س^{٢} - ك\,س + ٨ = ٠$$

$$ب^{٢} - ٤أجـ < ٠$$

$$(-ك)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٨ < ٠$$

$$ك^{٢} - ٦٤ < ٠$$

متباينة
تربيعية

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

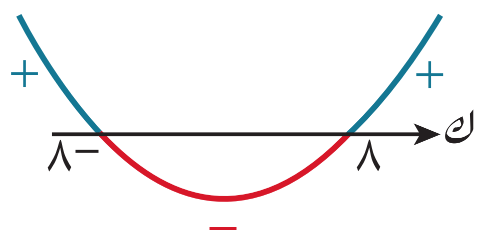
حلّ المتباينة:

$ك^{٢} - ٦٤ < ٠$

$(ك + ٨)(ك - ٨) < ٠$

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

ارسم المنحنى وحل المتباينة



$\therefore -٨ < ك < ٨$

وهي مجموعة قيم ك بحيث لا يتقاطع المستقيم
٢س + ص = ك مع المنحنى س ص = ٨

إجابات تمارين كتاب الطالب الوحدة الأولى: المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

إجابات معرفة قبلية

١) أ −٤، ٣ ب ٣

ج ٦، $-\frac{١}{٣}$

٢) أ س > ٢ ب س ⩽ −٢

٣) أ س = ٢، ص = ٣

ب س = −٢، ص = −٥

تمارين ١-١أ

١) أ $(\text{س} - ٣)^{٢} - ٩$ ب $(\text{س} + ٤)^{٢} - ١٦$

ج $\left(\text{س} - \frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \frac{٩}{٤}$ د $\left(\text{س} + \frac{١٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٢٢٥}{٤}$

هـ $(\text{س} + ٢)^{٢} + ٤$ و $(\text{س} - ٢)^{٢} - ١٢$

ز $\left(\text{س} + \frac{٧}{٢}\right)^{٢} - \frac{٤٥}{٤}$ ح $\left(\text{س} - \frac{٣}{٢}\right)^{٢} + \frac{٧}{٤}$

٢) أ $٢(\text{س} - ٣)^{٢} + ١$ ب $٣(\text{س} - ٢)^{٢} - ١٣$

ج $٢\left(\text{س} + \frac{٥}{٤}\right)^{٢} - \frac{٣٣}{٨}$ د $٢\left(\text{س} + \frac{٧}{٤}\right)^{٢} - \frac{٩}{٨}$

٣) أ $٤ - (\text{س} - ٢)^{٢}$ ب $١٦ - (\text{س} - ٤)^{٢}$

ج $\frac{٢٥}{٤} - \left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ د $\frac{٦١}{٤} - \left(\text{س} - \frac{٥}{٢}\right)^{٢}$

٤) أ $١٥ - ٢(\text{س} + ٢)^{٢}$ ب $٢١ - ٢(\text{س} + ٣)^{٢}$

ج $١٥ - ٢(\text{س} - ١)^{٢}$ د $\frac{٤٩}{١٢} - ٣\left(\text{س} - \frac{٥}{٦}\right)^{٢}$

٥) أ $(٣\text{س} - ١)^{٢} - ٤$ ب $(٢\text{س} + ٥)^{٢} + ٥$

ج $(٥\text{س} + ٤)^{٢} - ٢٠$ د $(٣\text{س} - ٧)^{٢} + ١٢$

تمارين ١-١ب

١) أ −٩، ١ ب −٦، ٢

ج −٥، ٧ د ٢، ٧

هـ −٦، ٣ و −١٠، ١

٢) أ $-٢ \pm \sqrt{١١}$ ب $٥ \pm \sqrt{٢٣}$

ج $-٤ \pm \sqrt{١٧}$ د $١ \pm \sqrt{\frac{٧}{٢}}$

هـ $\frac{-٣ \pm \sqrt{٣}}{٢}$ و $٢ \pm \sqrt{\frac{١١}{٢}}$

٣) $٣ \pm \sqrt{١٠}$

٤) $\sqrt{١٩} - ٢$

٥) $-\frac{٨}{٣}$، ١، $\frac{١}{٦}(-٥ - \sqrt{٩٧})$، $\frac{١}{٦}(\sqrt{٩٧} - ٥)$

تمارين ١-٢

١) أ شكل المنحنى U، نقطة القيمة الصغرى (٣، −١)، نقاط التقاطع مع المحورَين (٢، ٠)، (٤، ٠)، (٠، ٨)

ب شكل المنحنى U، نقطة القيمة الصغرى $\left(-٢\frac{١}{٢}، -٢٠\frac{١}{٤}\right)$، نقاط التقاطع مع المحورَين (−٧، ٠)، (٢، ٠)، (٠، −١٤)

ج شكل المنحنى U، نقطة القيمة الصغرى $\left(-١\frac{٣}{٤}، -٢١\frac{١}{٨}\right)$، نقاط التقاطع مع المحورَين (−٥، ٠)، $\left(١\frac{١}{٢}، ٠\right)$، (٠، −١٥)

د شكل المنحنى ∩، نقطة القيمة العظمى: $\left(\frac{١}{٢}، ١٢\frac{١}{٤}\right)$، نقاط تقاطعه مع المحورَين (−٣، ٠)، (٤، ٠)، (٠، ١٢)

٢) أ $٢(\text{س} - ٢)^{٢} - ٣$

ب س = ٢

٣) أ $\frac{٥٣}{٤} - \left(\text{س} - \frac{٥}{٢}\right)^{٢}$

ب $\left(٢\frac{١}{٢}، ١٣\frac{١}{٤}\right)$، قيمة عظمى

٤) أ ٢$\left(\text{س} + \frac{٩}{٤}\right)^{٢} - \frac{٤٩}{٨}$

ب $\left(-٢\frac{١}{٤}، -٦\frac{١}{٨}\right)$، قيمة صغرى

٥) $-٤\frac{١}{٤}$، عندما س = $٣\frac{١}{٢}$

٦) أ $\frac{٩}{٨} - ٢\left(\text{س} - \frac{١}{٤}\right)^{٢}$

ب شكل المنحنى ∩، نقطة القيمة العظمى $\left(\frac{١}{٤}، ١\frac{١}{٨}\right)$، نقاط التقاطع مع المحورَين $\left(-\frac{١}{٢}، ٠\right)$، (١، ٠)، (٠، ١)

٧) برهان

٨) (أ) ص = (س − ٤)^{٢} + ٢ أو ص = س^{٢} − ٨س + ١٨

(ب) ص = ٤(س + ٢)^{٢} − ٦ أو ص = ٤س^{٢} + ١٦س + ١٠

(ج) ص = ٨ − $\frac{١}{٢}$(س − ٢)^{٢} أو ص = ٦ + ٢س − $\frac{١}{٢}$س^{٢}

٩)

(أ)	ص = س^{٢} − ٦س + ١٣
(ب)	ص = س^{٢} − ٦س + ٥
(ج)	ص = −س^{٢} + ٦س − ٥
(د)	ص = −س^{٢} + ٦س − ١٣
(هـ)	ص = س^{٢} + ٦س + ١٣
(و)	ص = س^{٢} + ٦س + ٥
(ك)	ص = −س^{٢} − ٦س − ٥
(ح)	ص = −س^{٢} − ٦س − ١٣

١٠) ص = أس^{٢} −٢أ ك س + ك^{٢} + ل

تمارين ١-٣

١) أ جذران متساويان

ب جذران حقيقيان مختلفان

ج جذران حقيقيان مختلفان

د جذران متساويان

هـ لا توجد جذور حقيقية

و جذران حقيقيان مختلفان

٢) لا توجد جذور حقيقية

٣) −١١، ١

٤) أ ك = ±٤ ب ك = ٤، أو ك = ١

ج ك = $\frac{١}{٤}$ د ك = ٠، أو ك = ٢

هـ ك = ٠، أو ك = $-\frac{٨}{٩}$

و ك = −١٠، أو ك = ١٤

٥) ك = $\frac{\text{ل}^{٢}}{٢٠}$

تمارين ١-٤

١) أ −٠,٢٩، ١٠,٢٩ ب −٥,٢٤، −٠,٧٦

ج −٤,١٩، ١,١٩ د −٣,٣٩، ٠,٨٩

هـ −١,٣٩، −٠,٣٦ و −١,٦٤، ٠,٢٤

٢) ٤,٩٣

٣) ٣,١٩

٤) −٠,٢١٧، ٩,٢٢

٥) س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$؛ تزداد قيمة كل من الجذرَين بمقدار $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

تمارين ١-٥

١) أ (−٣، ٩)، (٢، ٤) ب $\left(-٨، \frac{٧}{٢}\right)$، (٢، ١)

ج (−١٠، ٠)، (٨، ٦) د (−٢، −٧)، (١، ٢)

هـ (٢، −٢)، (١٠، ٢) و (−١، −٣)، (٢، ١)

ز (−٣، ١)، (٩، ٧) ح (٢، ٢)، (١٠، −٢)

ط (−٥، −٢٤)، (٥، ١) ي (٤، −٦)، (١٢، ١٠)

ك $\left(-٣، -٤\frac{١}{٣}\right)$، (٤، −٩) ل (−١، ٣)، (٣، ١)

م (٦، −٢)، (١٨، −١)

٢) $٣\frac{١}{٢}$ سم، ٩ سم

٣) ٧ سم، ١١ سم

٤) نق = ٥، ع = ١٣

٥) أ(−٣، ٥)، ب(٢، ٠)

٦) أ(−٢، ١)، ب(٣، −١)

٧) أ ص = ٢، س = ٨

ب $\frac{ن}{٢} + \frac{د}{ن٢}$ ، $\frac{ن}{٢} - \frac{د}{ن٢}$

تمارين ١-٦

١) أ ±٢، ±٣ ب −١، ٢

ج ±$\sqrt{٥}$ ، ±١ د ±$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، ±$\sqrt{٥}$

هـ ±١ و ١، $\frac{١}{٢}$

ز ±$\sqrt{٣}$ ح لا توجد جذور

ط ±٢ ي −$\frac{١}{٢}$ ، ١

ك ±$\frac{٣}{٢}$ ل −١، ٢

٢) أ ٤، ٦$\frac{١}{٤}$ ب ٤

ج $\frac{١}{٩}$، ٦$\frac{١}{٤}$ د $\frac{٤}{٢٥}$

هـ $\frac{١}{٤}$، ١$\frac{٩}{١٦}$ و $\frac{١}{٩}$، ٢٥

تمارين ١-٧

١) أ ٠ ≤ س ≤ ٣ ب س < −٢ أو س > ٣

ج ٤ ≤ س ≤ ٦ د −$\frac{٣}{٢}$ < س < ٢

هـ −٦ ≤ س ≤ ٥ و س < −$\frac{١}{٢}$ أو س > $\frac{١}{٣}$

٢) أ س ≤ −٥ أو س ≥ ٥ ب −٥ ≤ س ≤ −٢

ج س < −٧ أو س > ١ د −$\frac{٣}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{٢}{٧}$

هـ $\frac{٤}{٣}$ < س < $\frac{٥}{٢}$ و س < −٤ أو س > $\frac{١}{٢}$

٣) أ −٩ < س < ٤ ب س < ٧ أو س > ٨

ج −١٢ ≤ س ≤ ١ د −٣ < س < ٢

هـ س < −٤ أو س > ١ و −$\frac{١}{٢}$ < س < $\frac{٣}{٥}$

ز س ≤ −٩ أو س ≥ ١ ح س < −٢ أو س > ٥

ط −$\frac{٧}{٢}$ < س < $\frac{٥}{٣}$

٤) −٣ < س < $\frac{٥}{٢}$

٥) أ ٥ ≤ س < ٧ ب −٧ ≤ س < ١

ج س < −٢ أو س ≥ ٣

٦) س < −٥ أو س > ٨

٧) أ −١ < س < ٠

ب −١ ≤ س < ١ أو س ≥ ٥

ج −٣ ≤ س < ٢ أو س ≥ ٥

د −٥ ≤ س < −٢ أو ١ ≤ س < ٢

هـ س < −٤ أو $\frac{١}{٢}$ ≤ س < ٥

تمارين ١-٨

١) −٥، −٩

٢) −١، ٧

٣) أ ±١٠ ب (٢، ٤)، (−٢، −٤)

٤) −٦، −٢، (−١، ١٢)، (١، ٤)

٥) ك < −٢ أو ك > ٦

٦) ك < ٦

٧) −٣ < ع < ١

٨) ك > ٦

٩) ك = $\frac{١}{٢}$

١٠) برهان

١١) برهان

إجابات تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) أ $\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^٢ - \frac{٢٥}{٤}$

ب −$\frac{١}{٣}$ < س < ٢

٢) س = ±٢، س = ±$\frac{٣}{٢}$

٣) س < −٩ − ٢$\sqrt{٣}$ أو س > −٩ + ٢$\sqrt{٣}$

٤) ك < ١ أو ك > ٢

٥) أ $\left(١\frac{١}{٢}، −٢\right)$

ب ك = −٤ أو ك = −٢٠

٦) أ برهان

ب (٦، ٢٩)

ج ك = ١، ج = (٢، ٥)

٧) أ برهان

ب (٢، ١)، (٥، ٧)

ج ٢ < س < ٥

٨) أ ٢٥ − (س − ٥)^{٢}

ب (٥، ٢٥)

ج س ⩽ ١ أو س ⩾ ٩

٩) أ ل $\left(٢\frac{١}{٢}، ٢\frac{١}{٢}\right)$

ب م = −٨، (−٢، ١٦)

١٠) أ ٢(س − ١)^{٢} − ١، (١، −١)

ب $\left(-\frac{١}{٢}، ٣\frac{١}{٢}\right)$

١١) أ $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٤٩}$ = ٣١٨ م

ب $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}$ = ١٥٩ م

إجابات تمارين كتاب النشاط

الوحدة الأولى: المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

تمارين ١-١أ

١) أ $(\text{س} + ١)^{٢} + ١$ ب $(\text{س} - ٤)^{٢} - ١٩$

ج $\left(\text{س} + ١\frac{١}{٢}\right)^{٢} - ٩\frac{١}{٤}$ د $(\text{س} - ٣)^{٢} - ٤$

هـ $(\text{س} + ٧)^{٢}$ و $٢(\text{س} + ٣)^{٢} - ٢٣$

ز $٣(\text{س} - ٢)^{٢} - ٩$ ح $١١ - ٤(\text{س} + ١)^{٢}$

ط $٢\left(\text{س} + ١\frac{١}{٤}\right)^{٢} - ٦\frac{١}{٨}$

٢) أ $(\text{س} - ٧)(\text{س} + ٥)$

ب $(\text{س} - ٢٢)(\text{س} + ٨)$

ج $(\text{س} + ٢٤)(\text{س} - ١٨)$

د $(٣\text{س} + ٢)(٢\text{س} - ٣)$

هـ $(٢ + ٧\text{س})(٧ - ٢\text{س})$

و $(٤\text{س} + ٣)(٣\text{س} - ٢)$

٣) $(\text{س} - ٥)^{٢} + ١٠$

تمارين ١-١ب

١) أ $٣ \pm \sqrt{٣}$ ب ٠، −٤

ج $-٣ \pm \frac{٣}{٢}\sqrt{٥}$ د $\frac{١}{٣}(٧ \pm ٢\sqrt{٢})$

هـ $-\text{ق} \pm \sqrt{\text{ك}}$ و $-\text{ب} \pm \sqrt{\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}}$

٢) أ برهان ب ٦ كم

تمارين ١-٢

١) أ (٣، ٤) ب (٥، ١)

ج (٧، −١) د (١، −٥)

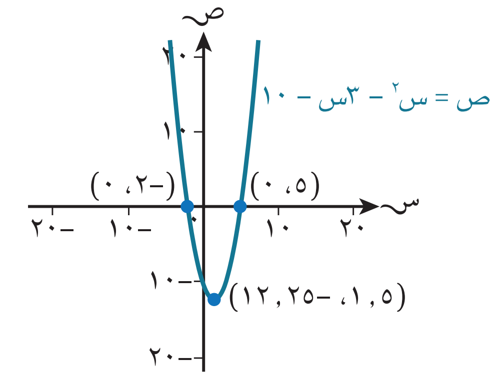
هـ (−١، ٣) و (−٧، −٣)

ز (−٢، −٤) ح (−١، ٥)

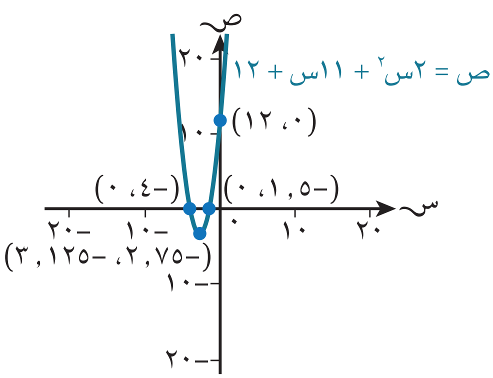
٢) أ ١) (أ) ٢) (ج) ٣) (ب)

ب ١) (ج) ٢) (أ) ٣) (ب)

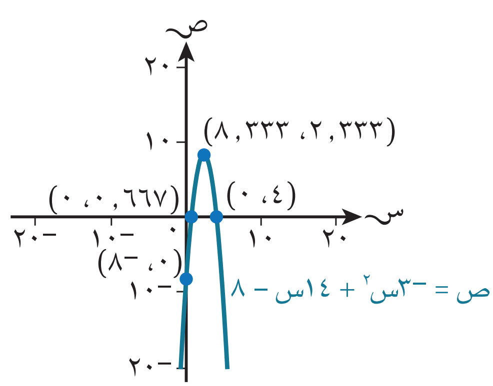
٣) أ



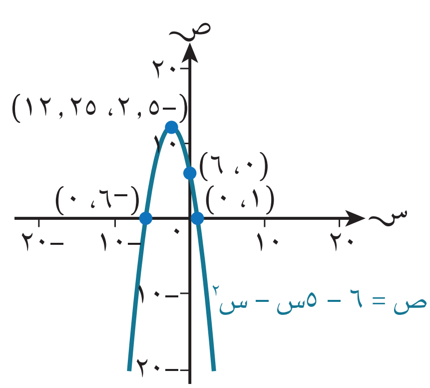
ب



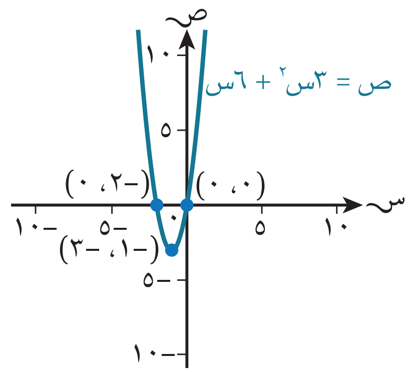
ج



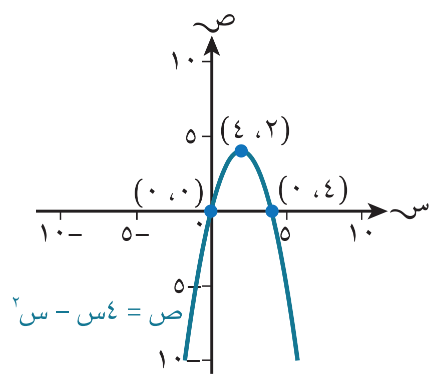
د



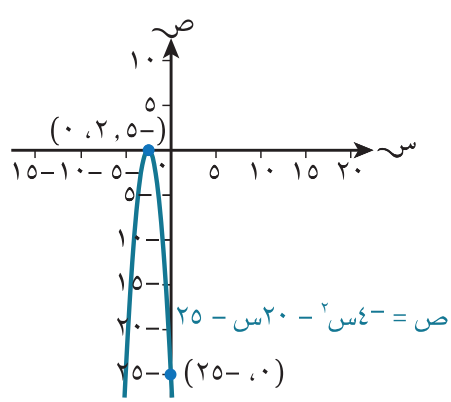
هـ



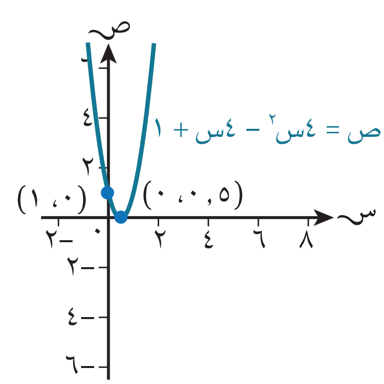
و



ز



ح



٤) $س = -\frac{١}{٣}$

٥) أ) أ، ب، ز، ح — ب) ب، د، و

ج) و، ز، ح — د) د

هـ) ز — و) ط

ز) ب، هـ — ح) أ، ج، هـ

٦) $(س + ٣)^٢ - ٥$؛ −٥ عند س = −٣

٧) أ) قيمة صغرى

ب) أ = ٣، ب = ٧

٨) أ) ف = ١، ك = ٤

ب) س = ١,٥

تمارين ١-٣

١) أ) ٣٦ — ب) ٦٨

ج) −٤٧ — د) −١١٩

هـ) ٠ — و) ٠

ز) ٤٩ — ح) ٤٩

٢) أ) اثنان — ب) اثنان

ج) لا يوجد — د) لا يوجد

هـ) واحد مكرر — و) واحد مكرر

ز) اثنان — ح) اثنان

٣) $م = \pm\sqrt{٢}$

٤) $ك = \frac{١١ \pm ٢\sqrt{٣٠}}{٢}$

٥) $-٢(س - ٢)^٢ - ٥ = ٠$

تمارين ١-٤

١) أ) $س = \frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$ — ب) $س = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

ج) $س = \frac{-٣ \pm \sqrt{١١}}{٢}$ — د) $س = \frac{٩ \pm \sqrt{٢١}}{١٠}$

هـ) $س = -٢ \pm \sqrt{٦}$ — و) $س = -١، \frac{٤}{٣}$

ز) س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٧}}{٢}$ ح) س = ٢ ± $\sqrt{٧}$

٢) أ) $\frac{١}{٢}$(−٣ ± $\sqrt{٢٩}$) ب) ٢ ± $\sqrt{١١}$

ج) س = −٣ (مكرر) د) $\frac{١}{٢}$(−٥ ± $\sqrt{١٧}$)

هـ) س = لا يوجد و) $\frac{١}{٦}$(٥ ± $\sqrt{٩٧}$)

ز) −٣، −$\frac{١}{٢}$ ح) $\frac{١}{٢}$(−٣ ± $\sqrt{٤١}$)

ط) $\frac{١}{٦}$(٢ ± $\sqrt{٣٤}$)

٣) ١,٥ م

٤) ٢٠,٥ سم

٥) ٥,٩٨ ثانية

تمارين ١-٥

١) أ) س = ٣، ص = ٤ أو س = −٤، ص = −٣

ب) س = ٣، ص = ٤ أو س = ٤، ص = ٣

ج) س = ٥، ص = ٢ أو س = −١، ص = −٤

د) س = ٣، ص = −١

هـ) س = ٠، ص = ٥ أو س = ٤، ص = −٣

و) س = ١، ص = ٠ أو س = $\frac{١}{٢}$، ص = $\frac{١}{٢}$

ز) س = ٠، ص = ٧

ح) س = ٣، ص = −٢ أو س = $\frac{١}{٧}$، ص = −١$\frac{٤}{٧}$

٢) (−٤، −٨)، (−١، −٥)

٣) أ) (٢، ٥) ، (١، ٣)

ب) (١، ٥) ، (−٢,٢، −٤,٦)

ج) (٣ ، ٤) ، (−١، −٤)

د) (١، ١) ، (−٤ ، ٣$\frac{١}{٢}$)

هـ) (٣، ٤)

و) (٢، −١) ، (−$\frac{٧}{٨}$، ٤$\frac{٣}{٤}$)

ز) (٥، −٢) ، (٢٧، ٤٢)

ح) ($\frac{١}{٢}$، −١)، (−١$\frac{٥}{٨}$، −١$\frac{١٧}{٢٠}$)

٤) (−$\frac{٣}{٤}$، ٦)

٥) ق = ك = ١٣

٦) ٦س + ١ = $س^{٢}$ + ٢س + ٣

$س^{٢}$ − ٤س + ٢ = ٠

س = ٤ ± $\sqrt{\frac{١٦ - ٨}{٢}}$

هذا يعطي قيمتَين لـ س:

س = ٢ + $\sqrt{٢}$ و س = ٢− $\sqrt{٢}$

عوّض في المعادلة الأولى للحصول على قيم ص.

٧) (٠، ٢)، (٠، −٢)، (−$\sqrt{٣}$ ، −١)، ($\sqrt{٣}$ ، −١)

٨) ك − س = $س^{٢}$ + ك س − ٣

٠ = $س^{٢}$ + (ك + ١) س − (٣ + ك)

للحصول على إجابتَين، يجب أن يكون المميز موجبًا.

المميز = $(ك + ١)^{٢}$ + ٤(٣ + ك)

= $ك^{٢}$ + ٦ك + ١٣ = $(ك + ٣)^{٢}$ + ٤ وبالتالي فهو دائمًا موجب.

٩) أ = −٧ ، ب = −٢

تمارين ١-٦

١) أ) أ = ±١,٧٣ أو أ = ±٢,٦٥

ب) س = ±٢ أو س = ±١,٧٣

ج) س = −١,٧١ أو س = ١,١٤

د) أ = −٢ أو أ = ١

هـ) س = ± ٢,١١

و) س = ± ٢,٤٥

ز) س = ٤ أو س = ١٦

ح) س = ٣٦ أو س = ١٦

ط) س = ١ أو س = ٢

ي) س = ٠ أو س = ٤

٢) س = ±٣ أو س = ±١

٣) س = ٠ أو س = −$\frac{٤}{١٥}$

٤) س = ٤ أو س = ١

٥) س = ٠ أو س = ٢

٦) س = ٠ أو س = ١

٧) س = −١ أو س = ٣

٨) س = ١٦

٩) أ س = ١٦ ب س = ٢٥ أو س = ٩

ج ب = ٤٩ د ب = ٢٥

هـ س = −٨ أو س = ٢٧ و ب = −١ أو ب = ٦٤

تمارين ١-٧

١) أ −٢√٢ ≤ س ≤ ٢√٢

ب −√٥ < س < √٥

ج س < −√٦ أو س > √٦

د س ≤ −٢√٣ أو س ≥ ٢√٣

هـ س < −١ أو س > ٤

و −٣/٢ < س < ٥/٢

ز س < −١ أو س > ٣

ح ٢ < س < ٤

ط س < ٣ أو س > ١٢

ي −٢ < س < ٢

٢) أ س < ½(−٣ − √٢٩) أو س > ½(−٣ + √٢٩)

ب لا يوجد حلّ

ج ½(٥ − √١٧) < س < ½(٥ + √١٧)

د صحيحة لجميع قيم س

هـ −٣ < س < ٣

و س = −١ فقط

ز ¼(٣ − √١٧) < س < ¼(٣ + √١٧)

ح ½(−٣ − √٤١) < س < ½(−٣ + √٤١)

ط س ≤ ¼(−٧ − √٤١) أو س ≥ ¼(−٧ + √٤١)

٣) أ س < ٢

ب −٣ < س < −٢ أو س > ١

ج −٢ < س < ١ أو س > ١٠

د ٠ < س < ٣ أو س > ٤

هـ −٢ < س < −١ أو ١ < س < ٢

و −٤ < س ≤ −١ أو ٢ < س ≤ ٤

٤) س < −٢ أو س > ١,٥

٥) −٥/٣ ≤ س ≤ ٢

٦) ٠,٩٠٤ ثانية

٧) أ س < ٢,٥ ب ٠,٥ < س < ٥

٨) ٠ < ك < ٦

٩) −٩ < ك < −١

١٠) م > ٠ أو م < −٨

١١) من أجل الحصول على جذور حقيقية ، يجب أن يكون المميز غير سالب.
المميز هو (ك − ٢)^{٢} − ٤ك(−٢) = ك^{٢} − ٤ك + ٤ + ٨ك = ك^{٢} + ٤ك + ٤ = (ك + ٢)^{٢} وهو عدد موجب دائمًا.

١٢) ٥ ≤ ن ≤ ٣٨

تمارين ١-٨

١) برهان

٢) −١ ± ٢√٦

٣) ± ٦√٢

٤) أ > ٢ أو أ < ٠

٥) برهن على أن ك^{٢} + ١٢ > ٠ لجميع قيم ك

٦) ٢، −٢

٧) −١

٨) ± ٥

٩) أ برهان

ب ١) المستقيم مماس للمنحنى

٢) لا يتقاطع المستقيم مع المنحنى

ج برهان

إجابات تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) س = ٣، ٢

٢) $٩\pm = $ ك

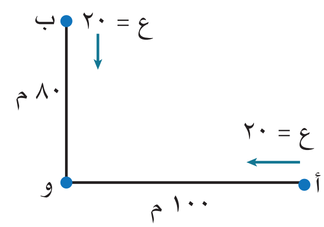
٣) المعادلة لها جذر واحد عند س = ٢
ولها جذران متساويان عند س = ٣،
الأمر الذي يعني أنه من المحور السيني إلى الأسفل
لا يوجد سوى حل واحد. إذًا، أكبر قيمة لـ م هي
الصفر.

٤) س = ١، س = ١٦

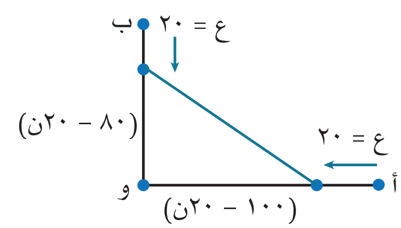
٥) أ $\frac{٥}{٦} + {}^{٢}\left(\frac{٥}{٦} + \text{س}\right)٦$

ب $\frac{٢٥}{٣٦} \leqslant (^{٢}٥ + \text{س}١٠ + {}^{٢}\text{س}٦)$

٦) أ هذا السؤال يصعب فهمه، لذا ابدأ برسم مخطط
يمثل الموقف:



في كل ثانية، تصبح السيارة (أ) ٢٠م أقرب إلى و،
لذا فإن المسافة الأفقية من و هي (١٠٠ − ٢ن)
في كل ثانية، تصبح السيارة (ب) ٢٠م أقرب إلى
و، لذا فإن المسافة الأفقية من و هي (٨٠ − ٢ن)
اتجاه السيارة (أ) يكون دائمًا ٩٠ درجة مع اتجاه
السيارة (ب)، لذا يمكن رسم مثلث قائم الزاوية
بحسب المواقع:



لأن المثلث قائم الزاوية، يمكن استخدام
نظرية فيثاغورس، أي أن المسافة م تساوي
م = $١٠٠ - ٢٠\text{ن}^{٢} = ٨٠ - ٢٠\text{ن}^{٢}$
يعطي ذلك أن $\text{م}^{٢} = ١٠٠ - ٢٠\text{ن}^{٢} + ٨٠ - ٢٠\text{ن}^{٢}$
كما هو المطلوب.

ب حلّ القوس إلى عوامله: $١٠٠ - ٢٠\text{ن}^{٢} = ٢٠(٥ - \text{ن}^{٢})$
الآن، أوجد مربع الطرفين لتصل إلى $٢٠٢٥ - \text{ن}^{٢}$
حلّ القوس إلى عوامله: $٨٠ - ٢٠\text{ن}^{٢} = ٢٠(٤ - \text{ن}^{٢})$
الآن، أوجد مربع الطرفين لتصل إل $٢٠٢٤ - \text{ن}^{٢}$
يعطي ذلك أن $\text{م}^{٢} = ٤٠٠٥ - \text{ن}^{٢} + ٤٠٠٤ - \text{ن}^{٢} =$
$\text{م}^{٢} = ٤٠٠(٥ - \text{ن}^{٢} + ٤ - \text{ن}^{٢})$

ج حل الأقواس إلى العوامل الأخيرة لتحصل على:
$٥ - \text{ن}^{٢} + ٤ - \text{ن}^{٢} = ٢٥ - ١٠\text{ن} + \text{ن}^{٢} + ١٦ - ٨\text{ن} + \text{ن}^{٢}$
$= ٤١ - ١٨\text{ن} + ٢\text{ن}^{٢}$
أكمل المربع للعبارة $٢\text{ن} - ٤,٥٢ + ٠,٥$
$\text{م}^{٢} = ٤٠٠(٢\text{ن} - ٤,٥٢ + ٠,٥)$
القيمة الصغرى التي يمكن الوصول إليها هي
عندما $\text{ن} - ٤,٥٢ = ٠$ والتي تقود للحصول على
$\text{م}^{٢} = ٤٠٠ \times ٠,٥ = ٢٠٠$
وعليه، $\text{م}^{٢} = ٢٠٠$ أو $\text{م} = \sqrt{٢٠٠} = ١٠\sqrt{٢}$

٧) أ $٢ \geqslant \text{س} \geqslant \frac{١}{٢}$

ب $\frac{٧}{٢} > \text{س} > \frac{١}{٢}-$

ج $٦,٣ < \text{س}$

٨) أ $٢ \times {}^{\text{س}}٢ = {}^{(١+\text{س})}٢$

$\left(\frac{١}{٢}\right) \times {}^{\text{س}}٢ = {}^{(١-)}٢ \times {}^{\text{س}}٢ = {}^{(١-\text{س})}٢$

عند جمع العبارتين نحصل على $٢\frac{١}{٢} \times {}^{\text{س}}٢$

ب س = ٦

٩) س = ١، ص = ١ أو س = ٤، ص = −١

١٠) س = −٢، س = ٠

١١) أ $\frac{١}{٢٤} > \text{ك}$

ب $\frac{٢٥}{١٢}- < \text{ك}$

ج $\frac{٣}{٥} = \text{ك}$

د $\frac{١٧}{٢٤}- < \text{ك}$

هـ $\frac{١٣}{٤}- \leqslant \text{ك}$

و $\frac{١}{١٦} \geqslant \text{ك}$

ز $\frac{٣}{٨} < \text{ك}$

ح $\frac{٢٥}{١٢}- > \text{ك}$

ط $\frac{١٧}{٤} = \text{ك}$

ي $\frac{٥٥}{٣٢} = \text{ك}$

ك $١ = \text{ك}$

ل $\frac{١}{٣٢} = \text{ك}$

م $٠ > \text{ك}$

ن $٠ > \text{ك}$

الوحدة الأولى: حلول التمارين

المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

تمارين ١-١

١) أ) س^{٢} − ٦س = (س − ٣)^{٢} − ٣^{٢}

= (س − ٣)^{٢} − ٩

ز) س^{٢} + ٧س + ١ = $\left(\text{س} + \frac{٧}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٧}{٢}\right)^{٢} + ١$

= $\left(\text{س} + \frac{٧}{٢}\right)^{٢} - \frac{٤٥}{٤}$

٢) ب) ٣س^{٢} − ١٢س − ١

خذ ٣ عوامل مشتركة بين الحدَّين الأول والثاني

٣(س^{٢} − ٤س) − ١

أكمل المربّع:

٣[(س − ٢)^{٢} − ٤] − ١

٣(س − ٢)^{٢} − ١٣

٣) ج) ٤ − ٣س − س^{٢}

٤ − (٣س + س^{٢})

= ٤ − $\left[\left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}\right]$

= ٤ + $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$

= $\frac{٢٥}{٤} - \left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$

٤) ب) ٣ − ١٢س − ٢س^{٢}

= ٣ − ٢(٦س + س^{٢})

= ٣ − ٢[(٣س + س^{٢}) − ٣^{٢}]

= ٣ − ٢(٣ + س^{٢})^{٢} + ١٨

= ٢١ − ٢(س + ٣)^{٢}

٥) أ) ٩س^{٢} − ٦س − ٣

استخدم الطريقة الجبرية:

٩س^{٢} − ٦س − ٣ = (أس + ب)^{٢} + جـ

= أ^{٢}س^{٢} + ٢أب س + ب^{٢} + جـ

٩ = أ^{٢} ....، −٦ = ٢أ ب .....، −٣ = ب^{٢} + جـ ....

فيكون ، أ = ±٣

عندما أ = ٣، −٦ = ٦ب، وتكون ب = −١ ثمّ:

−٣ = (−١)^{٢} + جـ، وتكون جـ = −٤

عندما أ = −٣، −٦ = −٦ب، وتكون ب = ١

−٣ = ١^{٢} + جـ، وتكون جـ = −٤

٩س^{٢} − ٦س − ٣ = (٣س − ١)^{٢} − ٤ = (−٣س + ١)^{٢} − ٤

٦) أ) س^{٢} + ٨س − ٩ = ٠

(س + ٤)^{٢} − ١٦ − ٩ = ٠

(س + ٤)^{٢} = ٢٥

خذ الجذر التربيعي للطرفَين:

س + ٤ = ±٥

س = −٩ ، أو س = ١

٧) أ) س^{٢} + ٤س − ٧ = ٠

(س + ٢)^{٢} − ٤ − ٧ = ٠

(س + ٢)^{٢} = ١١

س + ٢ = ±$\sqrt{١١}$

س = −٢ ± $\sqrt{١١}$

هـ) ٢س^{٢} + ٦س + ٣ = ٠

٢$\left[\left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \frac{٩}{٤}\right]$ + ٣ = ٠

٢$\left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \frac{٩}{٢}$ + ٣ = ٠

٢$\left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٣}{٢}$

٢$\left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٣}{٤}$

$\text{س} + \frac{٣}{٢} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{س} = -\frac{٣}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أو $\text{س} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٣}}{٢}$

٨) $\frac{٥}{\text{س} + ٢} + \frac{٣}{\text{س} - ٤} = ٢$

اضرب جميع الحدود في $(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٤)$:

$٥(\text{س} - ٤) + ٣(\text{س} + ٢) = ٢(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٤)$

$٥\text{س} - ٢٠ + ٣\text{س} + ٦ = ٢\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١٦$

$٢\text{س}^٢ - ١٢\text{س} - ٢ = ٠$ اقسم الطرفَين على ٢ لتحصل على:

$\text{س}^٢ - ٦\text{س} - ١ = ٠$

$(\text{س} - ٣)^٢ - ٣^٢ - ١ = ٠$

$(\text{س} - ٣)^٢ = ١٠$

$\text{س} - ٣ = \pm \sqrt{١٠}$

$\text{س} = ٣ \pm \sqrt{١٠}$

٩) استخدم نظرية فيثاغورس:

$(٢\text{س} + ٥)^٢ + \text{س}^٢ = ١٠^٢$

$٥\text{س}^٢ + ٢٠\text{س} - ٧٥ = ٠$

$\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ١٥ = ٠$

$(\text{س} + ٢)^٢ - ٢^٢ - ١٥ = ٠$

$(\text{س} + ٢)^٢ = ١٩$

$\text{س} + ٢ = \pm \sqrt{١٩}$

$\text{س} = \sqrt{١٩} - ٢$ أو

$\text{س} = -\sqrt{١٩} - ٢$ (مرفوض لأن طول الضلع لا يمكن أن يكون سالبًا)

$\text{س} = \sqrt{١٩} - ٢$

١٠) $(٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٧)^٤ = ١$

خذ الجذر الرابع للطرفَين فتحصل على:

$٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٧ = \pm ١$

إمّا: $٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٧ = ١$

$٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٨ = ٠$

$٣\left[\left(\text{س} + \frac{٥}{٦}\right)^٢ - \frac{٢٥}{٣٦}\right] - ٨ = ٠$

$٣\left(\text{س} + \frac{٥}{٦}\right)^٢ - \frac{٢٥}{١٢} - ٨ = ٠$

$٣\left(\text{س} + \frac{٥}{٦}\right)^٢ = \frac{١٢١}{١٢}$

$٣\left(\text{س} + \frac{٥}{٦}\right)^٢ = \frac{١٢١}{٣٦}$

$\text{س} + \frac{٥}{٦} = \pm \sqrt{\frac{١٢١}{٣٦}}$

$\text{س} + \frac{٥}{٦} = \frac{١١}{٦}$ أو $\text{س} + \frac{٥}{٦} = -\frac{١١}{٦}$

$\text{س} = ١$ أو $-\frac{٨}{٣}$

أو $٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٧ = -١$

$٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٦ = ٠$

$٣\left[\left(\text{س} + \frac{٥}{٦}\right)^٢ - \frac{٢٥}{٣٦}\right] - ٦ = ٠$

$٣\left(\text{س} + \frac{٥}{٦}\right)^٢ - \frac{٢٥}{١٢} - ٦ = ٠$

$٣\left(\text{س} + \frac{٥}{٦}\right)^٢ = \frac{٩٧}{١٢}$

$\left(\text{س} + \frac{٥}{٦}\right)^٢ = \frac{٩٧}{٣٦}$

$\text{س} + \frac{٥}{٦} = \pm \frac{\sqrt{٩٧}}{٦}$

$\text{س} = \frac{١}{٦}(-٥ - \sqrt{٩٧})$ أو $\text{س} = \frac{١}{٦}(\sqrt{٩٧} - ٥)$

$\text{س} = -\frac{٨}{٣}$، ١، $\frac{١}{٦}(-٥ - \sqrt{٩٧})$، $\frac{١}{٦}(\sqrt{٩٧} - ٥)$

١١) $\text{ص} = (\sqrt{٣})\,\text{س} - \frac{٤٩\text{س}^٢}{٩٠٠٠}$

أ المدى هو أكبر قيمة لـ س عندما ص = ٠ .

$(\sqrt{٣})\,\text{س} - \frac{٤٩\text{س}^٢}{٩٠٠٠} = ٠$ .... [١]

$٩٠٠٠(\sqrt{٣})\,\text{س} - ٤٩\text{س}^٢ = ٠$

$٤٩\left[\left(\text{س} - \frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}\right)^٢ - \left(\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}\right)^٢\right] = ٠$

$\left(\text{س} - \frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}\right)^٢ - \left(\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}\right)^٢ = ٠$

$\left(\text{س} - \frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}\right)^٢ = \left(\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}\right)^٢$

خذ الجذر التربيعي للطرفَين

$\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}$ − س = ± $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}$

س = $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}$ أو س = ٠ مرفوض

س = $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}$ = ٣١٨ م (مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية)

> التحليل إلى العوامل هي طريقة أخرى ممكنة لحل المعادلة (١)
>
> س($٩٠٠٠\sqrt{٣}$ − ٤٩س) = ٠
>
> إمّا س = ٠ (مرفوض) أو $٩٠٠٠\sqrt{٣}$ − ٤٩س = ٠
>
> س = $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}$ = ٣١٨ م (مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية).

ب أقصى ارتفاع يصل إليه هو أكبر قيمة لـ ص

وهذا يحدث عندما س = $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}$ لأن أعلى نقطة في المنحنى تمثّل نصف الفترة، فيكون:

ناتج قسمة $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٤٩}$ على ٢ يعطي $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}$

عوّض عن ص = ($\sqrt{٣}$) س − $\frac{٤٩س^{٢}}{٩٠٠٠}$ = ٠ للحصول على:

ص = ($\sqrt{٣}$) $\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}$ − $\frac{٤٩}{٩٠٠٠}$ $\left(\frac{٩٠٠٠\sqrt{٣}}{٩٨}\right)^{٢}$

ص = $\frac{٢٧٠٠٠}{٩٨}$ − $\frac{١٣٥٠٠}{٩٨}$

ص = ١٣٨ م (مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية).

تمارين ١-٢

١) **أ** ص = س^{٢} − ٦س + ٨ منحنى تربيعي.

قارن ص = س^{٢} − ٦س + ٨ مع

ص = أس^{٢} + ب س + جـ

قيمة أ = ١ فيكون أ > ٠ وتعني أن شكل المنحنى التربيعي على شكل ∪

نجد المقاطع السينية بتعويض ص = ٠ في:

ص = س^{٢} − ٦س + ٨

٠ = س^{٢} − ٦س + ٨

٠ = (س − ٢)(س − ٤)

س = ٢ أو س = ٤

المقاطع السينية هي (٢، ٠)، (٤، ٠)

نجد المقطع الصادي بتعويض س = ٠ في:

ص = س^{٢} − ٦س + ٨

ص = ٨

نقاط التقاطع مع المحورَين هي (٠، ٨)، (٢، ٠)، (٤، ٠).

للمنحنى نقطة قيمة صغرى (أو أقل قيمة) عند الرأس.

يوجد محور تماثل يمر في منتصف المسافة بين س = ٢، س = ٤، ويمر أيضًا في الرأس.

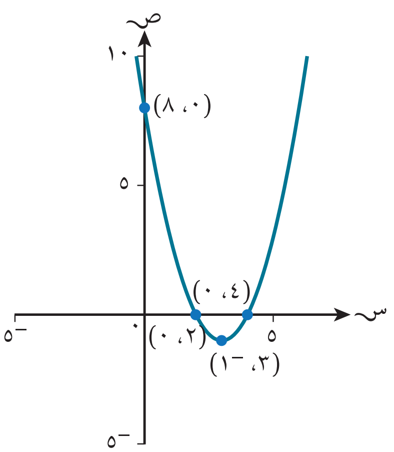
معادلة محور التماثل هي س = ٣

عوّض عن س = ٣ في ص = س^{٢} − ٦س + ٨ لتحصل على

ص= ٣^{٢} − ٦ × (٣) + ٨

ص = ⁻١

إحداثي الرأس (نقطة القيمة الصغرى) (٣، ⁻١).



د ص = ١٢ + س − س^{٢} منحنى تربيعي.

قارن ص = ١٢ + س − س^{٢} مع

ص = أس^{٢} + ب س + جـ

قيمة أ = −١ فيكون أ < ٠ وتعني أن شكل

المنحنى التربيعي على شكل ∩

نجد المقاطع السينية بتعويض ص= ٠ في:

ص = ١٢ + س − س^{٢}

٠ = ١٢ + س − س^{٢}

٠ = (٣ + س)(٤ − س)

س= −٣ أو س = ٤

المقاطع السينية (−٣، ٠)، (٤، ٠)

نجد المقطع الصادي بتعويض س = ٠ في:

ص = ١٢ + س − س^{٢}

ص = ١٢

نقاط التقاطع مع المحورَين هي (٠، ١٢)،

(−٣، ٠)، (٤، ٠).

للمنحنى نقطة قيمة عظمى (أعلى نقطة) وتقع

عند الرأس.

يوجد محور تماثل يمر في منتصف المسافة بين

س= −٣، س = ٤ ويمر أيضًا في الرأس.

معادلة محور التماثل س = $\frac{١}{٢}$

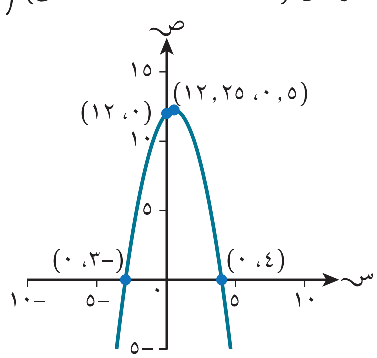
عوّض عن س = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة

ص = ١٢ + س − س^{٢} لتحصل على

ص = ١٢ + $\frac{١}{٢}$ − $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

ص = ١٢ + $\frac{١}{٤}$

الرأس (نقطة القيمة العظمى) $\left(\frac{١}{٢}، ١٢\frac{١}{٤}\right)$



٢) أ ٢س^{٢} − ٨س + ٥

٢(س^{٢} − ٤س) + ٥

٢ [(س − ٢)^{٢} − ٢^{٢}] + ٥

[٢(س − ٢)^{٢} − ٨] + ٥

٢(س − ٢)^{٢} − ٣

ب يمر محور تماثل المنحنى في الرأس وهو (٢، −٣)

معادلة محور التماثل هي س = ٢

٣) أ ص = ٧ + ٥س − س^{٢}

ص = ٧ − (س^{٢} − ٥ س)

ص = ٧ − $\left[\left(س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٢٥}{٤}\right]$

ص = $\frac{٢٥}{٤}$ − $\left(س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢}$

ب شكل منحنى الدالة على شكل ∩

للمنحنى نقطة قيمة عظمى (أعلى نقطة) وهي

نقطة تحول عند الرأس $\left(\frac{٥}{٢}، \frac{٥٣}{٤}\right)$

نقطة القيمة العظمى هي $\left(\frac{٥}{٢}، \frac{٥٣}{٤}\right)$ أو $\left(٢\frac{١}{٢}، ١٣\frac{١}{٤}\right)$

٥) س^{٢} − ٧س + ٨

> المطلوب إيجاد القيمة الصغرى. ثمّة طريقتان يمكن أن تستخدمهما:
>
> الطريقة ١ التحليل إلى العوامل (إن أمكن)
>
> الطريقة ٢ الإكمال إلى مربّع.

س^{٢} − ٧ س+ ٨ لا تحلل إلى العوامل، لذا:

أكمل إلى مربّع لتحصل على:

$\left(س - \frac{٧}{٢}\right)^{٢}$ − $\frac{٤٩}{٤}$ + ٨

$\left(س - \frac{٧}{٢}\right)^{٢}$ − $\frac{١٧}{٤}$

> انتبه، لقد طُلب إليك إيجاد القيمة الصغرى، وليس النقطة الصغرى.

القيمة الصغرى − ٤$\frac{١}{٤}$ [عندما (س = ٣$\frac{١}{٢}$)]

٧) منحنى ص = ٤س^{٢} + ٢س + ٥ هو منحنى تربيعي شكله على شكل ∪

أكمل إلى مربّع لتجد الرأس (نقطة القيمة الصغرى).

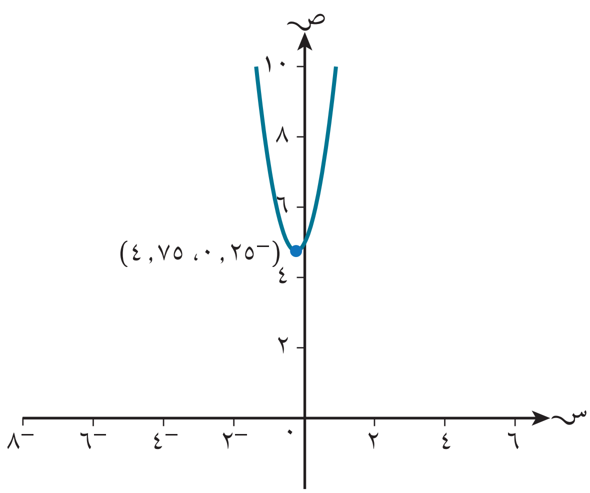
ص = ٤(س^{٢} + $\frac{١}{٢}$س) + ٥

ص = ٤[(س + $\frac{١}{٤}$)^{٢} − ($\frac{١}{٤}$)^{٢}] + ٥

ص = ٤[(س + $\frac{١}{٤}$)^{٢} − $\frac{١}{٤}$] + ٥

ص = ٤(س + $\frac{١}{٤}$)^{٢} + $\frac{١٩}{٤}$

الرأس (−$\frac{١}{٤}$، $\frac{١٩}{٤}$) يقع أعلى محور السينات.



٨) المنحنى (أ)، رأس المنحنى (أ) هو (٤، ٢).

النقطة (٦، ٦)

تقع على المنحنى.

لا يوجد مقطع سيني.

توجد ثلاث صور للمعادلة التربيعية:

١) **ص = أس^{٢} + ب س + جـ**

أي ثلاث نقاط على المنحنى التربيعي تمكننا من تشكيل ثلاث معادلات وحلّها آنيًا.

على الرغم من ذلك، فهذه طريقة طويلة وتشوبها الأخطاء.

٢) **ص = أ(س − د) (س − هـ)**

لتستخدم هذه الصورة، عليك أن تعرف المقاطع السينية إن وجدت.

٣) **ص = أ(س − و)^{٢} + ح**

لتستخدم هذه الصورة عليك أن تعرف إحداثيات الرأس (و، ح)، بالإضافة إلى نقطة أخرى على المنحنى التربيعي.

استخدم ص = أ(س − و)^{٢} + ح وعوّض عن

و = ٤، ح = ٢

ص = أ(س − ٤)^{٢} + ٢

الآن عوّض عن س = ٦، ص = ٦ لتحصل على

٦= أ(٦ − ٤)^{٢} + ٢

أ = ١

فيكون، ص = (س − ٤)^{٢} + ٢

المنحنى (ب)، رأس المنحنى عند (−٢، −٦).

المقاطع السينية ليست معروفة.

النقطة (٠، ١٠) تقع على المنحنى.

استخدم ص = أ(س − و)^{٢} + ح وعوّض عن

و = −٢، ح = −٦

ص = أ(س − −٢)^{٢} − ٦

ص = أ(س + ٢)^{٢} − ٦

الآن عوّض عن س = ٠، ص = ١٠ لتحصل على

١٠ = أ(٠ + ٢)^{٢} − ٦

أ = ٤

لذا يكون ص = ٤(س + ٢)^{٢} − ٦

المنحنى (ج)، توجد أكثر من ثلاث معلومات يمكن قراءتها من المنحنى.

فمثلًا: رأس المنحنى (٢، ٨)

المقطعان السينيان هما س = −٢، س = ٦

النقطة (٠، ٦) على المنحنى.

استخدم ص = أ(س − د)(س − هـ)

عوّض عن د = −٢، هـ = ٦

ص = أ(س + ٢)(س − ٦)

الآن عوّض عن س = ٢، ص = ٨ لتحصل على

٨ = أ(٢ + ٢)(٢ − ٦)

أ = −$\frac{١}{٢}$

فيكون، ص = − $\frac{١}{٢}$ (س + ٢)(س − ٦)

٩) ص = س^{٢} − ٦س + ١٣
المنحنى التربيعي على شكل ∪
أكمل إلى مربّع لتحصل على:
ص = (س − ٣)^{٢} + ٤
الرأس عند (٣، ٤)
ص = س^{٢} − ٦س + ١٣ هو المنحنى (أ)
ص = − س^{٢} − ٦س − ٥
المنحنى التربيعي على شكل ∩
أكمل إلى مربّع لتحصل على:
ص = −(س^{٢} + ٦س) − ٥
ص = −[(س + ٣)^{٢} − ٩] − ٥
ص = −(س + ٣)^{٢} + ٤
فيكون الرأس عند (−٣، ٤)
ص = − س^{٢} − ٦س − ٥ هو (ز)

منحنى ص = −س^{٢} − ب س − جـ هو انعكاس لمنحنى
ص = س^{٢} + ب س + جـ حول المحور السيني، أي أن
د(س) ← − د(س)
ص = س^{٢} − ب س + جـ هو انعكاس لمنحنى
ص = س^{٢} + ب س + جـ حول المحور الصادي، أي أن
د(س) ← − د(−س)
سيتكرّر الأمر في الوحدة الثانية.

معادلة المنحنى (و) هي ص = س^{٢} + ٦س + ٥ وهي
انعكاس المنحنى (ز) حول المحور السيني
معادلة المنحنى (د) هي ص = −س^{٢} + ٦س − ١٣ وهي
انعكاس المنحنى (أ) حول المحورالسيني.
معادلة المنحنى (هـ) هي ص = س^{٢} + ٦س + ١٣ وهي
انعكاس المنحنى (أ) حول المحورالصادي
معادلة المنحنى (ب) هي ص = س^{٢} + ٦س + ٥ وهي
انعكاس المنحنى (و) حول المحورالصادي
معادلة المنحنى (ج) هي ص = −س^{٢} + ٦س − ٥ وهي
انعكاس المنحنى (ز) حول المحورالصادي
معادلة المنحنى (ح) هي ص = −س^{٢} − ٦س − ١٣ وهي
انعكاس المنحنى (هـ) حول المحورالسيني.
(ثمّة طرائق أخرى لحلّ التمرين).

١٠) استخدم ص = أ(س − و)^{٢} + ق
الرأس هو (ك، ل)
عوّض عن و = ك، ل = ق لتحصل على
ص = أ(س − ك)^{٢} + ل
فكّ الأقواس لتحصل على:
ص = أ(س^{٢} − ٢ك س + ك^{٢}) + ل
ص = أس^{٢} − ٢أك س + أك^{٢} + ل

تمارين ١-٣

١) ب) س^{٢} + ٥س − ٣٦ = ٠
أ = ١، ب = ٥، جـ = −٣٦
عوّض في ب^{٢} − ٤أجـ لتحصل على:
٥^{٢} − ٤(١)(−٣٦) وهي < ٠ وعليه، يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

هـ) ٢س^{٢} − ٧س + ٨ = ٠
أ = ٢، ب = −٧، جـ = ٨
عوّض في ب^{٢} − ٤أجـ لتحصل على:
(−٧)^{٢} − ٤(٢)(٨) وهي < ٠ لذا لا توجد جذور حقيقية.

٢) ٢ − ٥س = $\frac{٤}{س}$
أعد الترتيب وبسّط:
٥س^{٢} − ٢س + ٤ = ٠
أ = ٥، ب = −٢، جـ = ٤
عوّض في ب^{٢} − ٤أجـ لتحصل على:
(−٢)^{٢} − ٤(٥)(٤) وهي < ٠ لذا لا توجد جذور حقيقية.

٣) س^{٢} − ٥س + ٩ = ك(٥ − س)
س^{٢} − ٥س + ٩ − ٥ك − ك س = ٠
س^{٢} + (ك − ٥)س + ٩ − ٥ك = ٠

حتى يكون الجذران متساويَين: $ب^٢ - ٤أجـ = ٠$

$(ك - ٥)^٢ - ٤ \times ١ \times (٩ - ٥ك) = ٠$

$ك^٢ - ١٠ك + ٢٥ - ٣٦ + ٢٠ك = ٠$

$ك^٢ + ١٠ك - ١١ = ٠$

$(ك + ١١)(ك - ١) = ٠$

ك = −١١ أو ك = ١

٤) **ب)** $٤س^٢ + ٤(ك - ٢)س + ك = ٠$

فيكون، أ = ٤، ب = ٤(ك − ٢)، جـ = ك

حتى يكون الجذران متساويَين، $ب^٢ - ٤أجـ = ٠$

$[٤(ك - ٢)]^٢ - ٤(٤)(ك) = ٠$ ويمكن تبسيطها إلى:

$١٦ك^٢ - ٨٠ك + ٦٤ = ٠$ أو

$ك^٢ - ٥ك + ٤ = ٠$

$(ك - ٤)(ك - ١) = ٠$

فتكون، ك = ١ أو ك = ٤

هـ) $(ك + ١)س^٢ + ك س - ٢ك = ٠$

فيكون ، أ = (ك + ١) ، ب = ك، جـ = −٢ك

حتى يكون الجذران متساويَين فإن $ب^٢ - ٤أجـ = ٠$

$ك^٢ - ٤(ك + ١)(-٢ك) = ٠$

$ك^٢ + ٨ك(ك + ١) = ٠$

$٩ك^٢ + ٨ك = ٠$

$ك(٩ك + ٨) = ٠$

ك = ٠ أو $ك = -\frac{٨}{٩}$

٥) $ك س^٢ + ل س + ٥ = ٠$

فيكون، أ = ك، ب = ل، جـ = ٥

حتى يكون الجذران متساويَين فإن $ب^٢ - ٤أجـ = ٠$

$ل^٢ - ٤(ك)(٥) = ٠$

$ل^٢ - ٢٠ك = ٠$

$ك = \frac{ل^٢}{٢٠}$

تمارين ١-٤

١) **أ)** $س^٢ - ١٠س - ٣ = ٠$

استخدم أ = ١، ب = −١٠، جـ = −٣

الصيغة التربيعية تعطي:

$$س = \frac{-(-١٠) \pm \sqrt{(-١٠)^٢ - ٤ \times ١ \times (-٣)}}{٢ \times ١}$$

$س = \frac{١٠ + \sqrt{١١٢}}{٢}$ أو $س = \frac{١٠ - \sqrt{١١٢}}{٢}$

س = ١٠,٢٩ أو س = −٠,٢٩ (مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية)

٢) $س(٣س - ٢) = ٦٣$

$٣س^٢ - ٢س - ٦٣ = ٠$

$$س = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^٢ - ٤ \times ٣ \times (-٦٣)}}{٢ \times ٣}$$

$س = \frac{٢ + \sqrt{٧٦٠}}{٦}$ أو $س = \frac{٢ - \sqrt{٧٦٠}}{٦}$

س = ٤,٩٢٨ أو س = −٤,٢٦١ (مرفوض)

س = ٤,٩٣ (مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية)

٣) $س(٢س - ٤) = (س + ١)(٥ - س)$

$٣س^٢ - ٨س - ٥ = ٠$

$$س = \frac{-(-٨) \pm \sqrt{(-٨)^٢ - ٤ \times ٣ \times (-٥)}}{٢ \times ٣}$$

$س = \frac{٨ + \sqrt{١٢٤}}{٦}$ أو $س = \frac{٨ - \sqrt{١٢٤}}{٦}$

س = ٣,١٨٩ أو س = −٠,٥٢٢٦ (مرفوض)

س = ٣,١٩ (مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية)

٤) $\frac{٥}{س - ٣} + \frac{٢}{س + ١} = ١$

اضرب الطرفَين في (س − ٣)(س + ١) لتحصل على:

$٥(س + ١) + ٢(س - ٣) = ١(س - ٣)(س + ١)$

$س^٢ - ٩س - ٢ = ٠$

$$س = \frac{-(-٩) \pm \sqrt{(-٩)^٢ - ٤ \times ١ \times (-٢)}}{٢ \times ١}$$

$س = \frac{٩ + \sqrt{٨٩}}{٢}$ أو $س = \frac{٩ - \sqrt{٨٩}}{٢}$

س = ٩,٢٢ أو س = −٠,٢١٧ (مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية)

٥) $\text{أس}^{٢} - \text{ب س} + \text{جـ} =$

$$\text{س} = \frac{-(-\text{ب}) \pm \sqrt{(-\text{ب})^{٢} - ٤ \times \text{أ} \times \text{جـ}}}{٢ \times \text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}} \pm \frac{\sqrt{(\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ})}}{٢\text{أ}}$$

قارن مع $\text{س} = \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$ أو

$$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} \pm \frac{\sqrt{(\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ})}}{٢\text{أ}}$$

كلّ من هذه الحلول تزداد بمقدار $\dfrac{\text{ب}}{\text{أ}}$

تمارين ١-٥

١) ب $\text{س} + ٤\text{ص} = ٦$ .... (١)

$\text{س}^{٢} + ٢\text{س ص} = ٨$ .... (٢)

من المستحسن تجنب الكسور عند استخدام التعويض.

$\text{س} = ٦ - ٤\text{ص}$

عوّض في المعادلة (٢) لتحصل على:

$(٦ - ٤\text{ص})^{٢} + ٢(٦ - ٤\text{ص})\text{ص} = ٨$

$٨\text{ص}^{٢} - ٣٦\text{ص} + ٢٨ = ٠$

اقسم على ٤

$٢\text{ص}^{٢} - ٩\text{ص} + ٧ = ٠$

$(\text{ص} - ١)(٢\text{ص} - ٧) = ٠$

$\text{ص} = ١$ أو $\text{ص} = \dfrac{٧}{٢}$

عوّض في المعادلة (١) لتحصل على:

إذا كانت $\text{ص} = ١$ فإن $\text{س} = ٢$

إذا كانت $\text{ص} = \dfrac{٧}{٢}$ فإن $\text{س} = -٨$

عوّض دائمًا لتجد قيمة المتغير الثاني في المعادلة الخطية.

الحلول هي $\left(-٨، \dfrac{٧}{٢}\right)$، $(٢، ١)$

و $٤\text{س} - ٣\text{ص} = ٥$ .... (١)

$\text{س}^{٢} + ٣\text{س ص} = ١٠$ ...... (٢)

قبل أن تبدأ في الحلّ ابحث عن الطريقة الأقل تعقيدًا.

الطريقة ١

اكتب س بدالة ص في المعادلة (١)

$\text{س} = \dfrac{٥ + ٣\text{ص}}{٤}$

عوّض في المعادلة (٢)

$\left(\dfrac{٥ + ٣\text{ص}}{٤}\right)^{٢} + ٣\left(\dfrac{٥ + ٣\text{ص}}{٤}\right)\text{ص} = ١٠$

$\dfrac{(٥ + ٣\text{ص})^{٢}}{١٦} + \dfrac{٣\text{ص}(٥ + ٣\text{ص})}{٤} = ١٠$

$(٥ + ٣\text{ص})^{٢} + ١٢\text{ص}(٥ + ٣\text{ص}) = ١٦٠$

$٤٥\text{ص}^{٢} + ٩٠\text{ص} - ١٣٥ = ٠$

$\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} - ٣ = ٠$

$(\text{ص} + ٣)(\text{ص} - ١) = ٠$

$\text{ص} = -٣$ أو $\text{ص} = ١$

عوّض عن ص في المعادلة (١)

$٤\text{س} - ٣(-٣) = ٥$ أو $٤\text{س} - ٣(١) = ٥$

$\text{س} = -١$ $\qquad$ $\text{س} = ٢$

الحلول هي $(-١، -٣)$، $(٢، ١)$

الطريقة البديلة أدناه أكثر سهولة.

الطريقة ٢

في المعادلة (١)، اضرب $٤\text{س} - ٣\text{ص} = ٥$ في س

ثم اجمع المعادلة الناتجة إلى (٢).

$٤س - ٣ص = ٥$

$س^{٢} + ٣س ص = ١٠$

الجمع يعطي $٥ س^{٢} = ٥س + ١٠$ أو $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س = ٢$ أو $س = -١$

عوِّض ثانية في المعادلة الخطية (١) لتحصل على:

$٤(٢) - ٣ص = ٥$ و $٤(-١) - ٣ص = ٥$

$ص = ١$ $\quad$ $ص = -٣$

الحلول هي (٢، ١)، (−١، −٣)

ل) $س + ٢ص = ٥$ .... (١)

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$ .... (٢)

> الخطأ الشائع هو إعادة كتاب المعادلة (٢) في صورة
> $س + ص = \sqrt{١٠}$

من المعادلة (١) $س = ٥ - ٢ص$

عوّض عن س في المعادلة (٢)

$(٥ - ٢ص)^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

$٥ص^{٢} - ٢٠ص + ١٥ = ٠$

$ص^{٢} - ٤ص + ٣ = ٠$

$(ص - ٣)(ص - ١) = ٠$

$ص = ٣$ أو $ص = ١$

عوّض ثانية في المعادلة (١) لتحصل على:

$س + ٢(٣) = ٥$ و $س + ٢(١) = ٥$

$س = -١$ $\quad$ $س = ٣$

الحلول هي (−١، ٣)، (٣، ١)

٢) لتكن أطوال أضلاع المربّعَين هي (س) سم، (ص) سم

مجموع المحيطَين $٤س + ٤ص = ٥٠$ .... (١)

مجموع المساحتَين $س^{٢} + ص^{٢} = ٩٣,٢٥$ ...... (٢)

من المعادلة (١) $س = \frac{٢٥ - ٢ص}{٢}$

عوّض عن س في المعادلة (٢)

$$\left(\frac{٢٥ - ٢ص}{٢}\right)^{٢} + ص^{٢} = ٩٣,٢٥$$

$(٢٥ - ٢ص)^{٢} + ٤ص^{٢} = ٣٧٣$

$٨ص^{٢} - ١٠٠ص + ٢٥٢ = ٠$

$٢ص^{٢} - ٢٥ص + ٦٣ = ٠$

$$ص = \frac{-(-٢٥) \pm \sqrt{(-٢٥)^{٢} - ٤ \times ٢ \times (٦٣)}}{٢ \times ٢}$$

$ص = ٩$ أو $ص = ٣\frac{١}{٢}$

عوّض عن $ص = ٩$ في (١) لتحصل على $س = ٣\frac{١}{٢}$

عوّض عن $ص = ٣\frac{١}{٢}$ في (١) لتحصل على $س = ٩$

أطوال أضلاع المثلّثَين هي $٣\frac{١}{٢}$ سم و ٩ سم.

٣) ليكن نصفا القطرَين هما (س)، (ص)

$٢\pi س + ٢\pi ص = ٣٦\pi$ .... (١)

$\pi س^{٢} + \pi ص^{٢} = ١٧٠\pi$ .... (٢)

بسّط كلا المعادلتَين:

$س + ص = ١٨$ .... (١)

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٧٠$ .... (٢)

من المعادلة (١) $س = ١٨ - ص$

عوّض عن س في المعادلة (٢)

$(ص - ١١)(ص - ٧) = ٠$

$ص = ١١$ أو $ص = ٧$

عوّض عن $ص = ١١$ في المعادلة (١) لتحصل على $س = ٧$

عوّض عن $ص = ٧$ في المعادلة (١) لتحصل على $س = ١١$

نصفا القطرَين هما ٧ سم، ١١ سم

٤) $ع + نق = ١٨$ .... (١)

$\frac{١}{٢}(٤\pi نق^{٢}) + ٢\pi نق^{٢} + ٢\pi ع نق = ٢٠٥\pi$ .... (٢)

بسّط المعادلة (٢):

$٣نق^{٢} + ٢نق ع - ٢٠٥ = ٠$

من المعادلة (١) $ع = ١٨ - نق$

عوّض عن ع في المعادلة (٢) لتحصل على:

$٣نق^{٢} + ٢نق(١٨ - نق) - ٢٠٥ = ٠$

$نق^{٢} + ٣٦نق - ٢٠٥ = ٠$

$(نق - ٥)(نق + ٤١) = ٠$

نق = ٥ أو −٤١ (مرفوض)

عوّض عن نق = ٥ في (١) تحصل على ع = ١٣

الحلّ هو نق = ٥، ع = ١٣

٥) ص = ٢ − س .... (١)

٥س^{٢} − ص^{٢} = ٢٠ .... (٢)

عوّض عن ص في المعادلة (٢) لتحصل على:

٥س^{٢} − (٢ − س)^{٢} = ٢٠

س^{٢} + س − ٦ = ٠

(س + ٣)(س − ٢) = ٠

س = ٢ أو س = −٣

عوّض عن س = ٢ في (١) لتحصل على ص = ٠

عوّض عن س = −٣ في (١) لتحصل على ص = ٥

أ(٢، ٠)، ب(−٣، ٥) (أو العكس)

٦) ٢س + ٥ ص = ١ .... (١)

س^{٢} + ٥س ص − ٤ص^{٢} + ١٠ = ٠ .... (٢)

من المعادلة (١) س = $\frac{\text{١ − ٥ص}}{\text{٢}}$

عوّض عن س في المعادلة (٢) لتحصل على:

$\left(\frac{\text{١ − ٥ص}}{\text{٢}}\right)^{٢} + \text{٥}\left(\frac{\text{١ − ٥ص}}{\text{٢}}\right)\text{ص − ٤ص}^{٢}\text{ + ١٠ = ٠}$

(١ − ٥ص)^{٢} + ١٠(١ − ٥ص)ص − ١٦ص^{٢} + ٤٠ = ٠

−٤١ص^{٢} + ٤١ = ٠

−٤١(ص^{٢} − ١) = ٠

−٤١(ص − ١)(ص + ١) = ٠

ص = ١ أو ص = −١

عوّض عن ص = ١ في (١) لتحصل على س = −٢

عوّض عن ص = −١ في (١) لتحصل على س = ٣

تقع أ عند (−٢، ١)، ب عند (٣، −١) أو العكس.

٧) أ ليكن الجزءان س، ص

س + ص = ١٠ .... (١)

س^{٢} − ص^{٢} = ٦٠ .... (٢)

من المعادلة (١) س = ١٠ − ص

عوّض عن س في المعادلة (٢)

(١٠ − ص)^{٢} − ص^{٢} = ٦٠

−٢٠ ص = −٤٠

ص = ٢

فيكون س = ٨

ب س + ص = ن .... (١)

س^{٢} − ص^{٢} = د .... (٢)

(ن − ص)^{٢} − ص^{٢} = د

ن^{٢} − ٢ن ص = د

٢ن ص = ن^{٢} − د

ص = $\frac{\text{ن}^{٢}}{\text{٢ن}} - \frac{\text{د}}{\text{٢ن}}$

ص = $\frac{\text{ن}}{\text{٢}} - \frac{\text{د}}{\text{٢ن}}$

س = ن − $\left(\frac{\text{ن}}{\text{٢}} - \frac{\text{د}}{\text{٢ن}}\right)$

س = $\frac{\text{ن}}{\text{٢}} + \frac{\text{د}}{\text{٢ن}}$

الجزءان هما $\frac{\text{ن}}{\text{٢}} + \frac{\text{د}}{\text{٢ن}}$، $\frac{\text{ن}}{\text{٢}} - \frac{\text{د}}{\text{٢ن}}$

تمارين ١-٦

١) أ **الطريقة (١) (التعويض)**

س^{٤} − ١٣س^{٢} + ٣٦ = ٠

لتكن ص = س^{٢}، فيكون:

ص^{٢} − ١٣ ص + ٣٦ = ٠

(ص − ٤)(ص − ٩) = ٠

ص = ٤ أو ص = ٩

س^{٢} = ٤ أو س^{٢} = ٩

س = ±٢ أو س = ±٣

الطريقة (٢) (التحليل المباشر إلى العوامل)

(س^{٢} − ٤)(س^{٢} − ٩) = ٠

س^{٢} = ٤ أو س^{٢} = ٩

س = ±٢ أو س = ±٣

ل $\frac{٨}{س^{٦}} + \frac{٧}{س^{٣}} = ١$

٨ + ٧س^{٣} = س^{٦}

س^{٦} − ٧س^{٣} − ٨ = ٠

(س^{٣} − ٨)(س^{٣} + ١) = ٠

س^{٣} = ٨ أو س^{٣} = −١

س = ٢ أو س = −١

٢) ب $\sqrt{س}$ ($\sqrt{س}$ + ١) = ٦

س + $\sqrt{س}$ − ٦ = ٠

لتكن ص = $\sqrt{س}$ ، فيكون:

ص^{٢} + ص − ٦ = ٠

(ص + ٣)(ص − ٢) = ٠

ص = −٣ أو ص = ٢

$\sqrt{س}$ = −٣ (لا يوجد حلّ لأن $\sqrt{س}$ غير موجود للقيم السالبة)

$\sqrt{س}$ = ٢

س = ٤

و ٣$\sqrt{س}$ + $\frac{٥}{\sqrt{س}}$ = ١٦

٣س − ١٦$\sqrt{س}$ + ٥ = ٠

لتكن ص= $\sqrt{س}$ ، فإن:

٣ص^{٢} − ١٦ص + ٥ = ٠

(٣ ص − ١)(ص − ٥) = ٠

ص = $\frac{١}{٣}$ أو ص = ٥

$\sqrt{س}$ = $\frac{١}{٣}$ أو $\sqrt{س}$ = ٥

س = $\frac{١}{٩}$ أو س = ٢٥

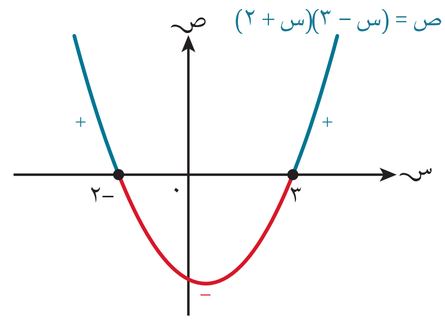
تمارين ١-٧

١) ب (س − ٣)(س + ٢) > ٠

ارسم منحنى ص = (س − ٣) (س + ٢)

المنحنى التربيعي على شكل ∪

يقطع المنحنى محور السينات عند س = −٢، س = ٣



بما أن (س − ٣)(س + ٢) > ٠ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا (فوق محور السينات).

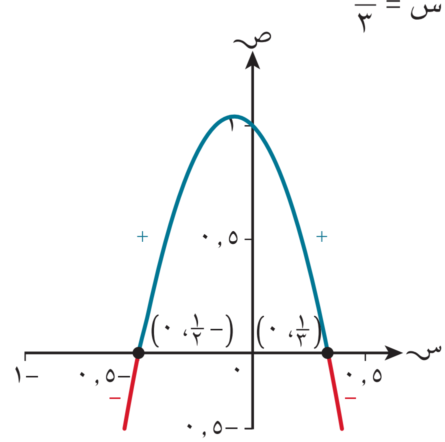
الحلّ هو س < −٢ أو س > ٣

و (١ − ٣س)(٢س + ١) < ٠

ارسم منحنى ص = (١ − ٣س)(٢س + ١)

المنحنى التربيعي على شكل ∩

يقطع المنحنى محور السينات عند س = $-\frac{١}{٢}$، س = $\frac{١}{٣}$



بما أن (١ − ٣س)(٢س + ١) < ٠ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها سالبًا (تحت محور السينات).

الحلّ هو س < $-\frac{١}{٢}$ أو س > $\frac{١}{٣}$

٢) أ س^{٢} − ٢٥ ≥ ٠

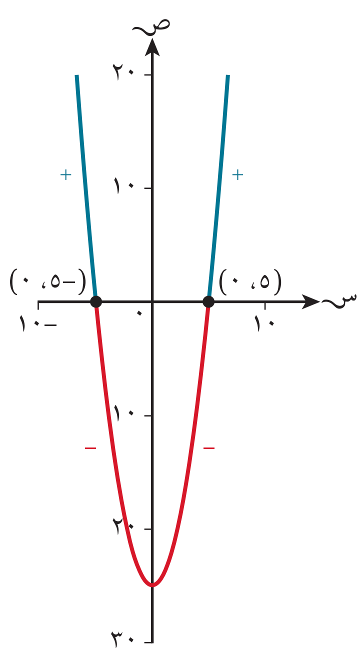
حلّل إلى العوامل الطرف الأيمن من المتباينة:

(س − ٥)(س + ٥) ≥ ٠

ارسم منحنى ص = (س − ٥)(س + ٥)

المنحنى تربيعي على شكل ∪

يقطع المنحنى محور السينات عند س = ٥ أو س = −٥



بما أن س^{٢} − ٢٥ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها صفرًا أو موجبًا (على محور السينات وأعلاه).

الحلّ هو س ≤ −٥ أو س ≥ ٥

هـ ٦س^{٢} − ٢٣س + ٢٠ < ٠

حلّل إلى العوامل الطرف الأيسر من المتباينة:

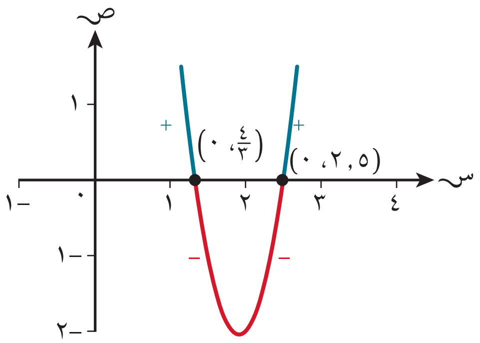
(٣س − ٤)(٢س − ٥) < ٠

ارسم منحنى ص = (٣س − ٤)(٢س − ٥)

المنحنى تربيعي على شكل U

يقطع المنحنى محور السينات عند س = $\frac{٤}{٣}$

و س = $\frac{٥}{٢}$



بما أن ٦س^{٢} − ٢٣س + ٢٠ < ٠ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها سالبًا (تحت محور السينات).

الحلّ هو $\frac{٤}{٣}$ < س < $\frac{٥}{٢}$

٣) ب ١٥س < س^{٢} + ٥٦

أعد الترتيب لتحصل على:

س^{٢} − ١٥س + ٥٦ > ٠

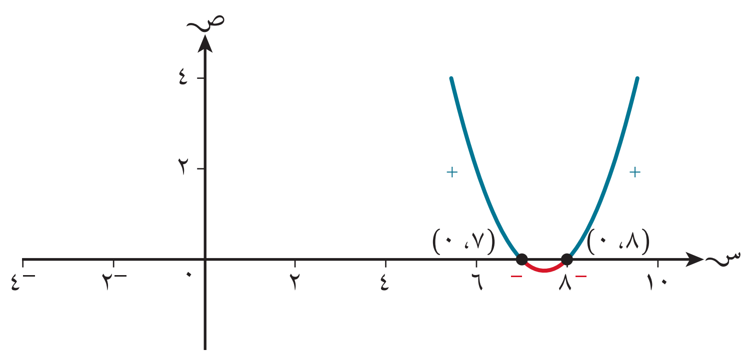
حلل الطرف الأيمن من المتباينة إلى عوامله:

(س − ٧)(س − ٨) > ٠

ارسم منحنى ص = (س − ٧)(س − ٨)

المنحنى التربيعي على شكل U

يقطع المنحنى محور السينات عند النقطتَين س = ٧، س = ٨



بما أن س^{٢} − ١٥س + ٥٦ > ٠ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا (فوق محور السينات).

الحلّ هو س < ٧ أو س > ٨

ز) $(س + ٤)^{٢} \geqslant ٢٥$

فكّ الأقواس وأعد الترتيب:

$س^{٢} + ٨س - ٩ \geqslant ٠$

حلّل الطرف الأيمن من المتباينة إلى عوامله:

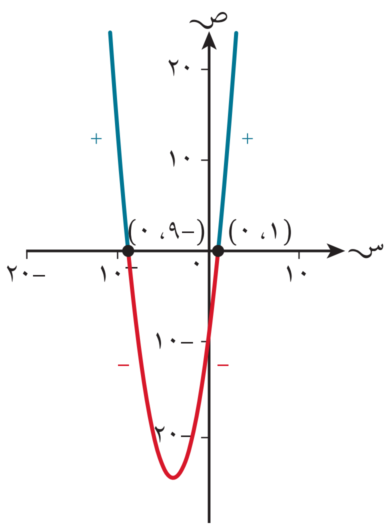
$(س - ١)(س + ٩) \geqslant ٠$

ارسم منحنى الدالة ص = (س − ١)(س + ٩)

المنحنى التربيعي شكله ∪

يقطع المنحنى محور السينات عند س= ١،

س = −٩



بما أن $س^{٢} + ٨س - ٩ \geqslant ٠$ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا أو صفرًا (فوق محور السينات أو على المحور).

الحلّ هو س ⩽ −٩ أو س ⩾ ١

٤) $\dfrac{٥}{٢س^{٢} + س - ١٥} < ٠$

$\dfrac{\text{قيمة موجبة}}{\text{قيمة سالبة}} < ٠$ (البسط دائمًا موجب فيكون المقام سالبًا)

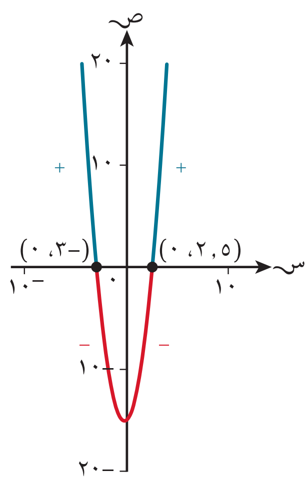
حلّل المقام إلى العوامل:

$\dfrac{٥}{(٢س - ٥)(س + ٣)} < ٠$

٥ كميّة موجبة، لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل (٢س − ٥)(س + ٣) سالبة أي < ٠

فيكون (٢س − ٥)(س + ٣) < ٠

منحنى ص = (٢س − ٥)(س + ٣)، تربيعي على شكل ∪



يقطع المنحنى محور السينات عند س = −٣،

س = ٢,٥

(نتيجة حلّ ٢س − ٥ = ٠، س + ٣ = ٠).

نريد (٢س − ٥) (س + ٣) < ٠ لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل المنحنى سالبًا (تحت محور السينات).

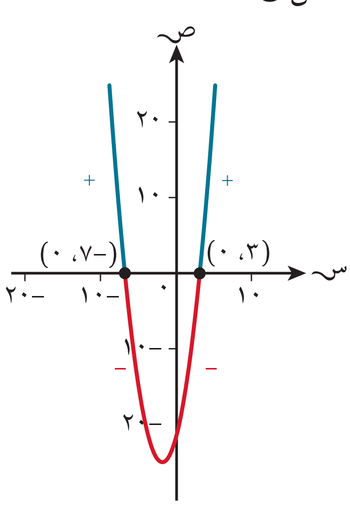
الحلّ هو −٣ < س < ٢,٥

٥) ب) $س^{٢} + ٤س - ٢١ \leqslant ٠$

حلّل الطرف الأيمن من المتباينة إلى عوامله:

$(س + ٧)(س - ٣) \leqslant ٠$

منحنى الدالة ص = (س + ٧)(س − ٣) تربيعي على شكل ∪



يقطع المنحنى محور السينات عند $س = -٧$، $س = ٣$

نريد $س^{٢} + ٤س - ٢١ \leqslant ٠$، لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل المنحنى سالبًا أو صفرًا (تحت محور السينات أو عليه).

الحلّ هو $-٧ \leqslant س \leqslant ٣$

$س^{٢} - ٩س + ٨ > ٠$

حلّ الطرف الأيمن من المتباينة إلى العوامل:

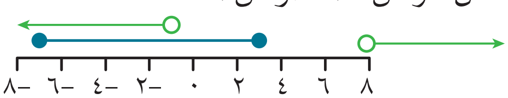
$(س - ١)(س - ٨) > ٠$

منحنى ص = (س − ١) (س − ٨) تربيعي على شكل ∪

يقطع المنحنى محور السينات عند $س = ١$، $س = ٨$

نريد $س^{٢} - ٩س + ٨ > ٠$، لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل المنحنى موجبًا (فوق محور السينات).

الحلّ هو $س < ١$ أو $س > ٨$



يبيّن خط الأعداد أن الحلَّين صحيحان عندما $-٧ \leqslant س < ١$

٦) $٢^{س^{٢} - ٣س - ٤٠} > ١$

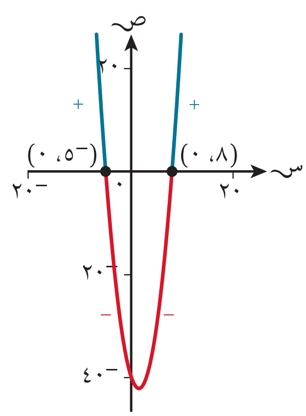
حيث إن $٢^{٠} = ١$، و ٢ إلى قوة عدد موجب أكبر من الصفر

فإننا نحتاج إلى حلّ المتباينة $س^{٢} - ٣س - ٤٠ > ٠$

حلّ الطرف الأيمن من المتباينة إلى عوامل:

$(س + ٥)(س - ٨) > ٠$

منحنى ص = (س + ٥)(س − ٨) تربيعي على شكل ∪



يقطع المنحنى محور السينات عند $س = -٥$، $س = ٨$.

نريد $س^{٢} - ٣س - ٤٠ > ٠$ لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل المنحنى موجبًا (فوق محور السينات).

الحلّ هو $س < -٥$ أو $س > ٨$

٧) أ $\frac{س(س - ١)}{س + ١} > س$

أعد الترتيب $\frac{س(س - ١)}{س + ١} - س > ٠$

اكتب الطرف الأيمن في صورة كسر واحد:

$$\frac{س(س - ١)}{س + ١} - \frac{س(س + ١)}{س + ١} > ٠$$

$$\frac{س(س - ١) - س(س + ١)}{س + ١} > ٠$$

$$\frac{س^{٢} - ٢س - س^{٢}}{س + ١} > ٠$$

$$\frac{-٢س}{س + ١} > ٠$$

أوجِد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

أي $-٢س = ٠$ فيكون $س = ٠$

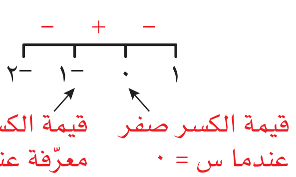
$س + ١ = ٠$ فيكون $س = -١$ (إذا كان المقام صفرًا فتكون قيم الكسر غير معرّفة).

استخدم خط الأعداد لتختبر الأعداد حول $س = ٠$ و $س = -١$

إذا عوّضنا عن $س = -٢$ في $\frac{-٢س}{س + ١}$ ينتج $\frac{-٢(-٢)}{-٢ + ١}$ وهي سالبة

إذا عوّضنا عن $س = -\frac{١}{٢}$ في $\frac{-٢س}{س + ١}$ ينتج $\frac{-٢\left(-\frac{١}{٢}\right)}{-\frac{١}{٢} + ١}$ وهي موجبة.

إذا عوّضنا عن $س = ١$ في $\frac{-٢س}{س + ١}$ ينتج $\frac{-٢(١)}{١ + ١}$ وهي سالبة



$\frac{س(س - ١)}{س + ١} > ٠$ س لقيم س التي تحقق

$-١ < س < ٠$

ب $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ١} \geqslant ٤$

أعد الترتيب $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ١} - ٤ \geqslant ٠$

اكتب الطرف الأيمن في صورة كسر واحد:

$$\frac{س^{٢} - ٩}{س - ١} - \frac{٤(س - ١)}{س - ١} \geqslant ٠$$

$$\frac{س^{٢} - ٩ - ٤(س - ١)}{س - ١} \geqslant ٠$$

$$\frac{س^{٢} - ٩ - ٤س + ٤}{س - ١} \geqslant ٠$$

$$\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١} \geqslant ٠$$

جد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

أي $س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$

$(س - ٥)(س + ١) = ٠$

تكون $س = ٥$، $س = {}^{-}١$

$س - ١ = ٠$ فيكون $س = ١$ (إذا كان مقام كسر صفرًا فتكون قيمته غير معرّفة).

استخدم خط الأعداد لتختبر الأعداد حول $س = {}^{-}١$، $س = ٥$، $س = ١$

إذا عوّضنا عن $س = {}^{-}٢$ فإن $\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١}$

تصبح $\frac{({}^{-}٢)^{٢} - ٤({}^{-}٢) - ٥}{{}^{-}٢ - ١}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن $س = ٠$ فإن $\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١}$

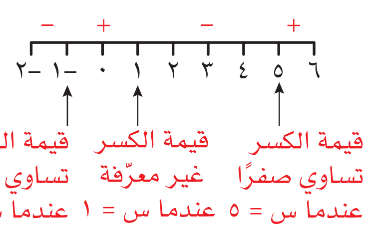
تصبح $\frac{(٠)^{٢} - ٤(٠) - ٥}{٠ - ١}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن $س = ٢$ فإن $\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١}$

تصبح $\frac{(٢)^{٢} - ٤(٢) - ٥}{٢ - ١}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن $س = ٦$ فإن $\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١}$

تصبح $\frac{(٦)^{٢} - ٤(٦) - ٥}{٦ - ١}$ وهذا مقدار موجب.



$\frac{س^{٢} - ٩}{س - ١} \geqslant ٤$ لقيم س التي تحقق:

${}^{-}١ \leqslant س < ١$ أو $س \geqslant ٥$

ج $\frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س - ٢} \geqslant ٠$

$$\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢} \geqslant ٠$$

أوجد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

للبسط حلّ $(س - ٥)(س + ٣) = ٠$ فيكون

$س = ٥$ أو $س = {}^{-}٣$

للمقام حلّ $س - ٢ = ٠$ فيكون $س = ٢$ (إذا كان مقام كسر يساوي صفرًا فإن قيمته غير معرفة).

استخدم خط الأعداد لتختبر أعدادًا حول $س = {}^{-}٣$، $س = ٢$، $س = ٥$

إذا عوّضنا عن $س = {}^{-}٤$ فإن $\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢}$

تصبح $\frac{({}^{-}٤ - ٥)({}^{-}٤ + ٣)}{{}^{-}٤ - ٢}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن $س = ٠$ فإن $\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢}$

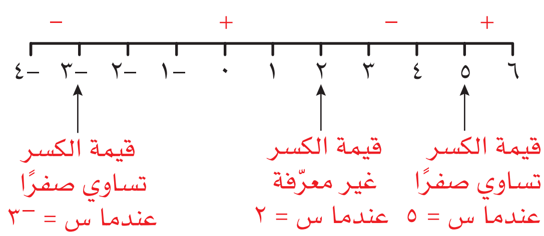
تصبح $\frac{(٠ - ٥)(٠ + ٣)}{٠ - ٢}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن $س = ٣$ فإن $\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢}$

تصبح $\frac{(٣ - ٥)(٣ + ٣)}{٣ - ٢}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن $س = ٦$ فإن $\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢}$

تصبح $\frac{(٦ - ٥)(٦ + ٣)}{٦ - ٢}$ وهذا مقدار موجب.



$\frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س - ٢} \geqslant ٠$ لقيم س التي تحقق:

${}^{-}٣ \leqslant س < ٢$ أو $س \geqslant ٥$

د $\frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٤} \leqslant ٠$

$\frac{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)} \leqslant ٠$

أوجد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

للبسط حلّ $(\text{س} + ٥)(\text{س} - ١) = ٠$ فيكون $\text{س} = ٢$، $\text{س} = -٢$ إذا كان مقام كسر يساوي صفرًا فإن قيمته غير معرّفة.

استخدم خط الأعداد لتختبر أعدادًا حول $\text{س} = -٥$، $\text{س} = -٢$، $\text{س} = ١$، $\text{س} = ٢$

إذا عوّضنا عن $\text{س} = -٦$ فإن $\frac{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

تصبح $\frac{(-٦ + ٥)(-٦ - ١)}{(-٦ - ٢)(-٦ + ٢)}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن $\text{س} = -٣$ فإن $\frac{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

تصبح $\frac{(-٣ + ٥)(-٣ - ١)}{(-٣ - ٢)(-٣ + ٢)}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن $\text{س} = ٠$ فإن $\frac{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

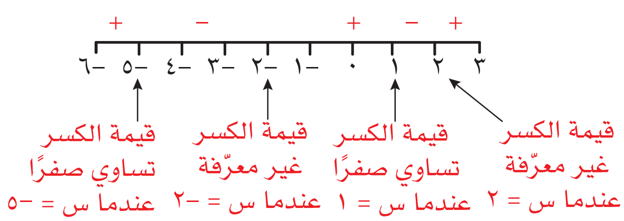
تصبح $\frac{(٠ + ٥)(٠ - ١)}{(٠ - ٢)(٠ + ٢)}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن $\text{س} = ١{,}٥$ فإن $\frac{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

تصبح $\frac{(١{,}٥ + ٥)(١{,}٥ - ١)}{(١{,}٥ - ٢)(١{,}٥ + ٢)}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن $\text{س} = ٣$ فإن $\frac{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

تصبح $\frac{(٣ + ٥)(٣ - ١)}{(٣ - ٢)(٣ + ٢)}$ وهذا مقدار موجب.



$\frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٤} \leqslant ٠$ لقيم س التي تحقّق:

$-٥ \leqslant \text{س} < -٢$ أو $١ \leqslant \text{س} < ٥$

هـ $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ٤} \geqslant \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٥}$

أعد الترتيب $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ٤} - \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٥} \geqslant ٠$

اكتب الطرف الأيمن بصورة كسر واحد:

$\frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٥) - (\text{س} + ٢)(\text{س} + ٤)}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)} \geqslant ٠$

> انتبه إلى البسط!

$\frac{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٥ - [\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨]}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)} \geqslant ٠$

$\frac{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٥ - \text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٨}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)} \geqslant ٠$

$\frac{٧ - ١٤\text{س}}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)} \geqslant ٠$

$\frac{٧(١ - ٢\text{س})}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)} \geqslant ٠$

جد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

للبسط، حلّ $٧(١ - ٢\text{س}) = ٠$

فيكون $\text{س} = \frac{١}{٢}$

للمقام، حلّ $(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥) = ٠$ فيكون

$\text{س} = -٤$، أو $\text{س} = ٥$ (إذا كان مقام كسر صفرًا فإن قيمته غير معرّفة).

$\text{س} = -٤$، $\text{س} = \frac{١}{٢}$، $\text{س} = ٥$

إذا عوّضنا عن $\text{س} = -٥$ فإن $\frac{٧(١ - ٢\text{س})}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)}$

تصبح $\frac{٧(١ - ٢(-٥))}{(-٥ + ٤)(-٥ - ٥)}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن $\text{س} = ٠$ فإن $\frac{٧(١ - ٢\text{س})}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)}$

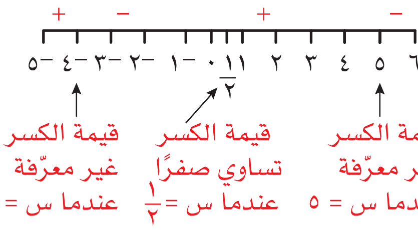
تصبح $\frac{٧(١ - ٢(٠))}{(٠ + ٤)(٠ - ٥)}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن $\text{س} = ١$ فإن $\frac{٧(١ - ٢\text{س})}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٥)}$

تصبح $\frac{٧(١ - ٢(١))}{(١ + ٤)(١ - ٥)}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن س = ٦ فإن $\frac{\text{٧(١ − ٢س)}}{\text{(س + ٤)(س − ٥)}}$

تصبح $\frac{\text{٧(١ − ٢(٦))}}{\text{(٦ + ٤)(٦ − ٥)}}$ وهذا مقدار سالب.



$\frac{\text{س − ٣}}{\text{س + ٤}} \leqslant \frac{\text{س + ٢}}{\text{س − ٥}}$ لقيم س التي تحقّق:

س < −٤ أو $\frac{١}{٢}$ ⩽ س < ٥

٨) ب ٢س^{٢} − ٥س = ٤ − ك

أعد الترتيب لتحصل على:

٢س^{٢} − ٥س + (ك − ٤) = ٠

أ = ٢، ب = −٥، جـ = ك − ٤

حتى يكون للمعادلة جذران حقيقيان، فإن

ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

(−٥)^{٢} − ٤(٢)(ك − ٤) > ٠

٥٧ − ٨ك > ٠

ك < $\frac{٥٧}{٨}$

٩) ب ٣س^{٢} + ٥س + ك + ١ = ٠

أ = ٣، ب = ٥، جـ = ك + ١

حتى لا يكون للمعادلة جذران حقيقيان، فإن

ب^{٢} − ٤أجـ < ٠

٢٥ − ٤(٣)(ك + ١) < ٠

−١٢ك + ١٣ < ٠

ك > $\frac{١٣}{١٢}$

تمارين ١-٨

١) إذا كان المستقيم ص = ك س + ١ مماسًا لمنحنى الدالة ص = س^{٢} − ٧س + ٢، فيوجد جذر وحيد للمعادلة الناتجة من حلّ المعادلتَين ص = ك س + ١، ص = س^{٢} − ٧س + ٢ آنيًا.

س^{٢} − ٧س + ٢ = ك س + ١ عند إعادة الترتيب ينتج:

س^{٢} − (٧ + ك) + ١ = ٠

أ = ١، ب = −(٧ + ك)، جـ = ١

وجود جذر حقيقي واحد مكرر يعني ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

[−(٧ + ك)]^{٢} − ٤(١)(١) = ٠

ك^{٢} + ١٤ك + ٤٥ = ٠

(ك + ٥)(ك + ٩) = ٠

ك = −٥ ، أو ك = −٩

٢) معادلة المحور السيني ص = ٠

إذا كان المستقيم ص = ٠ مماسًا

لـ ص = س^{٢} − (ك + ٣)س + (٣ك + ٤)، فعندها يوجد حلّ وحيد للمعادلة الناتجة من حلّ المعادلتَين ص = ٠، ص = س^{٢} − (ك + ٣)س + (٣ك + ٤) آنيًّا.

س^{٢} − (ك + ٣)س + (٣ك + ٤) =٠

أ = ١، ب = −(ك + ٣)، جـ = (٣ك + ٤)

وجود جذر حقيقي واحد مكرر يعني ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

[−(ك + ٣)]^{٢} − ٤(١)(٣ك + ٤) = ٠

ك^{٢} − ٦ك − ٧ = ٠

(ك + ١)(ك − ٧) = ٠

ك = −١ أو ك = ٧

٣) **أ** إذا كان المستقيم ص = ك − ٣س مماسًا لـ ٠ = س^{٢} + ٢س ص − ٢٠، فعندها يوجد جذر حقيقي واحد للمعادلة الناتجة من حلّ

ص = ك − ٣س .... (١)،

٠ = س^{٢} + ٢س ص − ٢٠ ...... (٢) آنيًّا

عوّض عن ص في المعادلة (٢) يعطي:

س^{٢} + ٢س(ك − ٣س) − ٢٠ = ٠

أعد الترتيب لتحصل على:

٥س^{٢} − ٢ك س + ٢٠ = ٠

أ = ٥، ب = −٢ك، جـ = ٢٠

وحيث إن ب^{٢} − ٤أجـ = ٠ لوجود جذر حقيقي واحد يكون (−٢ك)^{٢} − ٤(٥)(٢٠) = ٠

ك = ±١٠

ب أولًا عوّض عن ك = −١٠ في ص= ك − ٣س لتحصل على:

ص = −١٠ − ٣س

وكذلك حيث إن س^{٢} + ٢س ص − ٢٠ = ٠ وحلّ المعادلتَين آنيًّا ينتج:

س^{٢} + ٢س (−١٠ − ٣س) − ٢٠ = ٠

−٥س^{٢} + ٢٠س − ٢٠ = ٠

يمكن تبسيط المعادلة إلى س^{٢} − ٤س + ٤ = ٠

(س − ٢)^{٢} = ٠

س = ٢

عوّض عن س = ٢ في ص = ١٠ − ٣س ينتج:

ص = ٤

الإحداثيات هي (٢، ٤) و (−٢، −٤)

٤) ص = ٢س − ١ .... (١)

ص = س^{٢} + ك س + ٣ .... (٢)

عوّض عن ص في المعادلة (٢)

٢س − ١ = س^{٢} + ك س + ٣

أعد الترتيب:

س^{٢} + (ك − ٢) س + ٤ = ٠

أ = ١، ب = ك − ٢، جـ = ٤

حيث يوجد جذران حقيقيان مختلفان يكون

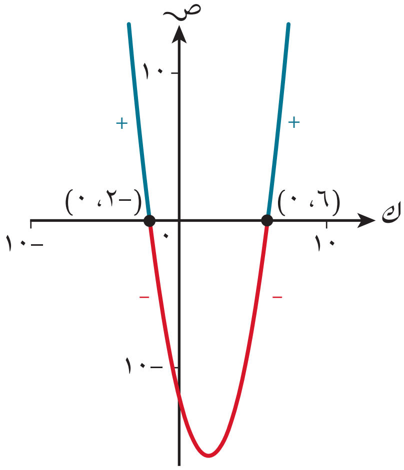
ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

(ك − ٢)^{٢} − ٤ (١)(٤) > ٠

ك^{٢} − ٤ك − ١٢ > ٠

(ك − ٦)(ك + ٢) > ٠

منحنى ص = (ك − ٦)(ك + ٢) تربيعي على شكل ∪



يقطع المنحنى المحور ك عند ك = −٢، ك = ٦

بما أن ك^{٢} − ٤ك − ١٢ > ٠ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم ك حيث يكون المنحنى موجبًا (يقع أعلى المحور ك).

الحلّ هو ك < −٢ ، ك > ٦

٥) ص = م س + ٥ .... (١)

ص = س^{٢} − س + ٦ .... (٢)

عوّض عن ص في (٢)

م س + ٥ = س^{٢} − س + ٦

أعد الترتيب لتحصل على:

س^{٢} − (١ + م) س + ١ = ٠

أ = ١، ب = −(١ + م)، جـ = ١

إذا لم يتقاطع المستقيم والمنحنى فلا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

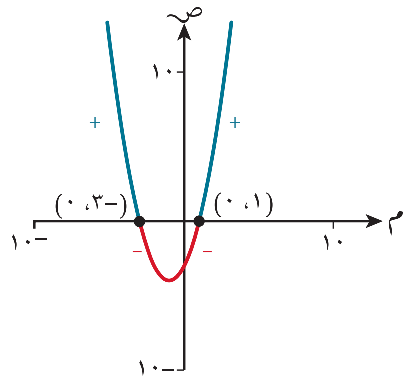
وعليه، يكون ب^{٢} − ٤أجـ < ٠

[−(١ + م)]^{٢} − ٤(١)(١) < ٠

م^{٢} + ٢م − ٣ < ٠

(م + ٣)(م − ١) < ٠

منحنى ص = (م + ٣)(م − ١) تربيعي على شكل ∪



يقطع المنحنى المحور م عند م = -٣، م = ١

وحيث إن $م^{٢} + ٢م - ٣ < ٠$ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم م التي يكون المنحنى عندها سالبًا (تحت المحور م).

الحلّ هو $-٣ < م < ١$

٦) ص = ك س + ٦ .... (١)

$س^{٢} + ص^{٢} - ١٠$ س+ ٨ ص = ٨٤.......... (٢)

عوّض عن ص في المعادلة (٢)

$س^{٢} + (ك س + ٦)^{٢} - ١٠س + ٨(ك س + ٦) = ٨٤$

بسّط وأعد الترتيب لتحصل على:

$(١ + ك^{٢})س^{٢} + (٢٠ك - ١٠)س = ٠$

إذا كان المستقيم مماسًا للمنحنى، فإن للمعادلة جذرًا حقيقيًا واحدًا.

فيكون $ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$

$أ = (١ + ك^{٢})$، ب = (٢٠ك - ١٠)، جـ = ٠

$(٢٠ك - ١٠)^{٢} - ٤(١ + ك^{٢})(٠) = ٠$

$(٢٠ك - ١٠)^{٢} = ٠$

$ك = \frac{١}{٢}$

٧) ص = م س + جـ .... (١)

$ص = س^{٢} - ٤س + ٤$ .... (٢)

إذا كان المستقيم مماسًا للمنحنى، سيكون للمعادلة $م س + جـ = س^{٢} - ٤س + ٤$ حلّ واحد.

أعد الترتيب لتحصل على:

$س^{٢} - (٤ + م)س + (٤ - جـ) = ٠$

أ = ١، ب = -(٤ + م)، جـ = (٤ - جـ)

حيث يوجد جذر حقيقي واحد مكرر فإن

$ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$

$[-(٤ + م)]^{٢} - ٤(١)(٤ - جـ) = ٠$

$١٦ + ٨م + م^{٢} - ١٦ + ٤جـ = ٠$

$م^{٢} + ٨م + ٤جـ = ٠$

٨) ص = م س + جـ .... (١)

$أس^{٢} + ب ص^{٢} + جـ$ .... (٢)

عوّض عن ص في (٢)

$أس^{٢} + ب(م س + جـ)^{٢} = جـ$

فكّ الأقواس لتحصل على:

$أس^{٢} + ب م^{٢} س^{٢} + (٢ب جـ م) س + ب جـ^{٢} - جـ = ٠$

$(أ + ب م^{٢})س^{٢} + (٢ب جـ م) س + (ب جـ^{٢} - جـ) = ٠$ *

بما أن المستقيم مماس للمنحنى فيكون للمعادلة في الصورة $أس^{٢} + ب ص^{٢} + جـ = ٠$ حلّ واحد فقط.

أي أن $ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$

* للمعادلة التي نعمل عليها يكون

$(٢ب جـ م)^{٢} - ٤(أ + ب م^{٢}) (ب جـ^{٢} - جـ) = ٠$

$٤ب^{٢} جـ^{٢} م^{٢} - ٤أب جـ^{٢} + ٤أجـ - ٤ب^{٢} جـ^{٢} م^{٢} + ٤ب م^{٢} جـ = ٠$

$-٤أ ب جـ^{٢} + ٤أجـ + ٤ب م^{٢} جـ = ٠$

$٤ب م^{٢} جـ = ٤أب جـ^{٢} - ٤أجـ$

$م^{٢} = \frac{٤أب جـ^{٢} - ٤أجـ}{٤ب جـ}$ بالقسمة على ٤جـ

$م^{٢} = \frac{أب جـ - أ}{ب}$

إجابات تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) أ ٩س^{٢} − ١٥س

فكّ $(٣س - أ)^{٢} - ب$ لتحصل على:

٩س^{٢} − ٦أس + أ^{٢} − ب

قارن الناتج مع ٩س^{٢} − ١٥س تحصل على:

−٦أ = −١٥، أ^{٢} − ب = ٠

أ = $\frac{٥}{٢}$، ب = $\frac{٢٥}{٤}$

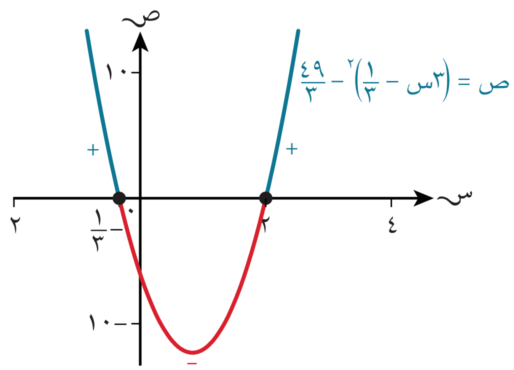
وعليه، ٩س^{٢} − ١٥س = $\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٢٥}{٤}$

ب يمكن كتابة ٩س^{٢} − ١٥س − ٦ في صورة:

$\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٢٥}{٤} < ٦$

استخدم منحنى الدالّة

ص = $\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٤٩}{٤} < ٠$



هذا منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل U،
نجد المقاطع من محور السينات بحل المعادلة:

$\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٤٩}{٤} = ٠$

$\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٤٩}{٤}$ خذ و/أو حلّ الجذر التربيعي للطرفَين لتحصل على:

٣س − $\frac{٥}{٢}$ = ± $\frac{٧}{٢}$ حلّ المعادلة تحصل على:

س = ٢ أو −$\frac{١}{٣}$

حتى يكون $\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٤٩}{٤} < ٠$ نحتاج إلى أن نجد مدى قيم س حيث يكون المنحنى سالبًا (أسفل محور السينات).

الحلّ هو −$\frac{١}{٣}$ < س < ٢

٢) $\frac{٣٦}{س^{٤}} + ٤ = \frac{٢٥}{س^{٢}}$ اضرب كل طرف في س^{٤} لتحصل على:

٣٦ + ٤س^{٤} = ٢٥س^{٢} أعد الترتيب لتحصل على:

٤س^{٤} − ٢٥س^{٢} + ٣٦ = ٠ .... (١)

افترض أن ص = س^{٢} عوّض عن س^{٢} في المعادلة (١) لتحصل على:

٤ص^{٢} − ٢٥ص + ٣٦ = ٠

(٤ص − ٩)(ص − ٤) = ٠

ص = $\frac{٩}{٤}$ أو ص = ٤

إذا كان س^{٢} = $\frac{٩}{٤}$ فإن س = ± $\frac{٣}{٢}$

إذا كان س^{٢} = ٤ فإن س = ± ٢

٣) ص = ك س − ٣ .... (١)

ص = س^{٢} − ٩س .... (٢)

عند نقاط تقاطع المنحنيَين تكون

س^{٢} − ٩س = ك س − ٣ صحيحة

أعد ترتيب المعادلة لتحصل على:

س^{٢} − ٩س − ك س + ٣ = ٠ أو

س^{٢} − (٩ + ك)س + ٣ = ٠

وهذه في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

فيكون أ = ١، ب = −(٩ + ك)، جـ = ٣

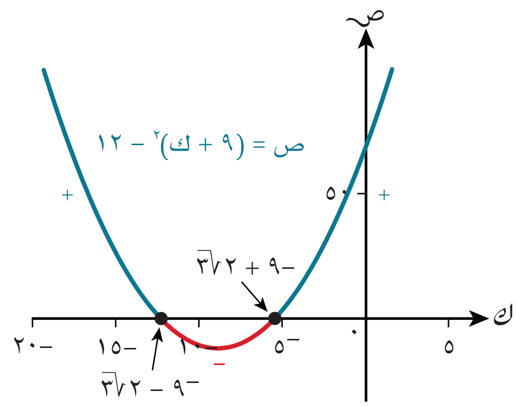
لتحديد نقاط التقاطع يكون

ب^{٢} − ٤ أ جـ > ٠

وعليه، يكون $[-(٩ + ك)]^{٢} - ٤(١)(٣) > ٠$

يكون $(٩ + ك)^{٢} - ١٢ > ٠$

ارسم منحنى الدالّة ص = $(٩ + ك)^{٢} - ١٢$
المنحنى دالّة تربيعية شكله على شكل U



نجد المقطعَين من المحور ك بحلّ:

(٩ + ك)^{٢} − ١٢ = ٠

(٩ + ك)^{٢} = ١٢

٩ + ك = ± $\sqrt{١٢}$ أو ٩ + ك = ±٢$\sqrt{٣}$

ك = −٩ + ٢$\sqrt{٣}$ أو ك = −٩ − ٢$\sqrt{٣}$

نريد أن نجد قيم مدى ك التي تحقق

(٩ + ك)^{٢} − ١٢ > ٠

أي، حيث يكون المنحنى موجبًا ٠ (فوق المحور ك).

الحلّ هو ك < −٩ − ٢$\sqrt{٣}$ أو ك > −٩ − ٢$\sqrt{٣}$

٤) ص = ٢س + ك .... (١)

ص = ١ + ٢ك س − س^{٢} .... (٢)

لنجد نقاط تقاطع المنحنيَين تكون:

٢س + ك = ١ + ٢ك س − س^{٢} (صحيحة)

عند إعادة الترتيب تحصل على:

س^{٢} + ٢ س − ٢ك س + ك − ١ = ٠ أو

س^{٢} + (٢ − ٢ك) س + (ك − ١) = ٠

وهذه في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

فيكون أ = ١، ب = (٢ + ٢ك)، جـ = (ك − ١)

لتحديد نقاط التقاطع يكون

ب^{٢} − ٤أ جـ > ٠

وعليه، يكون (٢ + ٢ك)^{٢} − ٤ × (١) × (ك − ١) > ٠

فكّ الأقواس وبسّط لتحصل على:

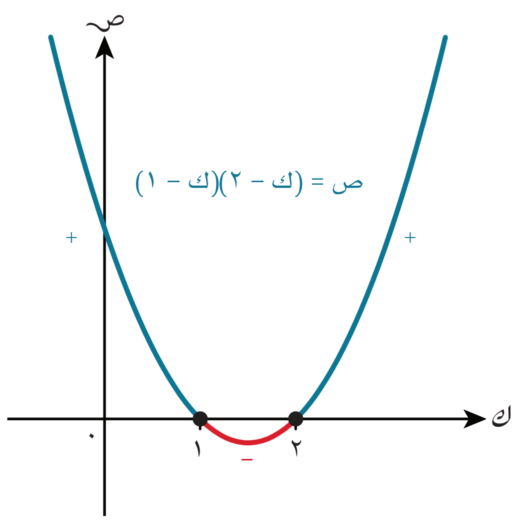
ك^{٢} − ٣ك + ٢ > ٠ أو (ك − ٢)(ك − ١) > ٠

رسم منحنى الدالّة ص = (ك − ٢)(ك − ١) هو منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل ∪

نجد نقاط التقاطع مع المحور ك بحلّ

(ك − ٢)(ك − ١) = ٠

ك = ١ أو ك = ٢



نريد أن نجد قيم مدى ك التي تحقق
(ك − ٢)(ك − ١) > ٠

أي حيث يكون المنحنى موجبًا (فوق محور السينات).

الحلّ هو ك < ١ أو ك > ٢

٥) أ ص = ٤س^{٢} − ١٢س + ٧

الطرف الأيسر لا يحلل إلى العوامل. لذا استخدم طريقة الإكمال إلى مربّع.

حلل أول حدَّين من الطرف الأيسر لتحصل على:

ص = ٤(س^{٢} − ٣س) + ٧

أكمل إلى مربّع لتحصل على:

ص = ٤$\left[\left(س - \frac{٣}{٢}\right) - \frac{٩}{٤}\right]$ + ٧

ص = ٤$\left(س - \frac{٣}{٢}\right)$ − ٢

إحداثيات الرأس هي $\left(\text{١}\frac{\text{١}}{\text{٢}}،\ ^{-}\text{٢}\right)$

ب ص = ك س + ٣

ص = ٤س^{٢} − ١٢س + ٧

لنجد نقاط تقاطع المنحنيَين تكون

ك س + ٣ = ٤س^{٢} − ١٢س + ٧ صحيحة

أعد الترتيب لتحصل على:

٤س^{٢} − ١٢س − ك س + ٤ = ٠

٤س^{٢} − (١٢ + ك) س + ٤ = ٠

وهذه في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

فيكون أ = ٤، ب = −(١٢ + ك)، جـ = ٤

ليكون المستقيم مماسًا للمنحنى، عندها يوجد حلّ وحيد فقط للمعادلة، ويكون

ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠

وعليه، يكون $[-(\text{١٢} + \text{ك})]^{٢}$ − ٤ × (٤) × (٤) = ٠

ك^{٢} + ٢٤ك + ٨٠ = ٠

(ك + ٤)(ك + ٢٠) = ٠

ك = $^{-}$٤ أو ك = $^{-}$٢٠

٦) ص = ٥ − ٢س + س^{٢} .... (١)

ص = ٢س + ك .... (٢)

أ لنجد نقاط تقاطع المنحنيَين تكون

٥ − ٢س + س^{٢} = ٢س + ك صحيحة

أعد الترتيب لتحصل على:

س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠

ب حيث إن إحدى نقاط التقاطع هي ا($^{-}$٢، ١٣)،

عوّض عن س = $^{-}$٢ لتجد النقطة ب

أي أن، $(^{-}\text{٢})^{٢}$ − ٤($^{-}$٢) + (٥ − ك) = ٠

ك = ١٧

عوّض عن ك = ١٧ في س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠

لتحصل على:

س^{٢} − ٤س − ١٢ = ٠

(س − ٦)(س + ٢) = ٠

س = $^{-}$٢ وهو الإحداثي السيني للنقطة ا ، س = ٦ إحداثي السيني للنقطة ب.

عوّض عن س = ٦ في إحدى المعادلتَين (١) أو (٢) لتحصل على:

ص = ٢٩

فتكون النقطة ب (٦، ٢٩)

ج من الجزئية (أ)، س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠

وهذه في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

فيكون أ = ١، ب = $^{-}$٤، جـ = ٥ − ك

حتى يكون المستقيم مماسًا للمنحنى سيكون للمعادلة حلّ واحد فقط، وعليه يكون

ب^{٢} − ٤ ا جـ = ٠

$(^{-}\text{٤})^{٢}$ − ٤(١٠)(٥ − ك) = ٠

ك = ١

لذا فإن س^{٢} − ٤س + ٤ = ٠

حلل إلى العوامل لتحصل على:

$(\text{س} - \text{٢})^{٢}$ = ٠

س = ٢

عوّض عن س = ٢ في المعادلة (١) أو المعادلة (٢) لتحصل على:

ص = ٥

وتكون النقطة ع(٢، ٥)

٧) أ س^{٢} − ٥س + ٧ = ٠ تمثّل منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل ∪

أكمل إلى المربع لتجد الرأس.

ص = $\left(\text{س} - \frac{\text{٥}}{\text{٢}}\right)^{٢} - \frac{\text{٢٥}}{\text{٤}} + \text{٧}$

ص = $\left(\text{س} - \frac{\text{٥}}{\text{٢}}\right)^{٢} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

الرأس عند $\left(\frac{\text{٥}}{\text{٢}}، \frac{\text{٣}}{\text{٤}}\right)$ وهو فوق المحور السيني.

وعليه، يكون ص = س^{٢} − ٥س + ٧ يقع فوق محور السينات.

ب عند تقاطع ص = س^{٢} − ٥س + ٧ مع

ص = ٢س − ٣

يكون س^{٢} − ٥س + ٧ = ٢س − ٣

س^{٢} − ٧س + ١٠ = ٠

(س − ٢)(س − ٥) = ٠

س = ٢ أو س = ٥

عوّض عن س = ٢ في ص = ٢س − ٣ لتعطي

ص = ١

عوّض عن س = ٥ في ص = ٢س − ٣ لتعطي

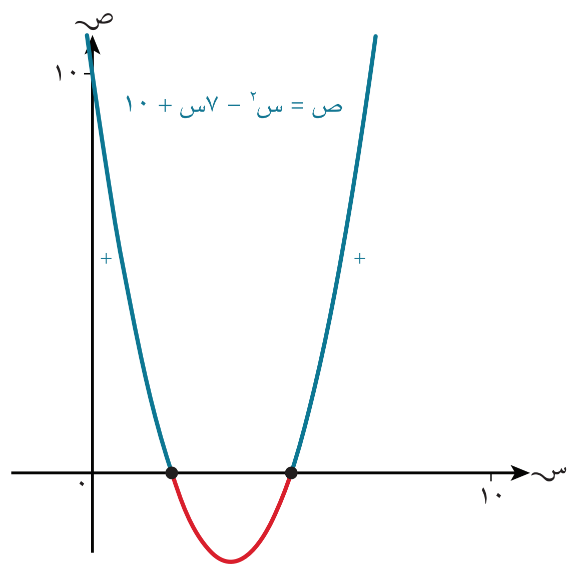
ص = ٧

نقاط التقاطع هي (٢، ١) أو (٥، ٧).

ج س^{٢} − ٥س + ٧ < ٢س − ٣

س^{٢} − ٧ س + ١٠ < ٠

رسم المنحنى ص = س^{٢} − ٧س + ١٠، الشكل الناتج منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل ∪



يقطع المنحى محور السينات عند س = ٢،

س = ٥

للمتباينة س^{٢} − ٧س + ١٠ < ٠ نجد قيم مدى س التي يكون المنحنى عندها سالبًا تحت محور السينات.

الحلّ هو ٢ < س < ٥

٨) أ ١٠س − س^{٢}

−س^{٢} + ١٠س

−(س^{٢} − ١٠س)

−[(س − ٥)^{٢} − ٢٥]

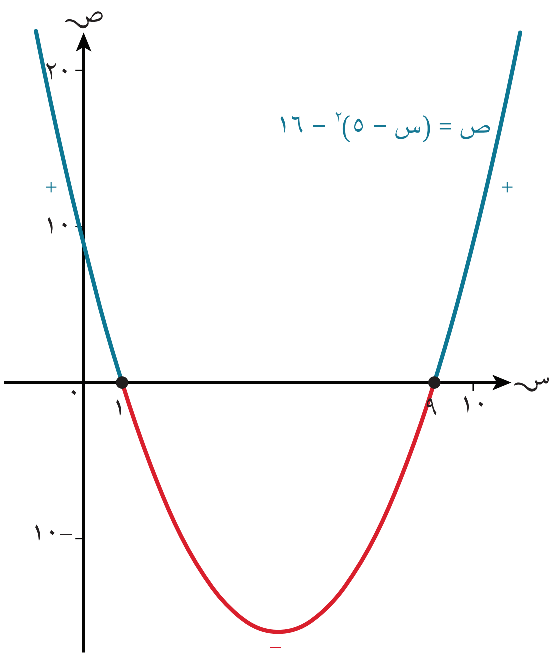
٢٥ − (س − ٥)^{٢}

ب الرأس عند (٥، ٢٥)

ج ٢٥ − (س − ٥)^{٢} ≥ ٩

(س − ٥)^{٢} − ١٦ ≤ ٠

رسم المنحنى ص = (س − ٥)^{٢} − ١٦، الشكل الناتج منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل ∪



لنجد نقاط التقاطع مع محور السينات، حلّ

(س − ٥)^{٢} − ١٦ = ٠

(س − ٥)^{٢} = ١٦ خذ الجذر التربيعي لطرفَي المعادلة لتحصل على:

س − ٥ = ±٤

نقاط التقاطع مع محور السينات عند س = ١،

س = ٩

لتكون (س − ٥)^{٢} − ١٦ ≤ ٠ نجد قيم مدى س حيث يكون المنحنى صفرًا أو موجبًا على محور السينات أو فوقه.

الحلّ هو س ≥ ١ أو س ≤ ٩

٩) **أ** معادلة المنحنى ص = س^{٢} − ٤س + ٤ ومعادلة المستقيم ص = م س، م عدد ثابت. عند نقاط تقاطع المنحنيَين يكون

س^{٢} − ٤س + ٤ = م س

إذا كان م = ١، فإن ص = س

س^{٢} − ٤س + ٤ = س

س^{٢} − ٥س + ٤ = ٠

(س − ١)(س − ٤) = ٠

س = ١ أو س = ٤

عوّض عن س = ١ في ص = س تحصل على ص = ١

عوّض عن س = ٤ في ص = س تحصل على ص = ٤

فإن أ(١، ١)، ب (٤، ٤)

نقطة منتصف اب = $\left(\frac{١ + ٤}{٢}، \frac{١ + ٤}{٢}\right)$ أو $\left(٢\frac{١}{٢}، ٢\frac{١}{٢}\right)$.

ب س^{٢} − ٤س + ٤ = م س

س^{٢} − (٤ + م)س + ٤ = ٠

وهذه المعادلة في الصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠،

فيكون أ = ١، ب = −(٤ + م)، جـ = ٤

ليكون المستقيم مماسًا للمنحنى فإنه يوجد حلّ واحد فقط للمعادلة

أ^{٢} − ٤أب جـ = ٠

[−(٤ + م)]^{٢} − ٤(١)(٤) = ٠

م^{٢} + ٨ م = ٠

م(م + ٨) = ٠

م = ٠ (مرفوض) أو م = −٨

إذا كانت م = −٨ فإن س^{٢} − (٤ + م)س + ٤ = ٠

تصبح س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠

(س + ٢)^{٢} = ٠

س = −٢

عوّض عن س = −٢ في ص = −٨س فيعطي

ص = (−٨)(−٢)

ص = ١٦

الإحداثيات هي (−٢، ١٦).

١٠) **أ** حلل إلى العوامل ٢س^{٢} − ٤س + ١

= ٢(س^{٢} − ٢س) + ١

= ٢[(س + ١)^{٢} − ١^{٢}] + ١

= ٢(س − ١)^{٢} − ٢ + ١

= ٢(س − ١)^{٢} − ١

نقطة القيمة الصغرى للمنحنى هي ل (١، −١)

ب س − ص + ٤ = ٠ أعد الترتيب

ص = س + ٤ .... (١)

ص = ٢س^{٢} − ٤س + ١ .... (٢)

عند نقاط التقاطع يكون:

س + ٤ = ٢س^{٢} − ٤س + ١ أو

٢س^{٢} − ٥س − ٣ = ٠

حلل إلى العوامل لتحصل على:

(٢س + ١)(س − ٣) = ٠

س = $-\frac{١}{٢}$ أو س = ٣ (النقطة ل)

عوّض عن س = $-\frac{١}{٢}$ في المعادلة (١) لتحصل على:

ص = $-\frac{١}{٢}$ + ٤ أو ص = $٣\frac{١}{٢}$

النقطة ل $\left(-\frac{١}{٢}، ٣\frac{١}{٢}\right)$

نقطة منتصف ك ل هي $\left(\frac{١ + ٣}{٢}، \frac{-١ + ٧}{٢}\right)$ أو (٢، ٣)

ميل المستقيم الواصل بين النقطتَين (٢، ٣) و $\left(-\frac{١}{٢}، ٣\frac{١}{٢}\right)$ هو:

$\frac{٣ - ٣\frac{١}{٢}}{٢ - -\frac{١}{٢}}$ أو $-\frac{١}{٥}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$) لتحصل على:

ص − ٣ = $-\frac{١}{٥}$ (س − ٢)

ص = ٣ $-\frac{١}{٥}$(س − ٢)

الوحدة الثانية

الدوال Functions

مخطط توزيع الحصص

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٢–١	تعريف الدالة	٢	٢–١ يفهم المصطلحات الآتية: الدالة، المجال، المدى، الدالة واحد إلى واحد، ويحدّد ما إذا كانت الدالة هي واحد إلى واحد أم لا، يحدّد المجال والمدى لدوال معطاة.	الدالة، العلاقة، الدالة واحد إلى واحد، الدالة متعدد إلى واحد، المجال، المدى
٢–٢	الدوال المركبة	٢	٢–٢ يفهم مصطلح الدوال المركّبة، ويفهم تركيب دالتَين، بشرط أنّ الدالة المركّبة (هـ ٥ د) ↤ هـ(د(س)) يمكن تشكيلها عندما يكون مدى الدالة د(س) مجموعة جزئية من مجال الدالة هـ، ويجد تركيب دالتَين مُعطاتَين (باستخدام دوال خطية وتربيعية وجذرية وكسرية).	الدالة المركبة
٢–٣	الدوال العكسية	٢	٢–٣ يفهم مصطلح 'الدالة العكسية'، ويجد الدالة العكسية لدالة واحد إلى واحد.	الدالة العكسيّة، الدالة العكسيّة لنفسها
٢–٤	منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية	٣	٢–٤ يفهم بيانيًّا العلاقة بين دالة واحد إلى واحد ومعكوسها.	
٢–٥ أ	التحويلات الهندسية للدوال – الانسحاب	٣	٢–٥ أ يفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = د(س) + ب ، ص = د(س + أ)، ص = د(س + أ) + ب ويحدد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، ويرسم التمثيلات البيانية المحولة.	

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٢–٥ ب	التحويلات الهندسية للدوال – الانعكاس	٢	**٢–٥ ب** يفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = –د(س) ، ص = د(–س)، ويحدد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، ويرسم التمثيلات البيانية المحولة.	
٢–٥ ج	التحويلات الهندسية للدوال – التمدد	٢	**٢–٥ ج** يفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = أ د(س)، ص = د (أس)، ويحدد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، ويرسم التمثيلات البيانية المحولة.	
٢–٦ (PPT)	تركيب التحويلات الهندسية	٣	**٢–٥ د** يفهم التأثير البياني لتركيب من تحويلين هندسيين لبيانات ص = د(س)، عندما ص = د(س) + ب، ص = د(س + أ)، ص = د(س + أ) + ب ص = –د(س)، ص = د(–س)، ص = أ د(س)، ص = د(أ س) ويحدّد التحويل الهندسي من تمثيل جبري إلى تمثيل آخر، ويرسم البيانات المحولة لمنحنى ص = د(س).	
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية	١		

٢-١ تعريف الدالة

ملاحظات للمعلمين

صيغة الدالة مهمة ولها أنواع متعددة، يجب أن يألفها الطلبة بشكل كامل ليتمكنوا من تمييزها واستخدامها بصورة مناسبة.

أفكار للتعليم

شجّع الطلبة على أن يرسموا المنحنيات، ويفكروا جيدًا في مجال الدالة (القيم المدخلة) ومدى الدالة (القيم المخرجة)، وعلى أن يعبروا عن المجال والمدى بصيغ رياضية مناسبة. عندما يتقنون ذلك يمكنهم العمل ضمن ثنائيات أو في مجموعات من ثلاثة إلى ستة طلبة Domain and range dominoes في مصدر (Underground Mathematics)، وهي مجموعة بطاقات يطلب إلى الطلبة أن يربطوا المنحنيات مع المجال والمدى، وأن يكملوا بطاقتَين فارغتَين. يمكن للمجموعات أن تتناقش في ما يجب وضعه في البطاقات الفارغة.

دعم الطلبة

أحيانًا قد يواجه الطلبة صعوبة في معرفة أيّ من س أو ص يمثّل المدخلة (المجال)، أو المخرجة (المدى). وللتغلب على هذه الصعوبة يستفيدون من رسم منحنيات بسيطة؛ باستخدام السبورات البيضاء ليصفوا المجال والمدى ومشاهدة 'آلة' الدالة التي تأخذ عددًا وتعطي عددًا آخر يمكن أن تساعد الطلبة على التأكد من فهمهم قبل الانتقال إلى مواضيع أخرى في هذه الوحدة كتركيب الدوال مثلًا.

تحدّي الطلبة

يمكن للمصدر الإلكتروني (Underground Mathematics) في الرابط !Absolutely أن يقدّم قاعدة للمناقشة في ما إذا كان المنحنى يمثّل دالة أم لا، استنادًا إلى التمثيلات البيانية للطلبة التي نفذوها في هذا الدرس.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢-١

٢-٢ الدوال المركبة

ملاحظات للمعلمين

الأخطاء الشائعة عند الطلبة هي تركيب الدالتَين بصورة معكوسة، وعدم التحقق من شرط تركيب الدوال.
سيكتشف الطلبة من الاستقصاءات الآتية، أن ترتيب تركيب الدوال مهم جدًا في معظم الحالات، وأن استخدام الصيغة بوضوح يساعد من الناحية الجبرية. وهذا ما تم تأكيده في استكشف ١

يجدر بالطلبة أن يفهموا أنه إذا كانت (د ∘ هـ)(س) = (هـ ∘ د)(س) صحيحة في بعض الحالات، فإنها ليست صحيحة دائمًا، بل يجب عدم افتراض أن تكون صحيحة.

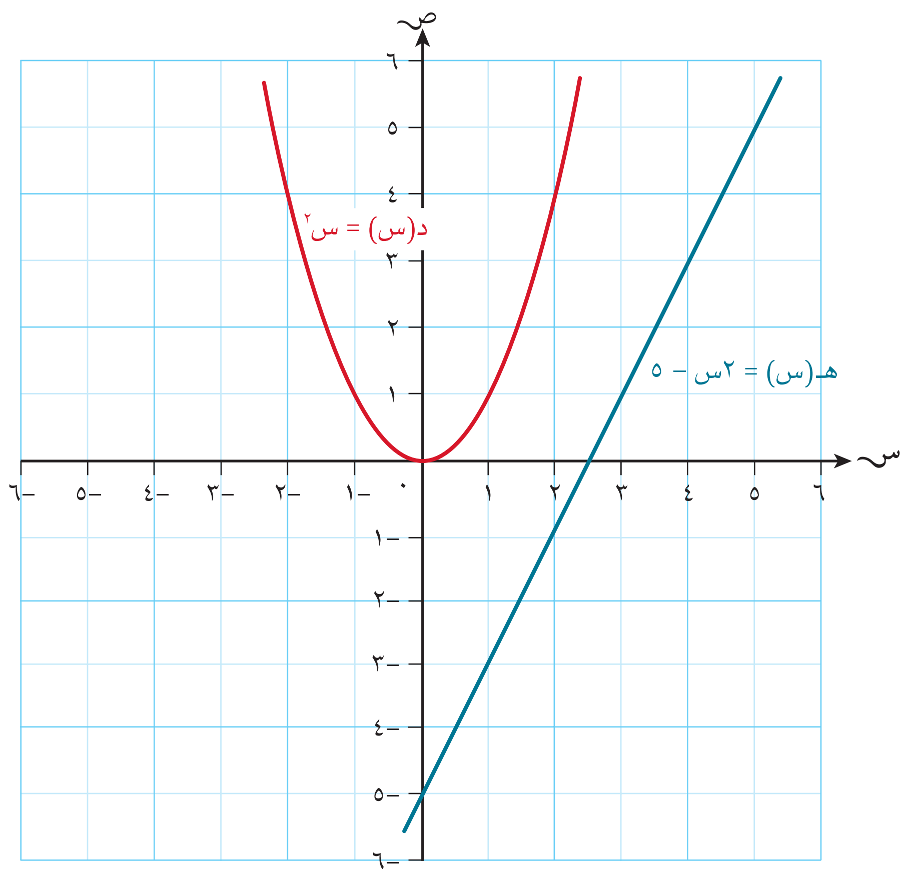
باستخدام برمجيات التمثيل البياني Desmos أو GeoGebra، يمكنك رسم منحنيَي الدالّتَين.

مثلًا، يمكن أن تكتب:

١) د(س) = س^{٢}

٢) هـ(س) = ٢س − ٥

سيظهر المنحنيان على صورة:



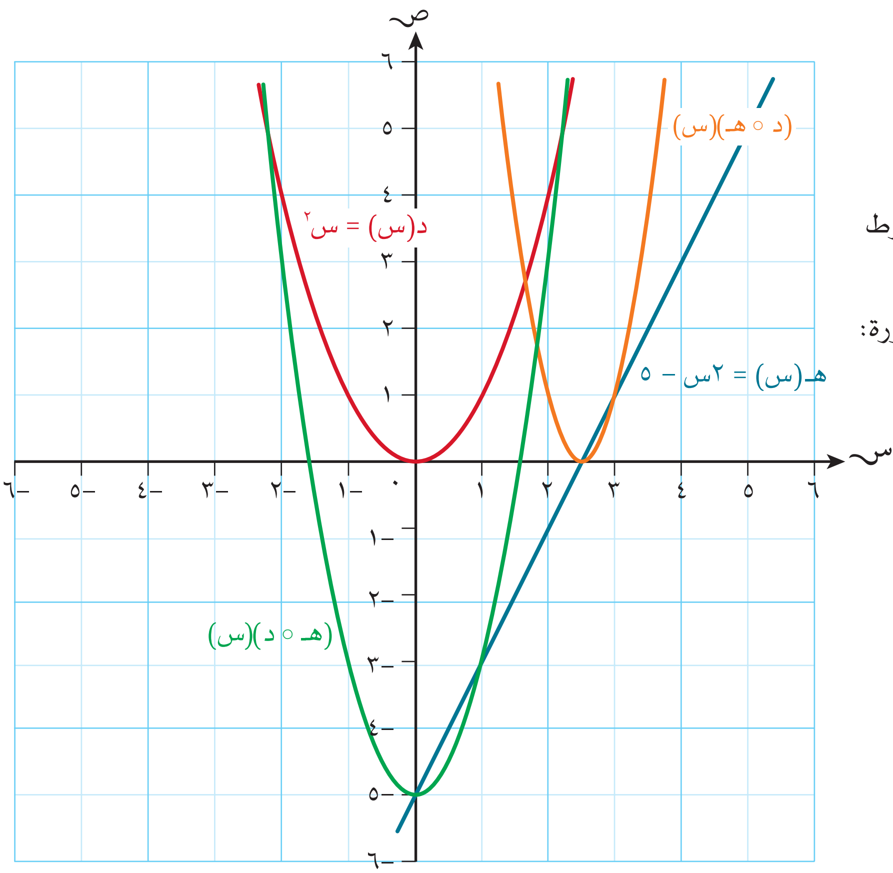
اكتب:

١) (د ○ هـ)(س)

٢) (هـ ○ د)(س)

يجب وضع الأقواس كشرط في البرمجية.

تظهر المنحنيات في صورة:



في هذه الحالة يكون واضحًا أن (د ○ هـ)(س) و (هـ ○ د)(س) غير متساويَين.

يمكنك أن توجّه الطلبة إلى رسم أزواج من الدوال حيث إن (د ○ هـ)(س) ≠ (هـ ○ د)(س) وبعض الأزواج الأخرى حيث إن (د ○ هـ)(س) = (هـ ○ د)(س).

أفكار للتعليم

Compose! في مصدر (Underground Mathematics) هو نشاط يحفز الطلبة على تركيب دوال مختارة بطريقة ما ليحصلوا على الدوال المطلوبة، إذ يجب الانتباه إلى مجالها ومداها قبل البدء بتركيب الدوال.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

يمكن تشجيع الطلبة على أن يوضحوا بعضهم لبعض الحلول الصحيحة وغير الصحيحة، مفسّرين السبب. يعتمد في ذلك على ترتيب تركيب الدوال وفهم الصيغ.

حل الطالب (ج) هو الحل الصحيح.

الطالب (أ) ضرب الدالتَين.

الطالب (ب) عكس ترتيب تركيب الدالتَين.

دعم الطلبة

الطلبة الذين يجدون في تركيب الدوال تحدّيًا، يمكن مساعدتهم باعتماد 'آلة' الدالة، حيث إن مخرجة من إحدى آلتَي الدالة تصبح مدخلة لآلة الدالة الثانية. يمكن للمخطط أيضًا أن يكون مفيدًا.

تحدّي الطلبة

في الرابط Composing gets me nowhere في مصدر (Underground Mathematics) يُعطى للطلبة فكرة عن تركيب الدالة مع نفسها، إذ يكون تركيب الدالة مع نفسها المدخلة الأصلية. ثمة أسئلة للتحدّي متضمنة كجزء من الحلّ.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢-٢

٢-٣ الدوال العكسية

ملاحظات للمعلمين

قد يحاول الطلبة تخمين الدالة العكسية (وهذا قد يصلح في الدوال البسيطة، إنما ليس في الدوال الأكثر تعقيدًا) ولكن قد يوقعهم ذلك بأخطاء ولا سيما أثناء إعادة الترتيب عندما يجدون الدوال العكسيّة جبريًّا.

أفكار للتعليم

في هذا الدرس، يواجه الطلبة فكرة الدالة العكسيّة وشرط تحققها، يقودهم المثال ٥ من خلال خطوات إيجاد الدالة العكسيّة جبريًا، آخذين بالاعتبار مجال الدالة العكسية. وفي المثال ٦ سيفهمون العلاقة بعمق بين مجال الدالة العكسية ومداها. الدالة العكسيّة لنفسها اعتمدت في السؤال ١٥ من تمارين ٢-٣

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

من خلال سلسلة أسئلة نقاشية، سيفضل الطلبة أحيانًا أن يكون المجال محددًا لينشئوا دالة واحد إلى واحد يكون لها دالة عكسيّة. الدالة التي سيعتمدونها هي دالة تربيعيّة في صورة مربع كامل لربط هذا الموضوع مع موضوع الوحدة السابقة 'المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية'.

١ متعدد إلى واحد

٢ (٢، ١)

٣ س ∋ ع

٤ د(س) $\leqslant$ ١

٥ لا، لأن الدالة د ليست واحدًا إلى واحد

٦ س ∋ ع، س $\leqslant$ ٢ أو س $\geqslant$ ٢

دعم الطلبة

يجب أن يكون الطلبة قد أتقنوا الإكمال إلى المربع ليجدوا الرأس ويرسموا المنحنى. الوحدة الأولى (المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية والمصادر المرتبطة) تقدّم خلفيّة علمية لدعم أيّ طالب يحتاج إلى مساعدة.

تحدّي الطلبة

في تمارين ٢-٣، السؤال ١٦ هو تمرين تحدٍ إذ يدمج الدالة العكسيّة مع الدوال المركبة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢-٣

٢-٤ منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية

أفكار للتعليم

حتى تساعد الطلبة على تطوير لغتهم الرياضية وقدراتهم على شرح مبرراتهم، فإن الرابط الإلكتروني Properties of Functions – Exploring Functions الموجود على الموقع الإلكتروني (STEM) يمكن أن يكون نشاطًا مفيدًا لبداية موفقة. كما يمكن أن ترسم بشكل متواز إيجاد صورة دالة بالانعكاس حول المستقيم ص = س لإيجاد الدالة العكسية لها، والمبادلة بين المتغيّرَين بالأسلوب الجبري لإيجاد الدالة العكسية. يساعد المثال ٨ الطلبة على رؤية تطبيقات التمثيلات البيانية للدالة العكسية لنفسها.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٣

يسلط هذا النشاط الضوء على أن الدالة واحد إلى واحد لها دالة عكسيّة. قد تسأل الطلبة عن كيفية معرفتهم بالدالة، وعن الشروط اللازمة ليكون لها دالة عكسيّة، وكيفية تطبيقهم تلك الشروط على دوال لها دوال عكسيّة. مناقشاتهم فيما إذا كانت على صواب، واستجاباتهم لهذه الأسئلة تساعدك على تقييم مدى فهمهم للدوال، والدوال العكسية لها، ومجال الدوال.

شهد أخطأت في كلا المخططَين.

د(س) هي دالة متعدد إلى واحد ويمكنك أن تجد الدالة العكسية فقط للدالة واحد إلى واحد.

هـ(س) هي علاقة واحد إلى متعدد، لذا فهي ليست دالة.

تحدّي الطلبة

يقدّم برهان السؤال ٥ من تمارين ٢-٤ فرصة تحدٍ للطلبة المجيدين، كذلك من الرابط Inverting rational functions الموجود في المصدر (NRICH) للذين يرغبون في استكشاف المزيد عن الطريقتَين: الجبرية لإيجاد الدالة العكسيّة، والبيانية من خلال العلاقة بين منحنيات الدوال ومنحنيات الدوال العكسيّة لها.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

التمارين ٢-٤

٢-٥ التحويلات الهندسيّة للدوال

٢-٥ أ الانسحاب

ملاحظات للمعلمين

من المفيد جدًا في هذه المرحلة التحقّق من وضوح اللغة واتساق الصيغ ليتقدم الطلبة في دمج التحويلات الهندسيّة في موضوعات لاحقة يكونون متأكدين من فهم ما يحدث ويتمكنون من وصفه. وقد يجد بعضهم أن الانسحاب بالطريقة الجبرية في اتجاه يوازي المحور السيني صعب، لذا أكّد على أن الانسحاب عملية مهمة، فمثلًا الانسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$ يتطلب منك أن تستبدل س بـ(س − ٣) على الرغم من أن الانسحاب ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات. يحتاج الطلبة إلى أن يفهموا تأثير الانسحاب على الإحداثيات وكذلك تأثيره على الدوال.

أفكار للتعليم

اطلب إلى الطلبة تنفيذ النشاط الاستكشافي الآتي:

استكشف

١) أ استخدم برمجيات التمثيل البياني لترسم منحنيات الدوال ص = $س^٢$، ص = $س^٢$ + ٢، ص = $س^٢$ − ٣
ناقش مشاهداتك مع أقرانك في الصف، شارحًا كيف يمكن الحصول على المنحنى الثاني والمنحنى الثالث من المنحنى الأول.

ب كرّر ما أجريته في الجزئية (أ) باستخدام المنحنيات ص = $\sqrt{س}$، ص = $\sqrt{س}$ + ١، ص = $\sqrt{س}$ − ٢

ج كرّر ما أجريته في الجزئية (أ) باستخدام منحنيات الدوال ص = $\frac{١٢}{س}$، ص = $\frac{١٢}{س}$ + ٥، ص = $\frac{١٢}{س}$ − ٤

د هل يمكنك تعميم النتائج التي حصلت عليها؟

٢) أ استخدم برمجيات التمثيل البياني لترسم منحنيات الدوال ص = $س^٢$، ص = $(س + ٢)^٢$، ص = $(س − ٥)^٢$
ناقش مشاهداتك مع أقرانك في الصف، شارحًا كيف يمكن الحصول على المنحنى الثاني والمنحنى الثالث من المنحنى الأول.

ب كرّر ما أجريته في الجزئية (أ) باستخدام منحنيات الدوال ص = $س^٢$، ص = $(س + ١)^٢$، ص = $(س − ٤)^٣$.

ج هل يمكنك تعميم النتائج التي حصلت عليها؟

٣) أ استخدم برمجيات التمثيل البياني لترسم منحنيَي الدالتَين ص = $س^٢$، ص = −$(س^٢)$
ناقش مشاهداتك مع أقرانك في الصف، شارحًا كيف يمكن الحصول على المنحنى الثاني من المنحنى الأول.

ب كرّر ما أجريته في الجزئية (أ) باستخدام منحنيَي ص = $س^٣$، ص = −$(س^٣)$

ج كرّر ما أجريته في الجزئية (أ) باستخدام منحنيَي الدالتَين ص = $٢^{س}$، ص = −$(٢^{س})$.

د هل يمكنك تعميم النتائج التي حصلت عليها؟

٤) أ استخدم برمجيات التمثيل البياني لترسم منحنيَي الدالتَين ص = ٥ + س، ص = ٥ − س
ناقش مشاهداتك مع أقرانك في الصف، شارحًا كيف يمكن الحصول على المنحنى الثاني من المنحنى الأول.

ب كرّر ما أجريته في الجزئية (أ) باستخدام منحنيَي الدالتَين ص= $\sqrt{٢ + س}$، ص = $\sqrt{٢ - س}$

ج هل يمكنك تعميم النتائج التي حصلت عليها؟

٥) أ استخدم برمجيات التمثيل البياني لترسم منحنيات الدوال ص = $س^{٢}$، ص = $٢س^{٢}$، ص = $(٢س)^{٢}$
ناقش مشاهداتك مع أقرانك في الصف، شارحًا كيف يمكن الحصول على المنحنى الثاني من المنحنى الأول.

ب كرّر ما أجريته في الجزئية (أ) باستخدام المنحنيات ص = $\sqrt{س}$ ، ص = $٢\sqrt{س}$، ص = $\sqrt{٢س}$

ج كرّر ما أجريته في الجزئية (أ) باستخدام المنحنيات ص = $٣^{س}$، ص = ٢×٣^{س}، ص = $٣^{٢س}$

د هل يمكنك تعميم النتائج التي حصلت عليها؟

هذا النشاط هو استقصاء باستخدام برمجية الرسوم البيانية التي تساعد في تقديم الموضوع. بالاعتماد على سلسلة منحنيات وبعض التحويلات الهندسيّة البسيطة لها، سيكون الطلبة قادرين على تحديد الأنماط والقيام بالتعميمات. وسيقودهم ذلك إلى استكشاف أثر الانسحاب، والتمدد، والانعكاس على المنحنيات ومعادلاتها.
في هذا الموضوع يركز الطلبة على وصف الانسحاب باستخدام المصطلحات الصحيحة والمتجهات مع التمدد والانعكاس اللذَين سيصبحان محور الدروس الآتية.

الرابط الإلكتروني Transformers من (Underground Mathematics)، يشجّع الطلبة على العمل مع أزواج المنحنيات بأن يحاولوا وصف التحويل الهندسي من أحد المنحنيَين إلى المنحنى الآخر بأكثر من طريقة. وبتحليل العملية سيطورون مرونة في تطبيق معارفهم في مواقف جديدة.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف

انظر إلى بعض التعليقات على أفكار التدريس السابقة

١) أ ص = $س^{٢}$ + ٢ هو انسحاب للمنحنى ص = $س^{٢}$ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \end{pmatrix}$.

ص = $س^{٢}$ − ٣ هو انسحاب للمنحنى ص = $س^{٢}$ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix}$.

ب ص= $\sqrt{س}$ + ١ هو انسحاب للمنحنى ص= $\sqrt{س}$ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$.

ص = $\sqrt{س}$ − ٢ هو انسحاب للمنحنى ص= $\sqrt{س}$ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٢ \end{pmatrix}$.

ج ص = $\frac{١٢}{س}$ + ٥ هو انسحاب للمنحنى ص = $\frac{١٢}{س}$ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$.

ص = $\frac{١٢}{س}$ − ٤ هو انسحاب للمنحنى ص = $\frac{١٢}{س}$ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٤ \end{pmatrix}$.

د ص = د(س) + أ هو انسحاب للمنحنى ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} \cdot \\ أ \end{pmatrix}$.

٢) أ ص = (س + ٢)^٢ هو انسحاب للمنحنى ص = س^٢ بالمتجه $\begin{pmatrix} -٢ \\ \cdot \end{pmatrix}$.

ص = (س − ٥)^٢ هو انسحاب للمنحنى ص = س^٢ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٥ \\ \cdot \end{pmatrix}$.

ب ص = (س + ١)^٣ هو انسحاب للمنحنى ص = س^٣ بمقدار $\begin{pmatrix} -١ \\ \cdot \end{pmatrix}$.

ص = (س − ٤)^٣ هو انسحاب للمنحنى ص = س^٣ بمقدار $\begin{pmatrix} ٤ \\ \cdot \end{pmatrix}$.

ج ص = د(س + أ) هو انسحاب للمنحنى ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} -أ \\ \cdot \end{pmatrix}$.

٣) أ ص = −(س^٢) هو انعكاس للمنحنى ص = س^٢ حول المحور السيني.

ب ص = −(س^٣) هو انعكاس للمنحنى ص = س^٣ حول المحور السيني.

ج ص = −(٢^{س}) هو انعكاس للمنحنى ص = ٢^{س} حول المحور السيني.

د ص = −د(س) هو انعكاس للمنحنى ص = د(س) حول المحور السيني.

٤) أ ص = ٥ − س هو انعكاس للمنحنى ص = ٥ + س حول المحور الصادي.

ب ص = $\sqrt{٢ - س}$ هو انعكاس للمنحنى ص = $\sqrt{٢ + س}$ حول المحور الصادي.

ج ص = د(−س) هو انعكاس للمنحنى ص = د(س) حول المحور الصادي.

٥) أ ص = ٢س^٢ هو تمدد للمنحنى ص = س^٢ في الاتجاه الصادي معامله ٢

ص = (٢س)^٢ هو تمدد للمنحنى ص = س^٢ في الاتجاه السيني معامله $\frac{١}{٢}$

ب ص = ٢$\sqrt{س}$ هو تمدد للمنحنى ص = $\sqrt{س}$ في الاتجاه الصادي معامله ٢

ص = $\sqrt{٢س}$ هو تمدد للمنحنى ص = $\sqrt{س}$ في الاتجاه السيني معامله $\frac{١}{٢}$

ج ص = ٢ × ٣^{س} هو تمدد للمنحنى ص = ٣^{س} في الاتجاه الصادي معامله ٢

ص = ٣^{٢س} هو تمدد للمنحنى ص = ٣^{س} في الاتجاه السيني معامله $\frac{١}{٢}$

د ص = ٢د(س) هو تمدد للمنحنى ص = د(س) في الاتجاه الصادي معامله ٢

ص = د(٢س) هو تمدد للمنحنى ص = د(س) في الاتجاه السيني معامله $\frac{١}{٢}$

دعم الطلبة

الانسحاب والتمدد اللذان يؤثران على الاتجاه السيني يشكلان صعوبات عند الطلبة جبريًّا؛ أمّا التمثيلات البيانية والوسائل البصرية فتساعد على الفهم.

تحدّي الطلبة

الرابط Grouping transformations من الموقع الإلكتروني (NRICH) يربط بين بعض الاستقصاءات حول التحويلات الهندسية وخصائصها. يمكن أن يجرّب الطلبة هذا الأمر ويقوموا بالتعميمات على ما يجدونه، لأنهم بهذه الطريقة سيتعرفون على نظرية المجموعات (ويتم دراستها لاحقًا في الجامعة، ويدل ذلك على أن هذه الأفكار مرتبطة بالتحويلات الهندسية المختلفة).

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢–٥ أ

٢-٥ ب الانعكاس

ملاحظات للمعلمين

قد يخلط بعض الطلبة حول أيّ الإحداثيَّين يتأثر بالانعكاس، إما المحور السيني أو الصادي. تساعدهم المنحنيات البصرية والمعالجة الجبرية على إدراك هذا المفهوم.

أفكار للتعليم

قد ترغب في أن تسأل الطلبة الاعتماد على منحنى ثابت لا يتغير تحت تأثير الانعكاس حول المحور السيني أو المحور الصادي، مثل: ص = س^{٢}، ص = جتا(س)، س = ص^{٢}، س = ٣؛ إذا تم انعكاس ص = س^{٢} حول المحور الصادي، فلا يبدو أن شيئًا قد تغير. والسبب أن الطلبة يحتاجون إلى معرفة أنه إذا كانت د(س) = د(−س) (كما في التمثيلات البيانية ص = س^{٢} و ص = جتا(س))، فإن صورة الدالة تكون هي نفسها عندما تكون س سالبة، وهذا ينتج منه انعكاس حول المحور الصادي.

دعم الطلبة

من المفيد التدريب جبريًّا وبيانيًّا.

تحدّي الطلبة

يمكن للطلبة الذين يستسهلون هذا الموضوع أن يعملوا على إيجاد دوال أخرى ثابتة لا تتغير بالانعكاس أو بتحويلات هندسيّة أخرى.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢-٥ ب

٢-٥ ج التمدد

ملاحظات للمعلمين

يحتاج الطلبة إلى معرفة أثر التمدد على الإحداثيات كما هو على الدالة. بالعمل جبريًّا، قد يجد بعض الطلبة أحيانًا تحديًا في إيجاد التمدد في الاتجاه السيني، وعليه يجب التأكيد على أن الاستبدال أساسي. فمثلًا: تمدد معامله ٢ بالاتجاه السيني يتضمن استبدال س بـ $\frac{١}{٢}$س

أفكار للتعليم

بكم طريقة مختلفة يمكن أن تصِف التحويل الهندسي الذي يحوّل ص = س^{٢} إلى ص = ٩س^{٢}؟

يمكن الحديث عن فكرة الثبات هنا كما هو الحال في درس الانعكاس. عندما يُمدّد المنحنى بالاتجاه الموازي للمحور السيني أو المحور الصادي، فهل توجد نقطة على المنحنى ثابتة لا تتغيّر؟ ولماذا يحصل هذا الأمر؟ وكيف نفسّره جبريًّا؟

دعم الطلبة

قد يجد بعض الطلبة تصوّر التمدد بمعامل أقل من ١ تحديًا لهم، حيث تظهر كأنها عملية ضغط. من المفيد تذكيرهم أن كلمة 'تمدد' لها معنى رياضي هنا أكثر من المعنى في الحياة اليومية: (في الاستخدام اليومي، يعني 'التمدد' جعل شيء ما أكبر، بينما في الرياضيات يمكن أن يكون لديك تمدد معامله بين صفر، ١، الأمر الذي ينتج منه تقلص المنحنى، على الرغم من أننا نعدّه تمددًا رياضيًّا). والتدريب برسم المنحنيات يساعد الطلبة على تطوير عملية الفهم والقدرة على تصور ما يحدث.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢-٥ ج

مصادر تعليمية اختيارية مفيدة

Parabolic patterns – (NRICH) (الجزء الأول من المسألة عن الانسحاب، والجزء الثاني عن التمدد).

٢-٦ تركيب التحويلات الهندسية

ملاحظات للمعلمين

ستكون فكرة جيدة للطلبة أن يصبحوا بارعين أولًا في إجراء تركيبَين هندسيَّين على المنحنى، ثم القيام بذلك جبريًا حتى الوصول إلى المعادلة النهائية للمنحنى، وانتهاءً برسمه. في التمارين ٢-٦، الأسئلة من ٣ إلى ٦ تركز على الجبر، ويبيّن المثال ١٥ طريقة لرسم المنحنى في المرحلة النهائية، كما أن السؤالَين ١ و ٢ من التمارين ٢-٦ يعالجان التمدد أو تفسير المنحنيات. عندما يصبح الطلبة ماهرين في فهم الترابط بين التحويلات الهندسيّة المختلفة، يمكنهم الانتقال إلى درجات أعلى في التحقق من الحلّ، بغضّ النظر عن سلسلة التحويلات الهندسيّة التي تمت لتتحول من دالة إلى أخرى كما في المثال ١٦ والسؤال ٦ من تمارين ٢-٦، التي تُعدّ أكثر جزء تحدّيًا في هذا الموضوع.

خلال هذا الدرس يحتاج الطلبة إلى استخدام لغة رياضية دقيقة ليصفوا التحويلات الهندسيّة. يساعد هذا الأمر على وضوح التفكير وتعميق ما تعلموه في المواضيع السابقة.

أفكار للتعليم

يساعد استخدام الرابط Order! Order! من (Underground Mathematics) الطلبة على استقصاء نتيجة تركيب تحويلات هندسيّة بتتبّع نقطة محددة على المنحنى إلى جانب تمثيل المعادلة. استكشف ٤ في هذه الوحدة سيطوّر الموضوع نفسه باتباع تطوّر المثلث تحت تأثير تركيبات هندسيّة مختلفة: تركيبَين هندسيَّين رأسيَّين، أو تركيبَين هندسيَّين أفقيَّين، أو تركيب واحد من كلّ نوع. يمكن للطلبة أن يقرروا الحالات التي يؤثر فيها ترتيب التحويلات الهندسيّة في النتيجة. وليفهموا سبب تأثير ترتيب التحويلات الهندسية، فما عليهم إلّا العودة إلى المخططات وملخصات النتائج من ١٥ إلى ١٧

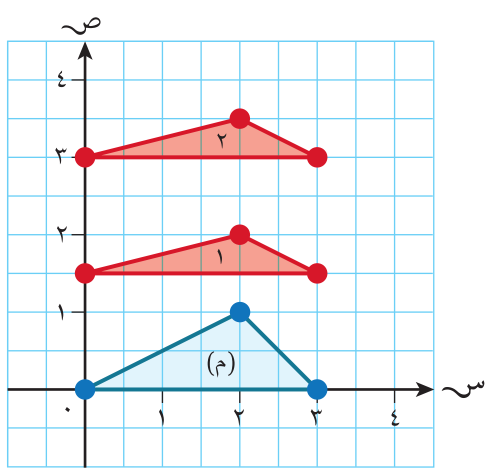
صمم العرض التوضيحي ٢ (PPT) في هذه الوحدة لتساعدك على قيادة مناقشة الطلبة في إيجاد سلسلة من تحويلَين هندسيَّين للوصول إلى المعادلة المطلوبة. كلا التحويلَين التمدد، والانسحاب يحدثان في الاتجاه السيني، وهكذا يكون الترتيب مهمًا، إذ يسلط الضوء على الحاجة إلى استبدال متجه الانسحاب اعتمادًا على ما إذا كان الانسحاب قد وقع أولًا أو ثانيًا، وعلى التفكير في ما استبدِل جبريًا للوصول إلى الهدف المنشود. إن التوقف وإعادة النظر يتيحان للطلبة، من وقت إلى آخر، التفكير بتمعن في ترتيبات كلّ مرحلة.

إرشادات حول أنشطة استكشف

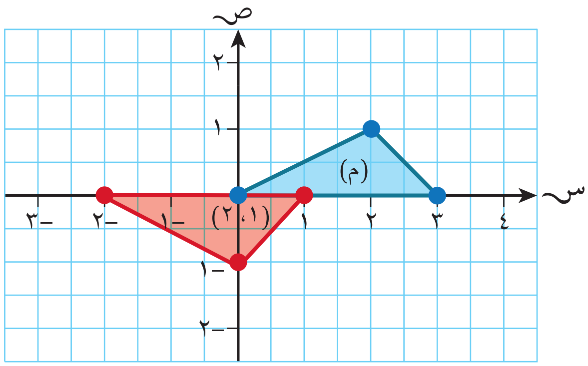
استكشف ٤

شاهد ملاحظات الدرس السابق حول أفكار للتعليم.

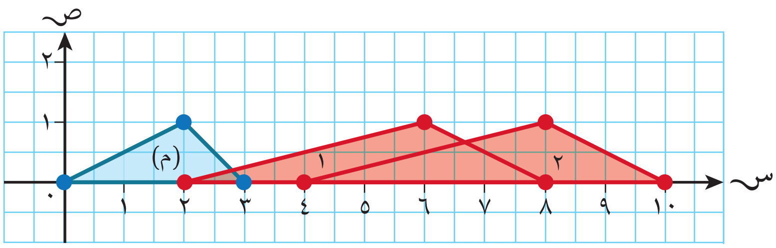
١) أ مختلفة



٢) أ نفسها



٣) أ مختلفة



دعم الطلبة

قد يحتاج بعض الطلبة إلى كثير من التدريب لاتباع الأسلوب الجبري خلال خطوتَي تركيب التحويلات الهندسيّة لإقناعهم بسبب تأثير الترتيب في بعض الحالات على النتيجة. من المفيد تذكير الطلبة بأنهم يستبدلون س أو ص بعبارات جبرية أخرى اعتمادًا على التحويل الهندسي، أي المطلوب هو التعويض الجبري.

تحدي الطلبة

★ يوجد تمرينان إثرائيان يطلب إلى الطلبة التفكير فيهما في نهاية حلّ Order! Order! في (Underground Mathematics). في الرابط الإلكتروني المعطى أعلاه.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٢–٦

مصادر تعليمية اختيارية مفيدة

يمكن استخدام Which parabola? في (Underground Mathematics). لإيجاد تركيب تحويلات هندسيّة تستخدم منحنى دالة تربيعية واحدة لإيجاد عدة منحنيات أخرى.

شرائح عرض توضيحي (PPT) الدّوال

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الوحدة الثانية: الدّوال

العرض التوضيحي (٢)

https://ict.moe.gov.om/TeacherBook/PDF/11/OMN-T-1U-2L-1Math_G11.pdf

اختصار الرابط

https://qrs.ly/xjeajw8

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

أوجِد سلسلة التحويلَين الهندسيَّين
التي تحوّل

$ص = س^{٢} \leftarrow ص = (٢س - ٣)^{٢}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الخطوة ١

$ص = س^{٢} \leftarrow ص = (س - ٣)^{٢}$

ما الذي تمّ استبداله؟

تمّ استبدال س بـ $(س - ٣)$

أيّ تحويل هندسي هذا؟

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

الخطوة ٢

$ص = (س - ٣)^{٢} \leftarrow ص = (٢س - ٣)^{٢}$

ما الذي تمّ استبداله؟

تمّ استبدال س بـ (٢س)

أيّ تحويل هندسي هذا؟

تمدّد في الاتجاه السيني (أفقي) معامله $\frac{١}{٢}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

∴ سلسلة التحويلين الهندسيين التي تحوّل

$ص = س^{٢} \leftarrow ص = (٢س - ٣)^{٢}$

١. انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

٢. تمدّد في الاتجاه السيني (أفقي) معامله $\frac{١}{٢}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

هل يمكنك التفكير في سلسلة
أخرى ممكنة؟

ص = س^{٢} ← ص = (٢س − ٣)^{٢}

ماذا يحدث إذا بدأنا بالتمدد؟

هل سيكون الانسحاب بالمتجه نفسه أم لا؟

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الخطوة ١

ص = (س)^{٢} ← ص = (٢س)^{٢}

ما الذي تمّ استبداله؟

تمّ استبدال (س) بـ (٢س)

أيّ تحويل هندسي هذا؟

ص = س^{٢} ← ص = (س − ٣)^{٢}

الخطوة ٢

ص = (٢س)^{٢} ← ص = (٢س − ٣)^{٢}

ما الذي تمّ استبداله؟

تمّ استبدال س بـ (س − ؟)

أيّ تحويل هندسي هذا؟

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ؟ \\ ٠ \end{pmatrix}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

∴ سلسلة التحويلَين الهندسيَّين
الأخرى التي تحوّل

ص = س^{٢} ← ص = (٢س − ٣)^{٢}

١ . تمدّد في الاتجاه السيني (أفقي) معامله $\frac{١}{٢}$

٢ . انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} \\ ٠ \end{pmatrix}$

إجابات تمارين كتاب الطالب – الوحدة الثانية: الدوال

معرفة قبلية

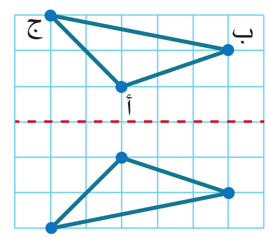
١) ١٠

٢) ٣ − ٢س

٣) د$^{-١}$(س) = $\frac{\text{س} - ٤}{٥}$

٤) ٢(س − ٣)^{٢} − ١٣

٥)



تمارين ٢-١

١) أ دالة واحد إلى واحد

ب دالة متعدد إلى واحد

ج دالة واحد إلى واحد

د دالة واحد إلى واحد

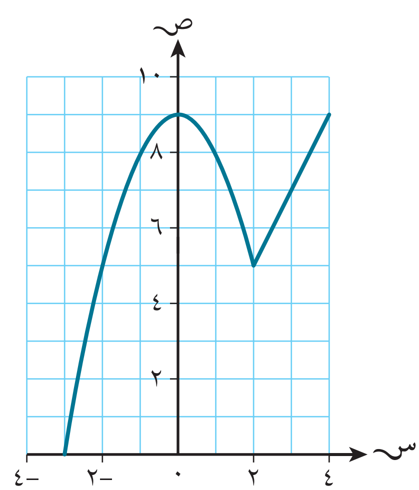
٢) أ دالة واحد إلى واحد

ب دالة واحد إلى واحد

ج دالة واحد إلى واحد

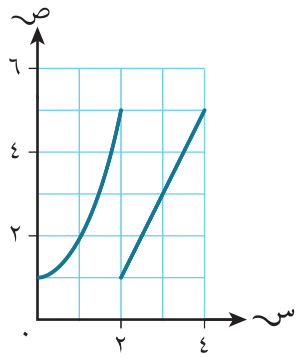
د ليست دالة

٣) أ



ب دالة، متعدد إلى واحد

٤) أ



ب توجد مدخلة (٢) لها مخرجتان هما: ١، ٥

٥) أ المجال: −١ ≤ س ≤ ٥، المدى: −٨ ≤ د(س) ≤ ٨

ب المجال: −٣ ≤ س ≤ ٢، المدى: −٧ ≤ د(س) ≤ ٢٠

٦) أ د(س) > ١٢ ب −١٣ ≤ د(س) ≤ −٣

ج −١ ≤ د(س) ≤ ٩ د ٢ ≤ د(س) ≤ ٣٢

هـ $\frac{١}{٣٢}$ ≤ د(س) ≤ ١٦ و $\frac{٣}{٢}$ ≤ د(س) ≤ ١٢

٧) أ د(س) ≥ −٢ ب ٣ ≤ د(س) ≤ ٢٨

ج د(س) ≤ ٣ د −٥ ≤ د(س) ≤ ٧

٨) أ د(س) ≥ ٥ ب د(س) ≥ −٧

ج −١٧ ≤ د(س) ≤ ٨ د د(س) ≥ ١

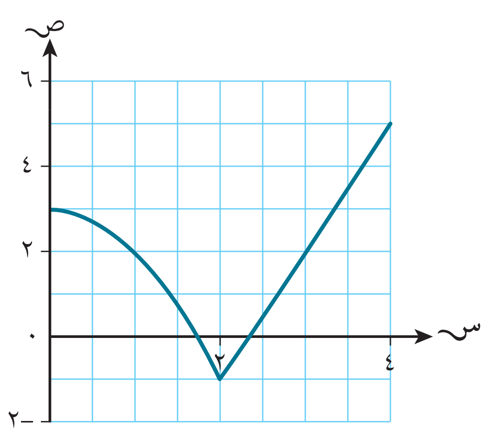
٩) أ د(س) = (س + ٣)^{٢} − ٢٠ ، د(س) ≥ −٢٠

ب د(س) = ٣$\left(\text{س} - \frac{٥}{٣}\right)^{٢}$ − $\frac{١٩}{٣}$ ، د(س) ≥ −٦$\frac{١}{٣}$

١٠) أ د(س) = ٢٣ − (س + ٤)^{٢} ، د(س) ≤ ٢٣

ب د(س) = ٥ − ٣(س + ١)^{٢} ، د(س) ≤ ٥

١١) أ



ب −١ ≤ د(س) ≤ ٥

١٢) د(س) ≥ ك − ٩

١٣) هـ(س) ≥ −$\frac{أ^٢}{٨}$ + ٥

١٤) أ = ٢

١٥) أ = ١ أو أ = −٥

١٦) أ ٢(س − $\frac{٧}{٤}$)^٢ − $\frac{٩}{٨}$ ب ك = $\frac{٧}{٢}$

ج س ∈ ع، $\frac{٩}{٨}$ ≤ س ≤ ٥

تمارين ٢-٢

١) أ ٧ ب ٣ ج ٢٣١

٢) أ ع ∘ ل ب ل ∘ ع ج ع ∘ ع

٣) أ أ = ٣، ب = −١٢ ب ٥$\frac{٧}{٩}$

٤) أ لا يمكن إيجاد (هـ ∘ د)(س)

ب س = ٢٥

٥) أ (٢س + ٥)^٢ − ٢ ب −٤$\frac{١}{٢}$، −$\frac{١}{٢}$

٦) أ $\left(\frac{س − ١}{٣}\right)^٢$ + ١ ب $\frac{١}{٢}$ أو ٣$\frac{١}{٢}$

٧) أ $\left(\frac{٢}{(س + ١)} + ٢\right)^٢$ − ٥ ب −$\frac{٤}{٣}$ أو ٠

٨) س = −٤

٩) $\frac{س + ٢}{٤س + ٩}$

١٠) أ (د ∘ هـ)(س) ب (هـ ∘ د)(س)

ج (هـ ∘ هـ)(س) د (د ∘ د)(س)

هـ (هـ ∘ د ∘ هـ)(س) و (د ∘ هـ ∘ د)(س)

١١) برهان

١٢) ±٤

١٣) ك ≥ −$\frac{١٩}{٢}$

١٤) برهان

١٥) أ ٤س^٢ + ٢ س − ٦ ب (د ∘ هـ)(س) ≥ −٦$\frac{١}{٤}$

١٦) أ (ل ∘ ك)(س)، المجال: س ∈ ع،

المدى: د(س) ∈ ع، د(س) ≥ −١

ب (ك ∘ ل)(س)، المجال: س ∈ ع،

المدى: د(س) ∈ ع، د(س) ≥ ١

ج (ع ∘ ع)(س)، المجال: س ∈ ع،

المدى: د(س) ∈ ع

د (ك ∘ ل ∘ ع)(س)، المجال: س ∈ ع، س ≠ ٠

المدى: د(س) ∈ ع، د(س) > ١

هـ (ك ∘ ك)(س)، المجال: س ∈ ع،

المدى: د(س) ∈ ع

و (ل ∘ ي)(س)، المجال: س ∈ ع، س ≥ −١

المدى: د(س) ∈ ع، د(س) ≥ −١

تمارين ٢-٣

١) أ د$^{-١}$(س) = $\frac{٨ + س}{٥}$

ب د$^{-١}$(س) = $\sqrt{س − ٣}$

ج د$^{-١}$(س) = ٥ + $\sqrt{س − ٣}$

د د$^{-١}$(س) = $\frac{٣س + ٨}{س}$

هـ د$^{-١}$(س) = $\frac{٧ − ٢س}{س − ١}$

و د$^{-١}$(س) = ٢ + $\sqrt[٣]{س + ١}$

٢) أ المجال: س ≥ −٤ المدى: د$^{-١}$ ≥ −٢

ب د$^{-١}$(س) = −٢ + $\sqrt{س + ٤}$

٣) أ د$^{-١}$(س) = $\frac{٥ − س}{٢س}$ ب س ≤ ١

٤) أ د$^{-١}$(س) = −١ + $\sqrt[٣]{س + ٤}$ ب س ≥ −٣

٥) أ هـ دالة واحد إلى واحد حيث س ≥ ٣، لأن الرأس (٢، ٢)

ب هـ$^{-١}$(س) = ٢ + $\sqrt{\frac{س − ٢}{٢}}$

٦) أ −٣ ب د⁻¹(س) = −٣ + √((س + ٣٢) / ٢)

٧) أ د(س) ≥ −٩

ب لا توجد لها دالة عكسية لأنها ليست دالة واحد إلى واحد

٨) أ ك = ٣

ب ١) د⁻¹(س) = ٣ + √(٩ − س)

٢) المجال: −٧ ≤ س ≤ ٩،

المدى ٣ ≤ د(س) ≤ ٧

٩) أ د(س) = ١ / (٥ − س) ب المجال س ≤ ٤ ٢/٣

١٠) أ = ٥، ب = ١٢

١١) أ د⁻¹(س) = (س + ١) / ٣ ، هـ⁻¹(س) = (٤س + ٣) / ٢س

ب برهان

١٢) أ د⁻¹(س) = ١/٢ (١ + ∛(س + ٣))

ب المجال −٢ ≤ س ≤ ١٢٢

١٣) أ د(س) = (س − ٥)² − ٢٥

ب د⁻¹(س) = ٥ + √(س + ٢٥)، المجال: س ≥ −٢٥

١٤) أ د⁻¹(س) = (س + ١) / س ب برهان

ج (١ ± √٥) / ٢

١٥) أ ب، ج

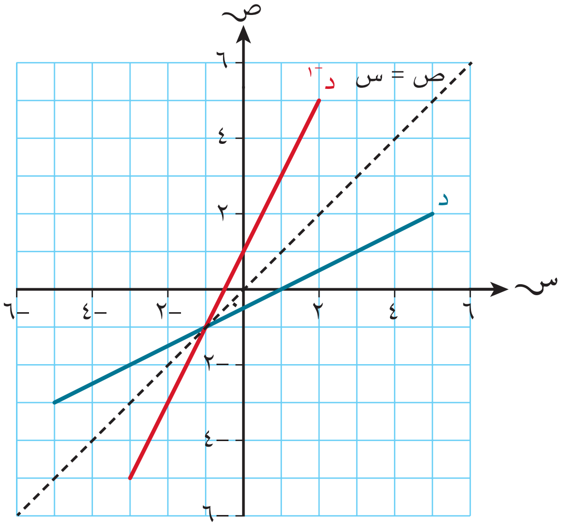
١٦) أ (٧ − س) / ٦

ب ١) (١٤ − س) / ٦ ٢) (٧ − س) / ٦

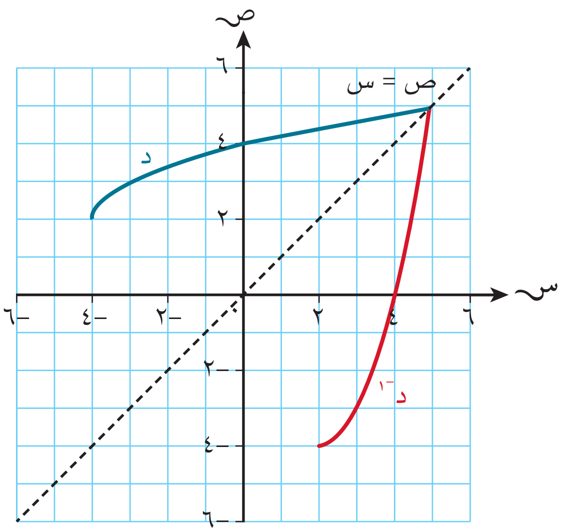
ج (د ∘ هـ)⁻¹(س) = هـ⁻¹ ∘ د⁻¹(س)

تمارين ٢-٤

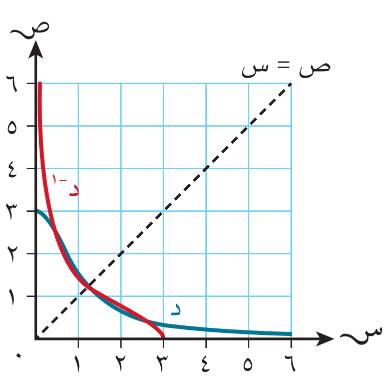
١) أ



ب



ج

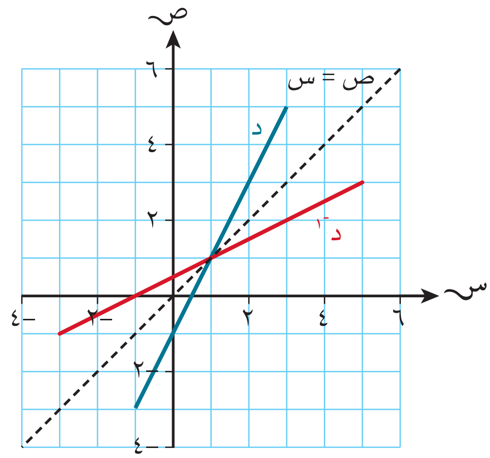


د د⁻¹ غير موجودة لأن د ليست دالة واحد إلى واحد

٢) أ $د^{-1}(س) = \frac{س + ١}{٢}$

ب المجال: $-٣ \leqslant س \leqslant ٥$، المدى: $-١ \leqslant س \leqslant ٣$

ج

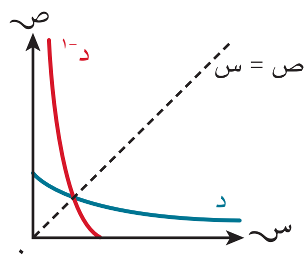


٣) أ $٠ < د(س) \leqslant ٢$

ب $د^{-1}(س) = \frac{٤ - ٢س}{س}$

ج المجال: $٠ < س \leqslant ٢$، المدى: $د^{-1}(س) \geqslant ٠$

د



٤) أ متماثلة حول ص = س

ب ليست متماثلة حول ص = س

ج متماثلة حول ص = س

د متماثلة حول ص = س

٥) أ برهان

ب د = −أ

تمارين ٢-٥ أ

١) أ $ص = ٢س^{٢} + ٤$

ب $ص = ٥\sqrt{س} - ٢$

ج $ص = ٧ س^{٢} - ٢س + ١$

د $ص = س^{٢} + ١$

هـ $ص = \frac{٢}{س + ٥}$

و $ص = \frac{س - ٣}{س - ٢}$

ز $ص = (س + ١)^{٢} + س + ١$

ح $ص = ٣(س - ٢)^{٢} + ١$

٢) أ انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \end{pmatrix}$

ب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٥ \end{pmatrix}$

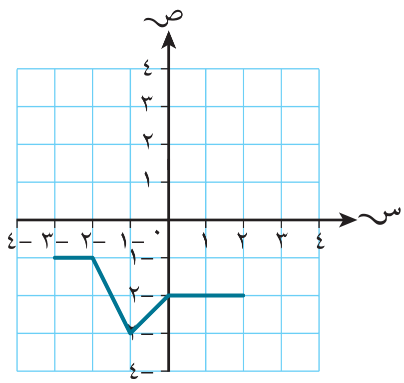
ج انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

د انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$

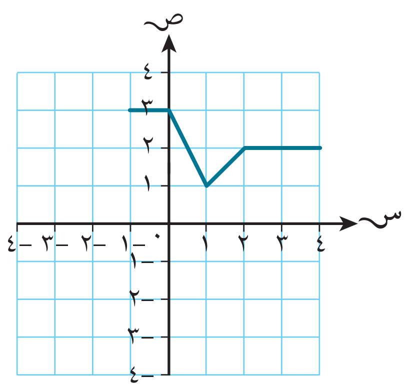
هـ انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

و انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٤ \end{pmatrix}$

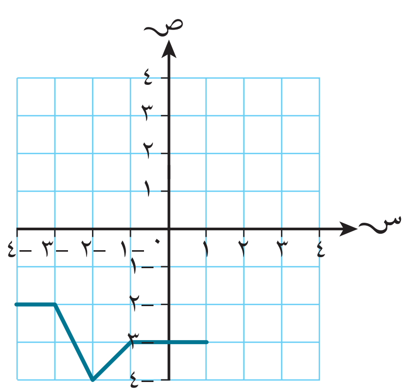
٣) أ



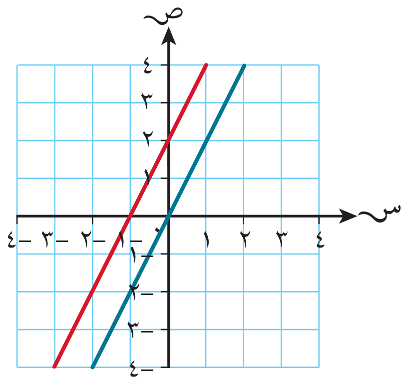
ب



ج



٤) أ



ب أ = ٢ ‏ ‏ ‏ ‏ ج ب = −١

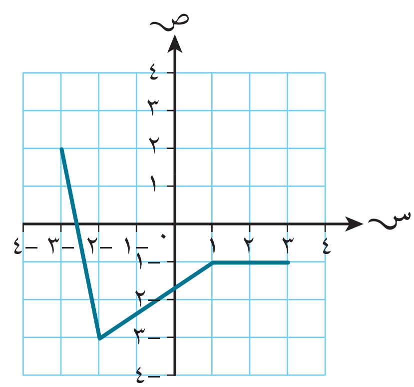
٥) ص = (س + ١)(س − ٤)(س − ٧)

٦) ص = س^٢ − ٦س + ٨

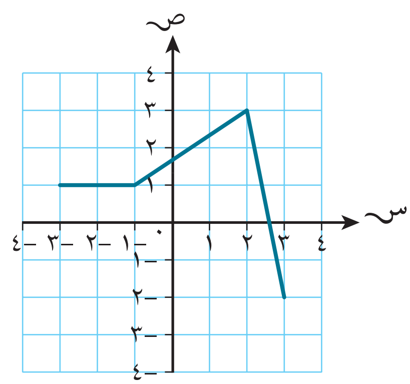
٧) أ = ٢، ب = −٣، جـ = ١

تمارين ٢-٥ ب

١) أ



ب



٢) أ ص = −٥س^٢

ب ص = ٢س^٤

ج ص = ٢س^٢ + ٣س + ١

د ص = ٣س^٢ − ٢س − ٥

٣) أ انعكاس في المحور السيني

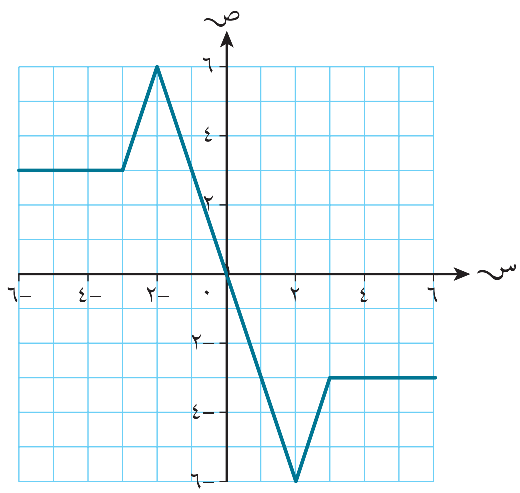
ب انعكاس في المحور الصادي

ج انعكاس في المحور السيني

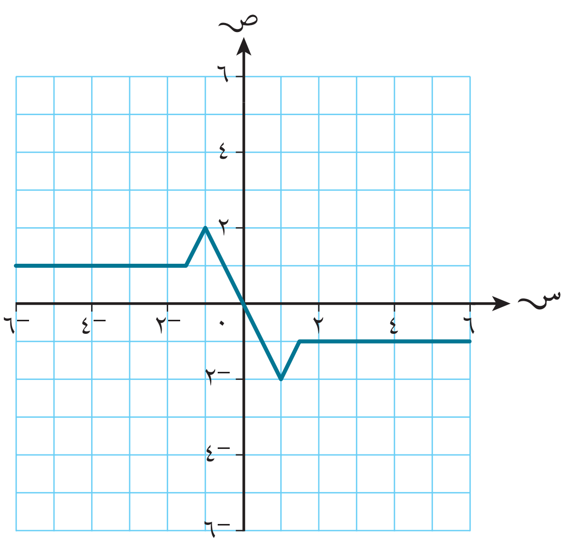
د انعكاس في المحور السيني

تمارين ٢-٥ ج

١) أ



ب



٢) أ ص = ٦س^٢ ‏ ‏ ‏ ‏ ب ص = ٣س^٣ − ٣

ج ص = ٢$^{س-١}$ + ٢

د ص = $\frac{١}{٢}$س^٢ − ٤س + ١٠

هـ ص = ١٦٢س^{٣} − ١٠٨س

٣) أ تمدد موازٍ لمحور السينات معامله $\frac{١}{٢}$

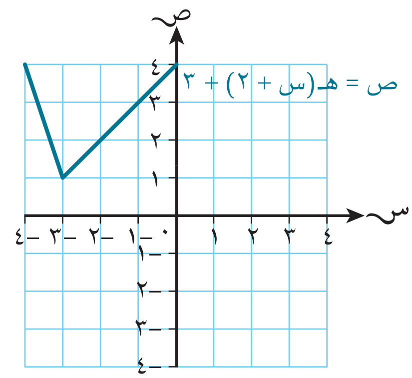
ب تمدد موازٍ لمحور الصادات معامله ٣

ج تمدد موازٍ لمحور الصادات معامله ٢

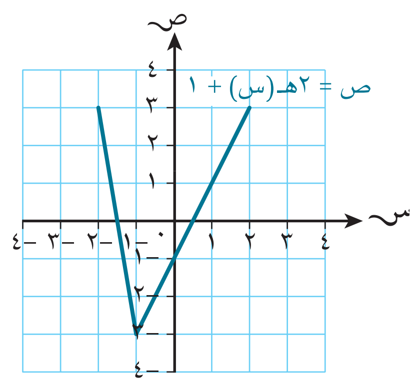
د تمدد موازٍ لمحور السينات معامله $\frac{١}{٣}$

تمارين ٢-٦

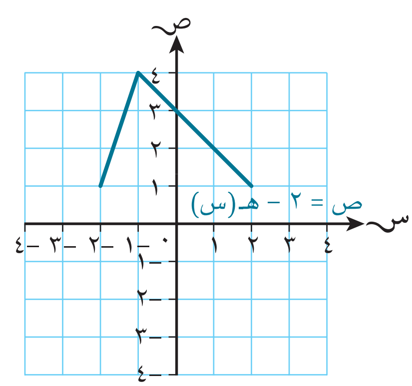
١) أ



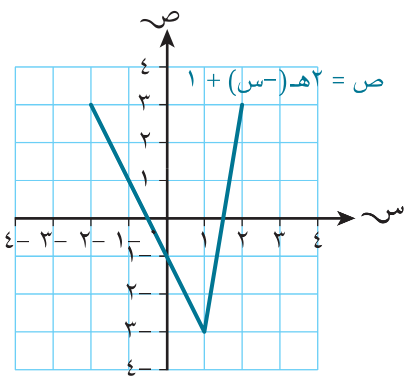
ب



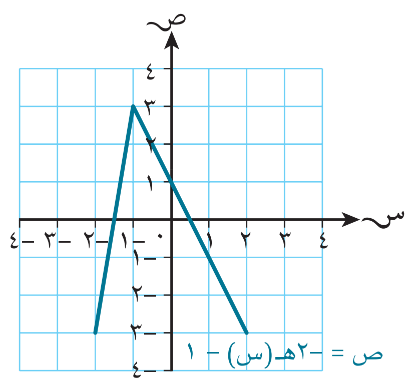
ج



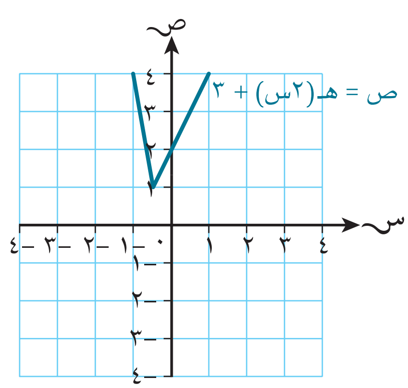
د



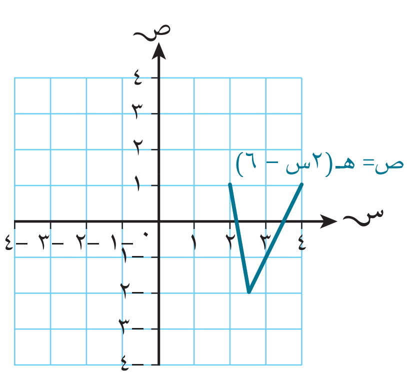
هـ



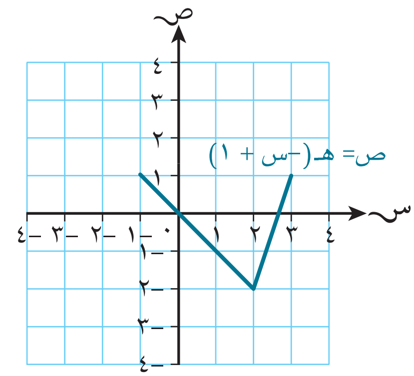
و



ز



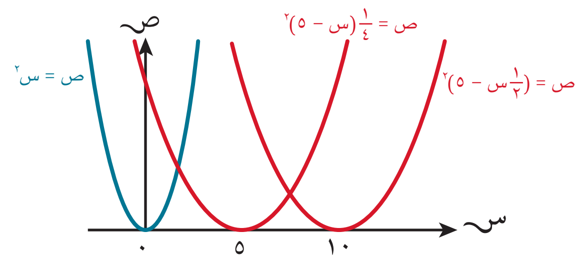
ح



٢) أ $ص = ٣(س - ١)^٢$ ب $ص = ٣(س - ١)^٢$

٣) أ $ص = \frac{١}{٤}(س - ٥)^٢$ ب $ص = \left(\frac{١}{٢}س - ٥\right)^٢$

ج



٤) أ $ص = ٢س^٢ - ٨$ ب $ص = -س^٢ + ٤س - ٥$

٥) أ $ص = ٢هـ(-س)$ ب $ص = ٣ - د(س - ٢)$

٦) أ تمدد باتجاه المحور الصادي معامله $\frac{١}{٢}$ يتبعه بانسحاب بالمتجهه $\begin{pmatrix}٠\\٣\end{pmatrix}$

ب انعكاس في المحور السيني يتبعه بانسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٢\end{pmatrix}$

ج انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٦\\٠\end{pmatrix}$ يتبعه تمدد باتجاه المحور السيني معامله $\frac{١}{٢}$

د تمدد باتجاه المحور الصادي معامله ٢ يتبعه بانسحاب بالمتجهه $\begin{pmatrix}٠\\-٨\end{pmatrix}$

٧) أ انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٥\\٠\end{pmatrix}$ يتبعه تمدد باتجاه المحور الصادي معامله $\frac{١}{٢}$

ب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-١\\٠\end{pmatrix}$ يتبعه تمدد باتجاه المحور الصادي معامله $\frac{١}{٢}$، ثم انعكاس في المحور السيني، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\-٢\end{pmatrix}$

ج انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٣\\٠\end{pmatrix}$، ثم يتبعه تمدد باتجاه المحور الصادي معامله ٢، ثم انعكاس في المحور السيني، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٤\end{pmatrix}$

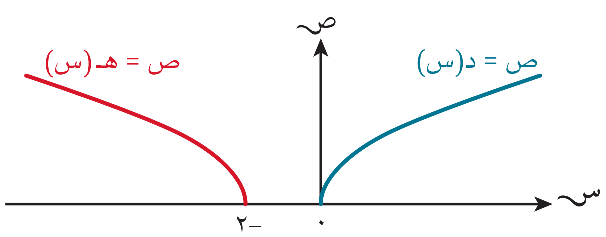
٨) أ $ص = -\sqrt{\frac{١}{٢}س - ١} + ٣$

ب $ص = -\sqrt{\frac{١}{٢}(س - ١)} - ٣$

٩) أ $ص = ٣\left[(-س + ٤)^٢ + ٢\right] = ٣(٤ - س)^٢ + ٦$

ب $ص = ٣\left[(-(س + ٤))^٢\right] + ٢ = ٣(٤ + س)^٢ + ٢$

١٠) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٢\\٠\end{pmatrix}$ يتبعه بانعكاس في المحور الصادي أو انعكاس في المحور الصادي، ثم بانسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٢\\٠\end{pmatrix}$

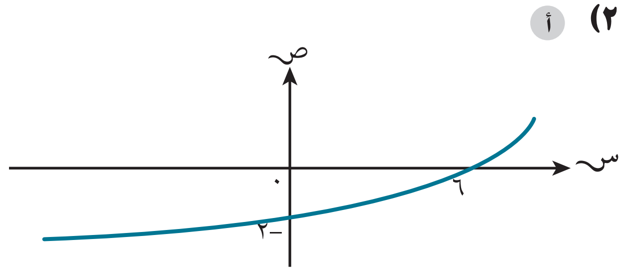


١١) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-١٠\\٠\end{pmatrix}$ يتبعه بتمدد باتجاه المحور السيني معامله $\frac{١}{٢}$ أو تمدد باتجاه المحور السيني معامله $\frac{١}{٢}$، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٥\\٠\end{pmatrix}$

إجابات تمارين مراجعة نهاية الوحدة

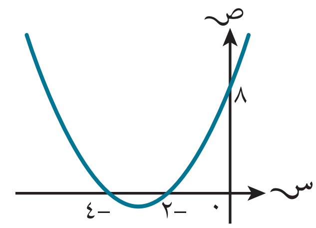
١) $\frac{٢٥}{٤} - ٩\left(س - \frac{٧}{٦}\right)^٢$

٢) أ



ب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٣\\ ٠\end{pmatrix}$ يتبعه انعكاس في المحور الصادي أو انعكاس في المحور الصادي، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٣\\ ٠\end{pmatrix}$

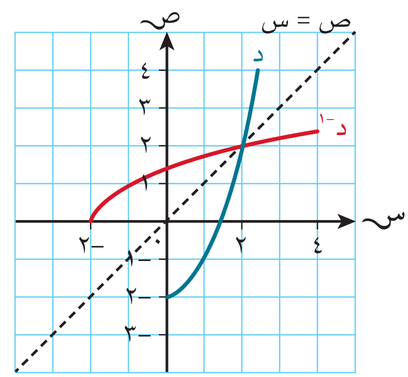
٣) أ



ب ص = ٣س^{٢} + ٦س

٤) أ د$^{-١}$(س) = $\sqrt{\text{س} + ٢}$ ، حيث س ⩾ −٢

ب



٥) أ −(س − ٣)^{٢} + ٤ ب ٣

ج د$^{-١}$(س) = ٣ + $\sqrt{٤ - \text{س}}$ ، المجال س ⩽ ٠

٦) أ (س − ٢)^{٢} − ٤ + ك

ب د(س) ⩾ ك − ٤

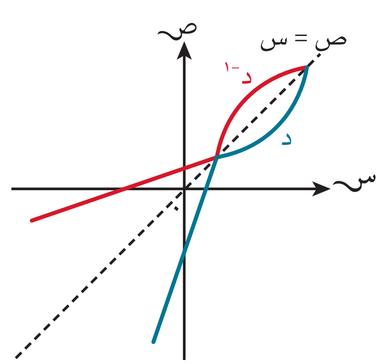
ج ل = ٢

د د$^{-١}$(س) = ٢ + $\sqrt{\text{س} + ٤ - \text{ك}}$ ،

المجال س ⩾ ك − ٤

٧) أ −٥ ⩽ س ⩽ ٤

ب



ج د$^{-١}$(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٣}(\text{س} + ٢) & \text{حيث } -٥ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ ٥ - \frac{٤}{\text{س}} & \text{حيث } ١ < \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$

٨) أ ٤(س − ٣)^{٢} − ٢٥، الرأس (٣، −٢٥)

ب هـ(س) ⩾ −٩

ج هـ$^{-١}$(س) = ٣ − $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{س} + ٢٥}$ ،

المجال: س ⩾ −٩

٩) أ ٢(س − ٣)^{٢} − ٥ ب ٣

ج د(س) ⩾ ٢٧

د د$^{-١}$(س) = ٣ + $\frac{١}{٢}\sqrt{\frac{\text{س} + ٥}{٢}}$ ، المجال: س ⩾ ٢٧

١٠) أ (س − ١)^{٢} − ١٦ ب −١٦

ج ل = ٦، ك = ١٠

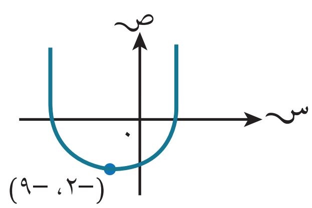
د د$^{-١}$(س) = ١ + $\sqrt{\text{س} + ١٦}$

١١) د(س) = س^{٢} + ٤س − ٥

أ س^{٢} + ٤س − ٥ = (س + ٢)^{٢} − ٤ − ٥

= (س + ٢)^{٢} − ٩

ب د(س) ⩾ −٩



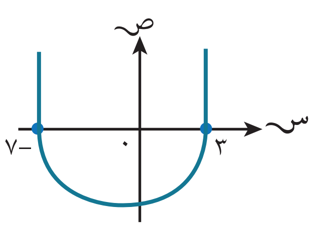
ج س^{٢} + ٤س − ٥ < ١٦

س^{٢} + ٤س − ٥ − ١٦ < ٠

س^{٢} + ٤ س − ٢١ < ٠

(س − ٣)(س + ٧) < ٠

س = ٣ أو س = −٧



−٧ < س < ٣

د $(هـ \circ د)(س) = هـ(س^٢ + ٤س - ٥)$

$٠ = ٢(س^٢ + ٤س - ٥) + ك$

$٠ = ٢س^٢ + ٨س - ١٠ + ك$

$ب^٢ - ٤أجـ \geqslant ٠$

$٨^٢ - ٤ \times ٢ \times (-١٠ + ك) \geqslant ٠$

$٦٤ + ٨٠ - ٨ك \geqslant ٠$

$١٤٤ - ٨ك \geqslant ٠$

$\frac{-٨ك}{-٨} \leqslant \frac{-١٤٤}{-٨}$

$ك \leqslant ١٨$

١٢ أ $(د \circ هـ)(س) = ٢س^٢ - ٣$،

$(هـ \circ د)(س) = ٤س^٢ + ٤س - ١$

ب $أ = -١$ ج $ب = ٢$

د $\frac{١}{٢}(س^٢ - ٣)$ هـ $ح^{-١}(س) = -\sqrt{س + ٢}$

١٣ أ $٢(س - ٢)^٢ + ٢$ ب $٢ \leqslant د(س) \leqslant ١٠$

ج $٢ \leqslant س \leqslant ١٠$

د د(س): نصف منحنى تربيعي من (٠، ١٠) إلى (٢، ٢)؛

هـ(س): مستقيم من نقطة الأصل بزاوية °٤٥

$د^{-١}(س)$: هي انعكاس د(س) في هـ(س).

هـ $د^{-١}(س) = ٢ + \sqrt{\frac{١}{٢}(س - ٢)}$

١٤ أ $٢(س + ١)^٢ - ١٠$ ب -١

١٥ أ $س \leqslant -١$ أو $س \geqslant ٣$ ب $(س - ١)^٢ + ٣$

ج $د(س) \geqslant ٣$

إجابات تمارين كتاب النشاط – الوحدة الثانية: الدوال

تمارين ٢-١

١) أ واحد إلى واحد   ب متعدد إلى واحد
ج واحد إلى واحد   د واحد إلى واحد
هـ واحد إلى واحد   و واحد إلى واحد
ز واحد إلى واحد   ح ليست دالة

٢) أ دالة   ب دالة
ج ليست دالة   د ليست دالة
هـ دالة   و دالة

٣) أ، د، و، ز، ك

٤) أ، ج، هـ، و، ز، ح

٥) أ دالة   ب دالة
ج دالة   د دالة
هـ دالة   و دالة

٦) أ د(س) ≥ ١   ب د(س) ≥ −٢
ج −٨ ≤ د(س) ≤ ٨   د د(س) ≥ ١

٧) أ $(س + ٢)^{٢}$ − ٥ ، د(س) ≥ −٥
ب ٢$(س − ١)^{٢}$ + ١ ، د(س) ≥ ١

٨) أ ٤ − $(س + ١)^{٢}$؛ د(س) ≤ ٤
ب ١٠ − $(س + ٣)^{٢}$؛ د(س) ≤ ١٠

٩) هـ(س) ≤ ٦ + $\frac{٣أ^{٢}}{٤}$

١٠) أ = ٣

١١) أ ٤$(س − ١)^{٢}$ − ٢
ب ك = ٢
ج −٢ ≤ د(س) ≤ ٢

١٢) أ المجال: س ∈ ع
المدى: د(س) ∈ ع

ب المجال: س ∈ ع
المدى: د(س) ∈ ع، د(س) ≥ ١

ج المجال: س ∈ ع
المدى: د(س) ∈ ع، د(س) > ٠

د المجال: س ∈ ع، س ≠ ٠
المدى: د(س) ∈ ع، د(س) ≠ ٠

هـ المجال: س ∈ ع س ≠ ٣
المدى: د(س) ∈ ع، د(س) ≠ ٠

و المجال: س ∈ ع س ≥ −٠,٥
المدى: د(س) ∈ د(س) ≥ −١

١٣) أ ح، د(س) ∈ ع
ب س ≠ ٠، د(س) ≠ ٠
ج س ≠ −$\frac{٢}{٣}$، د(س) ≠ ٠
د س ≠ ٣، د(س) > ٠

١٤) أ ح، د(س) ≥ ٠
ب س ≥ ٣، د(س) ≥ ٠
ج ح، د(س) ≥ ٥
د س > ٠، د(س) > ٠
هـ ح، د(س) ≤ ٤
و ٠ ≤ س ≤ ٤، ٠ ≤ د(س) ≤ ٢
ز ح، د(س) ≥ ٦
ح س ≥ ٣، د(س) ≥ ٠

تمارين ٢-٢

١) أ ٧   ب −١٩
ج ١   د $\frac{١}{٢}$
هـ ٦   و ٢

٢)
أ $س \mapsto ٢س^{٢} - ٥$ ب $س \mapsto (٢س - ٥)^{٢}$
ج $س \mapsto \frac{٢}{س} - ٥$ د $س \mapsto ٤س - ١٥$
هـ $س \mapsto س$ و $س \mapsto \left(\frac{٢}{س} - ٥\right)^{٢}$
ز $\frac{١}{(٢س - ٥)^{٢}}$

٣)
أ $س^{٢} - ٣$ ب $(س - ٣)^{٢}$
ج $س^{٤} - ٣$ د $س^{٦}$
هـ $س - ٩$ و $س^{٦}$

٤)
أ $(د \circ ع)(س)$ ب $(ع \circ هـ)(س)$
ج $(ع \circ ع)(س)$ د $(ع \circ هـ)(س)$ أو $(هـ \circ هـ \circ ع)(س)$
هـ $(هـ \circ د$ أو $د \circ د \circ د \circ هـ)(س)$
و $(هـ \circ د \circ د \circ ع)(س)$
ز $(د \circ هـ \circ د \circ هـ)(س)$ أو $(د \circ د \circ د \circ د \circ هـ \circ هـ)(س)$
ح $(ع \circ د)(س)$ ط $(ع \circ د \circ د \circ هـ)(س)$

٥)
أ $س \in ح$، $(د \circ هـ)(س) \geq \sqrt{٥}$
ب $س \geq ٠$، $(د \circ هـ)(س) \geq ٣$
ج $س \neq ٠$، $(د \circ هـ)(س) \in ح - (-٢)$
د ح، $(د \circ هـ)(س) \geq ٠$
هـ $س \geq ٠$، $(د \circ هـ)(س) \geq ٠$
و $س \geq ٠$، $٠ \leq (د \circ هـ)(س) \leq ١٦$
ز $س \geq ٠$، $(د \circ هـ)(س) \geq -٦,٢٥$
ح $س > ٠$، $(د \circ هـ)(س) > ٢$

٦)
أ $-٢\frac{٢}{٣}$ أو ٤   ب ٧
ج ١

٧) أ = ٤، ب = ١١ أو أ = $٤\frac{١}{٢}$، ب = ١

٨) $د(س) = \pm(٣س + ١)$

٩) ب = ٢

تمارين ٢-٣

١)
أ $د^{-١}(س) = \frac{س - ٥}{٦}$
ب $د^{-١}(س) = ٥س - ٤$
ج $د^{-١}(س) = ٢ - \frac{١}{٢}س$
د $د^{-١}(س) = \frac{٣س - ٧}{٢}$
هـ $د^{-١}(س) = \sqrt[٣]{\frac{س - ٥}{٢}}$
و $د^{-١}(س) = \frac{١}{س - ٤}$، $س \neq ٤$
ز $د^{-١}(س) = \frac{٥}{س} + ١$، $س \neq ٠$
ح $د^{-١}(س) = -٢ + \sqrt{\frac{س - ٥}{٢}}$، $س \geq ٧$
ط $د^{-١}(س) = \frac{٣ + \sqrt{س + ٥}}{٢}$، $س \geq -٥$
ي $د^{-١}(س) = ٣ + \sqrt{س + ٩}$، $س \geq -٩$

٢) براهين

٣)
أ $ص \mapsto \frac{٢ص}{ص - ١}$، $ص \neq ١$
ب $ص \mapsto \frac{٤ص + ١}{ص - ٢}$، $ص \neq ٢$
ج $ص \mapsto \frac{٥ص + ٢}{ص - ١}$، $ص \neq ١$
د $ص \mapsto \frac{٣ص - ١١}{٤ص - ٣}$، $ص \neq \frac{٣}{٤}$

٤) ٦

٥) $س \mapsto \sqrt{س - ٥\frac{٣}{٤}} - \frac{١}{٢}$، $س > ٦$، $د^{-١}(س) > ٠$

٦) $س \mapsto \sqrt{-\frac{١}{٢}(س + ٥)}$، $س < -٥$، $د^{-١}(س) < ١$

٧) ك = -٣

تمارين ٢-٤

١)
أ $س \mapsto \frac{١}{٤}س$
ب $س \mapsto س - ٣$
ج $س \mapsto س^{٢}$، $س \geq ٠$
د $س \mapsto \frac{١}{٢}(س - ١)$
هـ $س \mapsto \sqrt{س} + ٢$، $س \geq ٠$

و س ↤ $\frac{١}{٢}$(١ − س)

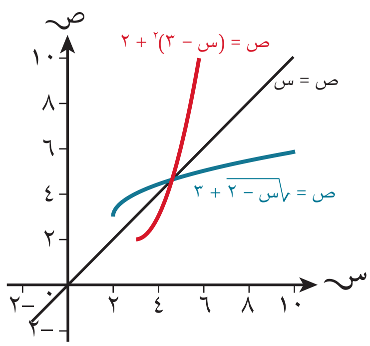
ز س ↤ $\frac{٣}{س}$، س ≠ ٠

ح س ↤ ٧ − س

٢) أ د(س) > ٣

ب د$^{-١}$: س ↤ (س − ٣)^{٢} + ٢ ؛ س > ٣، د$^{-١}$(س) > ٢

ج



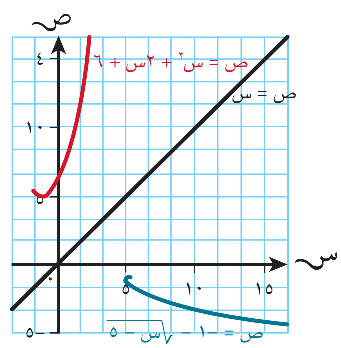
٣) أ ك = −١

ب ١) د(س) ≥ ٥

٢) د$^{-١}$: س ↤ −١ − √(س − ٥) ؛

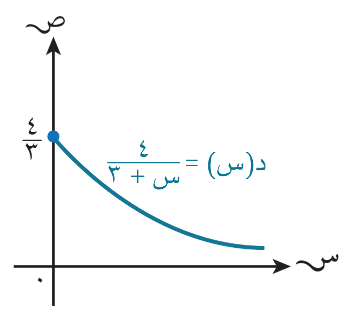
س ≥ ٥، د$^{-١}$(س) ≤ −١

٣)



٤) أ $\frac{١}{٨}$ ب $\frac{٣}{٨}$

٥) أ

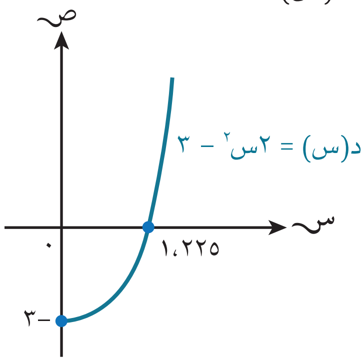


المدى ٠ < د(س) ≤ $\frac{٤}{٣}$

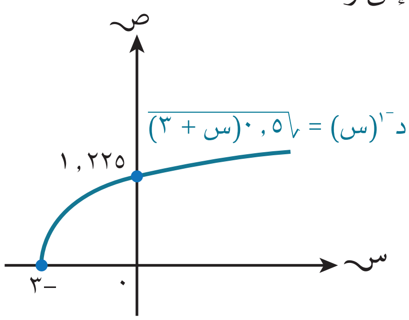
ب $\frac{٤ - ٣س}{س}$، س ∈ ع، س ≠ ٠

ج ١

٦) أ ١) د(س) ≥ −٣

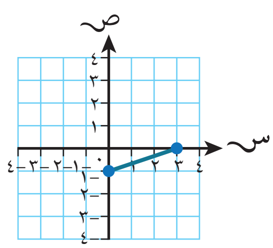


٢) د$^{-١}$(س) موجودة لأن الدالة د(س) واحد إلى واحد

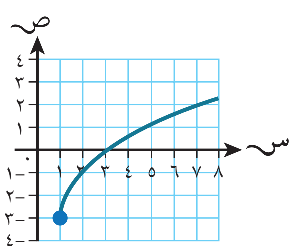


ب س ≥ −$\frac{١}{٩}$

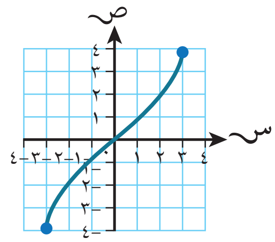
٧) أ



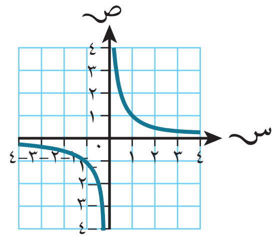
ب



ج

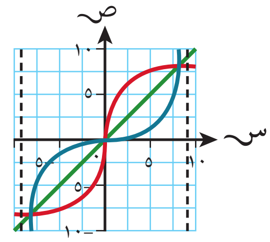


د



٨) برهان

٩) أ

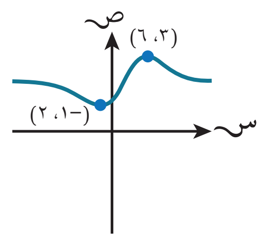


ب المجال: −٠ < س < ٩؛ المدى: ص ∈ ح

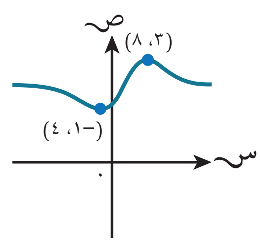
ج س = −٨، ٠، ٨

تمارين ٢-٥ أ

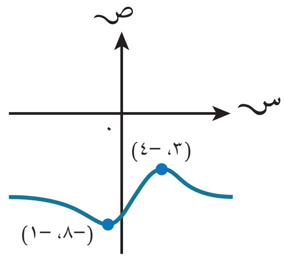
١) أ



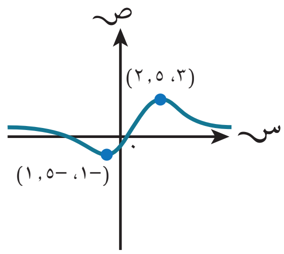
ب



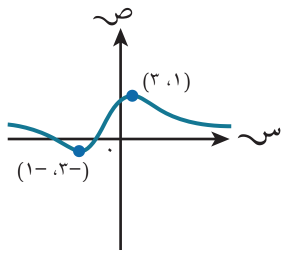
ج



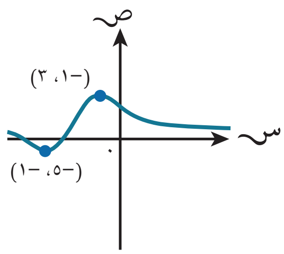
د



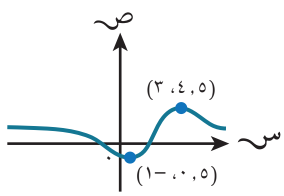
هـ



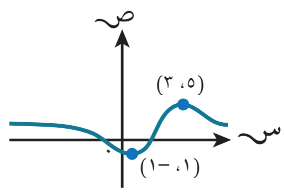
و



ز



ح



٢) أ ١) ص = ٣س^{٢} + ٣

٢) ص = ٩س^{٢} − ٧

ب ١) ص = ٧س^{٣} − ٣س + ٤

٢) ص = ٨س^{٢} − ٧س + ٦

ج ١) $ص = ٤(س - ٥)^{٢}$

٢) $ص = ٧(س + ٣)^{٢}$

د ١) $ص = ٣(س + ٤)^{٣} - ٥(س + ٤)^{٢} + ٤$

٢) $ص = (س - ٣)^{٣} + ٦(س - ٣) + ٢$

٣) أ ١) رأسي إلى الأسفل ٥ وحدات

٢) رأسي إلى الأسفل ٤ وحدات

ب ١) إلى اليسار وحدة واحدة

٢) إلى اليسار ٥ وحدات

ج ١) إلى اليسار ٣ وحدات

٢) إلى اليمين وحدتان

تمارين ٢-٥ ب

١) أ ١) $ص = -٣س^{٢}$ ٢) $ص = -٩س^{٣}$

ب ١) $ص = -٧س^{٢} + ٣س - ٦$

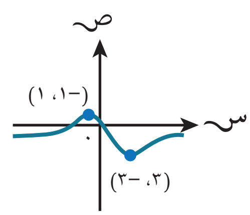
٢) $ص = -٨س^{٢} + ٧س - ١$

ج ١) $ص = ٤س^{٢}$ ٢) $ص = -٧س^{٢}$

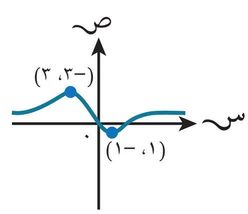
د ١) $ص = -٣س^{٣} - ٥س^{٢} + ٤$

٢) $ص = -س^{٣} + ٦س + ٢$

٢) أ



ب



٣) أ ١) انعكاس حول المحور السيني

٢) انعكاس حول المحور السيني

ب ١) انعكاس حول المحور الصادي

٢) انعكاس حول المحور الصادي

ج ١) انعكاس حول المحور الصادي

٢) انعكاس حول المحور الصادي

٤) أ $ص = -٦س^{٢}$

ب $ص = -٣س^{٣}$

ج $ص = ٣س^{٢} + ٤س + ٢$

د $ص = ٢س^{٢} - س - ٥$

٥) أ انعكاس حول المحور السيني

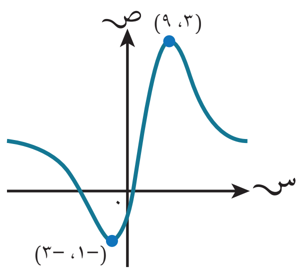
ب انعكاس حول المحور الصادي

ج انعكاس حول المحور السيني

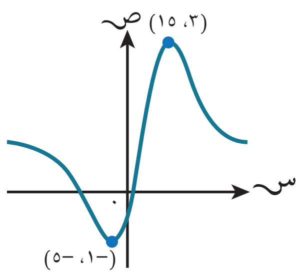
د انعكاس حول المحور السيني

تمارين ٢-٥ ج

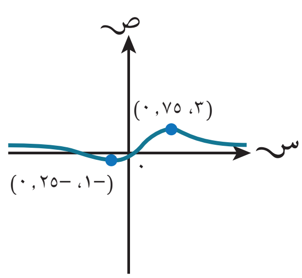
١) أ



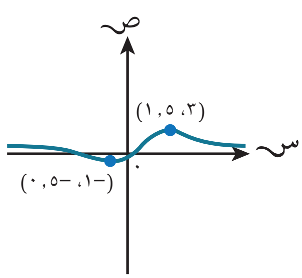
ب



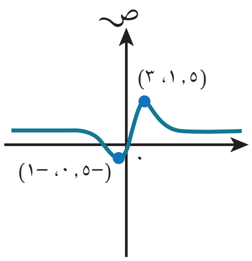
ج



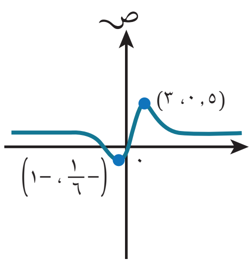
د



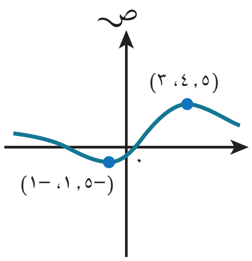
هـ



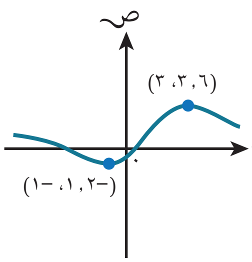
و



ز



ح



٢) أ ص = ٢١س^{٢} ب ص = ١٨س^{٣}

ج ص = $\frac{١}{٣}$(٧س^{٣} − ٣س + ٦)

د ص = $\frac{٤}{٥}$(٨س^{٢} − ٧س + ١)

هـ ص = س^{٢} و ص = ٧$\left(\frac{س}{٥}\right)^{٢}$

ز ص = ٣(٢س)^{٣} − ٥(٢س)^{٢} + ٤

ح ص = $\left(\frac{٣س}{٢}\right)^{٣}$ + ٦$\left(\frac{٣س}{٢}\right)$ + ٢

٣) أ تمدد رأسي معامله ٤

ب تمدد رأسي معامله ٦

ج تمدد أفقي معامله $\frac{١}{٣}$

د تمدد أفقي معامله $\frac{١}{٤}$

هـ تمدد أفقي معامله $\frac{١}{٣}$ (أو تمدد رأسي معامله $\sqrt{٣}$)

و تمدد أفقي معامله ٢

٤) أ ص = ٩س^{٢}

ب ص = ٢س^{٣} − ٢

ج ص = ٣س$^{-١}$ + ٢

د ص = $\frac{٣}{٢}$س^{٢} − ٣س + ١

هـ ص = ١٦س^{٣} − ١٢س

٥) أ تمدد مواز للمحور السيني معامله $\frac{١}{٢}$

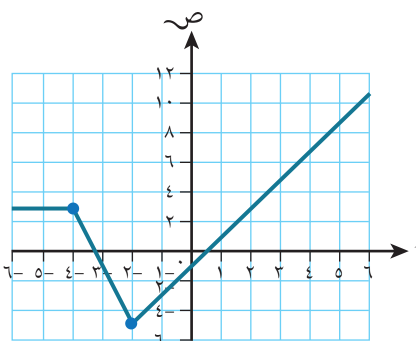
ب تمدد مواز للمحور الصادي معامله ٣

ج تمدد مواز للمحور الصادي معامله ٤

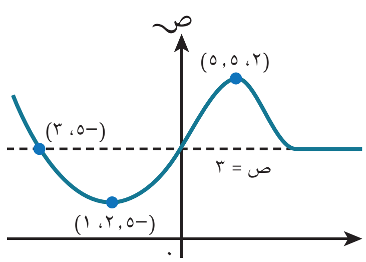
د تمدد مواز للمحور السيني معامله $\frac{١}{٣}$

تمارين ٢-٦

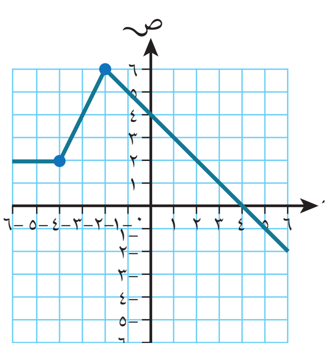
١) أ

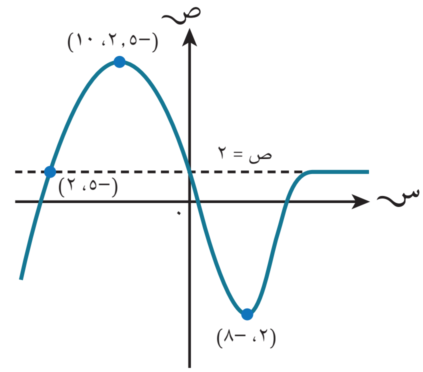


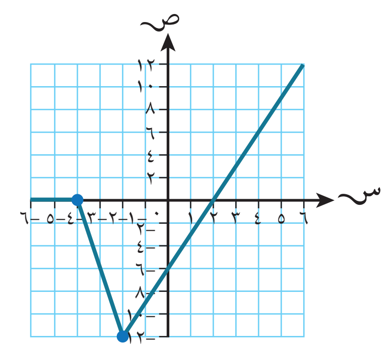
ب

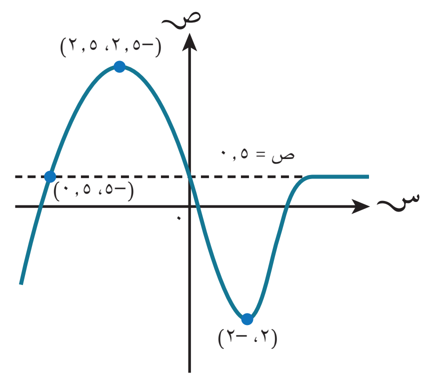


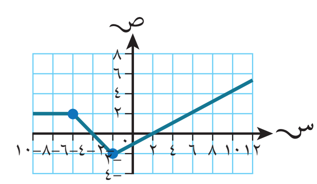
ج

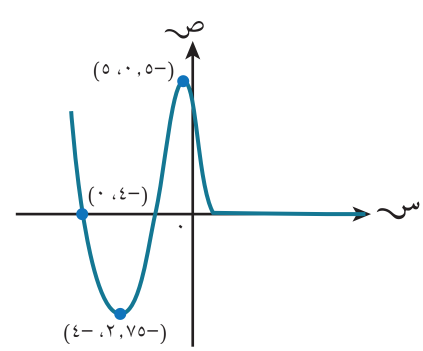


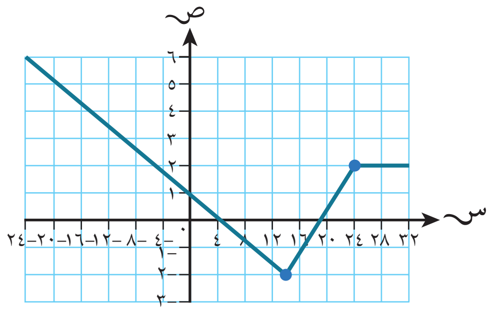
د


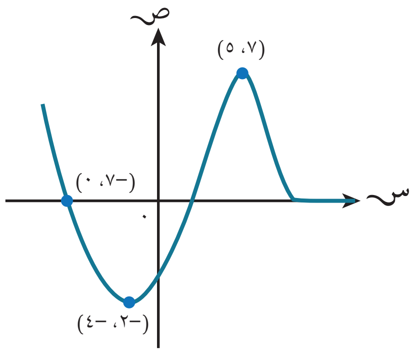
هـ


و


ز


ح


ط


ي


٢) أ (٥، −٤) ب (٢، −٩) ج (٢، ٤)

د (٢، ٤) هـ (٢، −٨)

٣) أ (س + ١)^{٢} + ٧

ب انعكاس حول المحور السيني، يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -١ \\ ٧ \end{pmatrix}$

٤) أ هـ(س) = ٦س^{٢} − ٦

ب هـ(س) = س^{٢} + ١

ج هـ(س) = س^{٢} + ٤

د هـ(س) = ٧س^{٢} − ٤

هـ هـ(س) = ٣ − س^{٢}

و هـ(س) = ٦ − ٢س^{٢}

ز هـ(س) = ٥ − س^{٢}

ح هـ(س) = −٣ − ٣س^{٢}

٥) أ هـ(س) = د(س + ١) = د(−س − ١): انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$، ثم انعكاس حول المحور الصادي.
أو انعكاس حول المحور الصادي، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

ب هـ(س) = د(س − ٣) = د(٣ − س): انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$، ثم انعكاس حول المحور الصادي.

أو انعكاس حول المحور الصادي، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

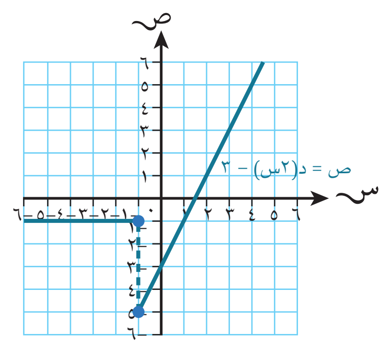
ج ك(س) = د(٢س + ٢): انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$، ثم تمدد معامله $\frac{١}{٢}$ من المستقيم س = ٠

أو تمدد معامله $\frac{١}{٢}$ من المستقيم س = ٠، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

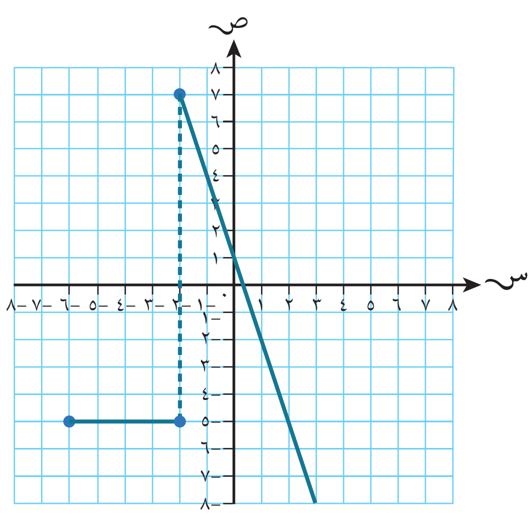
د ك(س) = د(٣س − ١): انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$، ثم تمدد معامله $\frac{١}{٣}$ من المستقيم س = ٠

أو تمدد معامله $\frac{١}{٣}$ من المستقيم س = ٠، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} \frac{١}{٣} \\ ٠ \end{pmatrix}$

٦) أ



ب



٧) ص = −س^{٢} + ٧س − ١٠

٨) أ = ٥، ب = −١

٩ أ = ١٦، ب = ٠، جـ = −٢٥

إجابات نهاية الوحدة الثانية

١) أ ح، د(س) ≤ ٤ ب ح، د(س) ≥ −٧
ج س ≥ −٢، د(س) ≥ ٠ د ح، ح
هـ ح، د(س) ≥ ٠
و س ≥ ٠، د(س) ≤ ٢

٢) أ س ↤ (١ − ٢س)^{٣} ب س − ١ − ٢س^{٣}
ج س ↤ ١ − ٢س^{٩} د ٤س − ١
هـ س ↤ $\frac{١}{٢}$(١ − س)

٣) أ ٤٨ ب ٣ ج −١
د ٤ هـ (٢، −٨)

٤) أ (د ∘ د)(س) ب (د ∘ د)(س)
ج (هـ$^{-١}$)(س)
د (د ∘ هـ ∘ ع)(س) أو (د ∘ ع ∘ هـ)(س)
هـ (ع ∘ د ∘ هـ)(س) و (د$^{-١}$)(س)
ز (هـ$^{-١}$ ∘ د ∘ هـ ∘ ع)(س) أو (هـ$^{-١}$ ∘ د ∘ ع ∘ هـ)(س)
ح (ع ∘ د$^{-١}$)(س)

٥) أ = −٢، ب = ١١ أو أ = ٢، ب = −١٣

٦) أ $\frac{(س - ٧)}{٢}$
ب ص = $\sqrt[٣]{(س + ١)}$
ج $\sqrt[٣]{\left(\frac{(س - ٥)}{٢}\right)}$
د $\frac{\sqrt[٣]{(س + ١)} - ٧}{٢}$
هـ ٢س^{٣} + ٥ و (٢س + ٧)^{٣} − ١

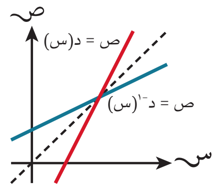
ز $\sqrt[3]{\left(\frac{(س - ٥)}{٢}\right)}$

ح $\frac{\sqrt[3]{(س + ١)} - ٧}{٢}$

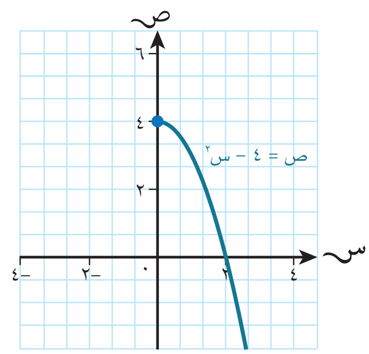
٧) أ د(س) $\geqslant \frac{١}{٣}$ ب ٠

ج $\frac{١}{٢}$(س + ١)

د انعكاس حول المستقيم ص = س



٨) أ د(س) $\leqslant$ ٤



ب انعكاس حول المستقيم ص = ٢

ج $\sqrt{٤ - س}$، س $\leqslant$ ٤

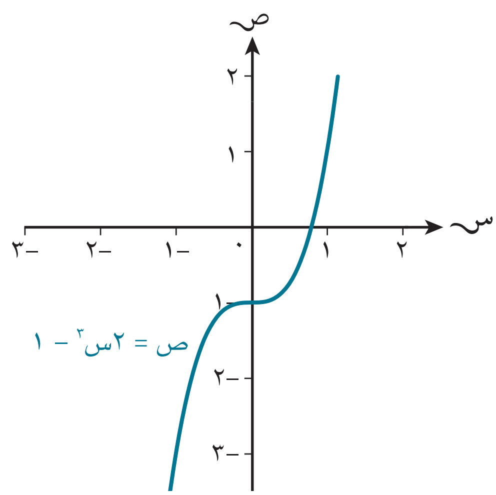
د ١,٥٦

الوحدة الثانية: حلول التمارين

الدوال

تمارين ٢-١

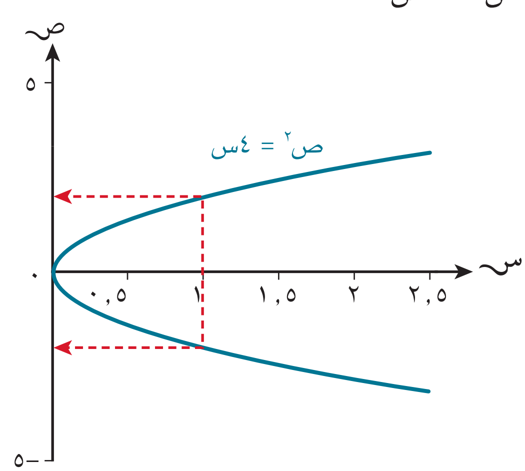
١) ج $ص = ٢س^{٣} - ١$



يمثّل المنحنى دالة، حيث كل قيمة من المجال ترتبط في قيمة واحدة من المدى والعكس صحيح:

أن $ص = ٢س^{٣} - ١$ دالة واحد إلى واحد.

٢) د $ص^{٢} = ٤س$

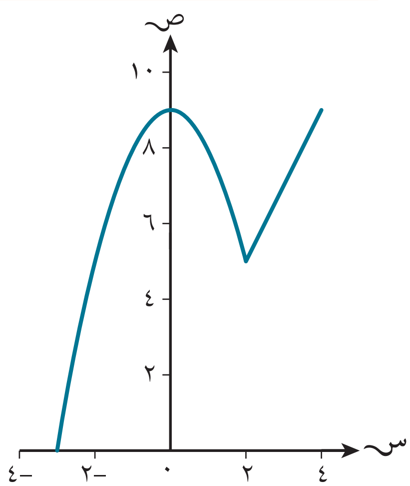


لا يمثّل المنحنى دالة لأن كل قيمة في المجال ترتبط مع قيمتَين في المدى.

إذا رسمنا جميع المستقيمات الرأسية الممكنة على المنحنى، يكون المنحنى:

- دالة إذا قطع كل مستقيم المنحنى مرة واحدة على الأكثر.
- ليس دالة إذا قطع مستقيم واحد المنحنى أكثر من مرة.

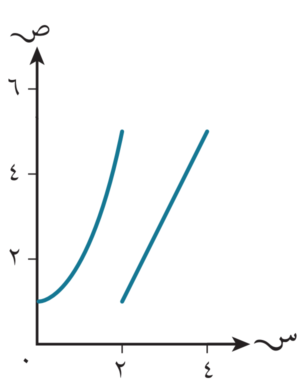
٣) أ



ب هذه دالة متعدد إلى واحد.

العلاقة واحد إلى واحد والمتعدد إلى واحد تسمى **دالة**. في دالة المتعدد إلى واحد توجد مخرجة واحدة لكل مدخلة، لكن كل مخرجة يمكن أن يكون لها أكثر من مدخلة.

٤) أ



ب لا يمثل المنحنى دالة، فهو يمثل علاقة متعدد إلى متعدد لأنه عندما س = ٢ توجد قيمتان لـ ص وبالمثل عندما ص= ٣ مثلًا، فتوجد قيمتان ممكنتان لـ س

> تذكير: المجال هو مجموعة **المدخلات**، والمدى هو مجموعة **المخرجات** في الدالة. استخدم دائمًا صيغة المجموعة لتصفهما.

٥) أ المجال: س ∈ ع حيث −١ ⩽ س ⩽ ٥
المدى: د(س) ∈ ع حيث −٨ ⩽ د(س) ⩽ ٨

ب المجال: س ∈ ع حيث −٣ ⩽ س ⩽ ٢
المدى: د(س) ∈ ع حيث −٧ ⩽ د(س) ⩽ ٢٠

٦) أ د(س) = س + ٤ حيث س < ٨ تمثّلت في منحنى خطي متصل ميله موجب.

عوّض عن س = ٨ في الدالة لتحصل على د(س) = ١٢

وحيث إن المجال س < ٨ فإن المدى د(س) < ١٢

هـ د(س) = $٢^{س}$ تمثلت في منحنى أسيّ متزايد متصل.

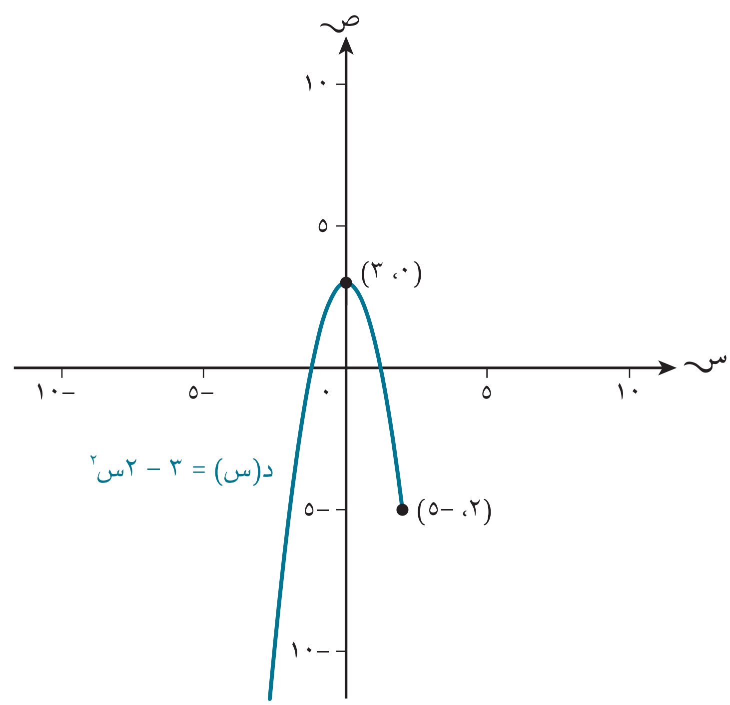
عوّض عن س = −٥ تحصل على د(س) = $\frac{١}{٣٢}$

عوّض عن س = ٤ تحصل على د(س) = ١٦

الحلّ هو $\frac{١}{٣٢}$ ⩽ د(س) ⩽ ١٦

> لتحدد مدى دالة ما، من المفيد غالبًا رسمه ضمن المجال المعطى كما يظهر في السؤال ٦

٧) ج يأخذ المنحنى د(س) = ٣ − ٢$س^{٢}$ حيث س شكل المنحنى التربيعي ∩. سيظهر المنحنى كالآتي:

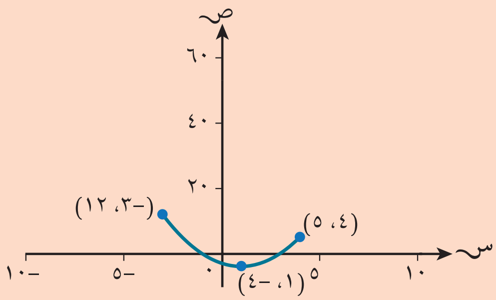


القيمة العظمى هي د(س) = ٣ عندما س = ٠

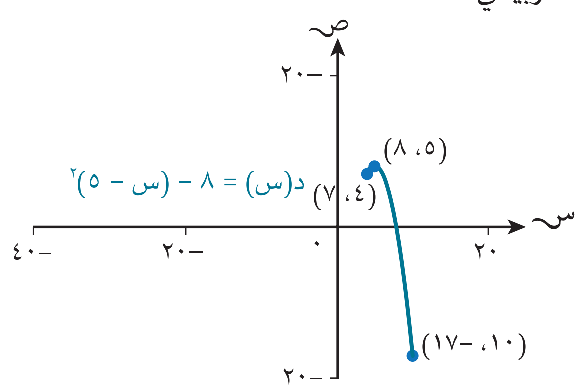
لا توجد قيمة صغرى في هذا المجال.

الحل هو د(س) ⩽ ٣

عند إيجاد مدى منحنى خطّي، مثل، د(س) = ٢س + ١، س ∈ ح
حيث $^{-}$١ ⩽ س ⩽ ٢، نحتاج فقط إلى تعويض س = $^{-}$١، س = ٢
في د(س) = ٢س + ١
فيكون المدى $^{-}$١ ⩽ د(س) ⩽ ٥.
من جهة أخرى، لرسم منحنى الدالة التربيعية، نحتاج إلى التفكير في موقع الرأس عندما نبحث عن المدى. مثلًا:
د(س) = (س − ١)^{٢} − ٤، حيث −٣ ⩽ س ⩽ ٤. عوّض عن
س = $^{-}$٣ في د(س) = (س − ١)^{٢} − ٤ لتحصل على د(س) = ١٢.
عوّض عن س = ٤ في د(س) = (س − ١)^{٢} − ٤ لتحصل على د(س) = ٥
لكن المدى ليس ٥ ⩽ س ⩽ ١٢ لأن الرأس (أدنى نقطة) على المنحنى عند (١، $^{-}$٤) وعليه، فإن القيمة الصغرى هي − ٤
المدى هو −٤ ⩽ س ⩽ ١٢

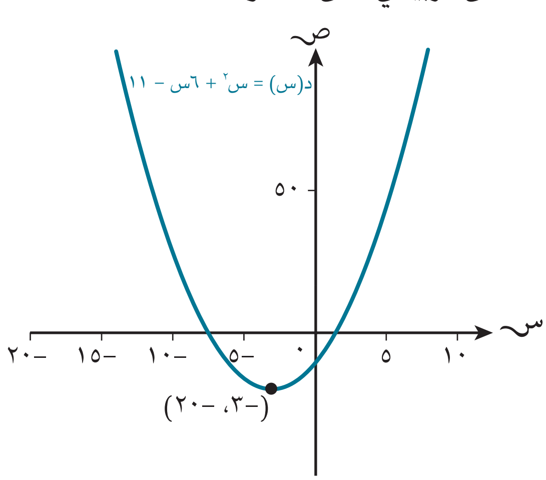


٨) ج منحنى د: س ↤ ٨ − (س − ٥)^{٢} حيث
٤ ⩽ س ⩽ ١٠ له الشكل على النحو ∪ المنحنى التربيعي.



لهذا المجال نجد القيمة العظمى للدالة
د(س) بتعويض س = ٥ في
د(س) = ٨ − (س − ٥)^{٢} (لأن س = ٥ هي الإحداثي السيني للرأس):
د(٥) = ٨ − (٥ − ٥)^{٢} = ٨
نجد القيمة الصغرى للدالة د(س) بتعويض
س = ١٠ في د(س) = ٨ − (س − ٥)^{٢}
لنحصل على د(١٠) = ٨ − (١٠ − ٥)^{٢}
د(١٠) = −١٧
الحلّ هو −١٧ ⩽ د(س) ⩽ ٨

٩) أ د(س) = س^{٢} + ٦س − ١١
د(س) = (س + ٣)^{٢} − ٢٠
شكل منحنى د(س) = س^{٢} + ٦س − ١١ هو منحنى تربيعي على النحو ∪



الرأس (−٣، − ٢٠).
المدى د(س) ⩾ −٢٠.

تذكير: للدالة التربيعية في الصورة:
د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ يكون المنحنى على النحو ∪ إذا كانت أ > ٠، ويكون على النحو ∩ إذا كانت أ < ٠

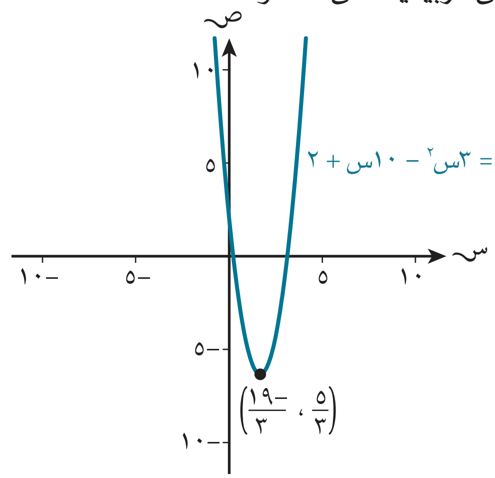
ب $\text{د(س)} = ٣\left(\text{س} - \frac{١٠}{٦}\right)^{٢} - \frac{١٠٠}{٣٦} + ٢$

$\text{د(س)} = ٣\left[\left(\text{س} - \frac{١٠}{٦}\right)^{٢} - \frac{١٠٠}{١٢}\right] + ٢$

$\text{د(س)} = ٣\left(\text{س} - \frac{٥}{٣}\right)^{٢} - \frac{١٩}{٣}$

يكون منحنى $\text{د(س)} = \left(\text{س} - \frac{٥}{٣}\right)^{٢} - \frac{١٩}{٣}$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cup$



الرأس (نقطة القيمة الصغرى) هو $\left(\frac{٥}{٣}، \frac{-١٩}{٣}\right)$

مدى الدالة $\text{د(س)} \geqslant -٦\frac{١}{٣}$

١٠) أ $\text{د(س)} = ٧ - ٨\text{س} - \text{س}^{٢}$

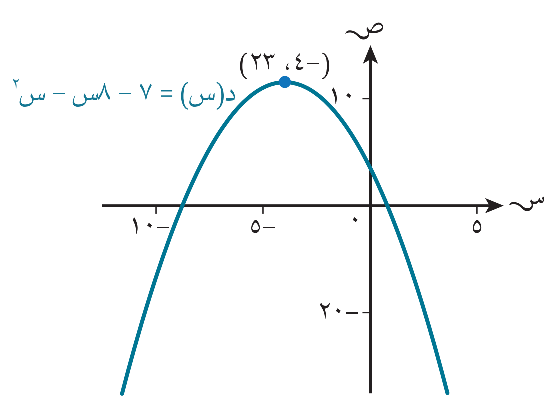
$\text{د(س)} = ٧ - (\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س})$

$\text{د(س)} = ٧ - [(\text{س} + ٤)^{٢} - ١٦]$

$\text{د(س)} = ٢٣ - (\text{س} + ٤)^{٢}$

يكون منحنى $\text{د(س)} = ٢٣ - (\text{س} + ٤)^{٢}$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cap$



الرأس (نقطة القيمة العظمى) هو (−٤، ٢٣)

مدى الدالة $\text{د(س)} \leqslant ٢٣$

ب $\text{د(س)} = ٢ - ٦\text{س} - ٣\text{س}^{٢}$

$\text{د(س)} = ٢ - (٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س})$

$\text{د(س)} = ٢ - ٣(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})$

$\text{د(س)} = ٢ - ٣[(\text{س} + ١)^{٢} - ١]$

$\text{د(س)} = ٥ - ٣(\text{س} + ١)^{٢}$

يكون منحنى $\text{د(س)} = ٥ - ٣(\text{س} + ١)^{٢}$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cap$

نعرف ذلك لأن معامل $\text{س}^{٢}$ سالب.

الرأس (نقطة القيمة العظمى) هي (−١، ٥)

مدى الدالة $\text{د(س)} \leqslant ٥$

١٢) $\text{د}: \text{س} \mapsto \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + \text{ك}$

$\text{د}: \text{س} \mapsto (\text{س} + ٣)^{٢} - ٣^{٢} + \text{ك}$

$\text{د}: \text{س} \mapsto (\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ك} - ٩)$

يكون منحنى $\text{د}: \text{س} \mapsto (\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ك} - ٩)$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cup$

نعرف ذلك لأن معامل $\text{س}^{٢}$ موجب.

الرأس (نقطة القيمة الصغرى) هو (−٣، (ك − ٩))

مدى الدالة $\text{د(س)} \geqslant \text{ك} - ٩$

١٣) $\text{هـ}: \text{س} \mapsto ٥ - \text{أس} + ٢\text{س}^{٢}$

$\text{هـ}: \text{س} \mapsto ٥ + (٢\text{س}^{٢} - \text{أ س})$

$\text{هـ}: \text{س} \mapsto ٥ + ٢\left(\text{س}^{٢} - \frac{\text{أ}}{٢}\text{س}\right)$

$\text{هـ}: \text{س} \mapsto ٥ + ٢ = \left[\left(\text{س} - \frac{\text{أ}}{٤}\right)^{٢} - \frac{\text{أ}^{٢}}{١٦}\right]$

$\text{هـ}: \text{س} \mapsto ٥ + ٢\left(\text{س} - \frac{\text{أ}}{٤}\right)^{٢} - \frac{\text{أ}^{٢}}{8}$

$\text{هـ}: \text{س} \mapsto \left(\frac{-\text{أ}^{٢}}{٨} + ٥\right)^{٢} + ٢\left(\text{س} - \frac{\text{أ}}{٤}\right)^{٢}$

يكون منحنى $\text{هـ}: \text{س} \mapsto \left(\frac{-\text{أ}^{٢}}{٨} + ٥\right) + ٢\left(\text{س} - \frac{\text{أ}}{٤}\right)^{٢}$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cup$

نعرف ذلك لأن معامل $\text{س}^{٢}$ في هـ:

$\text{س} \mapsto ٥ - \text{أس} + ٢\text{س}^{٢}$ موجب.

الرأس (نقطة القيمة الصغرى) هو

$\left(-\frac{\text{أ}}{٤} ، -\frac{\text{أ}^{٢}}{٨} + ٥\right)$

مدى الدالة هـ(س) ≥ $-\frac{\text{أ}^{٢}}{٨}$ + ٥

١٤) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣، س ∈ ع،

حيث − ٤ ≤ د(س) ≤ ٥

د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

د(س) = − ٤

فحلّ المعادلة س^{٢} − ٢س − ٣ = −٤ يعطي:

س^{٢} − ٢س + ١ = ٠

(س − ١)^{٢} = ٠

س = ١

نقطة القيمة الصغرى لهذا المجال هي (١، −٤)

د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

د(س) = ٥

حل المعادلة س^{٢} − ٢س − ٣ = ٥ يعطي:

س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠

(س − ٤)(س + ٢) = ٠

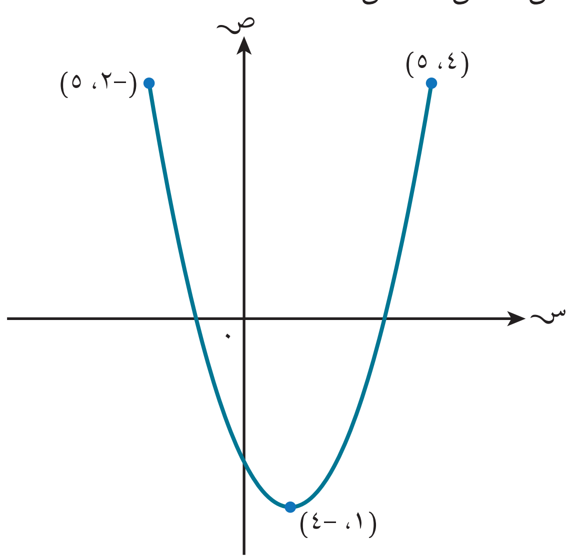
س = ٤ أو س = −٢

نقطتا القيمة العظمى لهذا المجال هما

(٤، ٥)، (−٢، ٥)

المنحنى الذي يظهر هذه النتائج هو

ص = س^{٢} − ٢س − ٣



المطلوب إيجاد قيمة أ حيث −أ ≤ س ≤ أ

تلخيص:

أ = ٢، حيث −أ ≤ س ≤ أ

فإن −٢ ≤ س ≤ ٢

[أ ≠ ٤، حيث −٤ ≤ س ≤ ٤ لأنها تعطي المجال

٥ ≤ د(س) ≤ ٢١

الحل هو أ = ٢

١٥) د(س) = س^{٢} + س − ٤، حيث أ ≤ س ≤ أ + ٣

أي −٢ ≤ د(س) ≤ ١٦

د(س) = س^{٢} + س − ٤

د(س) = −٢

حلّ المعادلة س^{٢} + س − ٤ = −٢ يعطي:

س^{٢} + س − ٢ = ٠

(س + ٢)(س − ١) = ٠

س = −٢ أو س = ١

فتكون نقطتا القيمة الصغرى لهذا المجال هما

(−٢، −٢) و (١، −٢)

د(س) = س^{٢} + س − ٤

د(س) = ١٦

حلّ المعادلة س^{٢} + س − ٤ = ١٦ يعطي:

س^{٢} + س − ٢٠ = ٠

(س + ٥)(س − ٤) = ٠

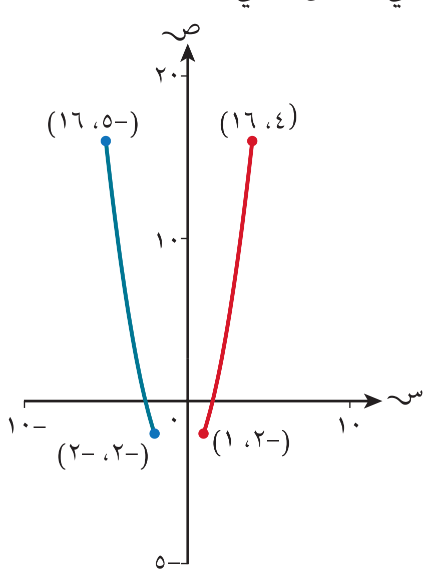
س = −٥ أو س = ٤

فتكون نقطتا القيمة العظمى لهذا المجال عند

النقطتَين (−٥، ١٦)، (٤، ١٦)

منحنى د(س) = س^{٢} + س − ٤ مع هذه النتائج مبيّن

في الشكل الآتي:



تلخيص

$أ \leqslant س \leqslant أ + ٣$

$١ \leqslant س \leqslant ٤$

$-٥ \leqslant س \leqslant -٢$

الحل هو $أ = ١$، $أ = -٥$

١٦) أ $د(س) = ٢س^{٢} - ٧س + ٥$

$د(س) = ٢(س^{٢} - \frac{٧}{٢}س) + ٥$

$د(س) = ٢\left[(س - \frac{٧}{٤})^{٢} - \frac{٧}{٤}\right] + ٥$

$د(س) = ٢(س - \frac{٧}{٤})^{٢} - \frac{٤٩}{٨} + ٥$

$د(س) = ٢(س - \frac{٧}{٤})^{٢} - \frac{٩}{٨}$

منحنى $د(س) = ٢(س - \frac{٧}{٤})^{٢} - \frac{٩}{٨}$ تربيعي على النحو U لأن معامل $س^{٢}$ موجب

الرأس (أدنى نقطة) هي $(\frac{٧}{٤}، -\frac{٩}{٨})$

ب $س = \frac{٧}{٤}$ معادلة محور التماثل لمنحنى $د(س) = ٢س^{٢} - ٧س + ٥$ حيث $س \in ع$ (من دون أيّة قيود على المجال).

وعليه، إذا كان $د(س) = ٢س^{٢} - ٧س + ٥$ حيث $٠ \leqslant س \leqslant ك$، فإن $ك = \frac{٧}{٢}$

ج إذا كان $ك = \frac{٧}{٢}$، فإن تعويض $س = \frac{٧}{٢}$ في $د(س) = ٢س^{٢} - ٧س + ٥$ يعطي

$د(\frac{٧}{٢}) = ٢(\frac{٧}{٢})^{٢} - ٧(\frac{٧}{٢}) + ٥$

$د(\frac{٧}{٤}) = ٥$ وكذلك للرأس عندما

$د(٢) = \frac{٩}{٨}$ فإن المدى هو $\frac{٩}{٨} \leqslant س \leqslant ٥$

تمارين ٢-٢

١) أ $(د \circ هـ)(٦) = د(\sqrt{٦ + ٣} - ٢)$

$(د \circ هـ)(٦) = د(١)$

$= ١^{٢} + ٦$

$= ٧$

ثمّة أسلوب آخر مكافئ لإيجاد التركيب. أوجد $(د \circ هـ)(س)$ أولًا، ثم عوّض عن $س = ٦$، وحيث لم يطلب السؤال ذلك فلا ضرورة للقيام بهذا الأسلوب

٢) ب $ع: س \mapsto س + ٥$ لكل قيم $س \in ع$، $س > ٠$

(الدالة هي 'زد ٥')

$ل: س \mapsto \sqrt{س}$ لكل قيم $س \in ع$، $س > ٠$

(الدالة هي الجذر التربيعي لـ س)

لذا، $س \mapsto \sqrt{س + ٥}$ هي الدالة 'طبّق أولًا ع(س)، ثم طبّق ل (س)'

أي $(ك \circ ل)$

أي أن التركيب هو $ل \circ ع$

تذكّر عند تركيب دالتَين د، هـ فإن $د \circ هـ$ لا يتحقق إلّا إذا كان مدى هـ متضمنًا في مجال د

٣) أ $د(س) = أس + ب$

تعويض $س = ٥$، $د(٥) = ٣$ يعطي:

$٣ = ٥أ + ب$ .... (١)

تعويض $س = ٣$، $د(٣) = -٣$ يعطي:

$-٣ = ٣أ + ب$ .... (٢)

اطرح المعادلة (٢) من (١) لتحصل على:

$٦ = ٢أ$، أي $أ = ٣$

تعويض $أ = ٣$ في المعادلة (١) يعطي:

$٣ = ١٥ + ب$، أي $ب = -١٢$

الحلّ هو $أ = ٣$، $ب = -١٢$

ب $(د \circ د)(س) = د(٣س - ١٢)$

$= ٣(٣س - ١٢) - ١٢$

$= ٩س - ٤٨$

$٩س - ٤٨ = ٤$

$س = ٥\frac{٧}{٩}$

٤) أ (هـ ∘ د)(س) = لا يمكن ايجادها لأن مدى د(س)
هو ح ليس مجموعة جزئية من مجال الدالة
هـ(س) الذي هو ح − {١}

ب د(هـ(س))

$$د\left(\frac{١٢}{(س − ١)}\right) = ٢$$

$$٢ \times \left(\frac{١٢}{(س − ١)}\right) + ٣ = ٢$$

$$\left(\frac{٢٤}{(س − ١)}\right) + ٣ = ٢$$

$$س = ٢٥$$

٧) أ (ل ∘ هـ)(س) = ل$\left(\frac{٢}{س + ١}\right)$

$$= \left(\frac{٢}{س + ١} + ٢\right)^٢ − ٥$$

$$= \left(\frac{٢س + ٤}{س + ١}\right)^٢ − ٥$$

ب $١١ = \left(\frac{٢س + ٤}{س + ١}\right)^٢ − ٥$

$$\left(\frac{٢س + ٤}{س + ١}\right)^٢ = ١٦$$

$$\frac{٢س + ٤}{س + ١} = ±٤$$

٢س + ٤ = ٤(س + ١) أو
٢س + ٤ = −٤(س + ١)
س = ٠ أو س = $-\frac{٤}{٣}$

٨) (د ∘ هـ)(س) = ١

$$\frac{\frac{٢س + ٣}{س − ١} + ١}{٢} = ١$$

$$\frac{٢س + ٣ + س − ١}{٢س − ٢} = ١$$

$$\frac{٣س + ٢}{٢س − ٢} = ١ \Leftarrow ٣س + ٢ = ٢س − ٢$$

س = −٤

٩) (د ∘ د)(س) = د$\left(\frac{س + ١}{٢س + ٥}\right)$

$$= \frac{\frac{س + ١}{٢س + ٥} + ١}{٢\left(\frac{س + ١}{٢س + ٥}\right) − ٥}$$

اضرب البسط والمقام في (٢س + ٥) فتحصل على:

$$= \frac{س + ١ + (٢س + ٥)}{٢(س + ١) + ٥ + (٢س + ٥)}$$

$$= \frac{٣س + ٦}{١٢س + ٢٧}$$

$$= \frac{س + ٢}{٤س + ٩}$$

١٠) أ (د ∘ هـ)(س) = د(س +١)
= (س + ١)^٢
الحل هو (د ∘ هـ)

هـ يمكن كتابة س^٢ + ٢س + ٢ في صورة
س^٢+ ٢س + ١+ ١ أو (س + ١)^٢ + ١
وبما أن (د ∘ هـ)(س) = (س + ١)^٢ فيكون
(هـ ∘ د ∘ هـ) (س) = هـ (س +١)^٢
= (س +١)^٢ + ١
الحل هو (هـ ∘ د ∘ هـ)(س)

١١) (هـ ∘ د)(س) = هـ (س^٢ − ٣س)
= ٢(س^٢ − ٣س) + ٥
٢(س^٢ − ٣س) + ٥ = ٠
٢س^٢ − ٦س + ٥ = ٠
لا تحلل هذه المعادلة إلى العوامل. استخدم الصيغة
التربيعية حيث أ = ٢، ب = −٦، جـ = ٥

$$س = \frac{−(−٦) ± \sqrt{(−٦)^٢ − ٤(٢)(٥)}}{٢(٢)}$$

$س = \frac{٦ ± \sqrt{−٤}}{٤}$ وحيث إن ب^٢ − ٤ أ جـ < ٠

فلا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

١٢) (د ∘ هـ)(س) = د$\left(\frac{٢}{س}\right)$، فإن:

$$= ك − ٢\left(\frac{٢}{س}\right)$$

إذا كان $س = ك - ٢\left(\frac{٢}{س}\right)$،

$س^{٢} = ك\,س - ٤$ أو $س^{٢} - ك\,س + ٤ = ٠$

ليكون الجذران متساويين، فإن $ب^{٢} - ٤أ\,جـ = ٠$

$أ = ١$، $ب = -ك$، $جـ = ٤$ فيكون:

$(-ك)^{٢} - ٤(١)(٤) = ٠$

$ك^{٢} - ١٦ = ٠$

أي $ك = -٤$ أو $ك = ٤$

١٤) $(د \circ د)(س) = د\left(\frac{س + ٥}{٢س - ١}\right)$

$= \dfrac{\frac{س + ٥}{٢س - ١} + ٥}{٢\left(\frac{س + ٥}{٢س - ١}\right) - ١}$

اضرب البسط والمقام في $(٢س - ١)$ لتحصل على:

$= \dfrac{س + ٥ + ٥(٢س - ١)}{٢(س + ٥) - ١(٢س - ١)}$

$= \dfrac{١١س}{١١}$

$= س$

١٦) أ $د(س) = س^{٢} + ٤س + ٣$

$(ل \circ ك)(س) = ل(س + ٢)$

$= (س + ٢)^{٢} - ١$

$= س^{٢} + ٤س + ٣$

المجال: $س \in ح$

المدى: $د(س) \geqslant -١$

ب $د(س) = س^{٢} + ١$

$(ك \circ ل)(س) = ك(س^{٢} - ١)$

$= (س^{٢} + ١) + ٢$

$= س^{٢} - ١$

فيكون $د(س) = (ك \circ ل)(س)$

الإجابة هي $(ك \circ ل)(س)$

المجال: $س \in ح$، المدى $د(س) \in ح$، $د(س) \geqslant ١$

ج $د(س) = س$

$(ع \circ ع)(س) = ع\left(\frac{١}{س}\right)$

$= \dfrac{١}{\frac{١}{س}}$

$= س$

فيكون $د(س) = (ع \circ ع)(س)$

الإجابة هي $(ع \circ ع)(س)$

المجال: $س \in ح$، $س \neq$ صفر

المدى $د(س) \in ح$،

$د(س) \neq ٠$

مجال تركيب دالتين هو إمّا مجال الدالة **الأولى** نفسه أو مجموعة جزئية منه.
مدى تركيب دالتين هو إمّا مدى الدالة **الثانية** نفسه أو مجموعة جزئية منه.

د $د(س) = \frac{١}{س^{٢}} + ١$

$(ك \circ ل \circ ع)(س) = (ك \circ ل)\left(\frac{١}{س}\right)$

$= ك\left(\frac{١}{س^{٢}} - ١\right)$

$= \frac{١}{س^{٢}} - ١ + ٢$

$= \frac{١}{س^{٢}} + ١$

أي، $د(س) = (ك \circ ل \circ ع)(س)$

الإجابة هي $(ك \circ ل \circ ع)(س)$

المجال: $س \in ح$، $س \neq ٠$، المدى $د(س) \in ح$،

$د(س) > ١$

هـ $د(س) = س + ٤$

$(ك \circ ك)(س) = ك(ك(س))$

$= ك(س + ٢)$

$= س + ٤$

المجال: $س \in ح$

المدى: $س \in ح$

و د(س) = س − ٢$\sqrt{\text{س} + ١}$ + ١

(ل ∘ ي)(س) = ل($\sqrt{\text{س} + ١}$ − ١)

= ($\sqrt{\text{س} + ١}$ − ١)^{٢} − ١

= س + ١ − ٢$\sqrt{\text{س} + ١}$ + ١ − ١

= س − ٢$\sqrt{\text{س} + ١}$

فيكون، د(س) = (ل ∘ ي)(س)

الإجابة هي (ل ∘ ي)(س)

المجال: س ∈ ع، س ≠ −١،

المدى د(س) ∈ ع، د(س) ≠ −١

تمارين ٢-٣

١) **ب** د(س) = س^{٢} + ٣ حيث س ∈ ع، س ⩾ ٠

ص = س^{٢} + ٣

س = ص^{٢} + ٣

ص^{٢} = س − ٣

ص = $\sqrt{\text{س} - ٣}$

د$^{-١}$(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$

هـ د(س) = $\frac{\text{س} + ٧}{\text{س} + ٢}$

ص = $\frac{\text{س} + ٧}{\text{س} + ٢}$

س = $\frac{\text{ص} + ٧}{\text{ص} + ٢}$

س(ص + ٢) = ص + ٧

س ص + ٢س = ص + ٧

س ص − ص = ٧ − ٢س

ص = $\frac{٧ - ٢\text{س}}{\text{س} - ١}$

د$^{-١}$(س) = $\frac{٧ + ٢\text{س}}{\text{س} - ١}$

٢) **أ** د: س ↤ س^{٢} + ٤س، س ∈ ع، س ⩾ −٢

د: س ↤ (س + ٢)^{٢} − ٤س

منحنى الدالة تربيعي على النحو ∪

رأس المنحنى (أدنى نقطة) عند (−٢، −٤)

مدى د(س) هو د(س) ⩾ −٤

مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س) نفسه

مدى د$^{-١}$(س) هو مدى د(س) نفسه

وعليه، يكون مدى د$^{-١}$(س) ⩾ −٢

- ليس ضروريًا أن تجد الدالة العكسية قبل تحديد المجال والمدى. مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س). مدى د$^{-١}$(س) هو مجال د(س)
- تتواجد الدالة العكسية د$^{-١}$(س) إذا كانت الدالة واحدًا إلى واحد حصرًا.

ب د: س ↤ س^{٢} + ٤س

ص = س^{٢} + ٤س

س = ص^{٢} + ٤ص

أكمل المربّع للطرف الأيسر من المعادلة:

س = (ص + ٢)^{٢} − ٤

(ص + ٢)^{٢} = س + ٤

ص + ٢ = $\sqrt{\text{س} + ٤}$

ص = −٢ + $\sqrt{\text{س} + ٤}$

د$^{-١}$ (س) = −٢ + $\sqrt{\text{س} + ٤}$

(خذ الجذر الموجب لأن مجال الدالة العكسية س ⩾ −٤).

٣) **أ** د: س ↤ $\frac{٥}{٢\text{س} + ١}$

ص = $\frac{٥}{٢\text{س} + ١}$

س = $\frac{٥}{٢\text{ص} + ١}$

س(٢س + ١) = ٥

٢س ص + س = ٥

٢س ص + س = ٥ − س

ص = $\frac{٥ - \text{س}}{٢\text{س}}$

د$^{-١}$(س) − $\frac{٥ - \text{س}}{٢\text{س}}$

ب مجال $د^{-1}(س)$ هو مدى د نفسه، أي $س \geqslant ١$

٥) أ $هـ: س \mapsto ٢س^{٢} - ٨س + ١٠$

$ص = ٢س^{٢} - ٨س + ١٠$

$ص = ٢(س^{٢} - ٤س) + ١٠$

$ص = ٢[(س - ٢)^{٢} - ٢^{٢}] + ١٠$

$ص = ٢(س - ٢)^{٢} - ٨ + ١٠$

$ص = ٢(س - ٢)^{٢} + ٢$

منحنى $ص = ٢(س - ٢)^{٢} + ٢$ تربيعي على النحو $\cup$

رأس (أدنى نقطة المنحنى) $(٢، ٢)$

الدالة $هـ: س \mapsto ٢س^{٢} - ٨س + ١٠$ حيث $س \in ع$، $س \geqslant ٣$ هي دالة واحد إلى واحد في هذا المجال.

ب $ص = ٢(س - ٢)^{٢} + ٢$

$س = ٢(ص - ٢)^{٢} + ٢$

$\frac{س - ٢}{٢} = (ص - ٢)^{٢}$

$\sqrt{\frac{س - ٢}{٢}} = ص - ٢$ أخذنا الجذر الموجب

حيث مجال الدالة العكسية هو $س \geqslant ٣$

$ص = ٢ + \sqrt{\frac{س - ٢}{٢}}$

$هـ^{-1}(س) = ٢ + \sqrt{\frac{س - ٢}{٢}}$

٦) أ $د: س \mapsto ٢س^{٢} + ١٢س - ١٤$ يمكن كتابة الدالة في صورة $ص = ٢(س - ٣)^{٢} - ٣٢$ منحنى الدالة تربيعي على النحو $\cup$.

رأس (أدنى نقطة) المنحنى هو $(-٣، -٣٢)$

إذا كانت $د: س \mapsto ٢س^{٢} + ١٢س - ١٤$ واحدًا إلى واحد فإن $د^{-1}(س)$ يجب أن تكون دالة. لذا علينا وضع قيود على مجال

$د: س \mapsto ٢س^{٢} + ١٢س - ١٤$، $س \in ع$، $س \geqslant ك$ لتصبح:

$د: س \mapsto ٢س^{٢} + ١٢س - ١٤$، $س \in ع$،

$س \geqslant -٣$، أقل قيمة لـ ك هي -٣

ب $ص = ٢س^{٢} + ١٢س - ١٤$

$س = ٢ص^{٢} + ١٢ص - ١٤$

$س = ٢(ص^{٢} + ٦ص) - ١٤$

$س = ٢[(ص + ٣)^{٢} - ٣^{٢}] - ١٤$

$س = ٢(ص + ٣)^{٢} - ٣٢$

$٢(ص + ٣)^{٢} = س + ٣٢$

$(ص + ٣)^{٢} = \frac{س + ٣٢}{٢}$

$ص + ٣ = \sqrt{\frac{س + ٣٢}{٢}}$ أخذنا الجذر الموجب لأن مجال الدالة العكسيّة $س \geqslant -٣٢$

$د^{-1}(س) = ص = -٣ + \sqrt{\frac{س + ٣٢}{٢}}$

٨) أ $د(س) = ٩ - (س - ٣)^{٢}$ حيث $س \in ع$، $ل \leqslant س \leqslant ٧$

منحنى $د(س) = ٩ - (س - ٣)^{٢}$ حيث $س \in ع$ تربيعي على النحو $\cap$

نعرف ذلك لأن معامل $س^{٢}$ سالب.

الرأس $(٣، ٩)$. إذا كانت $د(س) = ٩ - (س - ٣)^{٢}$ دالة واحد إلى واحد فإن $ك = ٣$

ب ١) $د(س) = ٩ - (س - ٣)^{٢}$

$ص = ٩ - (س - ٣)^{٢}$

$س = ٩ - (ص - ٣)^{٢}$

$(ص - ٣)^{٢} = ٩ - س$

$ص - ٣ = \sqrt{٩ - س}$

أخذنا الجذر التربيعي الموجب لأن مجال الدالة العكسية هو $س \leqslant ٩$

$د^{-1}(س) = ٣ + \sqrt{٩ - س}$

٢) مجال $د^{-1}(س)$ هو مدى $د(س)$ نفسه، أي $س \leqslant ٩$

المدى هو مجال $د(س)$ نفسه، أي $٣ \leqslant د^{-1}(س) \leqslant ٧$

٩) أ) د(س) هي دالة عكسيّة لـ $د^{-١}(س)$ فقط إذا كانت كل منهما واحدًا إلى واحد.

$د^{-١}(س) = \frac{٥س - ١}{س}$ ، س ∈ ح، ٠ < س ≤ ٣

$ص = \frac{٥س - ١}{س}$

$س = \frac{٥ص - ١}{ص}$

س ص = ٥ص − ١

٥ص − س ص = ١

ص(٥ − س) = ١

$ص = \frac{١}{٥ - س}$

$د(س) = \frac{١}{٥ - س}$

لتكون د(س) موجودة يجب أن تكون واحدًا إلى واحد.

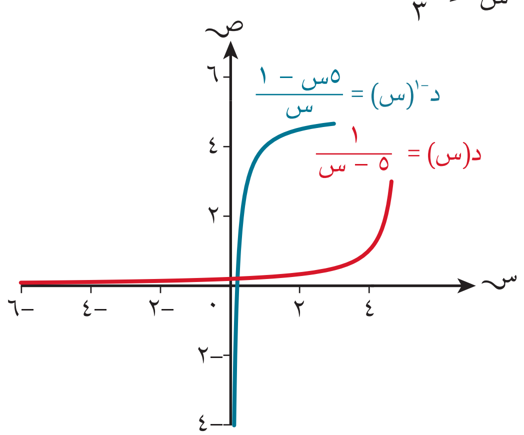
مدى $د^{-١}(س) = \frac{٥س - ١}{س}$ هو $د^{-١}(س) \leqslant \frac{١٤}{٣}$

(ينتج ذلك من تعويض قيم المجال

٠ ≤ س ≤ ٣ في $د^{-١}(س) = \frac{٥س - ١}{س}$).

ب) مجال $د(س) = \frac{١}{٥ - س}$ يجب أن يكون

$س \leqslant \frac{١٤}{٣}$



لدالة واحد إلى واحد تكون $د^{-١}(س)$ انعكاسًا لـ د(س) حول المستقيم ص = س.

١٠) أ) د(س) = ٣س + أ

(هـ ∘ د)(−١) = هـ(−٣ + أ)

= ب − ٥ (−٣ + أ)

= ب + ١٥ − ٥أ

٢ = ب + ١٥ − ٥أ

٥أ − ب = ١٣ ....(١)

أوجِد الدالة العكسيّة لـ هـ (س)

هـ(س) = ب − ٥س

ص = ب − ٥س

س = ب − ٥ص

$ص = \frac{ب - س}{٥}$

$هـ^{-١}(س) = \frac{ب - ٧}{٥}$

$هـ^{-١}(٧) = \frac{ب - س}{٥}$

ب = ١٢

عوّض عن ب في معادلة (١) لتحصل على:

٥أ − ١٢ = ١٣

أ = ٥

الحلّ هو أ = ٥، ب = ١٢

١١) أ) د(س) = ٣س − ١

ص = ٣س − ١

س = ٣ص − ١

$ص = \frac{س + ١}{٣}$

$د^{-١}(س) = \frac{س + ١}{٣}$

$هـ(س) = \frac{٣}{٢س - ٤}$

$ص = \frac{٣}{٢س - ٤}$

$س = \frac{٣}{٢ص - ٤}$

س(٢ص − ٤) = ٣

٢س ص − ٤س = ٣

$ص = \frac{٤س + ٣}{٢س}$

$هـ^{-١}(س) = \frac{٤س + ٣}{٢س}$

ب $\frac{س + ١}{٣} = \frac{٤س + ٣}{٢س}$

$٢س(س + ١) = ٣(٤س + ٣)$

$٢س^{٢} + ٢س = ١٢س + ٩$

$٢س^{٢} - ١٠س - ٩ = ٠$

$أ = ٢،\ ب = -١٠،\ جـ = -٩$

حتى يكون لهذه المعادلة جذران حقيقيان سيكون

$ب^{٢} - ٤أ\,جـ \geqslant ٠$

$ب^{٢} - ٤أ\,جـ = (-١٠)^{٢} - ٤(٢)(-٩)$

$= ١٧٢$

$١٧٢ \geqslant ٠$

$\therefore$ للمعادلة جذران حقيقيان.

١٢) **أ** $د: س \mapsto (٢س - ١)^{٣} - ٣،\ س \in ع$، لكل

$١ \leqslant س \leqslant ٣$

$ص = (٢س - ١)^{٣} - ٣$

$س = (٢ص - ١)^{٣} - ٣$

$(٢ص - ١)^{٣} = س + ٣$

$٢ص - ١ = \sqrt[٣]{س + ٣}$

$ص = \frac{١ + \sqrt[٣]{س + ٣}}{٢}$

$د^{-١}(س) = \frac{١ + \sqrt[٣]{س + ٣}}{٢}$

أو $\frac{١}{٢}(١ + \sqrt[٣]{س + ٣})$

ب مجال $د^{-١}(س)$ مدى $د(س)$ نفسه. ومدى $د(س)$ هو $-٢ \leqslant د(س) \leqslant ١٢٢$ (من تعويض قيم المجال* في $د(س)$). مجال $د(س)$ هو $-٢ \leqslant س \leqslant ١٢٢$

١٤) **أ** $د(س) = \frac{١}{س - ١}$

$ص = \frac{١}{س - ١}$

$س = \frac{١}{ص - ١}$

$س(ص - ١) = ١$

$س\,ص - س = ١$

$س\,ص = س + ١$

$ص = \frac{س + ١}{س}$

$د^{-١}(س) = \frac{س + ١}{س}$

ب $د(س) = د^{-١}(س)$

$\frac{١}{س - ١} = \frac{س + ١}{س}$

$س = (س + ١)(س - ١)$

$س = س^{٢} - ١$

$س^{٢} - س - ١ = ٠$

ج حلّ المعادلة $س^{٢} - س - ١ = ٠$

باستخدام الصيغة التربيعية؛ $أ = ١،\ ب = -١،$ $جـ = -١$

$س = \frac{--١ \pm \sqrt{(-١)^{٢} - ٤(١)(-١)}}{٢(١)}$

$س = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

١٥) **أ** $د(س) = \frac{١}{٣ - س}$

$ص = \frac{١}{٣ - س}$

$س = \frac{١}{٣ - ص}$

$س(٣ - ص) = ١$

$٣س - س\,ص = ١$

$س\,ص = ٣س - ١$

$ص = \frac{٣س - ١}{س}$

$د^{-١}(س) = \frac{٣س - ١}{س}$

$د(س) \neq د^{-١}(س)$ لذا فهي ليست عكسيّة لنفسها

ب $د(س) = \frac{٢س + ١}{س - ٢}$

$ص = \frac{٢س + ١}{س - ٢}$

$س = \frac{٢ص + ١}{ص - ٢}$

$س(ص - ٢) = ٢ص + ١$

$$س ص - ٢ س = ٢ص + ١$$
$$س ص - ٢ ص = ٢س + ١$$
$$ص(س - ٢) = ٢س + ١$$
$$ص = \frac{٢س + ١}{س - ٢}$$
$$د^{-١}(س) = \frac{٢س + ١}{س - ٢}$$

$د(س) = د^{-١}(س)$، لذا تكون $د(س)$ عكسيّة لنفسها.

ج $د(س) = \frac{٣س + ٥}{٤س - ٣}$

$$ص = \frac{٣س + ٥}{٤س - ٣}$$
$$س = \frac{٣ص + ٥}{٤ص - ٣}$$
$$س(٤ص - ٣) = ٣ص + ٥$$
$$٤س ص - ٣ س = ٣ص + ٥$$
$$٤س ص - ٣ ص = ٣س + ٥$$
$$ص(٤س - ٣) = ٣س + ٥$$
$$ص = \frac{٣س + ٥}{٤س - ٣}$$
$$د^{-١}(س) = \frac{٣س + ٥}{٤س - ٣}$$

$د(س) = د^{-١}(س)$، لذا تكون $د(س)$ عكسيّة لنفسها.

١٦) أ $(د \circ هـ)(س) = د(٤ - ٢س)$

$$(د \circ هـ)(س) = ٣(٤ - ٢س) - ٥$$
$$(د \circ هـ)(س) = ٧ - ٦س$$

أوجد $(د \circ هـ)^{-١}(س)$

$$ص = ٧ - ٦س$$
$$س = ٧ - ٦ص$$
$$ص = \frac{٧ - س}{٦}$$
$$(د \circ هـ)^{-١}(س) = \frac{٧ - س}{٦}$$

ب **١)** أوجد $د^{-١}(س)$

$$ص = ٣س - ٥$$
$$س = ٣ص - ٥$$
$$٣ص = س + ٥$$
$$ص = \frac{س + ٥}{٣}$$
$$د^{-١}(س) = \frac{س + ٥}{٣}$$

أوجد $هـ^{-١}(س)$

$$ص = ٤ - ٢س$$
$$س = ٤ - ٢ص$$
$$٢ص = ٤ - س$$
$$ص = ٤ - \frac{س}{٢}$$
$$هـ^{-١}(س) = \frac{٤ - س}{٢}$$
$$(د^{-١} \circ هـ^{-١})(س) = د^{-١}\left(\frac{٤ - س}{٢}\right)$$
$$= \frac{\frac{٤ - س}{٢} + ٥}{٣}$$

اضرب البسط والمقام في ٢ لتحصل على:

$$(د^{-١} \circ هـ^{-١})(س) = \frac{٤ - س + ١٠}{٦}$$
$$(د^{-١} \circ هـ^{-١})(س) = \frac{١٤ - س}{٦}$$

٢) $(هـ^{-١} \circ د^{-١})(س) = هـ^{-١}\left(\frac{س + ٥}{٣}\right)$

$$= \frac{٤ - \left(\frac{س + ٥}{٣}\right)}{٢}$$

اضرب البسط والمقام في ٣ لتحصل على:

$$(هـ^{-١} \circ د^{-١})(س) = \frac{١٢ - (س + ٥)}{٦}$$
$$(هـ^{-١} \circ د^{-١})(س) = \frac{٧ - س}{٦}$$

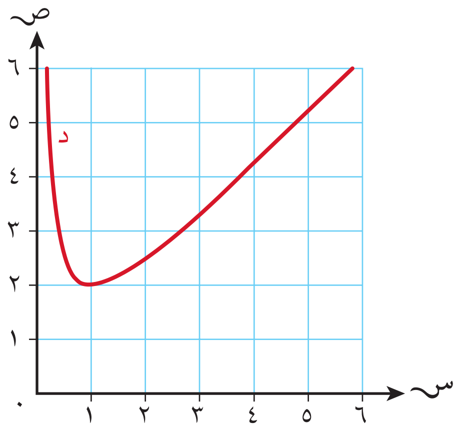
ج $(د \circ هـ)^{-١}(س) = (هـ^{-١} \circ د^{-١})(س)$

هذه النتيجة صحيحة دائمًا بافتراض أن الدوال العكسية وتركيب الدوال متحقق دائمًا ولا توجد مشاكل مع المجال والمدى.

تمارين ٢-٤

١) د الدالة د متعدد إلى واحد. العلاقة العكسيّة يجب أن تكون واحدًا إلى متعدد، وبالتالي فهي ليست دالة.

ليكون للدالة د دالة عكسية د$^{-1}$ يجب أن تكون واحدًا إلى واحد.



٢) د: س ↤ ٢س − ١ حيث س ∈ ع، −١ ⩽ س ⩽ ٣

أ ص = ٢س − ١

س = ٢ص − ١

ص = $\frac{\text{س} + ١}{٢}$

د$^{-1}$(س) = $\frac{\text{س} + ١}{٢}$

ب عوّض عن س = −١ في د: س ↤ ٢س − ١

لتحصل على −٣

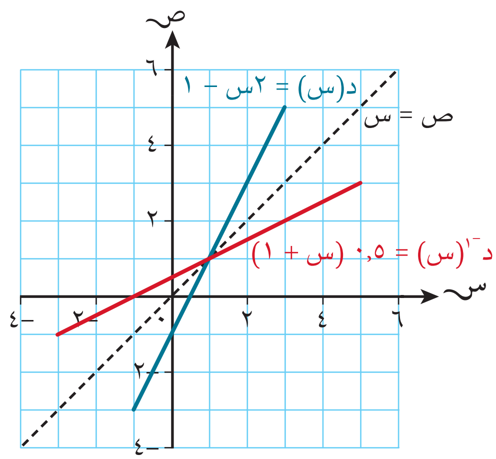
عوّض عن س = ٣ في د: س ↤ ٢س − ١

لتحصل على ٥

مجال د$^{-1}$(س) هو −٣ ⩽ س ⩽ ٥

المدى هو −١ ⩽ س ⩽ ٣

ج



منحنى ص = د(س) ص = د$^{-1}$(س) كل منهما انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س

٣) أ مدى د(س) = $\frac{٤}{\text{س} + ٢}$ هو ٠ < د(س) ⩽ ٢

وحيث إن عندما س= ٠، د(س) = ٢ وكلما كبرت س فإن د(س) تقترب من الصفر.

ب د(س) = $\frac{٤}{\text{س} + ٢}$

ص = $\frac{٤}{\text{س} + ٢}$

س = $\frac{٤}{\text{ص} + ٢}$

س(ص + ٢) = ٤

س ص + ٢س = ٤

س ص = ٤ − ٢ س

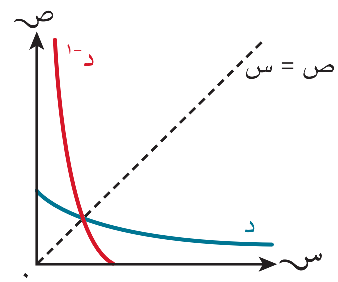
ص = $\frac{٤ - ٢\text{س}}{\text{س}}$

د$^{-1}$(س) = $\frac{٤ - ٢\text{س}}{\text{س}}$

ج مجال د$^{-1}$(س) هو مدى د(س) أي ٠ < س ⩽ ٢

مدى د$^{-1}$(س) هو مجال د(س) أي د$^{-1}$(س) ⩾ ٠

د



منحنى ص = د(س)، ص = $د^{-1}$(س) كل منهما انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س

٤) ب $د(س) = \frac{٢س - ٣}{س - ٥}$

$ص = \frac{٢س - ٣}{س - ٥}$

$س = \frac{٢ص - ٣}{ص - ٥}$

س(ص − ٥) = ٢ص − ٣

س ص − ٥س = ٢ ص − ٣

س ص − ٢ص = ٥ س − ٣

ص(س − ٢) = ٥ س − ٣

$ص = \frac{٥س - ٣}{س - ٢}$

$د^{-1} = \frac{٥س - ٣}{س - ٣}$

د(س) ليست عكسيّة لنفسها، لذا فهي ليست متماثلة حول المستقيم ص = س

ج $د(س) = \frac{٣س - ١}{٢س - ٣}$

$ص = \frac{٣س - ١}{٢س - ٣}$

$س = \frac{٣ص - ١}{٢س - ٣}$

س(٢ص − ٣) = ٣ص − ١

٢س ص − ٣س = ٣ص − ١

٢س ص − ٣ص = ٣س − ١

ص(٢س −٣) = ٣س − ١

$ص = \frac{٣س - ١}{٢س - ٣}$

$د^{-1}(س) = \frac{٣س - ١}{٢س - ٣}$

د(س) دالة عكسية لنفسها، لذا فهي متماثلة حول المستقيم ص = س

٥) أ $د(س) = \frac{س + أ}{ب س - ١}$

$ص = \frac{س + أ}{ب س - ١}$

$س = \frac{ص + أ}{ب ص - ١}$

ب س ص − س = ص + أ

ب س ص − ص = س + أ

ص(ب س − ١) = س + أ

$ص = \frac{س + أ}{ب س - ١}$

$د^{-1}(س) = \frac{س + أ}{ب س - ١}$

و بما أن $د^{-1}$(س) = د(س) فإن الدالة عكسيّة لنفسها.

ب $هـ(س) = \frac{أ س + ب}{جـ س + د}$

$ص = \frac{أ س + ب}{جـ س + د}$

$س = \frac{أ ص + ب}{جـ ص + د}$

جـ س ص + د س = أ ص + ب

جـ س ص − أ ص = ب − د س

ص (جـ س − أ) = ب − د س

$ص = \frac{ب + د س}{جـ س - أ}$

$هـ^{-1}(س) = \frac{-د س + ب}{جـ س - أ}$

عند مقارنة $هـ^{-1}$(س) مع هـ(س) تكون الدالة عكسيّة لنفسها عندما أ = −د

تمارين ٢-٥ أ

١) ب إذا علمت أن ص = ٥$\sqrt{\text{س}}$ ، و $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٢ \end{pmatrix}$ تمثل انسحابًا مقداره ٢ وحدتان إلى الأسفل، لذا نضيف − ٢ إلى الدالة.

الإجابة هي ص = ٥$\sqrt{\text{س}}$ − ٢

هـ إذا علمت أن ص = $\frac{٢}{\text{س}}$، و $\begin{pmatrix} -٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ تمثل انسحابًا مقداره ٥ وحدات إلى اليسار، لذا نستبدل س بـ س + ٥

الإجابة هي ص = $\frac{٢}{\text{س} + ٥}$

ح إذا علمت أن ص = ٣س^{٢} − ٢، $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ تمثل انسحابًا مقداره ٣ وحدات إلى الأعلى، لذا نضيف ٣ إلى الدالة مع انسحاب إلى اليمين مقداره ٢ وحدتان، لذا نستبدل س بـ س − ٢

ص = ٣(س − ٢)^{٢} − ٢ + ٣

الإجابة هي ص = ٣(س − ٢)^{٢} + ١

٢) ب حيث ص = س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١ − ٥ تعطي:

ص = س^{٣} + ٢س^{٢} − ٤

وهذا يمثل انسحابًا $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٥ \end{pmatrix}$

د ص = س + $\frac{٦}{\text{س}}$

إذا استبدلنا س بـ س − ٢ نحصل على:

ص = (س − ٢) + $\frac{٦}{(\text{س} - ٢)}$

فكّ الأقواس

ص = س − ٢ + $\frac{٦}{(\text{س} - ٢)}$

يمثّل هذا انسحابًا بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$

هـ ص = $\sqrt{٢\text{س} + ٥}$

أعد كتابة الدالتَين:

ص = $\sqrt{٢(\text{س} + ٢,٥)}$ سُحِبت إلى

ص = $\sqrt{٢(\text{س} + ١,٥)}$

إذا استبدلنا س بـ (س − ١) فيتكوَن

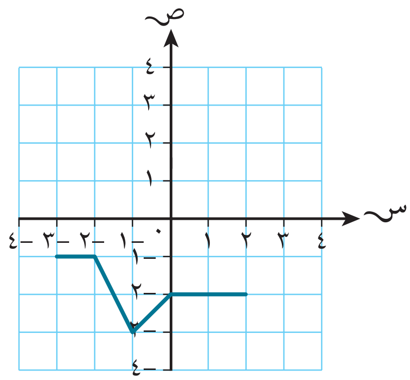
ص = $\sqrt{٢((\text{س} - ١) + ٢,٥)}$ قد سُحِبت إلى

ص = $\sqrt{٢(\text{س} + ١,٥)}$

هذا يمثّل انسحابًا بالمتجه مقداره $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

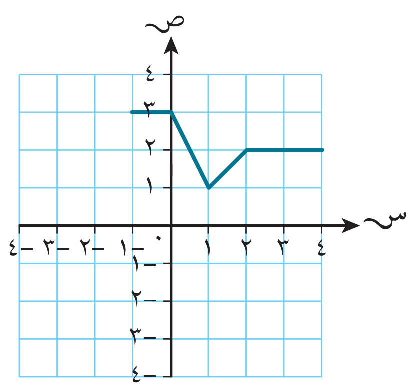
٣) أ ص = د(س) − ٤

هذا انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٤ \end{pmatrix}$.



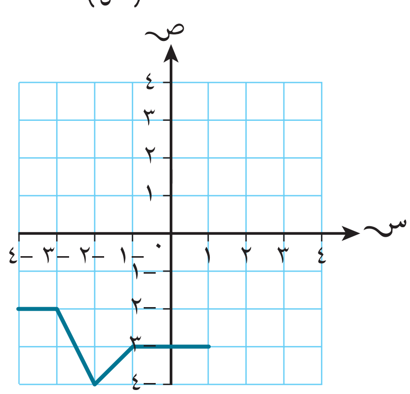
ب ص = د(س − ٢)

هذا انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

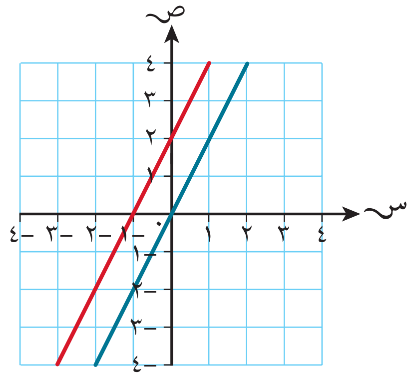


ج ص = د(س + ١) − ٥

هذا انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -١ \\ -٥ \end{pmatrix}$.



٤) أ



ب أُضيف '٢' إلى نهاية المعادلة ص = ٢ س لينتج

ص = ٢ س + ٢

الانسحاب الذي يمثّل ذلك هو بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٢\end{pmatrix}$.

فتكون أ = ٢

ج طريقة بديلة، استبدال س بـ (س + ١) في المعادلة ص = ٢س يعطي

ص = ٢(س + ١) أو ص = ٢س + ٢

الانسحاب الذي يمثّل العملية هو بالمتجه $\begin{pmatrix}-١\\٠\end{pmatrix}$.

وعليه، فإن ب = −١

٥) ص = (س + ٣)(س − ٢)(س − ٥)

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٢\\٠\end{pmatrix}$ يعني استبدال س في المعادلة أعلاه بـ س − ٢

أي أن ص = (س + ٣ − ٢)(س − ٢ − ٢)(س − ٢ − ٥)

الحل هو ص = (س + ١)(س − ٤)(س − ٧)

٦) تم سحب ص = س^{٢} − ٤ س + ١ بالمتجه $\begin{pmatrix}١\\٢\end{pmatrix}$.

الانسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}١\\٠\end{pmatrix}$ يعني استبدال س بـ س − ١ في المعادلة أعلاه.

أي أن ص = (س − ١)^{٢} − ٤ (س − ١) + ١

الانسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٢\end{pmatrix}$ يعني إضافة ٢ إلى الدالة.

وعليه، فإن الانسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}١\\٢\end{pmatrix}$ يعطي:

ص = (س − ١)^{٢} − ٤(س − ١) + ١ + ٢

فكّ الأقواس وأعد الترتيب لتحصل على:

ص = (س − ١)(س − ١) − ٤س + ٤ + ١ + ٢

ص = س^{٢} − ٢س + ١ − ٤س + ٤ + ١ + ٢

ص = س^{٢} − ٦س + ٨

٧) أ تم سحب منحنى د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ بالمتجه $\begin{pmatrix}٢\\-٥\end{pmatrix}$.

يتطلب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٢\\-٥\end{pmatrix}$:

- استبدال س بـ س − ٢ في المعادلة أعلاه.
- إضافة −٥ إلى الدالة الناتجة.

(يمكن إجراء هاتَين الخطوتَين بأي ترتيب. انظر الدرس ٢−٨)

د(س) = أ(س − ٢)^{٢} + ب(س − ٢) + جـ − ٥

فكّ الأقواس يعطي:

د(س) = أس^{٢} − ٤أس + ٤أ + ب س − ٢ب + جـ − ٥

د(س) = أس^{٢} − (٤أ − ب)س + (٤أ − ٢ب + جـ − ٥)

هـ(س) = ٢س^{٢} − ١١ س + ١٠

قارن بين معاملات الدالتَين د(س)، هـ(س)

أ = ٢

٤أ − ب = ١١

عوّض عن أ لتحصل على:

٨ − ب = ١١ أي أن ب = −٣

٤أ − ٢ب + جـ − ٥ = ١٠

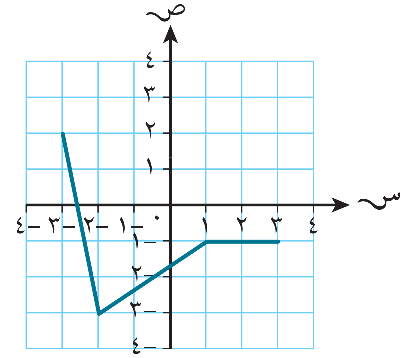
عوّض عن أ، ب لتحصل على:

٨ + ٦ + جـ − ٥ = ١٠، أي أن جـ = ١

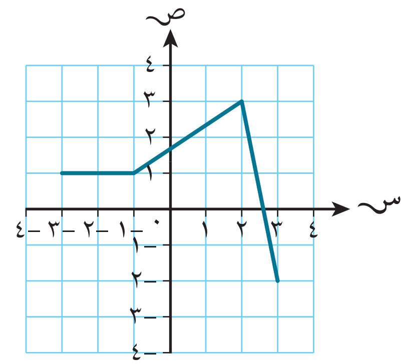
الحلّ هو أ = ٢، ب = −٣، جـ = ١

تمارين ٢-٥ ب

١) أ) الدالة ص = −هـ(س) انعكاس للدالة ص = هـ (س) حول المحور السيني.



ب) الدالة ص = هـ(−س) انعكاس للدالة ص = هـ (س) حول المحور الصادي.



٢) أ) ص = ٥س^{٢} بعد الانعكاس حول المحور السيني،
أي أن د(س) = −د(س)
اضرب الطرف الأيسر في − ١
الحل هو ص = −٥س^{٢}

ب) ص = ٢س^{٤} بعد الانعكاس حول المحور الصادي،
أي أن
د(س) = د(−س)
استبدل س بـ −س لتحصل على
ص = ٢(−س)^{٤}
الحلّ هو ص = ٢س^{٤}

ج) ص = ٢س^{٢} − ٣س + ١ بعد الانعكاس حول المحور الصادي، أي أن
د(س) = د(−س)
استبدل س بـ −س تحصل على
ص = ٢(−س)^{٢} − ٣(−س) + ١
الحلّ هو ص = ٢س^{٢} + ٣س + ١

د) ص = ٥ + ٢س −٣س^{٢} بعد الانعكاس حول المحور السيني.
أي أن د(س) = −د(س)
اضرب الطرف الأيسر في −١
ص = −١ (٥ + ٢س − ٣س^{٢})
الحلّ هو ص = ٣س^{٢} − ٢س − ٥

٣) أ) نلاحظ ان صورة د(س) هي −د(س) أي أنه تم ضرب الطرف الايسر من معادلة المنحنى
ص = س^{٢} + ٧س − ٣ في −١ فتحولت إلى
ص = −س^{٢} − ٧س + ٣
أي أن التحويل الذي أجري عليه هو انعكاس حول المحور السيني.

ب) نلاحظ أن صورة د(س) هي د(−س) أي تم استبدال كل س ب(−س) أي تم تحويل المنحنى إلى س^{٢} + ٣س + ٤
أي أن التحويل الذي أجري عليه هو انعكاس في المحور الصادي.

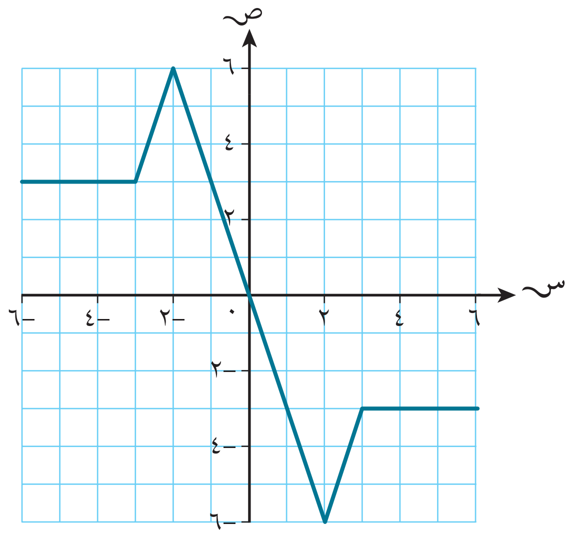
ج) نلاحظ ان صورة د(س) هي −د(س) أي أنه تم ضرب الطرف الايسر من معادلة المنحنى
ص = ٢س − ٥س^{٢} في −١ فتحولت إلى
ص = ٥س^{٢} − ٢س
أي أن التحويل الذي أجري عليه هو انعكاس حول المحور السينى.

د) نلاحظ ان صورة د(س) هي −د(س) أي أنه تم ضرب الطرف الايسر من معادلة المنحنى
ص = س^{٣} + ٢س^{٢} − ٣س + ١ في −١ فتحولت
الى −س^{٣} − ٢س^{٢} + ٣س − ١
أي أن التحويل الذي أجري عليه هو انعكاس حول المحور السيني.

تمارين ٢-٥ ج

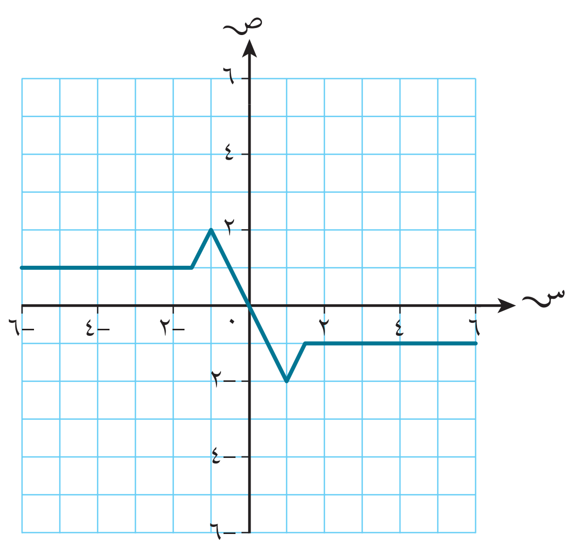
١) أ ص = ٣د(س) تمدد مواز للمحور الصادي
معامله ٣

جميع الإحداثيات الصادية للنقاط على المنحنى الأصلي قد ضُرِبت في ٣



ب ص = د(٢س) تمدد مواز للمحور السيني
معامله $\frac{١}{٢}$

جميع الإحداثيات السينية للنقاط على المنحنى الأصلي قد ضُرِبت في $\frac{١}{٢}$



٢) أ ص =٣س^{٢} بعد تمدد مواز للمحور الصادي
معامله ٢

جميع الإحداثيات الصادية للنقاط على المنحنى الأصلي تُضرِب في ٢

أي أن ص = ٢(٣س^{٢})

الحلّ هو ص = ٦س٢

ب ص = س^{٣} – ١ بعد تمدد مواز للمحور الصادي
معامله ٣

جميع الإحداثيات الصادية للنقاط على المنحنى الأصلي قد ضُرِبت في ٣

أي أن ص = ٣ (س^{٣} – ١)

الحلّ هو ص = ٣س^{٣} – ٣

ج ص = ٢^{س} + ٤ بعد تمدد مواز للمحور الصادي
معامله $\frac{١}{٢}$

جميع الإحداثيات الصادية للنقاط على المنحنى الأصلي قد ضُرِبت في $\frac{١}{٢}$

أي أن ص = $\frac{١}{٢}$(٢^{س} + ٤) وهذا يساوي

٢$^{-١}$ × ٢^{س} + $\frac{١}{٢}$(٤)

الحلّ هو ٢$^{س-١}$ + ٢

د ص= ٢س^{٢} – ٨ س + ١٠ بعد تمدد مواز للمحور السيني معامله ٢

جميع الإحداثيات السينية للنقاط على المنحنى الأصلي قد ضُرِبت في ٢

استبدل س بـ $\frac{١}{٢}$س

أي أن ص = ٢$\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)^{٢}$ – ٨$\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$ + ١٠

الحلّ هو ص = $\frac{١}{٢}$س^{٢} – ٤س + ١٠

هـ ص = ٦س^{٣} – ٣٦س بعد تمدد مواز للمحور السيني معامله $\frac{١}{٣}$

جميع الإحداثيات السينية للنقاط على المنحنى الأصلي قد ضُرِبت في $\frac{١}{٣}$

استبدل س بـ ٣س

ص = ٦(٣س)^{٣} − ٣٦(٣س)

الحلّ ص = ١٦٢س^{٣} − ١٠٨س

٣) **أ** ص = س^{٢} + ٢س − ٥

استبدل س بـ ٢ س لتحصل على:

ص = (٢س)^{٢} + ٢(٢س) − ٥ وهذا يساوي:

ص = ٤س^{٢} + ٤س − ٥

الحلّ هو تمدد موازٍ للمحور السيني معامله $\frac{١}{٢}$

ب ص = س^{٢} −٣س + ٢

اضرب كلّ حدّ في الطرف الأيسر في ٣ لتحصل على:

ص = ٣(س^{٢} − ٣س + ٢)

ص = ٣س^{٢} − ٩س + ٦

الحلّ هو تمدد موازٍ للمحور الصادي معامله ٣

ج لتحويل ص = ٢^{س} + ١ إلى ص = ٢$^{س + ١}$ + ٢

اضرب كلّ حدّ في الطرف الأيسر في ٢ لتحصل على:

ص = ٢(٢^{س} + ١)

ص = (٢)٢^{س} + ٢(١) بسّط لتحصل على:

ص = ص = ٢$^{س + ١}$ + ٢

انتبه (٢)٢^{س} تساوي ٢^{١} × ٢^{س} أو ٢$^{س + ١}$ وليس ٤^{س}

الحلّ هو تمدد موازٍ للمحور الصادي معامله ٢

د ص = $\sqrt{س - ٦}$

استبدل س بـ ٣ س لتحصل على

ص = $\sqrt{٣س - ٦}$

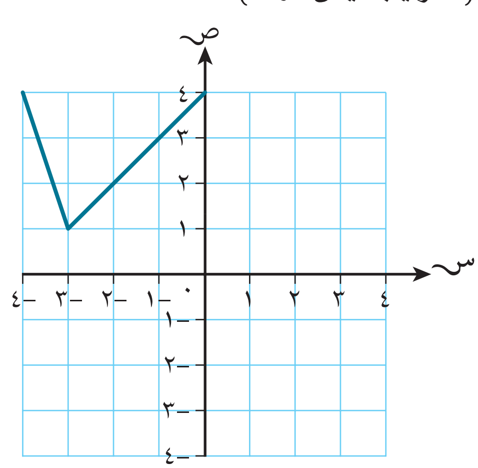
الحلّ هو تمدد موازٍ للمحور السيني معامله $\frac{١}{٣}$

تمارين ٢-٦

١) **أ** ص = هـ(س + ٢) + ٣ تمثّل:

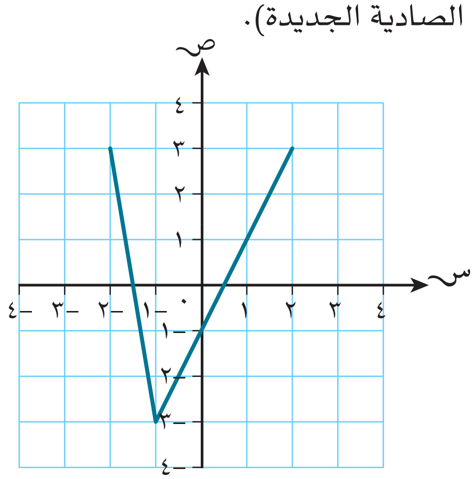
- تحويلًا هندسيًا أفقيًا، أي انسحابًا بالمتجه $\binom{-٢}{٠}$
- تحويلًا هندسيًا رأسيًا، أي انسحابًا بالمتجه $\binom{٠}{٣}$

(الترتيب ليس مهمًا).



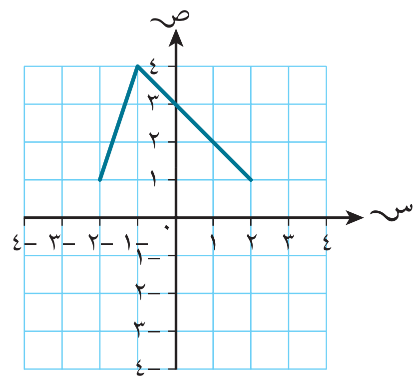
ب ص = ٢هـ(س) + ١ تمثّل تحويلَين هندسيَّين (الترتيب ليس مهمًا).

- تمدد موازٍ للمحور الصادي معامله ٢ (جميع الإحداثيات الصادية للنقاط على المحور الأصلي ضُربت في ٢)
- انسحاب رأسيّ $\binom{٠}{١}$ (اجمع ١ إلى الإحداثيات الصادية الجديدة).



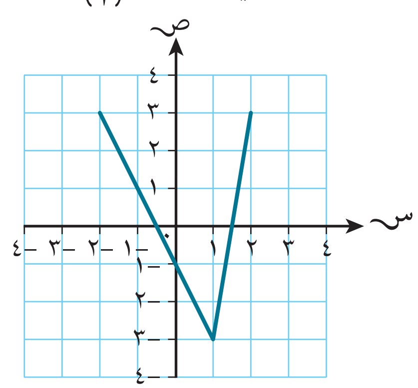
ج ص = ٢ − هـ(س) أو ص = −هـ(س) + ٢ تمثّل تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين (الترتيب مهمَ):

- انعكاس في المحور السيني وهو ص = −هـ(س).
- انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{٢}$ (اجمع ٢ إلى الإحداثي الصادي الجديد).



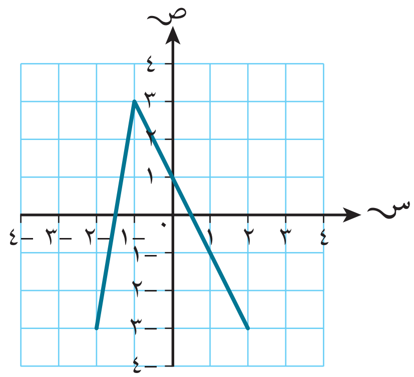
د ص = ٢هـ(−س) + ١ يمثل تحويلًا هندسيًا أفقيًا وتحويلَين رأسيَّين (الترتيب مهمّ):

- انعكاس في المحور الصادي وهو ص = هـ(−س).
- تمدد رأسي باتجاه المحور الصادي معامله ٢ (جميع الإحداثيات الصادية لنقاط المنحنى الأصلي ضُربت في ٢).
- انسحاب رأسي بالمتجه $\binom{٠}{١}$.



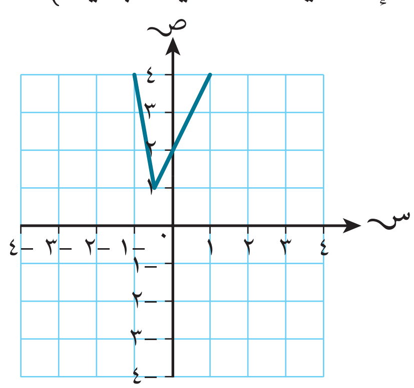
هـ ص = −٢هـ(س) − ١ تمثّل ثلاثة تحويلات هندسيّة رأسيّة (الترتيب مهمّ):

- تمدد رأسي باتجاه المحور الصادي معامله ٢ (جميع الإحداثيات الصادية لنقاط المنحنى الأصلي قد ضُرِبت في ٢).
- انعكاس في المحور السيني وهو ص = −هـ(س).
- انسحاب رأسي بالمتجه $\binom{٠}{-١}$ (اجمع −١ للإحداثيات الصادية الجديدة).



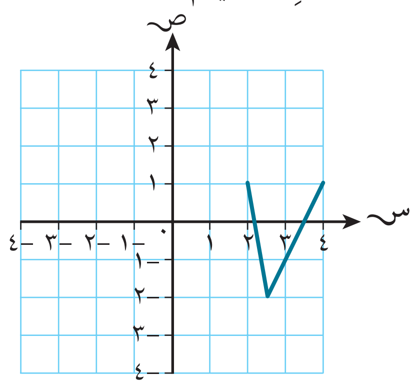
و ص = هـ (٢س) + ٣ تمثّل تحويلًا هندسيًا أفقيًا وآخر رأسيًا (الترتيب غير مهمّ).

- تمدد باتجاه المحور السيني معامله $\frac{١}{٢}$ (جميع الإحداثيات السينية للنقاط على المنحنى الأصلي قد ضُرِبت في $\frac{١}{٢}$).
- تحويل هندسي رأسي بالمتجه $\binom{٠}{٣}$ (اجمع ٣ للإحداثيات الصادية الجديدة).



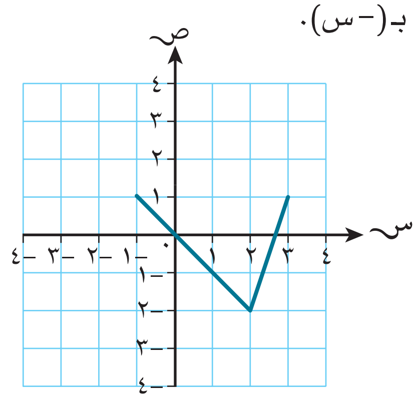
ز) ص = هـ(٢س − ٦) تمثّل تحويلَين هندسيَّين أفقيَّين (الترتيب مهمّ).

- انسحاب أفقي $\binom{٦}{٠}$ (استبدل س بـ(س − ٦)).
- تمدد باتجاه المحورالسيني معامله $\frac{١}{٢}$ (جميع الإحداثيات السينية لنقاط المنحنى الأصلي قد ضُرِبت في $\frac{١}{٢}$).



ح) ص = هـ(−س + ١) تمثّل تحويلَين هندسيَّين أفقيَّين (الترتيب مهمّ).

- انسحاب أفقي بالمتجه $\binom{-١}{٠}$ استبدل س بـ(س + ١).
- انعكاس في المحور الصادي استبدل س بـ(−س).



٢) إذا علمت أن ص = $س^٢$

أ) تمدد في اتجاه المحور الصادي معامله ٣ يعطي
ص = $٣س^٢$
أُتبع بانسحاب بالمتجه $\binom{١}{٠}$ يعطي
ص = $٣(س − ١)^٢$

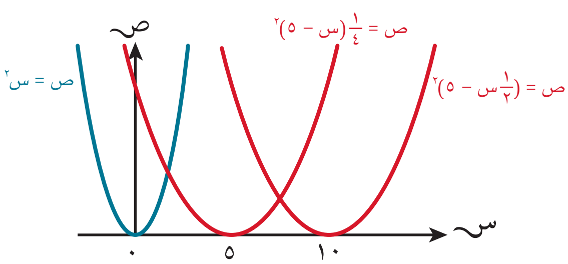
ب) انسحاب بالمتجه $\binom{١}{٠}$ يعطي ص = $(س − ١)^٢$
أُتبع بتمدد في اتجاه المحور الصادي معامله ٣
يعطي ص = $٣(س − ١)^٢$

٣) إذا علمت أن ص = $س^٢$

أ) تمدد في اتجاه محور السينات معامله ٢ يعطي
ص= $\left(\frac{١}{٢}س\right)^٢$ أو ص = $\frac{١}{٤}س^٢$ (حيث س قد استبدل بـ $\frac{١}{٢}$س).
أُتبع بانسحاب بالمتجه $\binom{٥}{٠}$ يعطي
ص = $\frac{١}{٤}(س − ٥)^٢$ (حيث س قد استبدل بـ س − ٥).

ب) انسحاب بالمتجه $\binom{٥}{٠}$ يعطي ص = $(س − ٥)^٢$ (حيث س قد استبدل بـ س − ٥) ثم أُتبع بـ:
تمدد في اتجاه محور السينات معامله ٢ يعطي
ص = $\left(\frac{١}{٢}س − ٥\right)^٢$ (حيث س قد استبدل بـ $\frac{١}{٢}$س).

ج)



٤) إذا علمت أن ص = $س^٢ + ١$

أ) انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{-٥}$ يعطي:
د(س) = $س^٢ + ١ − ٥$ أو د(س) = $س^٢ − ٤$
أُتبع بـ:
تمدد موازٍ لمحور الصادات معامله ٢ يعطي:
٢د(س) = $٢(س^٢ − ٤)$ أو ص = $٢س^٢ − ٨$

ب) إذا علمت أن ص = $س^٢ + ١$
انسحاب بالمتجه $\binom{٢}{٠}$ يعطي:

د(س) = (س − ٢)^{٢} + ١ (حيث س قد استبدل
بـ س − ٢).
أُتبع ب:
انعكاس حول محور السينات يعطي:
د(س) = −د(س) أو ص = −[(س − ٢)^{٢} + ١]
أو ص = −س^{٢} + ٤س − ٥

٥) أ ص = هـ(س)

- انعكاس حول المحور الصادي يعطي:
- ص = هـ(−س) ثم
- تمدد في اتجاه المحور الصادي معامله ٢
يعطي ص = ٢ هـ(−س)

ب ص = هـ(س)

- انسحاب بالمتجه $\binom{٢}{-٣}$ يعطي:
ص = د(س − ٢) − ٣ ثم
- انعكاس حول المحور السيني يعطي:
ص = −[د(س − ٢) − ٣] أو ص = ٣ − د(س − ٢)

٦) إذا علمت أن ص = د(س)

أ تمدد موازٍ لمحور الصادات معامله $\frac{١}{٢}$ يعطي
ص = $\frac{١}{٢}$د(س)
أُتبع بـ:
انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{٣}$ يعطي ص = $\frac{١}{٢}$د(س) + ٣

ب انعكاس حول المحور السيني يعطي
ص = −د(س) أتبع بـ:
انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{٢}$ يعطي
ص = −د(س) + ٢.

ج انسحاب بالمتجه $\binom{٦}{٠}$ يعطي ص = د(س − ٦)
أُتبع بـ:
تمدد موازٍ للمحور السيني معامله $\frac{١}{٢}$ يعطي
ص = د(٢س − ٦).

د تمدد موازٍ للمحور الصادي معامله ٢ يعطي
ص = ٢د(س)
أُتبع بـ:
انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{-٨}$ يعطي ص = ٢د(س) − ٨

٧) إذا علمت أن ص = س^{٣}

أ انسحاب بالمتجه $\binom{-٥}{٠}$ يعطي ص = (س + ٥)^{٣}
أُتبع بـ:
تمدد باتجاه المحور الصادي معامله $\frac{١}{٢}$ يعطي
ص = $\frac{١}{٢}$(س + ٥)^{٣}

ب إذا علمت أن ص = س^{٣}
انسحاب بالمتجه $\binom{-١}{٠}$ يعطي ص = (س + ١)^{٣}
أُتبع بـ:
تمدد باتجاه المحور الصادي معامله $\frac{١}{٢}$ يعطي
ص = $\frac{١}{٢}$(س + ١)^{٣}
أُتبع بـ:
انعكاس حول محور السينات يعطي
ص = −$\frac{١}{٢}$(س + ١)^{٣}
أُتبع بـ:
انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{-٢}$ يعطي
ص = −$\frac{١}{٢}$(س + ١)^{٣} − ٢

ج إذا علمت أن ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$
انسحاب بالمتجه $\binom{٣}{٠}$ يعطي ص = $\sqrt[٣]{\text{س − ٣}}$
أُتبع بـ:
تمدد موازٍ لمحور الصادت معامله ٢ يعطي
ص = ٢ $\sqrt[٣]{\text{س − ٣}}$
أُتبع بـ:
انعكاس حول محور السينات يعطي
ص = −٢ $\sqrt[٣]{\text{س − ٣}}$

١٢٤

أُتبع بـ:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٤\end{pmatrix}$ يعطي

$ص = -٢\sqrt[٣]{س - ٣} + ٤$

٨) إذا علمت أن $ص = \sqrt{س}$

أ انعكاس حول محور السينات يعطي

$د(س) = -\sqrt{س}$

أُتبع بـ:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٣\end{pmatrix}$ يعطي $د(س) = -\sqrt{س} + ٣$

أُتبع بـ:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}١\\٠\end{pmatrix}$ يعطي

$د(س) = -\sqrt{س - ١} + ٣$

أُتبع بـ:

تمدد موازٍ لمحور السينات معامله ٢ يعطي

$د(س) = -\sqrt{\frac{١}{٢}س - ١} + ٣$

ب إذا علمت أن $ص = \sqrt{س}$

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٣\end{pmatrix}$ يعطي $د(س) = \sqrt{س} + ٣$

أُتبع بـ:

تمدد موازٍ لمحور السينات معامله ٢ يعطي

$د(س) = -\sqrt{\frac{١}{٢}س} + ٣$

أُتبع بـ:

انعكاس حول محور السينات يعطي

$د(س) = -\sqrt{\frac{١}{٢}س} - ٣$

أُتبع بـ:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}١\\٠\end{pmatrix}$ يعطي

$د(س) = -\sqrt{\frac{١}{٢}(س - ١)} - ٣$

٩) إذا علمت أن $هـ(س) = س^٢$

أ انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٤\\٠\end{pmatrix}$ يعطي

$هـ(س) = (س + ٤)^٢$

أُتبع بـ:

انعكاس حول محور الصادات يعطي

$هـ(س) = (-س + ٤)^٢$

أُتبع بـ:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٢\end{pmatrix}$ يعطي

$هـ(س) = (-س + ٤)^٢ + ٢$

أُتبع بـ:

تمدد موازٍ لمحور الصادات معامله ٣ يعطي

$هـ(س) = ٣[(-س + ٤)^٢ + ٢] =$

$٣(٤ - س)^٢ + ٦$

ب إذا علمت أن $ص = س^٢$

تمدد موازٍ لمحور الصادات معامله ٣ يعطي

$هـ(س) = ٣س^٢$

أُتبع بـ:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٢\end{pmatrix}$ يعطي $هـ(س) = ٣س^٢ + ٢$

أُتبع بـ:

انعكاس حول محور الصادات يعطي:

$هـ(س) = ٣(-س)^٢ + ٢$ أو $هـ(س) = ٣س^٢ + ٢$

أُتبع بـ:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٤\\٠\end{pmatrix}$ يعطي $هـ(س) =$

$٣(س + ٤)^٢ + ٢$

١٠) إذا علمت أن $ص = \sqrt{س}$

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٢\\٠\end{pmatrix}$ يعطي $د(س) = \sqrt{س - ٢}$

أُتبع بـ:

انعكاس حول محور الصادات يعطي

$د(س) = \sqrt{-س - ٢}$

أو

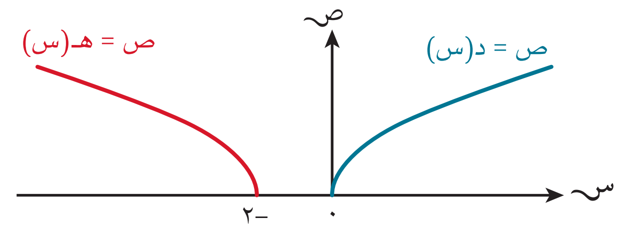
انعكاس حول محور الصادات يعطي

$د(س) = \sqrt{-س}$

أُتبع بـ:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٢\\٠\end{pmatrix}$ يعطي د(س) = $\sqrt{-(س + ٢)}$

د(س) = $\sqrt{-س - ٢}$



١١) إذا علمت أن ص = د(س) حولت منحنى ص = د(٢س + ١٠).

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-١٠\\٠\end{pmatrix}$ يعطي ص = د(س + ١٠)

أُتبع بـ:

تمدد موازٍ لمحور السينات معامله $\frac{١}{٢}$ يعطي

ص = د(٢س + ١٠)

أو

تمدد موازٍ لمحور السينات معامله $\frac{١}{٢}$ يعطي

ص = د(٢س)

أُتبع بـ:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٥\\٠\end{pmatrix}$ يعطي ص = د(٢(س + ٥)) أو

ص = د(٢س + ١٠)

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

١) أ د : س ↤ ٣س − ١

(هـ ∘ د)(س) = هـ(٣س − ١)

= ٥(٣س − ١) − $[(٣س - ١)^٢]$

= ١٥س − ٥ − $[٩س^٢ - ٦س + ١]$

= ١٥س − ٥ − $٩س^٢$ + ٦س − ١

= −٦ + ٢١ س − $٩س^٢$

= −٦ − ٩$\left(س^٢ - \frac{٧}{٣}س\right)$

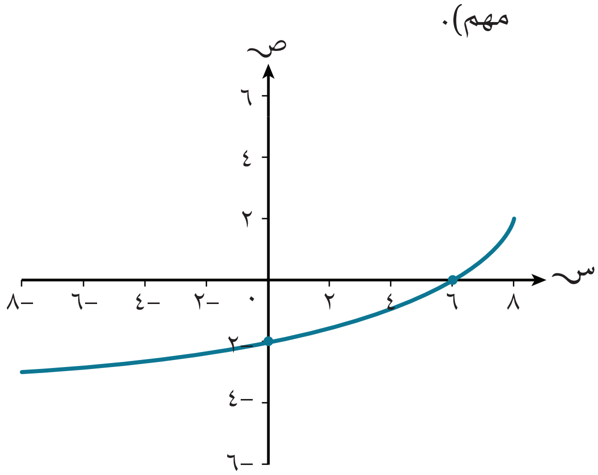
= −٦ − ٩$\left[\left(س - \frac{٧}{٦}\right)^٢ - \frac{٤٩}{٣٦}\right]$

= −٦ − ٩$\left(س - \frac{٧}{٦}\right)^٢ + \frac{٤٩}{٤}$

= $\frac{٢٥}{٤}$ − ٩$\left(س - \frac{٧}{٦}\right)^٢$

٢) أ تحويل التمثيل البياني ص = د(س) إلى ص = −د$\left(\frac{١}{٢}س\right)$ بتحويلين هندسيين :

- تحويل هندسي أفقي: تمدد موازي لمحور السينات معامله $\frac{١}{٢}$ ليعطي ص = د$\left(\frac{١}{٢}س\right)$.
- تحويل هندسي رأسي: انعكاس حول محور السينات ليعطي ص = −د$\left(\frac{١}{٢}س\right)$. (ترتيب إجراء التحويلين الهندسيين غير مهم).



ب ص = د(س) تحول إلى ص = د(٣ − س) بإجراء تحويلين هندسيين:

- انسحاب أفقي بالمتجه $\begin{pmatrix}-٣\\٠\end{pmatrix}$ ليعطي: ص = د(س + ٣)، يتبعه:

- انعكاس حول محور الصادات ليعطي:

ص = د (−س + ٣).

أو

- انعكاس حول محور الصادات ليعطي:

ص = د (−س) يتبعه:

- انسحاب بالمتجه $\binom{٣}{٠}$ ليعطي:

ص = د (−(س − ٣)) أو ص = د (٣ − س).

٣) أ ص = س^{٢} + ٦ س + ٨

منحنى د (س) = س^{٢} + ٦ س + ٨ هو تمثيل بياني تربيعي شكله U. أكمل المربع لتجد إحداثيات الرأس:

د (س) = س^{٢} + ٦ س + ٨

د (س) = (س + ٣)^{٢} − ٣^{٢} + ٨

د (س) = (س + ٣)^{٢} − ١

رأس المنحنى التربيعي (−٣ ، −١)

لتجد نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات عوّض عن س = ٠ فيكون:

د (س) = ٠^{٢} + ٦(٠) + ٨

د (س) = ٨

المقطع الصادي عند النقطة (٠ ، ٨)

لتجد المقطع من محور السينات عوّض عن د (س) = ٠ فيكون:

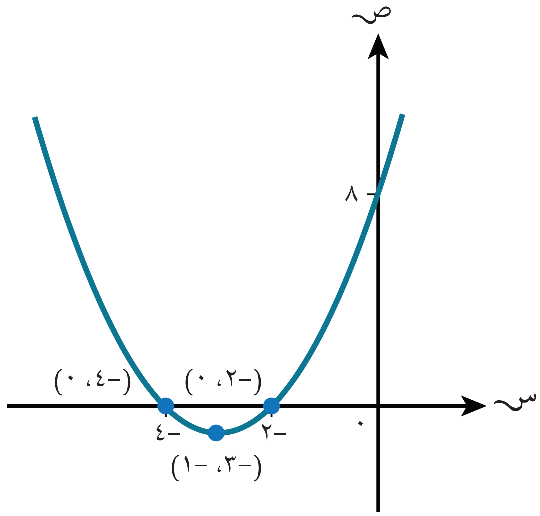
٠ = س^{٢} + ٦س + ٨

٠ = (س + ٤)(س + ٢)

وعليه فإن إما: س + ٤ = ٠ ومنها س = −٤

أو: س + ٢ = ٠ ومنها س = −٢

المقطع السيني عند النقطة (−٤ ، ٠) والنقطة (−٢ ، ٠).



حلّ بديل؛

بعد أن تجد المقطعين من محور السينات، يمكن أن تجد الإحداثي السيني لرأس المنحى التربيعي بأن تجد إحداثيات نقطة المنتصف لهما:

س = $\frac{-٤ - ٢}{٢}$، أو س = −٣

ثمّ عوّض عن س = −٣ في الدالة ص = د (س) لتجد الإحداثي الصادي لرأس المنحنى التربيعي.

د (س) = (−٣)^{٢} + ٦ (−٣) + ٨

د (س) = ٩ − ١٨ + ٨

د (س) = −١

فيكون رأس المنحنى التربيعي هو النقطة (−٣ ، −١).

ب المعطى ص = س^{٢} + ٦ س + ٨،

إجراء انسحاب بالمتجه $\binom{٢}{٠}$ يمثل بتعويض س − ٢ بدل كلّ س في الدالة:

ص = (س − ٢)^{٢} + ٦(س − ٢) + ٨

ص = س^{٢} − ٤س + ٤ + ٦س − ١٢ + ٨

ص = س^{٢} + ٢س

أجرِ تمددًا رأسيًّا معامله ٣ لتحصل على:

ص = ٣(س^{٢} + ٢س)

ص = ٣س^{٢} + ٦س

٤) المعطى: د : س ↤ س^{٢} − ٤، س ⩾ ٠

أ ص = س^{٢} − ٤

س = ص^{٢} − ٤

ص^{٢} = س + ٤

ص = $\sqrt{\text{س} + ٤}$ خذ الجذر الموجب حيث مجال الدالة العكسية هو س ⩾ −٤

د$^{-١}$(س) = $\sqrt{\text{س} + ٤}$

مجال الدالة د$^{-١}$(س) هو نفس مدى الدالة د (س).

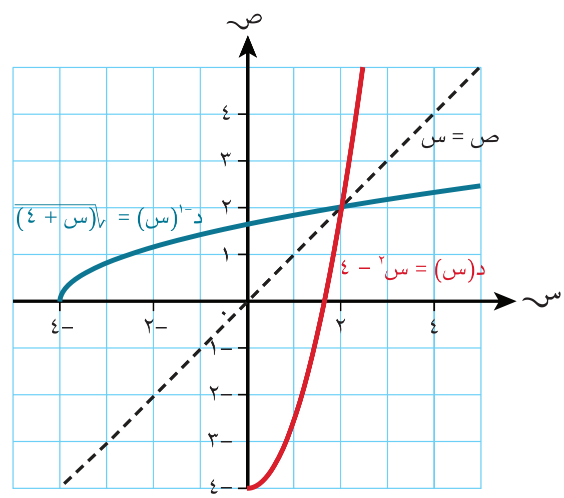
منحنى الدالة ص = س^{٢} − ٤ هو منحنى تربيعي شكله ∪ ورأسه عند النقطة (٠ ، −٤) وتمثل قيمة صغرى.

(وهي انسحاب للدالة ص = س^{٢} بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٤ \end{pmatrix}$).

مدى الدالة د (س) = س^{٢} − ٤ هو د (س) ⩾ −٤

مجال الدالة د$^{-١}$(س) هو س ⩾ −٤

ب



٥) **أ** −س^{٢} + ٦س − ٥ = −(س^{٢} − ٦س) − ٥

= −[(س − ٣)^{٢} − ٣^{٢}] − ٥

= −(س − ٣)^{٢} + ٣^{٢} − ٥

= −(س − ٣)^{٢} + ٤

ب منحنى الدالة د : س ↤ −س^{٢} + ٦س − ٥ أو د : س ↤ −(س − ٣)^{٢} + ٤ هو منحنى تربيعي شكله ∩ ورأسه عند النقطة (٣ ، ٤) و تمثل قيمة عظمى.

ومع ذلك ،عندما تكون الدالة واحد إلى واحد، س ⩾ ٣ فيكون أقل قيمة ممكنة لـ م هي ٣

ج د : س ↤ −(س − ٣)^{٢} + ٤

ص = −(س − ٣)^{٢}+ ٤

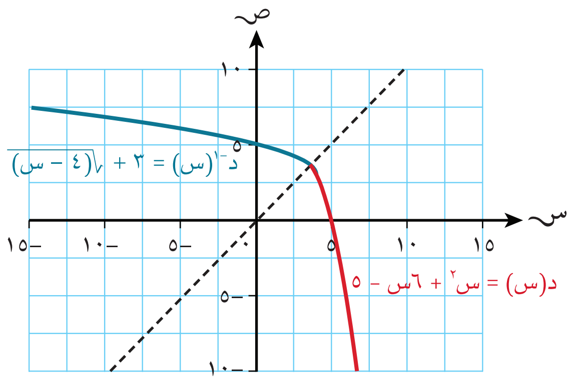
س = −(ص − ٣)^{٢} + ٤

(ص − ٣)^{٢} = ٤ − س

ص − ٣ = $\sqrt{٤ - \text{س}}$

ص = ٣ + $\sqrt{٤ - \text{س}}$

د$^{-١}$(س) = ٣ + $\sqrt{٤ - \text{س}}$



وحيث أن م = ٥ فإن س ⩾ ٥

تتحقق الدالة العكسية لأنها دالة واحد إلى واحد لكل س ⩾ ٣

من الشكل مدى د عندما س ⩾ ٥ هو د (س) ⩽ ٠

وعليه يكون، مجال د$^{-١}$(س) هو س ⩽ ٠

٦) **أ** د (س) = س^{٢} − ٤س + ك

د (س) = (س − ٢)^{٢} − ٢^{٢} + ك

د (س) = (س − ٢)^{٢} − ٤ + ك

ب منحنى د (س) = (س − ٢)^{٢} + ك − ٤ هو منحنى تربيعي شكله ∪. ورأسه عند النقطة (٢، ك − ٤) يمثل قيمة صغرى.

القيمة الصغرى للدالة د (س) هي ك − ٤ (عندما س = ٢)

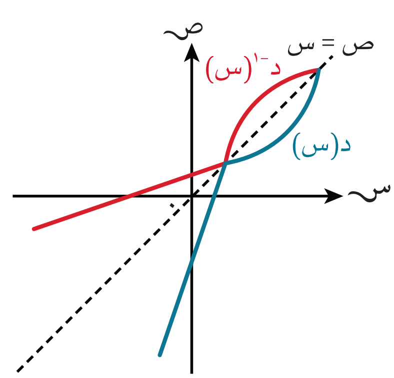
مدى د(س) هو د(س) ⩾ ك − ٤

ج) تكون الدالة واحد إلى واحد، عندما س $\geqslant$ ٢
وأقل قيمة ممكنة لـ ل هي ٢

د) د(س) = س^{٢} − ٤س + ك أو
ص = (س − ٢)^{٢} + ك − ٤
س = (ص − ٢)^{٢} + ك − ٤
(ص − ٢)^{٢} = س + ٤ − ك
ص − ٢ = $\pm\sqrt{\text{س + ٤ − ك}}$
ص − ٢ = $\sqrt{\text{س + ٤ − ك}}$ (نأخذ الجذر الموجب
حيث مجال الدالة العكسية س $\geqslant$ ك −٤)
ص = ٢ + $\sqrt{\text{س + ٤ − ك}}$
د$^{-١}$(س) = ٢ + $\sqrt{\text{س + ٤ − ك}}$
الدالة العكسية موجودة (محققة) لأنها دالة
واحد إلى واحد لكل س $\geqslant$ ٢
مجال د$^{-١}$(س) هو نفس مدى د(س).
فيكون مجال د$^{-١}$(س) هو س $\geqslant$ ك − ٤

٧) أ) د(س) = ٣س − ٢ لكل −١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ١
عوّض س = −١ في الدالة د(س) = ٣ س − ٢
لتحصل على:
د(−١) = ٣(−١) − ٢ أو −٥
عوّض عن س = ٤ في الدالة د(س) = $\frac{٤}{\text{٥ − س}}$
لتحصل على:
د(٤) = $\frac{٤}{\text{٥ − ٤}}$ أو ٤
مدى د(س) هو −٥ $\leqslant$ د(س) $\leqslant$ ٤

ب)



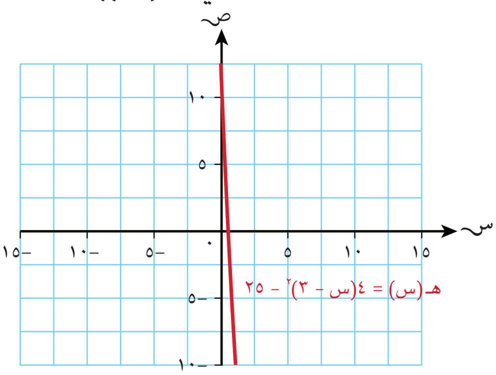
ج) د(س) = ٣ س − ٢ لكل −١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ١
ص = ٣ س − ٢
س = ٣ ص − ٢
٣ص = س + ٢
ص = $\frac{١}{٣}$(س + ٢)
د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٣}$(س + ٢)
د(س) = $\frac{٤}{\text{٥ − س}}$ لكل ١ < س $\leqslant$ ٤
ص = $\frac{٤}{\text{٥ − س}}$
س = $\frac{٤}{\text{٥ − ص}}$
س (٥ − ص) = ٤
٥ − ص = $\frac{٤}{\text{س}}$
ص = ٥ − $\frac{٤}{\text{س}}$
د$^{-١}$(س) =٥ − $\frac{٤}{\text{س}}$

الحل:
د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٣}$(س + ٢) لكل −٥ $\leqslant$ س $\leqslant$ ١
د$^{-١}$(س) =٥ − $\frac{٤}{\text{س}}$ لكل ١ < س $\leqslant$ ٤

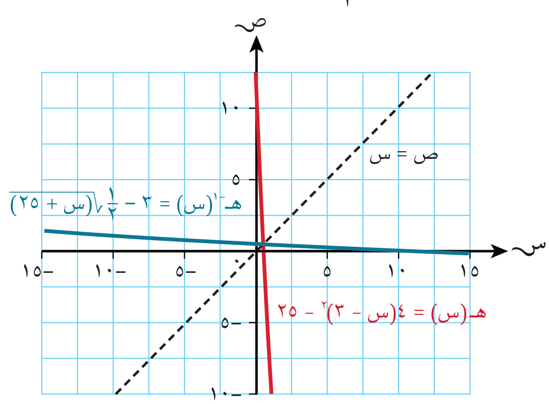
٨) أ) د(س) = ٤ س^{٢} − ٢٤س + ١١، لكل س ∈ ع
= ٤ (س^{٢} − ٦ س) + ١١
= ٤[(س − ٣)^{٢} − ٣^{٢}] + ١١
= ٤(س − ٣)^{٢} − ٣٦ + ١١
د(س) = ٤(س − ٣)^{٢} − ٢٥
منحنى الدالة د(س) = ٤ (س − ٣)^{٢} − ٢٥
منحنى تربيعي شكله U رأسه عند النقطة
(٣، −٢٥) وهي نقطة قيمة صغرى.

ب) هـ(س) = ٤س^{٢} − ٢٤س + ١١، لكل س $\leqslant$ ١
هـ(س) = (س − ٣)^{٢} − ٢٥
هـ(١) = ٤(١ − ٣)^{٢} − ٢٥
هـ(١) = −٩

من منحنى هـ(س) = ٤س^{٢} − ٢٤ س + ١١، لكل س ⩾ ١ يكون المدى هـ(س) − ٩
(يمكن التوصل لهذه الإجابة من تعويض قيم أخرى لـ س أقل من ١ في هـ(س)).



ج هـ(س) = ٤(س − ٣)^{٢} − ٢٥
ص = ٤(س − ٣)^{٢} − ٢٥
س = ٤(ص − ٣)^{٢} − ٢٥
٤(ص − ٣)^{٢} = س + ٢٥
(ص − ٣)^{٢} = $\frac{١}{٤}$(س + ٢٥)
ص − ٣ = ±$\frac{١}{٢}\sqrt{س + ٢٥}$
ص = ٣ −$\frac{١}{٢}\sqrt{س + ٢٥}$ خذ الجذر السالب (انظر الشكل أدناه)
هـ$^{-١}$(س) = ٣ − $\frac{١}{٢}\sqrt{س + ٢٥}$



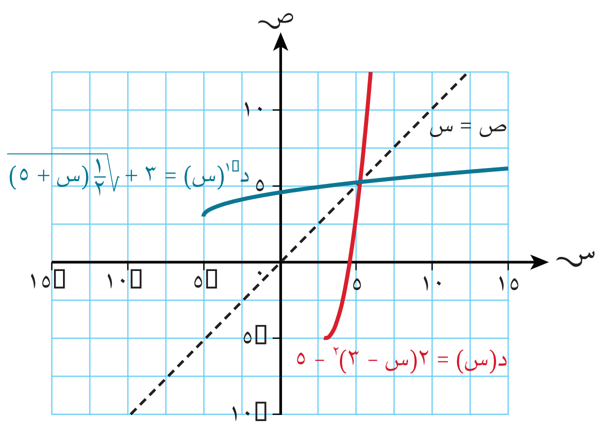
مجال هـ$^{-١}$ هو س ⩾ −٩

٩) أ د(س) = ٢س^{٢} − ١٢س + ١٣، لكل س ⩾ ك.
= ٢(س^{٢} − ٦س) + ١٣
= ٢[(س − ٣)^{٢} − ٣^{٢}] + ١٣
= ٢(س − ٣)^{٢} − ١٨ + ١٣
= ٢(س − ٣)^{٢} − ٥

ب منحنى الدالة د (س) = ٢(س − ٣)^{٢} − ٥ منحنى تربيعي شكله U ورأسه عند (٣، − ٥) وهي نقطة قيمة صغرى.
ومع ذلك للدالة واحد إلى واحد حيث س ⩾ ٣، تكون أصغر قيمة ممكنة لـ ك هي ٣

ج س ⩾ ٧
د(س) ⩾ ٢(٧ − ٣)^{٢} − ٥
و يكون مدى د(س) هو د(س) ⩾ ٢٧

د د(س) = ٢(س − ٣)^{٢} − ٥
ص = ٢(س − ٣)^{٢} − ٥
س = ٢(ص − ٣)^{٢} − ٥
٢(ص − ٣)^{٢} = س + ٥
(ص − ٣)^{٢} = $\frac{١}{٢}$(س + ٥)
ص − ٣ = ±$\sqrt{\frac{١}{٢}(س + ٢٥)}$
خذ الجذر الموجب (انظر الشكل أدناه).



د$^{-١}$(س) = ٣ + $\sqrt{\frac{١}{٢}(س + ٢٥)}$
مجال الدالة العكسية نفس مدى الدالة.
مجال د$^{-١}$(س) هو س ⩾ ٢٧

١٠) أ $س^{٢} - ٢س - ١٥$

$= (س - ١)^{٢} - ١^{٢} - ١٥$

$= (س - ١)^{٢} - ١٦$

ب د: $س \mapsto س^{٢} - ٢س - ١٥$

د: $س \mapsto (س - ١)^{٢} - ١٦$

منحنى الدالة د: $س \mapsto (س - ١)^{٢} - ١٦$ هو

منحنى تربيعي شكله U. رأسه عند (١ ، –١٦)

وهي نقطة قيمة عظمى.

لذا، إذا كان مدى الدالة د هو $جـ \leqslant د(س) \leqslant د$،

فإن $جـ = -١٦$

ج إذا كان جـ = ٩، د = ٦٥ عوّض عن جـ = ٩ في

د(س) لتحصل على:

$(ل - ١)^{٢} - ١٦ = ٩$

$(ل - ١)^{٢} = ٢٥$

$ل - ١ = \pm٥$

ل = –٤ أو ل = ٦، لكن ل قيمة موجبة لذا ل = ٦

عوّض د = ٦٥ في الدالة د(س) لتحصل على:

$(ك - ١)^{٢} - ١٦ = ٦٥$

$(ك - ١)^{٢} = ٨١$

$ك - ١ = \pm٩$

ك = –٨ أو ١٠، لكن ك موجبة لذا ك = ١٠

مجال الدالة هو $٦ \leqslant س \leqslant ١٠$

الحلّ هو ل = ٦، ك = ١٠

د د: $س \mapsto (س - ١)^{٢} - ١٦$

$ص = (س - ١)^{٢} - ١٦$

$س = (ص - ١)^{٢} - ١٦$

$(ص - ١)^{٢} = س + ١٦$

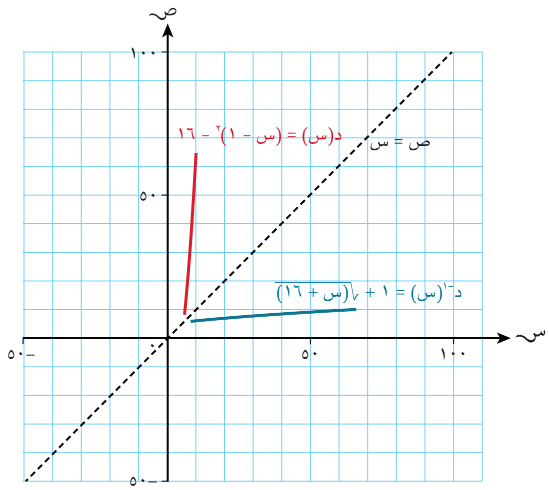
$ص - ١ = \pm\sqrt{س + ١٦}$

$ص = ١ \pm \sqrt{س + ١٦}$

$د^{-١}(س) = ١ \pm \sqrt{س + ١٦}$

خذ الجذر الموجب (انظر الشكل).

$د^{-١}(س) = ١ \pm \sqrt{س + ١٦}$

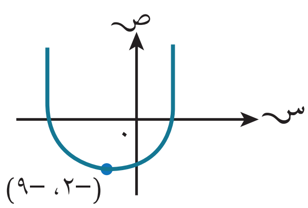


١١) $د(س) = س^{٢} + ٤س - ٥$

أ $س^{٢} + ٤س - ٥ = (س + ٢)^{٢} - ٤ - ٥ =$

$(س + ٢)^{٢} - ٩$

ب $د(س) \geqslant -٩$



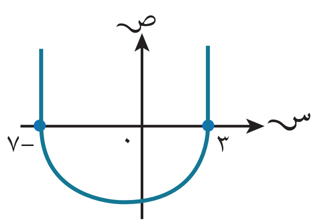
ج $س^{٢} + ٤س - ٥ < ١٦$

$س^{٢} + ٤س - ٥ - ١٦ < ٠$

$س^{٢} + ٤س - ٢١ < ٠$

$(س - ٣)(س + ٧) < ٠$

س = ٣ أو س = –٧



$-٧ < س < ٣$

د (هـ ∘ د)(س) = هـ(س^{٢} + ٤س − ٥)

٠ = ٢(س^{٢} + ٤س − ٥) + ك

٠ = ٢س^{٢} + ٨س − ١٠ + ك

ب^{٢} − ٤أجـ ≥ ٠

٨^{٢} − ٤ × ٢ × (−١٠ + ك) ≥ ٠

٦٤ + ٨٠ − ٨ك ≥ ٠

١٤٤ − ٨ك ≥ ٠

$\frac{-٨ك}{-٨} \le \frac{-١٤٤}{-٨}$

ك ≤ ١٨

١٢) د: س ↦ ٢س + ١ لكل س ∈ ح

هـ: س ↦ س^{٢} − ٢ لكل س ∈ ح

أ (د ∘ هـ)(س) = د(س^{٢} − ٢)

= ٢(س^{٢} − ٢) + ١

= ٢س^{٢} − ٣

(هـ ∘ د)(س) = هـ(٢س + ١)

= (٢س + ١)^{٢} − ٢

= ٤س^{٢} + ٤س + ١ − ٢

= ٤س^{٢} + ٤س − ١

ب (د ∘ هـ)(أ) = (هـ ∘ د)(أ)

٢أ^{٢} − ٣ = ٤أ^{٢} + ٤أ − ١

٢أ^{٢} + ٤أ + ٢ = ٠

أ^{٢} + ٢أ + ١ = ٠

(أ + ١)^{٢} = ٠

أ + ١ = ٠

أ = −١

ج هـ(ب) = ب

ب^{٢} − ٢ = ب

ب^{٢} − ب − ٢ = ٠

(ب − ٢)(ب + ١) = ٠

ب = ٢ أو ب = −١ (يرفض لأن ب ≠ أ)

ب = ٢

د أوجد أولًا د$^{-١}$(س):

ص = ٢س + ١

س = ٢ص + ١

٢ص = س − ١

ص = $\frac{١}{٢}$(س − ١)

فيكون، د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٢}$(س − ١)

وعليه فإن، (د$^{-١}$هـ)(س) = د$^{-١}$(س^{٢} − ٢)

= $\frac{١}{٢}$(س^{٢} − ٢ − ١)

= $\frac{١}{٢}$(س^{٢} − ٣)

هـ ع: س ↦ س^{٢} − ٢ لكل س ≤ ٠

ص = س^{٢} − ٢

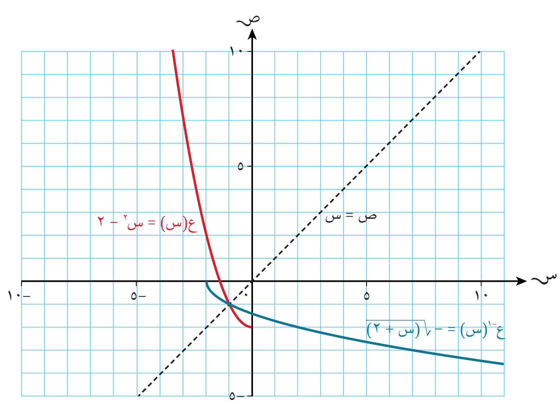
س = ص^{٢} − ٢

ص^{٢} = س + ٢

ص = ±$\sqrt{س + ٢}$

خذ الجذر السالب لأن مجال ح$^{-١}$(س) يساوي مدى ح(س) (انظر الشكل أدناه)

إذن ح$^{-١}$(س) = −$\sqrt{س + ٢}$



١٣) أ د: س ↦ ٢س^{٢} − ٨س + ١٠ لكل ٠ ≤ س ≤ ٢

د(س) = ٢س^{٢} − ٨س + ١٠

= ٢(س^{٢} − ٤س) + ١٠

= ٢[(س − ٢)^{٢} − ٢^{٢}] + ١٠

= ٢(س − ٢)^{٢} − ٨ + ١٠

= ٢(س − ٢)^{٢} + ٢

ب منحنى الدالة د: س ↤ ٢(س − ٢)^{٢} + ٢ منحنى تربيعي شكله U رأس القطع عند (٢، ٢) وهي قيمة صغرى.

مدى الدالة د هو د(س) ⩾ ٢

ومع ذلك هناك قيد لأن مجال د(س) هو
٠ ⩽ س ⩽ ٢

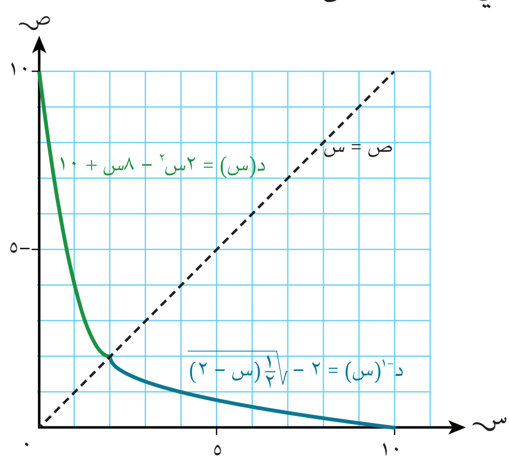
عوّض قيم س في مدى د(س) لتحصل على مدى الدالة د(س).

مدى د(س) هو ٢ ⩽ د(س) ⩽ ١٠

ج مجال د$^{-١}$(س) نفس مدى د(س).

أي أنه: ٢ ⩽ س ⩽ ١٠

د



سمات المنحنى هي:

د(س): نصف منحنى تربيعي بين النقطة (٠، ١٠) والنقطة (٢، ٢).

هـ(س): مستقيم يمر بنقطة الأصل ويشكل زاوية قياسها ٤٥° مع محور السينات.

منحنى د$^{-١}$(س): انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم هـ(س).

ملاحظة: ليس ضروريًّا أن تجد د$^{-١}$(س) لتكمل الرسم. يمكنك أن تستخدم حقيقة أن منحنى د$^{-١}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) في المستقيم ص = س

من المهم أن تعرف الفرق بين رسم المنحنى وتعيينه. رسم المنحنى يُظهرالأجزاء المهمة منه. ليس مهماً تحديد مقياس رسم دقيق عند رسم المنحنى لكن من المهم أن تُسمى الأجزاء بشكل صحيح. من الضروري عند رسم المنحنى أيضا تحديد أي مستقيم أو نقطة بدقة نسبة لبعضها ونسبة للمحورين.

تعيين المنحنى يعني أن ترسم المحورين وتحدد إحداثيات النقاط بدقة وتمثلها على ورقة رسم بياني.

هـ د(س) = ٢(س − ٢)^{٢} + ٢

ص = ٢(س − ٢)^{٢} + ٢

س = ٢(ص − ٢)^{٢} + ٢

٢(ص − ٢)^{٢} = س − ٢

(ص − ٢)^{٢} = $\frac{١}{٢}$(س − ٢)

ص − ٢ = ± $\sqrt{\frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)}$ خذ الجذر السالب (انظر الشكل)

ص = ٢ − $\sqrt{\frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)}$

د$^{-١}$(س) = ٢ − $\sqrt{\frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)}$

١٤) أ د(س) = ٢س^{٢} + ٤س − ٨

= ٢(س^{٢} + ٢س) − ٨

= ٢[(س + ١)^{٢} − ١^{٢}] − ٨

= ٢(س + ١)^{٢} − ١٠

ب منحنى د(س) = ٢(س + ١)^{٢} − ١٠

المنحنى التربيعي على النحو U

نعرف ذلك لأن معامل س^{٢} في د(س) = ٢س^{٢} + ٤س − ٨ موجب.

إحداثيات الرأس (−١، −١٠)

في الدالة واحد إلى واحد توجد مخرجة واحدة لكل مدخلة والعكس صحيح.

لتكون الدالة واحدًا إلى واحد فإن قيم ك $\geqslant$ −١

أقل قيمة ك = −١

١٥) أ د(س) = س^{٢} − ٢س + ٤

س^{٢} − ٢س + ٤ $\leqslant$ ٧

س^{٢} − ٢س − ٣ $\leqslant$ ٠

(س − ٣)(س + ١) $\leqslant$ ٠

منحنى ص = (س − ٣)(س + ١) تربيعي على النحو ∪

يتقاطع مع المحور السيني عند س = ٣، س = −١

نريد س^{٢} − ٢س + ٤ $\leqslant$ ٧ وهو جزء المنحنى من المحور السيني وفوقه.

وعليه، س $\leqslant$ ٣ أو س $\geqslant$ −١

ب س^{٢} − ٢س + ٤ = (س − ١)^{٢} − ١^{٢} + ٤

= (س − ١)^{٢} + ٣

ج منحنى د(س) = (س − ١)^{٢} + ٣ تربيعي على النحو ∪

رأس المنحنى (أدنى نقطة) (١، ٣)

المدى هو د(س) $\leqslant$ ٣

الوحدة الثالثة
المتتاليات والمتسلسلات Sequences and series

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٣-١	المتتاليات الحسابية	٣	٣-١ يحدّد المتتاليات والمتسلسلات الحسابية، ويتعرف على الفرق بينهما. ٣-٢ يجد الحدّ الأول والأساس في المتتالية الحسابية. ٣-٣ يجد الحدّ النوني ومجموع الحدود حتى الحدّ النوني في المتتالية الحسابية. ٣-٤ يستخدم صيغ الحد النوني ومجموع الحدود من الحد الأول حتى الحد النوني ليحلّ مسائل تتضمّن متتاليات حسابية.	الحدود المتتالية الحسابية الأساس (الفرق المشترك) المتسلسلة
٣-٢	المتتاليات الهندسية	٣	٣-٥ يحدّد المتتاليات والمتسلسلات الهندسية، ويتعرف على الفرق بينهما. ٣-٦ يجد الحدّ الأول والأساس في المتتالية الهندسية. ٣-٧ يجد الحدّ النوني ومجموع الحدود حتى الحدّ النوني في المتتالية الهندسية. ٣-٨ يستخدم صيغ الحد النوني ومجموع الحدود من الحد الأول حتى الحد النوني ليحلّ مسائل تتضمّن متتاليات هندسية.	المتتالية الهندسية الأساس (النسبة المشتركة) المتسلسلة
٣-٣	المتسلسلات الهندسية غير المنتهية	٢	٣-٩ يتذكر ويستخدم شرط التقارب في المتتالية الهندسية ليحدّد المتسلسلة المتقاربة. ٣-١٠ يستخدم صيغة المجموع غير المنتهي في متتالية هندسية متقاربة.	المتسلسلة المتقاربة
٣-٤ (PPT)	المزيد من المتتاليات الحسابية والهندسية	٢	٣-١١ يحلّ المسائل التي تتضمّن متتاليات حسابية وهندسية.	
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة	١		

٣-١ المتتاليات الحسابية

ملاحظات للمعلمين

يستنتج الطلبة صيغة الحدّ العام في المتتالية الحسابية، وصيغة مجموع أول ن حدًّا فيها. وسيستخدمون هذه الصيغ في حلّ المسائل.

أفكار للتعليم

يمكن للطلبة الموزّعين ضمن ثنائيات أو في مجموعات صغيرة استخدام Change one thing (Underground Mathematics). حيث تساعدهم هذه المهارة على التفكير في بنية المتتالية الحسابية وخصائصها، ثم ربطها مع معرفتهم بالعلاقات الخطية وتمثيلاتها البيانية، وتتضمن توسعة محتملة للمتتالية الهندسية التي يمكن أن تفيد لاحقًا.

يُعدّ النشاط الوارد في استكشف ١ مقدمة جيدة لمجموع حدود المتتالية الحسابية. يمكن توزيع الطلبة ضمن ثنائيات لاستخدام Proof sorter: sum of an AP من مصدر (NRICH) لترتيب خطوات برهان صيغة المجموع، إما تفاعليًا على الحاسوب، أو من خلال التدرب على ترتيب البطاقات، مبرّرين تفسيراتهم.

الأسئلة (١–١٠)، والسؤال ١٢ من تمارين ٣-١ متدرجة الصعوبة تتضمن استخراج معلومات من السؤال، واختيار الصيغ الملائمة، والأسئلة (١٣–١٥)، والسؤالان ١٦، ١٧ أسئلة تحلّ جبريًا، والسؤال ١١ الذي يتعلق بمسائل حياتية. والأسئلة (١٨–٢٠) أكثر تحديًا بحيث تتطلب استنتاج براهين.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

يقدم هذا النشاط طريقة جاوس GAUSS لإيجاد مجموع سلسلة من الأعداد الصحيحة المتتالية قبل تطبيق الطريقة على متسلسلات حسابية أخرى، حيث كل الحدود هي مضاعفات متتالية لأعداد صحيحة. وإذا لم تستطع تقديم الطريقة، يمكنك أن تطلب إلى الطلبة إيجاد طريقة سريعة لجمع أعداد صحيحة متتالية، أعطهم وقتًا ليجربوا مع عدد قليل من الأعداد، ويتبادلوا ما وجدوه فيما بينهم، للتوصل إلى تعميم المعلومات على الجميع.

١) ٥٠٥٠

٢) أ ٦٢٧٥٠ ب ٤١٠٠ ج ١٧٨٢

٣) $\frac{ن(ن + ١)}{٢}$

دعم الطلبة

في البداية قد يجد بعض الطلبة صعوبة في التفريق بين الحدّ العام ومجموع أول ن حدًّا. قد يحتاج الطلبة إلى التدرب على استخلاص المعلومات من السؤال، واستخدام الصيغة المناسبة للحلّ.

تحدّي الطلبة

الطلبة الذين يجدون هذا الموضوع مباشرًا يمكنهم أن يجربوا الأسئلة (١٨ –٢٠) من تمارين ٣-١ حيث تتطلب براهين. وقد يستمتعون بالعمل في Prime sequences من (NRICH).

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٣-١

٢-٣ المتتاليات الهندسية

ملاحظات للمعلمين

كما في الدرس السابق مع المتتاليات الحسابية، سيستنتج الطلبة صيغة الحدّ العام في متتالية هندسيّة ويتعاملون مع صيغة مجموع ن حدًّا.

أفكار للتعليم

استكشف الطلبة سابقًا من المصدر Change one thing (Underground Mathematics) بنية المتتاليات الحسابية وخصائصها. وعليه، يمكن توسعة ذلك لتشمل المتتاليات الهندسيّة، ويمكن أن يستخدموها لإبراز الفرق بين المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسيّة استعدادًا للدرس الأخير في هذه الوحدة الذي يتضمن مسائل تضم المتتاليتَين.

لاستنتاج صيغة مجموع حدود متتالية هندسيّة، فإن استكشف ٢ هي مقدمة جيدة للوصول إلى الصيغة. كما يمكن أن يستخدم الطلبة Proof sorter: geometric series من (NRICH) ضمن ثنائيات لترتيب خطوات برهان صيغة المجموع إمّا تفاعليًا على الحاسوب أو من خلال التدرّب على ترتيب البطاقات، مبرّرين تفسيراتهم.

تتضمن الأسئلة (١–٩) من تمارين ٣-٢ تطبيق الصيغة لحل أسئلة متدرجة في الصعوبة. يتضمن السؤالان ١٠، ١٣ أسئلة تطبيقية تشتمل على متتاليات هندسيّة في السياق، السؤالان ١١ و١٢ يحلان جبريًا، والأسئلة (١٤–١٦) أسئلة تحدٍّ تحتاج إلى براهين.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

يعمل الطلبة بدون آلاتهم الحاسبة للتوصل إلى صيغة مجموع ١٠ حدود من متتالية هندسيّة كما في السؤال ١. يمكن أن ينجزوا العمل ضمن ثنائيات أو في مجموعات صغيرة ويناقشوا ما وجدوه. وكتوسعة للنشاط، في السؤال ٢ يمكنهم أن يعمّموا المعلومات ليستقرئوا صيغة مجموع ن حدًّا بدون النظر إلى الصيغة الواردة في كتاب الطالب.

١) أ $٣جـ_{١٠} = ٣ + ٣^{٢} + ٣^{٣} + ٣^{٤} + \dots + ٣^{٨} + ٣^{٩} + ٣^{١٠}$

ب بطرح ($جـ_{١٠}$) من ($٣ جـ_{١٠}$) نتوصل إلى: $٢جـ_{١٠} = ٣^{١٠} - ١$

$جـ_{١٠} = \frac{٣^{١٠} - ١}{٢}$

٢) أ $جـ_{١٠} = \frac{ر^{١٠} - ١}{ر - ١}$ ب $جـ_{١٠} = \frac{أ(ر^{١٠} - ١)}{ر - ١}$ ج $جـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

دعم الطلبة

في البداية قد يجد بعض الطلبة صعوبة في التفريق بين الحدّ العام ومجموع أول ن حدًّا.

ويجد بعضهم صعوبة في المعالجة الجبرية، عند إيجاد قيم ن المجهولة في صيغة مجموع ن حدًّا.

تحدّي الطلبة

قد يكون بعض الطلبة قادرين على برهنة صيغة مجموع ن حدًّا الأولى في متتالية هندسيّة مستخدمين منطقًا مشابهًا لنشاط استكشف ٢، والطلبة الذين يحتاجون إلى تحدٍّ يمكنهم أن يجربوا حلّ الأسئلة (١٤–١٦) من تمارين ٣-٢ حيث إنها تتطلب براهين رياضية.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٣-٢

مصادر أخرى مفيدة

المصدر Summing geometric progressions، من (NRICH) يمكنك استخدامه بديلًا لنشاط استكشف ٢، حيث يحتوي على فيديو يساعد الطلبة على التفكير في مجموع حدود متتالية هندسية وعلى استنتاج الصيغة الرياضية.

٣-٣ المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

ملاحظات للمعلمين

في هذا الدرس، يلاحظ الطلبة سلوك المتسلسلات الهندسية عندما يزداد العدد ن، هل تتقارب أم تتباعد؟ يمكن إيجاد مجموع المتتالية الهندسية غير المنتهية عندما تكون متقاربة.

أفكار للتعليم

عند البدء بنشاط استكشف ٣ يختبر الطلبة متسلسلات هندسيّة مختلفة ليتوصلوا إلى شرط كون المتسلسلة متقاربة أم لا. سيقود هذا الأمر إلى استنتاج صيغة مجموع المتتالية الهندسية غير المنتهية اعتمادًا على ما سيحدث لمجموع ن حدًا عندما تصبح ن كبيرة جدًا.

المصدر Can you find ... series edition من (Underground Mathematics) يمكن أن يناقشه الطلبة بالعمل ضمن ثنائيات، لإبراز الفرق بين المتتاليات المتقاربة والمتسلسلات المتقاربة.

تقدم الأسئلة (١-٤) من تمارين ٣-٣ أسئلة مباشرة لاستخدام صيغة مجموع المتتالية الهندسية غير المتقاربة، يتطلب السؤالان ٦، ٧ الحل بطريقة غير مباشرة باستخدام مجموع المتتالية الهندسية غير المتقاربة. والأسئلة (٨-١٥) أكثر تحدٍ، إذ تستخدم الصيغ المختلفة للمتتاليات الهندسيّة. السؤال ٥ يعرض الكسر الدوري كمثال على المتسلسلاتً الهندسية غير المنتهية.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٣

يستخدم هذا النشاط الجداول لاختبار سلوك المتسلسلة الهندسية غير المنتهية فيما إذا كانت متقاربة أم لا. فرسم هذه الدوالّ باستخدام برمجيات الرسم يثير الاهتمام، وعليه، يمكن أن يتصور الطلبة أنواع المتتاليات المختلفة.

يُطلب إلى الطلبة إيجاد شرط المتسلسلة المتقاربة، وتشجيعهم على التخمين كثنائيات أو في مجموعات صغيرة ثم يطلب إليهم اختبار هذا التخمين بابتكار متسلسلات خاصة بهم ويفكرون فيما إذا كانت متقاربة أم لا.

١) **أ** متباعدة **ب** متقاربة، ٢,٥ **ج** متقاربة ، ١٨ **د** متباعدة

٢) فيما يلي مثال على متسلسلة هندسية متقاربة. حدها الأول ١ وأساسها ٠,٤

الحد ($ح_ن$)	المجموع ($ج_ن$)
١	١
٠,٤	١,٤
٠,١٦	١,٥٦
٠,٠٦٤	١,٦٢٤
٠,٠٢٥٦	١,٦٤٩٦
٠,٠١٠٢٤	١,٦٥٩٨٤
٠,٠٠٤٠٩٦	١,٦٦٣٩٣٦
٠,٠٠١٦٣٨٤	١,٦٦٥٥٧٤٤
٠,٠٠٠٦٥٥٣٦	١,٦٦٦٢٢٩٧٦
٠,٠٠٠٢٦٢١٤٤	١,٦٦٦٤٩١٩٠٤
٠,٠٠٠١٠٤٨٥٨	١,٦٦٦٥٩٦٧٦٢
$٤,١٩٤٣ \times ١٠^{-٥}$	١,٦٦٦٦٣٨٧٠٥
$١,٦٧٧٧٢ \times ١٠^{-٥}$	١,٦٦٦٦٥٥٤٨٢

يبدو وكأن هذه المتسلسلة متقاربة نحو $\frac{٥}{٣}$

إذا استخدمنا الصيغة (جـ$_\infty$) = $\frac{أ}{١ - ر}$

جـ$_\infty$ = $\frac{١}{٠,٦}$ = $\frac{٥}{٣}$

هذا مثال آخر على متسلسلة هندسية متقاربة. حدها الأول ١ وأساسها –٠,٢٥

الحد (ح$_ن$)	المجموع (جـ$_ن$)
١	١
–٠,٢٥	٠,٧٥
٠,٠٦٢٥	٠,٨١٢٥
–٠,٠١٥٦٢٥	٠,٧٩٦٨٧٥
٠,٠٠٣٩٠٦٢٥	٠,٨٠٠٧٨١٢٥
–٠,٠٠٠٩٧٦٥٦٣	٠,٧٩٩٨٠٤٦٨٨
٠,٠٠٠٢٤٤١٤١	٠,٨٠٠٠٤٨٨٢٨
–٦,١٠٣٥٢ × ١٠$^{-٥}$	٠,٧٩٩٩٨٧٧٩٣
١,٥٢٥٨٨ × ١٠$^{-٥}$	٠,٨٠٠٠٠٣٠٥٢
–٣,٨١٤٧ × ١٠$^{-٦}$	٠,٧٩٩٩٩٩٢٣٧
٩,٥٣٦٧٤ × ١٠$^{-٧}$	٠,٨٠٠٠٠٠١٩١
–٢,٣٨٤١٩ × ١٠$^{-٧}$	٠,٧٩٩٩٩٩٩٥٢
٥,٩٦٠٤٦ × ١٠$^{-٨}$	٠,٨٠٠٠٠٠٠١٢

يبدو وكأن هذه المتسلسلة متقاربة نحو ٠,٨

إذا استخدمنا الصيغة جـ$_\infty$ = $\frac{أ}{١ - ر}$

جـ$_\infty$ = $\frac{١}{١,٢٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

ويوضح المثال الآتي متسلسلة هندسية غير متقاربة حدها الأول ١ وأساسها ١,١

الحد (ح$_ن$)	المجموع (جـ$_ن$)
١	١
١,٥	٢,٥
٢,٢٥	٤,٧٥
٣,٣٧٥	٨,١٢٥
٥,٠٦٢٥	١٣,١٨٧٥
٧,٥٩٣٧٥	٢٠,٧٨١٢٥
١١,٣٩٠٦٢٥	٣٢,١٧١٨٧٥
١٧,٠٨٥٩٣٧٥	٤٩,٢٥٧٨١٢٥
٢٥,٦٢٨٩٠٦٢٥	٧٤,٨٨٦٧١٨٧٥
٣٨,٤٤٣٣٥٩٣٨	١١٣,٣٣٠٠٧٨١
٥٧,٦٦٥٠٣٩٠٦	١٧٠,٩٩٥١١٧٢
٨٦,٤٩٧٥٥٨٥٩	٢٥٧,٤٩٢٦٧٥٨
١٢٩,٧٤٦٣٣٧٩	٣٨٧,٢٣٩٠١٣٧

هذه متسلسلة غير متقاربة

٣) –١ < ر < ١

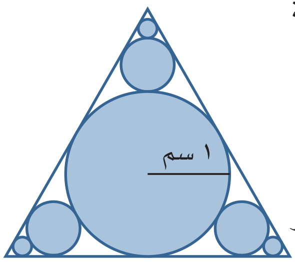
دعم الطلبة

لدى بعض الطلبة صعوبة في مفهوم اللانهاية. من المفيد اختبار المتتالية الهندسية عدديّاً، باعتبار ما يحدث للمجموع عندما يكبر العدد ن، والتمثيل البصري في بداية الدرس يمكن أن يساعدهم أيضًا.

تحدي الطلبة

قد يستمتع الطلبة المجيدون في استكشاف أشكال الفركتال، لذا يمكن للمعلم اثرائهم بالسؤالين الآتيين: السؤال ١ هو مسألة هندسية عن الدوائر، والسؤال ٢ يتحدث عن الأنماط الكسرية: ندفة الثلج ومثلثات سيربينسكي يمكنك أيضاً أن تطلب إليهم أن يبحثوا معاً عن أشكال الفركتال بعمق أكثر وأن يعرضوا ما يجدوه.

١) رسمت دائرة نصف قطرها ١ سم تمسّ أضلاع مثلث متطابق الأضلاع من الداخل. ثم رُسمت ثلاث دوائر أصغر عند كل ركن لتمسّ الدائرة الأصلية وضلعَين في المثلث. كرّرت هذه العملية عددًا لانهائيًا من المرّات كما هو مبيّن في الشكل المجاور.

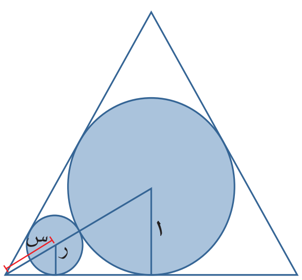


أ أوجِد مجموع محيطات جميع الدوائر

ب أوجِد مجموع مساحات جميع الدوائر

الحل: أ نصف قطر الدائرة الكبرى ١سم. ليكن نصف قطر الدائرة الصغرى ر، وطول وتر المثلث القائم الصغير س.

∴ جا(٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ = $\frac{ر}{س}$



فيكون س = ٢ر

وعليه، فإنه في المثلث القائم الزاوية وقياس إحدى زواياه ٣٠° يكون طول الوتر ضعف الارتفاع.

الوتر في المثلث القائم الكبير يساوي س + ر + ١:

س + ر + ١ = ٢

ر = $\frac{١}{٣}$

محيط الدائرة الكبيرة ٢π × ١ = ٢π سم

نصف قطر كل دائرة صغيرة يساوي $\frac{١}{٣}$ نصف قطر الدائرة التي تسبقها.

فيكون مجموع محيطات الدوائر الصغرى هو:

$$٢\,\pi\left(\frac{١}{٣}\right) + ٢\,\pi\left(\frac{١}{٩}\right) + \dots = ٢\,\pi\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \dots\right)$$

استخدم المجموع إلى مالانهاية للمتتالية الهندسية لتحصل على:

جـ$_\infty$ = $\frac{أ}{١ - ر}$: الحدّ الأول أ = $\frac{١}{٣}$ ، والأساس ر = $\frac{١}{٣}$

جـ$_\infty$ = $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \dots + = \frac{\frac{١}{٣}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٢}$

مجموع محيطات الدوائر الصغرى عند كل زاوية في المثلث = ٢ π × $\frac{١}{٢}$ = π

وعليه يكون مجموع محيطات جميع الدوائر بما فيها الدائرة الكبيرة

محيط الدائرة الكبيرة + ٣ × مجموع محيطات الدوائر الصغرى = ٢ π + ٣ × π = ٥ π سم

ب مجموع مساحات جميع الدوائر =

مساحة الدائرة الكبيرة + مساحة الدوائر الصغيرة جميعها.

مساحة الدائرة الكبيرة = $\pi \times ١^{٢} = \pi$ سم^{٢}

لنبحث في الدوائر الصغيرة:

نصف قطر كل دائرة صغيرة = $\frac{١}{٣}$ قطر الدائرة التي تسبقها.

$$\therefore \pi\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} + \pi\left(\frac{١}{٩}\right)^{٢} + \dots = \pi \times ١^{٢}\left(\frac{١}{٩} + \frac{١}{٨١} + \dots\right)$$

استخدم مجموع المتتالية الهندسية غير المنتهية:

$ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ ، الحدّ الأول أ $= \frac{١}{٩}$ ، والأساس ر $= \frac{١}{٩}$ لتحصل على:

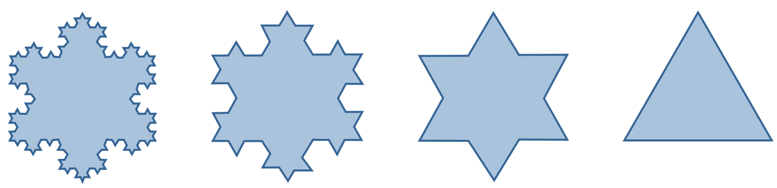
$$\frac{١}{٩} + \frac{١}{٨١} + \dots = \frac{\frac{١}{٩}}{\frac{٨}{٩}} = \frac{١}{٨}$$

فيكون مجموع مساحات مجموعة الدوائر الصغيرة غير المنتهية تمثّل بالضبط

$\frac{٣}{٨}$ مساحة الدائرة الكبيرة = $\frac{٣}{٨}\pi$ سم^{٢}

مساحة جميع الدوائر = $\pi + \frac{٣}{٨}\pi = \frac{١١\pi}{٨}$ سم^{٢}

٢)



النمط ١ النمط ٢ النمط ٣ النمط ٤

يمكن أن نرسم الأشكال أعلاه على النحو:

ابدأ برسم مثلث متطابق الأضلاع (النمط ١)، ثم نفّذ الخطوات الآتية لإنتاج النمط ٢

الخطوة ١: اقسم كل قطعة مستقيمة إلى ثلاث قطع متساوية.

الخطوة ٢: ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع إلى الخارج قاعدته القطعة المستقيمة الواقعة في المنتصف من الخطوة ١ كما يظهر في النمط ٢

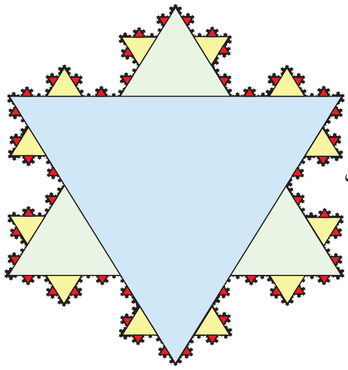
الخطوة ٣: احذف القطع المستقيمة التي استخدمت على أنها قواعد للمثلثات المتطابقة الأضلاع في الخطوة ٢

كرّرت هذه الخطوات الثلاث لتكوّن النمط التالي:

أ ليكن $ح_{ن}$ محيط النمط ن، بيّن أن المتتالية $ح_{١}$، $ح_{٢}$، $ح_{٣}$، ... تؤول إلى مالانهاية.

ب لتكن $م_{ن}$ مساحة النمط ن، بيّن أن $م_{١}$، $م_{٢}$، $م_{٣}$، ... تؤول إلى $\frac{٨}{٥}$ مساحة المثلث الأصلي.

ج نهاية النمط بندفة الثلج. محيطها غير منته. ومساحتها $\frac{٨}{٥}$ مساحة المثلث الأصلي، كما لاحظت في الجزئيات أعلاه، هذا النمط من ندفة الثلج هو مثال على الكسريات. استخدم شبكة الإنترنت لتوجد كسريات مثلث سيربينسكي (Sierpinski).



الحل: أ طول كل ضلع في المثلثات الخضراء يساوي بالضبط $\frac{1}{3}$ طول ضلع المثلث الأزرق الكبير.

إذا كان طول كل ضلع في المثلث الأصلي ٣، بعد كل تجزئة يصبح طول كل ضلع ٤. محيط المثلث الأصلي ٩، أصبح محيط المثلث الجديد ١٢

وعليه، يكون المحيط بعد كل تجزئة $\frac{12}{9}$ أو $\frac{4}{3}$ محيط المثلث الذي يسبقه.

بعد ن تجزئة يصبح محيط المثلث $\left(\frac{4}{3}\right)^{ن}$ مرة من محيط المثلث الأصلي.

المتسلسلة هي: $\left(\frac{4}{3}\right)^{1}$، $\left(\frac{4}{3}\right)^{2}$، $\left(\frac{4}{3}\right)^{3}$، ...

وحيث لا توجد حدود لعدد تكرار التجزئات، فإن المحيط يستمر في الزيادة حيث ن تؤول إلى مالانهاية.

ب المساحة داخل ندفة الثلج هي مجموع مساحات المثلثات المتطابقة الأضلاع اللانهائية – انظر الشكل في الجزئية (أ).

كل ضلع في المثلث الأخضر يساوي بالضبط $\frac{1}{3}$ طول ضلع المثلث الكبير الأزرق، وعليه، تكون مساحته $\frac{1}{9}$ مساحة المثلث الكبير.

مساحة كل مثلث أصفر = $\frac{1}{9}$ مساحة المثلث الأخضر.

إذا كانت مساحة المثلث الأزرق وحدة واحدة مربعة، تكون المساحة الكلية لندفة الثلج =

$$1 + 3\left(\frac{1}{9}\right) + 12\left(\frac{1}{9}\right)^{2} + 48\left(\frac{1}{9}\right)^{3} + \dots$$

إذا استثنينا المثلث الأصلي تكون المتتالية الهندسية أساسها ر = $\frac{4}{9}$

الحدّ الأول في المتتالية الهندسية هو أ = ٣ $\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$ ، وعليه، يكون المجموع:

$$1 + \frac{أ}{1 - ر} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5}$$

وعليه، فإن مساحة ندفة الثلج = $\frac{8}{5}$ مساحة المثلث الأصلي.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٣–٣

٣-٤ المزيد من المتتاليات الحسابية والهندسية

ملاحظات للمعلمين

يعمل الطلبة على المتتاليات الحسابية والهندسية معاً، إما بضمهما معًا أو اعتبار الترتيب في كل من النوعين. في هذه المرحلة يجب أن يكونوا قادرين على التفريق بينهما، والتحكم بجميع الصيغ المناسبة والمعالجة الجبرية لها.

أفكار للتعليم

يعتمد نشاط استكشف ٤ على طريقة تساعد الطلبة على التمييز بين المتتاليات الحسابية والهندسية والتعبير عنهما جبرياً.

الأسئلة ١، ٢، ٧ من تمارين ٣-٤ تقدم معلومات عن المتتاليات، وعلى الطلبة حل الأسئلة اعتمادًا على نوع المتتالية إما هندسية أو حسابية.

تقدم الأسئلة ٣، ٥، ٦ بعض حدود المتتالية الهندسية، والتي تمثل حدودًا في المتتالية الحسابية. يقدم العرض التوضيحي (٣) حلًا للتمرين (٣). يمكن أن تستخدمه محفّزاً للمناقشة الصفِّية على كيفية حلّ السؤال. كما يتناول السؤال ٤ متتاليتين حسابية وهندسية يتساوى مجموع كلًا منهما على الرغم من اختلاف عدد الحدود فيهما.

ارشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٤

في هذا النشاط يوظف الطلبة العلاقة بين ثلاثة حدود من متتالية حسابية ومن متتالية هندسية. إذا وجد الطلبة صعوبة في ذلك، يمكن أن تقترح عليهم أن يفكروا في بعض الأعداد التي تناسب المتتالية الحسابية أو الهندسية، وأن يختبروا العلاقة بينها قبل أن يصوغوا تعميماً للمتتالية الحسابية أو الهندسية.

١) $٢ب = أ + جـ$ $\qquad$ $ب = \frac{(أ + جـ)}{٢}$

٢) $ب^{٢} = أجـ$ $\qquad$ $ب = \pm \sqrt{أجـ}$

دعم الطلبة

يجب أن يكون الطلبة قادرين على قراءة وفهم السؤال، وتحديد المعلومة التي يحتاجون إليها والصيغة المناسبة. وقد يستفيد بعض الطلبة من التدريبات الإضافية أو من الموضوعات السابقة مثل العمل مع المتتاليات الحسابية والهندسية بشكل منفصل.

تحدي الطلبة

يتضمن المصدر R8121 When does the sum of this series equal 60? (Underground Mathematics) مسألة اختيارية تتطلب من الطلبة تمييز المتتالية الحسابية.

والمصدر R6257 Can we sum the first 2n terms of $1, 1, 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, 8, \frac{1}{8} \ldots$? (Underground Mathematics) يتطلب أن يستنتج الطلبة استراتيجية ما. يمكن اتخاذ طريقة تجزئة المتسلسلة إلى متسلسلتين منفصلتين عدد حدود كل منهما ن.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٣-٤

شرائح عرض توضيحي (PPT) المتتاليات والمتسلسلات

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثالثة:
المتتاليات والمتسلسلات

العرض التوضيحي الثالث

https://ict.moe.gov.om/library/file/Content/11/Math/OMN_ADV_Math_G11_s1_TR_PPT_Unit3_MOE_22_11_15/index.pptx

إختصار الرابط

https://qrs.ly/lcebnw4

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي الحدود الأول والرابع والعاشر على الترتيب في متتالية حسابية.

وإذا علمت أن الحد الأول في كل متتالية هو ١٢ وأساس المتتالية الهندسية ر، حيث ر ≠ ١، فأوجِد:

أ. قيمة ر

ب. الحد السادس في كل متتالية.

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

ما الذي نعرفه؟

المتتالية الهندسية: $ح_1$ $ح_2$ $ح_3$

١٢ ؟ ؟

ما صيغة الحد النوني؟ $ح_ن = أ ر^{ن-1}$

المتتالية الحسابية: $ح_1$ $ح_4$ $ح_{10}$

١٢ ؟ ؟

ما صيغة الحد النوني؟ $ح_ن = أ + (ن - 1)\ د$

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي الحدود الأول والرابع والعاشر على الترتيب في متتالية حسابية.

وإذا علمت أن الحد الأول في كل متتالية هو ١٢ وأساس المتتالية الهندسية ر، حيث ر ≠ ١، فأوجِد:

أ. قيمة ر

ب. الحد السادس في كل متتالية.

المتتالية الهندسية: $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$

١٢ ، ١٢ر ، ١٢ر^٢

المتتالية الحسابية: $ح_١$ ، $ح_٤$ ، $ح_{١٠}$

١٢ ، ١٢ + ٣د ، ١٢ + ٩د

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

١٢ + ٣د = ١٢ر

٤ + د = ٤ر

$\boxed{د = ٤ر - ٤}$ ← ١

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

المتتالية الهندسية: $ح_١$ $ح_٢$ $ح_٣$

١٢ $١٢ر$ $١٢ر^٢$

المتتالية الحسابية: $ح_١$ $ح_٤$ $ح_{١٠}$

١٢ $١٢ + ٣د$ $١٢ + ٩د$

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

∵ $ح_{١٠}$ في المتتالية الحسابية = $ح_٣$ في المتتالية الهندسية

∴ $١٢ + ٩د = ١٢ر^٢$

بالتعويض عن قيمة د من المعادلة (١):

$$١٢ + ٩(٤ر - ٤) = ١٢ر^٢$$

$$٤ + ٣(٤ر - ٤) = ٤ر^٢$$

$$٤ر^٢ - ١٢ر + ٨ = ٠$$

$$ر^٢ - ٣ر + ٢ = ٠$$

$$(ر - ٢)(ر - ١) = ٠$$

∵ $ر \neq ١$، فإن $\boxed{ر = ٢}$

إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي الحدود الأول والرابع والعاشر على الترتيب في متتالية حسابية.

وإذا علمت أن الحد الأول في كل متتالية هو ١٢ وأساس المتتالية الهندسية ر، حيث ر ≠ ١، فأوجِد:

أ. قيمة ر

ب. الحد السادس في كل متتالية.

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

في المتتالية الهندسية: $ح_ن = أ \times ر^{ن-١}$

$ح_٦ = أ \times ر^٥$

$\boxed{ح_٦ = ١٢ \times ٢^٥ \Leftarrow ح_٦ = ٣٨٤}$

في المتتالية الحسابية: $ح_ن = أ + (ن - ١) د$

$ح_٦ = ١٢ + ٥د$

أوجد أولاً قيمة د من المعادلة (١)

$د = ٤ر - ٤ = ٤ \times ٢ - ٤$

$د = ٤$

$\boxed{ح_٦ = ١٢ + ٢٠ . \Leftarrow ح_٦ = ٣٢}$

إجابات تمارين كتاب الطالب – الوحدة الثالثة: المتتاليات والمتسلسلات

إجابات معرفة قبلية

١) أ ٢ن + ٣   ب ١١ − ٣ن

تمارين ٣-١

١) أ + ٦د، أ + ١٨د

٢) أ عدد الحدود = ٢٢ المجموع = ١٢١٠

ب عدد الحدود = ٣٥ المجموع = ٣٥٣٥

٣) أ ١٠٣٧   ب −١٩٥٧

ج $\frac{١}{٣}$ ٣٨   د −٣١٦٠س

٤) ٧

٥) أ د = ٧، ن = ٢٩   ب ٢٠٥٩

٦) ١٤٤٢

٧) ١٨١٧

٨) ٣١

٩) ٥٥٨٦

١٠) ٢٥

١١) ٣٦٠ ريالات عُمانية

١٢) أ أ = ١٧، د = −٤   ب ٢٠

١٣) أ = ٧، د = ٨

١٤) أ = ١٠، د = −٤

١٥) $\frac{١}{٢}$ (٥ن − ١١)

١٦) ٩°

١٧) أ أ = ٨ د   ب $ح_{١٥}$ = ٩أ

١٨) برهان

١٩) أ $ح_{٥}$ = ٤ − ٣ $(جاس)^{٢}$ ب برهان

٢٠) أ برهان   ب ٩٠٠

تمارين ٣-٢

١) أ لا   ب ر = ٣، ح = ٨

ج ر = −$\frac{١}{٣}$، $ح_{٨}$ = $\frac{١}{٢٧}$ د لا

هـ لا   و ر = −١، $ح_{٨}$ = −١

٢) $أر^{٥}$، $أر^{١٤}$

٣) $\frac{٢}{٣}$

٤) −٨، ١٠

٥) $\frac{٣}{٢}$، ٨

٦) ٦٤

٧) ٢، −٨

٨) أ ٧٦٥   ب ٢٥٥

ج −٨٥   د $\frac{٥}{٩}$ ٧٠٠

٩) ٢١

١٠) أ $٨\left(\frac{٣}{٤}\right)^{ن}$ ب ٤٨,٨١٢٥م

١١) أ $\frac{٤٨}{س + ١}$ ب ٢، $\frac{١}{٣}$

١٢) ٤٠، −٢٠

١٣) أ ١٧٧١٥,٦١ ريالات عُمانية

ب ٩٤٨٧١,٧١ ريالات عُمانية

١٤) برهان

١٥) برهان

١٦) برهان

تمارين ٣-٣

١) أ ٣   ب $\frac{١}{٩}$ ١

ج $\frac{٢}{٣}$ ٢٦   د −$\frac{٤}{٧}$ ٣٦

٢) $\frac{٤}{٣}$

٣) ٣٢

٤) $\frac{٢}{٣}$ ، ٨١٠

٥) أ ٠,٥٧ = $\frac{٥٧}{١٠٠} + \frac{٥٧}{١٠٠٠٠} + \frac{٥٧}{١٠٠٠٠٠٠} + ...$

ب برهان

٦) ر = ٠,٢٥، $جـ_{٤}$ = ١٩٩,٢١٨٧٥

٧) ٠,٥، ٠، ٩

٨) $\frac{٥٢}{١٦٥}$

٩) أ ر = $\frac{٢}{٣}$، $ح_{١}$ = ١٣,٥ ب ٤٠,٥

١٠) أ ر = −٠,٢٥، $ح_{١}$ = ٢٥٦

ب ٢٠٤,٨

١١) أ ٩٠ ب ٤٠٥

١٢) أ ٣٦ ب ١٩٢

١٣) ٩٣,٧٥

١٤) أ = ٢، ر = $\frac{٣}{٥}$

١٥) $\frac{\pi}{٢} > س > \frac{\pi}{٣}$

تمارين ٣-٤

١) أ ٣٥٢ ب ٧٨٨,١٢٥

٢) أ ١٠٠ ب ١٦

٣) أ ٢ ب ٣٨٤,٣٢

٤) −٢,٥، ٢٢,٥

٥) أ $\frac{٣}{٥}$ ب ١٢,٩٦، ٦٨

٦) أ د = ٤ ب ر = $\frac{٣}{٢}$، ن = ٦

٧) أ س = −٣ أو ٥، الحد الثالث = ٢٤ أو ٤٠

ب $-\frac{٤}{٥}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) ٢٣

٢) أ $-\frac{٢}{٣}$ ب ٢١٨٧ ج ١٣١٢,٢

٣) أ د = ٢أ ب ٩٩أ

٤) أ أ = ٤٤، د = −٣ ب ن = ٢٢

٥) أ أ = ٦٠، د = −١٠,٥ ب ٤٢ $\frac{٢}{٣}$

٦) أ ١٧ ب ر = $-\frac{٥}{٧}$ ج $\frac{٧}{٤}$

٧) أ $\frac{١}{٥}$ ب ١٦

٨) ١) ٤١٠٠٠ ٢) ٢٢١٠٠

٩) أ أ = ١٠، ب = ٤٥

ب ١) $\frac{\pi}{٣} > هـ > ٠$ ٢) ١,١٢٥

١٠) أ س = −٢ أو ٦، الحدّ الثالث = ١٦ أو ٤٨

ب $ح_{٣}$ = $\frac{١٦}{٢٧}$

١١) أ جـ = ٢$\frac{١}{٤}$ ب ١١٥,٢°

١٢) أ د = ٦، أ = ١٣ ب أ = $\frac{١٢}{٧}$، ر = $\frac{٥}{٧}$

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة الثالثة: المتتاليات والمتسلسلات

تمارين ٣-١

١) أ ٣٣ ب ٢٩
ج ١٠٠ د ٢٢٦

٢) ١٧

٣) أ = ٢، ب = −٣

٤) أ = $-\frac{٦٨}{٩}$ ، د = $\frac{٣٢}{٩}$

٥) الأعداد الفردية عبارة عن متتالية حيث أ = ١
والأساس د = ٢

المجموع = $\left(\frac{١}{٢}\right)$ن[٢أ + (ن − ١) د]

= $\left(\frac{١}{٢}\right)$ن[٢ + ٢(ن − ١)]

= $\left(\frac{١}{٢}\right)$ن [٢ن]

= ن^{٢}

٦) ح$_{ن}$ = ٦ن − ٥

٧) هـ = ٢٠°

٨) أ ٧١٠٧١ ب ٤٢٨٤٢٨

٩) ٢٣٩٢٦

تمارين ٣-٢

١) أ ٢ × ٣$^{ن−١}$ ب ٣٩٣٦٦

٢) أ أ = ٣، ر = ±٢ ب ±٣٨٤

٣) أ $-\frac{٧}{٢}$، ٧ ب $\frac{١٣٧٧٨١}{٢}$

٤) العاشر

٥) أ ١٧٠٨٩٨٤٢ ب ٢٣٠٣,٤٣٧٥
ج ٥١٤,٧٥ د ٩,٤٨٧١٧١
هـ ٣٩٣٦٨ و ٩٨٤٠
ز ١٩١,٩٥٣١٢٥ أو ٦٣,٩٨٤٣٧٥
ح ٢٤٤١٤٠٦٢,٥ أو ١٦٢٧٦٠٤١,٦٧

٦) أ ر = ٠,١٥ ب ر = ٢,٧
ج ر = −١,٣، ٠,٣ د ر = −٠.٩٨٣٠٥

٧) ر = $-\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٤٧}}{٢}$

٨) أ ١,٥ ب ١٦٠

٩) ٢^{٦٤} − ١ ≈ ١,٨٤ × ١٠^{١٩}

١٠) إذا كانت س، ص، ع حدود متتالية هندسية، فإن
$\frac{ص}{س} = \frac{ع}{ص}$ يعطي تربيع كلا الجانبين $\frac{ص^{٢}}{س^{٢}} = \frac{ع^{٢}}{ص^{٢}}$ مما يعني أن س^{٢}، ص^{٢}، ع^{٢} هي حدود متتالية هندسية

تمارين ٣-٣

١) أ $\frac{٢٧}{٢}$ ب $\frac{١٩٦}{٣}$ ج $\frac{١}{٣}$
د $\frac{٢٦}{٣٣}$ هـ متباعدة و متباعدة
ز $\frac{٢٥}{٣}$ ح $\frac{١٨}{٥}$
ط متباعدة ي $\frac{٧}{٣}$

٢) أ $|س| < ١$ ب $|س| < ١$ ج $|س| < \frac{١}{٣}$
د $|س| < \frac{١}{١٠}$ هـ $|س| < \frac{١}{٥}$ و $|س| < \frac{١}{٣}$
ز $|س| < ٤$ ح $|س| < ١٢$ ط $|س| < ٣$
ي $|س| < \frac{٤}{٥}$ ك $|س| > ٢$ ل $|س| > \frac{١}{٢}$
م $١ < س < ٢$ ن $٠ < س < ٤$
س $\frac{١}{٢} < س < ١$ ع $س < -\frac{١}{٢}$
ف $|س| < ١$ ص $|س| < \frac{١}{\sqrt{٤}}$

٣) أ ج$_{ن}$ = $\frac{١٨\left(١-\left(-\frac{١}{٣}\right)^{ن}\right)}{\frac{٤}{٣}}$

ب ج$_{\infty}$ = $\frac{٢٧}{٢}$

٤) أ $\frac{٢}{٣}$ ب ٩

٥) $\frac{١}{٨}$

٦) أ $|س| < \frac{٣}{٢}$ ب ٥

٧) ٩

٨) أ س > ٠

ب س = −٣

٩) ١٩م

١٠) أ حافة الطاولة ب ٨

تمارين ٣-٤

١) أ أ + د، أ + ٥د

ب برهان

ج ٦٦٠، ٧١٥٨٢٧٨٨٢

٢) د = ٠، $-\frac{١}{٤}$

٣) $\frac{-١ + \sqrt{٤٧}}{٢}$

٤) أ $\frac{١}{٢}$س^{٢} ب ٥س − ٨

ج س = ٨ د ٣٧٧٥

٥) ٢,٥، ٥، ٧,٥، ١٠

٦) أ ١، ٠,٥ ب ٢

٧) أ = −٢، ب = ٤

٨) م = ٧

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) $\frac{٢}{٣}$

٢) أ −٣، ٧ ب ٥٤

٣) ١٩٢٦٤

٤) برهان

الوحدة الثالثة: حلول التمارين

المتتاليات والمتسلسلات

تمارين ٣-١

١) ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د

ح$_{٧}$ = ا + (٧ − ١)د

= أ + ٦د

ح$_{١٩}$ = أ + (١٩ − ١)د

= أ + ١٨د

٢) أ أولًا، أوجد عدد حدود المتتالية.

ثم استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د

٩٧ = ١٣ + (ن− ١) × ٤

٨٤ = (ن − ١) × ٤

ن = $\frac{٨٤}{٤}$ + ١

ن = ٢٢ لذا يوجد ٢٢ حدًّا

ثم استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

جـ$_{ن}$ = $\frac{٢٢}{٢}$ (١٣ + ٩٧)

جـ$_{ن}$ = ١٢١٠

مجموع حدود المتتالية ١٢١٠

٣) ج أولًا، أوجد الأساس:

د = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

جـ$_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ × $\frac{١}{٣}$ + (٢٠ − ١) $\frac{١}{٦}$]

جـ$_{٢٠}$ = ١٠ [$\frac{٢}{٣}$ + $\frac{١٩}{٦}$]

جـ$_{٢٠}$ = ٣٨ $\frac{١}{٣}$

٤) جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

جـ$_{ن}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ × ١٥ + (٢٠ − ١)د]

١٦٣٠ = ١٠ [٣٠ + ١٩د]

١٦٣ = ٣٠ + ١٩د

د = $\frac{١٣٣}{١٩}$ = ٧

الأساس يساوي ٧

٥) أ استخدم الحدّ النوني ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١) د

٧٨ = −٢٧ + (١٦ − ١) د

٧٨ + ٢٧ = ١٥د

د = ٧

الأساس ٧

ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د

١٦٩ = −٢٧ + (ن − ١) × ٧

١٩٦ = ٧(ن − ١)

ن = ٢٩

عدد الحدود ٢٩

ب استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

جـ$_{٢٩}$ = $\frac{٢٩}{٢}$(−٢٧ + ١٦٩)

جـ$_{٢٩}$ = ٢٠٥٩

٦) الأساس د = ١٣٩ − ١٤٦

د = −٧

استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د لتجد قيم ن:

−٤٣ = ١٤٦ + (ن − ١) × −٧

−١٨٩ = −٧(ن − ١)

ن = ٢٨

استخدم جـ$_{ن}$= $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

جـ$_{٢٨}$ = $\frac{٢٨}{٢}$(١٤٦ + (−٤٣))

جـ$_{٢٨}$ = ١٤٤٢

مجموع الحدود ١٤٤٢

٧) الأساس د = ٩ − ٢

= ٧

استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د لتجد قيم ن:

= ٢ + (ن − ١) × ٧

حيث إن الحدّ النوني أكبر من ١٥٠:

٢ + (ن − ١) × ٧ > ١٥٠

ن − ١ > $\frac{١٤٨}{٧}$

ن > ٢١ $\frac{١}{٧}$ + ١

ن > ٢٢ $\frac{١}{٧}$

أقل قيمة ممكنة لـ ن هي ٢٣

لتجد قيمة الحدّ ح$_{٢٣}$ استخدم صيغة الحدّ النوني ح$_{ن}$

= أ + (ن − ١) د

ح$_{٢٣}$ = ٢ + ٢٢ × ٧

= ١٥٦

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

جـ$_{٢٣}$ = $\frac{٢٣}{٢}$ (٢ + ١٥٦)

جـ$_{٢٣}$ = ١٨١٧

مجموع الحدود = ١٨١٧

٨) ح$_{١}$ = ١٥

ح$_{٢}$ = ١٥ + د

ح$_{٣}$ = ١٥ + ٢د

ح$_{٤}$ = ١٥ + ٣د

ح$_{٥}$ = ١٥ + ٤د

جـ$_{ن}$ = ٧٥ + ١٠د

٧٩ = ٧٥ + ١٠د

د = ٠,٤

أوجد عدد الحدود باستخدام الحدّ النوني

ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د

٢٧ = ١٥ + (ن − ١) × ٠,٤

ن − ١ = $\frac{١٢}{٠,٤}$

ن = ٣١

عدد حدود المتتالية = ٣١

٩) ح$_{١}$ = أ = ١٠٥

ل = ٢٩٤

الأساس د = ٧

استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د:

٢٩٤ = ١٠٥ + ٧(ن − ١)

١٨٩ = ٧(ن − ١)

ن − ١ = ٢٧

ن = ٢٨

يوجد ٢٨ حدًّا بين العددَين ١٠٠ و ٣٠٠ تقبل القسمة على ٧.

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

جـ$_{٢٨}$ = $\frac{٢٨}{٢}$ (١٠٥ + ٢٩٤)

= ٥٥٨٦

١٠) أ = ٢، ل = ١٧، جـ$_{ن}$ = ٥٠٠

استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١) د:

١٧ = ٢ + ١٠د

د = ١,٥

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

٥٠٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٢ + (ن − ١) × ١,٥]

١٠٠٠ = ن [٤ + ١,٥ن − ١,٥]

١٠٠٠ = ٢,٥ن + ١,٥ن^{٢}

٢٠٠٠ = ٥ن + ٣ن^{٢}

٣ن^{٢} + ٥ن − ٢٠٠٠ = ٠

مقارنة هذه مع أن^{٢} + ب ن + جـ = ٠

أ = ٣ ، ب = ٥، جـ = −٢٠٠٠

ن = $\frac{-٥ \pm \sqrt{٥^{٢} - ٤(٣)(-٢٠٠٠)}}{٢(٣)}$

ن = $\frac{-٥ \pm \sqrt{٢٤٠٢٥}}{٦}$

ن = $\frac{-٥ - ١٥٥}{٦}$ أو $\frac{-٥ + ١٥٥}{٦}$ (الإجابة السالبة ١ لأن عدد الحدود لن يكون سالبًا)

ن = ٢٥

يوجد ٢٥ حدًّا في هذه المتتالية.

١١) جـ$_{١٦}$ = ٨٠٠٠

الدفعة الأولى ح$_{١}$ = ٢٠٠

الدفعة الخامسة ح$_{٥}$ = ٢٠٠ + ٤د

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

٨٠٠٠ = $\frac{١٦}{٢}$[٢ × ٢٠٠ + (١٦ − ١) × د]

٨٠٠٠ = $\frac{١٦}{٢}$(٢ × ٢٠٠ + (١٦ − ١) × د]

٨٠٠٠ = (٤٠٠ + ١٥د)

١٥د = ٦٠٠

د = ٤٠

الدفعة الخامسة ح$_{٥}$ = ٢٠٠ + ٤ × ٤٠

= ٣٦٠ ريالًا عُمانيًا

١٢) الحدّ ح$_{٦}$ = −٣، جـ$_{١٠}$ = −١٠

أ استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د:

−٣ = أ + (٦ − ١)د

−٣ = أ + ٥د .... (١)

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

−١٠ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢أ + (١٠ − ١)د]

−١٠ = ٥[٢أ + ٩د]

−٢ = ٢أ + ٩د .... (٢)

استخدم المعادلتَين (١)، (٢)، اضرب المعادلة (١) في ٢ ثم اطرح:

−٦ = ٢أ + ١٠د

−٢ = ٢أ + ٩د

−٤ = د

د = −٤

عوّض عن د= −٤ في المعادلة (١) لتحصل على:

−٣ = أ + ٥ (−٤)

أ = ١٧

الحدّ الأول ح$_{١}$ = ١٧ والأساس = −٤

ب استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د

−٥٩ = ١٧ + (ن − ١) × −٤

−٧٦ = −٤ن + ٤

٤ن = ٨٠

ن = ٢٠

١٣) جـ$_{١}$ = ٤(١)^{٢} + ٣(١)

جـ$_{١}$ = ٧ (هذا هو الحدّ الأول في المتسلسلة)

جـ$_{٢}$ = ٤(٢)^{٢} + ٣(٢)

جـ$_{٢}$ = ٢٢

بما أن جـ$_{ن}$ − جـ$_{ن-١}$ = الأساس

فالحدّ الثاني = ٢٢ − ٧ = ١٥

الأساس = ١٥ − ٧ = ٨

١٤) جـ$_{ن}$ − جـ$_{ن-١}$ = الأساس

جـ$_{١}$ = ١٢(١) − ٢ (١)^{٢}

جـ$_{١}$ = ١٠

الحدّ ح$_{١}$ يساوي ١٠

جـ$_{٢}$ = ١٢(٢) − ٢ (٢)^{٢}

جـ$_{٢}$ = ١٦

استخدم جـ$_{ن}$ − جـ$_{ن-١}$ = الأساس

الحد الثاني= ١٦ − ١٠ = ٦

الأساس = ٦ − ١٠ = −٤

١٥) جـ$_{ن}$ = $\frac{١}{٤}$ [٥ن^{٢} − ١٧ن]

جـ$_{١}$ = $\frac{١}{٤}$ [٥(١)^{٢} − ١٧(١)]

جـ$_{١}$ = −٣

الحدّ الأول = −٣

جـ$_{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ [٥(٢)^{٢} − ١٧(٢)]

جـ$_{٢}$ = −٣,٥

الحدّ الثاني −٣,٥ − (−٣) أو −٠,٥

الأساس −٠,٥ − (−٣) أو ٢,٥

ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د

= −٣ + (ن − ١) ٢,٥

= −٣ + ٢,٥ن − ٢,٥

= ٢,٥ن − ٥,٥ أو $\frac{١}{٢}$ (٢ن − ١)

١٦) ن = ١٠

قياس زاوية أول قطاع دائري أ°

قياس زاوية القطاع العاشر = ٧أ°

٣٦٠ = $\frac{١٠}{٢}$ (أ + ٧أ)

٣٦٠ = ٥أ + ٣٥أ

٤٠أ = ٣٦٠

أ = ٩

قياس زاوية أصغر قطاع ٩°

١٧) أ) جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

جـ$_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$[٢أ + (٢٠ − ١)د]

جـ$_{٢٠}$ = ١٠[٢أ + ١٩د]

جـ$_{٢٠}$ = ٢٠أ + ١٩٠د

جـ$_{٥}$ = $\frac{٥}{٢}$[٢أ + (٥ − ١)د]

جـ$_{٥}$ = ٥أ + ١٠د

جـ$_{٢٠}$ = ٧ × جـ$_{٥}$

فيكون، ٢٠أ + ١٩٠د = ٧(٥أ + ١٠د)

٢٠أ + ١٩٠د = ٣٥أ + ٧٠د

١٥ = ١٢٠د

أ = ٨د

ب) ح$_{٦٥}$ = أ + (٦٥ − ١)د

= أ + ٦٤د

الآن عوّض د = $\frac{١}{٨}$ أ

= أ + ٦٤ × $\frac{١}{٨}$ أ

= ٩أ

١٨) استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د:

ح$_{٣}$ = أ + (٣ − ١)د

= أ + ٢د

ح$_{١٠}$ = أ + (١٠ − ١)د

= أ + ٩د

أ + ٩د = ٣(أ + ٢د)

أ + ٩د = ٣أ + ٦د

أ = ١,٥د

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]:

جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢(١,٥) د + (١٠ − ١)د]

جـ$_{١٠}$ = ٥ (٣د + ٩د)

= ٦٠د

جـ$_{٣}$ = $\frac{٣}{٢}$ [٢(١,٥)د + (٣ − ١)د]

جـ$_{٣}$ = $\frac{٣}{٢}$ [٣د + ٢د]

جـ$_{٣}$ = ٧,٥د

وعليه فإن، $\frac{جـ_{١٠}}{جـ_{٣}}$ = $\frac{٦٠د}{١,٥د}$ أو ٨

لذا فإن مجموع أول ١٠ حدود يساوي ٨ أمثال مجموع أول ٣ حدود.

١٩) الأساس هو ١ − (جا(س))^{٢}

(جا(س))^{٢} + (جتا(س))^{٢} = ١

فيكون ١ − (جا(س))^{٢} = (جتا(س))^{٢}

استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د

جـ$_{٥}$ = (جا(س))^{٢} + (٥ − ١)د

= (جا(س))^{٢} + ٤(١ − (جا(س))^{٢})

= (جا(س))^{٢} + ٤ − ٤ (جا(س))^{٢}

= ٤ − ٣ (جا(س))^{٢}

ب) استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]:

جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢(جا(س))^{٢} + (١٠ − ١) (١ − (جا(س))^{٢}]

جـ$_{١٠}$ = ٥[٢(جا(س))^{٢} + ٩ − ٩(جا(س))^{٢}]

جـ$_{١٠}$ = ٥[٩ − ٧(جا(س))^{٢}

جـ$_{١٠}$ = ٤٥ − ٣٥(جا(س))^{٢}

وحيث إن (جا(س))^{٢} + (جتا(س))^{٢} = ١

(جا(س))^{٢} = ١ − (جتا(س))^{٢}

جـ$_{١٠}$ = ٤٥ − ٣٥ (١ − (جتا(س))^{٢}

$جـ_{١٠} = ٤٥ - ٣٥ + ٣٥ (جتا(س))^٢$

$جـ_{١٠} = ١٠ + ٣٥ (جتا(س))^٢$

٢٠) أ مجموع أرقام الأعداد من ١٩ إلى ٢١ هو:

$(١ + ٩) + (٠ + ٢) + (١ + ٢) = ١٥$

ب كل عدد مكوّن رقم في منزلة "الآحاد" ورقم في منزلة "العشرات" مجال الأعداد من ٠١ إلى ٩٩

مجموع جميع الأرقام في منزلة **الآحاد** يعطى

باستخدام $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$:

مجموع الأرقام $= \frac{١٠}{٢}[٠ + ٩] \times ١٠ = ٤٥٠$

مجموع جميع الأرقام في منزلة **العشرات** يعطى

باستخدام $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$:

مجموع الأرقام $= \frac{١٠}{٢}[٠ + ٩] \times ١٠ = ٤٥٠$

مجموع جميع الأرقام $= ٤٥٠ + ٤٥٠ = ٩٠٠$

تمارين ٣-٢

١) ج ٨١، –٢٧، ٩، –٣، ...

$\frac{-٢٧}{٨١} = \frac{٩}{-٢٧} = \frac{-٣}{٩} = -\frac{١}{٣}$

الأساس ثابت، لذا المتتالية هي متتالية هندسية.

الحدّ $ح_٨ = ٨١ \left(-\frac{١}{٣}\right)^{٨-١} = \frac{-١}{٢٧}$

هـ ١، ٠,٤، ٠,١٦، ٠,٦٤، ...

$\frac{٠,٤}{١} = ٠,٤$، $\frac{٠,١٦}{٠,٤} = ٠,٤$، $\frac{٠,٦٤}{٠,١٦} = ٤$

النسبة غير ثابتة، لذا المتسلسلة ليست متتالية هندسية.

٢) استخدم $ح_ن = أر^{ن-١}$

$ح_٦ = أر^{٦-١}$

$= أر^٥$

$ح_{١٥} = أر^{١٤}$

٣) استخدم $ح_ن = أر^{ن-١}$

$أ = ٢٧٠$

$ح_٤ = أ ر^{٤-١}$

$أر^{٤-١} = ٨٠$

$\therefore ٢٧٠ ر^٣ = ٨٠$

$ر^٣ = \frac{٨٠}{٢٧٠}$

$ر = \frac{٢}{٣}$

٤) $أ = ٥٠$

استخدم $ح_ن = أر^{ن-١}$

$ح_٢ = أر^{٢-١} = -٣٠$

$أر = -٣٠$

فيكون، $٥٠ر = -٣٠$

$ر = -٠,٦$

$ح_٤ = أ ر^{ن-١}$

$= ٥٠ \times (-٠,٦)^{٤-١}$

$= -١٠,٨$

٥) استخدم $ح_ن = أر^{ن-١}$

$ح_٢ = أر^{٢-١}$

$\therefore أر = ١٢$ .... (١)

$ح_٤ = أر^{٤-١}$

$\therefore أر^٣ = ٢٧$ .... (٢)

اقسم معادلة (٢) على معادلة (١) ينتج أن:

$\frac{أر^٣}{أر} = \frac{٢٧}{١٢}$

$ر^٢ = \frac{٩}{٤}$

$ر = \pm \frac{٣}{٢}$ (الإجابة السالبة مرفوضة)

$\text{ر} = \frac{٣}{٢}$

وحيث أر = ١٢،

$\text{أ} = ١٢ \div \frac{٣}{٢}$

الحدّ الأول $\text{ح}_{١} = ٨$

٦) استخدم $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أر}^{\text{ن}-١}$:

الحدّ الأول أ

$\text{ح}_{٢} = \text{أر} = \text{أ} - ١٦$ .... (١)

مجموع الحدّين $\text{ح}_{٢}$، $\text{ح}_{٣}$:

$٨٤ = \text{أر} + \text{أر}^{٢}$.......... (٢)

استخدم المعادلة (١) وعوّض عن أر في المعادلة (٢) لتحصل على:

$٨٤ = \text{أ} - ١٦ + \text{أر}^{٢}$ .... (٣)

وحيث $\frac{\text{أ} - ١٦}{\text{أ}} = \text{ر}$ .... (٤) (من المعادلة (١))

استخدم معادلة (٤)، وعوّض عن ر في (٣) لتحصل على:

$٨٤ = \text{أ} - ١٦ + \text{أ}\left(\frac{\text{أ} - ١٦}{\text{أ}}\right)^{٢}$ ...... (٣)

$٨٤ = \text{أ} - ١٦ + \left(\frac{\text{أ} - ١٦}{\text{أ}}\right)^{٢}$

$٨٤\text{أ} = \text{أ}^{٢} - ١٦\text{أ} + (\text{أ} - ١٦)^{٢}$

$٨٤\text{أ} = \text{أ}^{٢} - ١٦\text{أ} + \text{أ}^{٢} - ٣٢\text{أ} + ٢٥٦$

$٢\text{أ}^{٢} - ١٣٢\text{أ} + ٢٥٦ = ٠$

$\text{أ}^{٢} - ٦٦\text{أ} + ١٢٨ = ٠$

$(\text{أ} - ٦٤)(\text{أ} - ٢) = ٠$

أ = ٢ أو ٦٤

إذا كان أ = ٢ فإن الحدَّ الثاني سيكون −١٤

وعليه يرفض أ = ٢

لذا فإن أ = ٦٤

$\text{ح}_{١}$ هو ٦٤

٧) $\frac{٤}{\text{س}} = \frac{\text{س} + ٦}{٤}$

$١٦ = \text{س}(\text{س} + ٦)$

$١٦ = \text{س}^{٢} + ٦\text{س}$

$\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ١٦ = ٠$

$(\text{س} + ٨)(\text{س} - ٢) = ٠$

س = −٨ أو س = ٢

٨) ج ١ − ٢ + ٤ − ٨ + ...

$\text{ر} = \frac{-٢}{١}$ أو −٢

استخدم: $\text{ج}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{أر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$

$\text{ج}_{٨} = \frac{١((-٢)^{٨} - ١)}{-٢ - ١}$

$\text{ج}_{٨} = -٨٥$

٩) $\text{ر} = \frac{١}{٠{,}٥}$ أو ٢

أصغر عدد من الحدود (ن) الذي يعطي مجموعًا أكبر من ١٠٠٠٠٠٠ نجده باستخدام:

$\text{ج}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{أر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$

أي أن $\frac{٠{,}٥(٢^{\text{ن}} - ١)}{٢ - ١} > ١٠٠٠٠٠٠$

$٠{,}٥(٢^{\text{ن}} - ١) > ١٠٠٠٠٠٠$

$٢^{\text{ن}} - ١ > ٢٠٠٠٠٠٠$

$٢^{\text{ن}} > ٢٠٠٠٠٠٠$

وحيث إن $٢^{٢٠} = ١٠٤٨٥٧٦$، $٢^{٢١} = ٢٠٩٧١٥٢$، ن = ٢١.

أصغر عدد من الحدود هو ٢١

١٠) أ ليكن ن عدد **الارتطامات**.

(قبل أن يحصل أي ارتطام م = ٠). الارتفاع الذي وصلت إليه الكرة ٨م.

لذا، الحدّ الأول عندما ن = ٠، $\text{أ}\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٠} = ٨$

الحدّ الثاني: ن = ١، $\text{أر} = ٨\left(\frac{٣}{٤}\right)^{١}$ أو ٦

بعد ن ارتطام ارتفعت الكرة $٨\left(\frac{٣}{٤}\right)^{\text{ن}}$

ب عند الارتطام الأول تكون الكرة قد قطعت مسافة ١٦م، فيكون، أ = ١٦.

استخدم: $\text{ج}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}}$:

عند الارتطام الخامس المسافة الكلية التي قطعتها الكرة:

$$\text{جـ}_{\text{٥}} = \frac{\text{١٦}\left(\text{١} - \left(\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\right)^{\text{٥}}\right)}{\text{١} - \frac{\text{٣}}{\text{٤}}}$$

= ٤٨,٨١٢٥م

١١) أ $\text{ح}_{\text{٢}} = \text{أر} = \text{٢٤}$

$\text{ح}_{\text{٣}} = \text{أر}^{\text{٢}} = \text{١٢(س + ١)}$

وعليه، اقسم $\text{ح}_{\text{٣}}$ على $\text{ح}_{\text{٢}}$ لتحصل على:

$$\frac{\text{أر}^{\text{٢}}}{\text{أر}} = \frac{\text{١٢(س + ١)}}{\text{٢٤}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{(س + ١)}}{\text{٢}}$$

$\text{ح}_{\text{١}}$ هو أر ÷ ر = أ

أر = ٢٤

$$\text{ر} = \frac{\text{س + ١}}{\text{٢}}$$

$$\text{أ} = \frac{\text{٢٤س + ١}}{\text{٢}}$$

$$\text{أو أ} = \frac{\text{٤٨}}{\text{س + ١}}$$

ب $$\frac{\text{٤٨}}{\text{س + ١}} + \text{٢٤} + \text{١٢(س + ١)} = \text{٧٦}$$

اضرب الطرفَين في س + ١:

٤٨ + ٢٤(س + ١) + ١٢(س + ١)(س + ١) = ٧٦(س + ١)

$\text{٤٨} + \text{٢٤س} + \text{٢٤} + \text{١٢س}^{\text{٢}} + \text{٢٤س} + \text{١٢} = \text{٧٦س} + \text{٧٦}$

$\text{١٢س}^{\text{٢}} - \text{٢٨س} + \text{٨} = \text{٠}$

$\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٧س} + \text{٢} = \text{٠}$

(٣س − ١)(س − ٢) = ٠

إما ٣س − ١ = ٠ أو س − ٢ = ٠

$\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$، أو س = ٢

١٢) $\text{ح}_{\text{٣}} = \text{أر}^{\text{٢}}$، الحدّ الأول = أ

$\text{أر}^{\text{٢}} = \text{٩أ}$

$\text{ر}^{\text{٢}} = \text{٩}$

ر = ±٣

$$\text{استخدم: جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ(أر}^{\text{ن}} - \text{١)}}{\text{ر} - \text{١}}$$

ن = ٤، ر = ٣

$$\text{جـ}_{\text{٤}} = \frac{\text{أ(٣}^{\text{٤}} - \text{١)}}{\text{٣} - \text{١}}$$

$\text{جـ}_{\text{٤}} = \text{ك أ}$

$$\text{ك أ} = \frac{\text{أ(٣}^{\text{٤}} - \text{١)}}{\text{٣} - \text{١}}$$

ك = ٤٠

$$\text{استخدم: جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ(أر}^{\text{ن}} - \text{١)}}{\text{ر} - \text{١}}$$

ن = ٤، ر = −٣

$$\text{جـ}_{\text{٤}} = \frac{\text{أ(−٣)}^{\text{٤}} - \text{١)}}{\text{−٣} - \text{١}}$$

$\text{جـ}_{\text{٤}} = \text{ك أ}$

$$\text{ك أ} = \frac{\text{أ(−٣)}^{\text{٤}} - \text{١)}}{\text{−٣} - \text{١}}$$

ك = −٢٠

١٣) أ ر = ١ ,١، أ = ١٠٠٠٠، ن = ٦

القيمة في ٢٠١٦ = $\text{١٠٠٠٠} \times \text{١,١}^{\text{٦}}$

= ١٧٧١٥,٦١ ريالات عُمانية

ب من ٢٠١٠ إلى ٢٠١٦ ومتضمنة ٢٠١٦ = ٧ سنوات.

$$\text{استخدم: جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ(أر}^{\text{ن}} - \text{١)}}{\text{ر} - \text{١}}$$

ن = ٧، ر = ١,١

$$\text{جـ}_{\text{٧}} = \frac{\text{١٠٠٠٠(١,١}^{\text{٧}} - \text{١)}}{\text{١,١} - \text{١}}$$

= ٩٤٨٧١,٧١ ريالات عُمانية

١٤) $$\text{استخدم: جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ(أر}^{\text{ن}} - \text{١)}}{\text{ر} - \text{١}}$$

$$\text{جـ}_{\text{٣ن}} = \frac{\text{أ(أر}^{\text{٣ن}} - \text{١)}}{\text{ر} - \text{١}}$$

$$\text{جـ}_{\text{٢ن}} = \frac{\text{أ(أر}^{\text{٢ن}} - \text{١)}}{\text{ر} - \text{١}}$$

$$\frac{\text{جـ}_{\text{٣ن}} - \text{جـ}_{\text{٢ن}}}{\text{جـ}_{\text{ن}}} = \frac{\frac{\text{أ(أر}^{\text{٣ن}} - \text{١)}}{\text{ر} - \text{١}} - \frac{\text{أ(أر}^{\text{٢ن}} - \text{١)}}{\text{ر} - \text{١}}}{\frac{\text{أ(أر}^{\text{ن}} - \text{١)}}{\text{ر} - \text{١}}}$$

اضرب البسط والمقام في ر − ١:

$$= \frac{\text{أ(أر}^{\text{٣ن}}\text{ − ١) − أ(أر}^{\text{٢ن}}\text{ − ١)}}{\text{أ(أر}^{\text{ن}}\text{ − ١)}}$$

اقسم جميع الحدود على أ

$$= \frac{\text{(أر}^{\text{٣ن}}\text{ − ١) − (أر}^{\text{٢ن}}\text{ − ١)}}{\text{(أر}^{\text{ن}}\text{ − ١)}}$$

$$= \frac{\text{ر}^{\text{٣ن}}\text{ − ر}^{\text{٢ن}}}{\text{ر}^{\text{ن}}\text{ − ١}}$$

$$= \frac{\text{ر}^{\text{٢ن}}\text{(ر}^{\text{ن}}\text{ − ١)}}{\text{ر}^{\text{ن}}\text{ − ١}}$$

$= \text{ر}^{\text{٢ن}}$ المطلوب

١٥) اقسم المتسلسلة أعلاه إلى متسلسلتَين هندسيتَين، واجمع ن حدًّا لكل متتالية:

المتسلسلة الأولى: ١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ...

استخدم المجموع

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ(أر}^{\text{ن}}\text{ − ١)}}{\text{ر − ١}} \text{ : أ = ١، ر = ٣، ن = ن}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ(٣}^{\text{ن}}\text{ − ١)}}{\text{٣ − ١}}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ(٣}^{\text{ن}}\text{ − ١)}}{\text{٢}}$$

المتسلسلة الثانية: ١، $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$، $\frac{\text{١}}{\text{٩}}$، $\frac{\text{١}}{\text{٢٧}}$، $\frac{\text{١}}{\text{٨١}}$، ...

استخدم المجموع $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ(١ − ر}^{\text{ن}}\text{)}}{\text{١ − ر}}$:

أ = ١، ر = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$، ن = ن

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{١}\left(\text{١ − }\left(\frac{\text{١}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن}}\right)}{\text{١ − }\frac{\text{١}}{\text{٣}}}$$

وحيث إن $\left(\frac{\text{١}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن}} = \text{(٣}^{\text{−١}}\text{)}^{\text{ن}} = \text{٣}^{\text{−ن}}$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{١ − ٣}^{\text{−ن}}}{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}}$$

اضرب البسط والمقام في ٣ لتحصل على:

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{٣ − ٣ × ٣}^{\text{−ن}}}{\text{٢}}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{٣ − ٣}^{\text{١−ن}}}{\text{٢}}$$

اجمع تعبيرَي جـن في المتتاليتَين لتحصل على:

$$\text{جـ}_{\text{٢ن}} = \frac{\text{٣}^{\text{ن}}\text{ − ١}}{\text{٢}} + \frac{\text{٣ − ٣}^{\text{١−ن}}}{\text{٢}}$$

$$\text{جـ}_{\text{٢ن}} = \frac{\text{٣}^{\text{ن}}\text{ − ١ + ٣ − ٣}^{\text{١−ن}}}{\text{٢}}$$

$$\text{جـ}_{\text{٢ن}} = \frac{\text{٢ + ٣}^{\text{ن}}\text{ − ٣}^{\text{١−ن}}}{\text{٢}}$$

أو $\text{جـ}_{\text{٢ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{(٢ + ٣}^{\text{ن}}\text{ − ٣}^{\text{١−ن}}\text{)}$

١٦) $\text{جـ}_{\text{ن}}$ = ١ + ١١ + ١١١ + ١١١١ + ١١١١١ + ...

$\text{٩جـ}_{\text{ن}}$ = ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ٩٩٩٩٩ + ...

$\text{٩جـ}_{\text{ن}}$ = (١٠ − ١) + (١٠٠ − ١) + (١٠٠٠ − ١) + ...

$\text{٩جـ}_{\text{ن}}$ = ١٠ + ١٠٠ + ١٠٠٠ + ... − ن

استخدم: $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ(أر}^{\text{ن}}\text{ − ١)}}{\text{ر − ١}}$: أ = ١٠، ر = ١٠، ن = ن

$$\text{٩جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{١٠(١٠}^{\text{ن}}\text{ − ١)}}{\text{١٠ − ١}} \text{ − ن}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{١٠(١٠}^{\text{ن}}\text{ − ١)}}{\text{٩(١٠ − ١)}} - \frac{\text{ن}}{\text{٩}}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{١٠}^{\text{ن+١}}\text{ − ١٠}}{\text{٨١}} - \frac{\text{٩ن}}{\text{٨١}}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{١٠}^{\text{ن+١}}\text{ − ١٠ − ٩ن}}{\text{٨١}}$$

تمارين ٣-٣

١) أ $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$: أ = ٤٠، ر = $\frac{-٢٠}{٤٠}$ أو −٠,٥

$\text{جـ}_\infty = \frac{٤٠}{-١ - ٠{,}٥}$

$= ٢٦\frac{٢}{٣}$

٢) استخدم $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$: أ = ١، ر = $\frac{٠{,}٥^{٢}}{١}$

أو ٠,٢٥

$\text{جـ}_\infty = \frac{١}{١ - ٠{,}٢٥} = \frac{٤}{٣}$

٣) $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$: أ = ٨، ر = $\frac{٦}{٨}$ أو −٠,٧٥

$\text{جـ}_\infty = \frac{٨}{١ - ٠{,}٧٥}$

$\text{جـ}_\infty = ٣٢$

٤) الحدّ الأول أ = ٢٧٠

$\text{ح}_٤ = \text{أر}^{٣} = ٨٠$

وعليه، يكون، ٢٧٠ $\text{ر}^{٣}$ = ٨٠

$\text{ر}^{٣} = \frac{٨}{٢٧}$

$\text{ر} = \frac{٢}{٣}$

استخدم $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$

$\text{جـ}_\infty = \frac{٢٧٠}{١ - \frac{٢}{٣}}$

$\text{جـ}_\infty = ٨١٠$

٥) أ $٠{,}٥٧ = \frac{٥٧}{١٠٠} + \frac{٥٧}{١٠٠٠٠٠} + \frac{٥٧}{١٠٠٠٠٠٠} + \dots$

ب أ = $\frac{٥٧}{١٠٠}$، ر = $\frac{١}{١٠٠}$

استخدم $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$:

$\text{جـ}_\infty = \frac{\frac{٥٧}{١٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠}}$

$\text{جـ}_\infty = \frac{١٩}{٣٣}$

٦) أ أ = ١٥٠، جـ_∞ = ٢٠٠

استخدم $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$:

$٢٠٠ = \frac{١٥٠}{١ - \text{ر}}$

$٢٠٠(١ - \text{ر}) = ١٥٠$

$٢٠٠ - ٢٠٠\text{ر} = ١٥٠$

$٢٠٠\text{ر} = ٥٠$

$\text{ر} = ٠{,}٢٥$

$\text{جـ}_\text{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^\text{ن})}{١ - \text{ر}}$

$\text{جـ}_٤ = \frac{١٥٠(١ - ٠{,}٢٥^{٤})}{١ - ٠{,}٢٥}$

$\text{جـ}_٤ = ١٩٩{,}٢١٨٧٥$

$\text{جـ}_٤ = ١٩٩{,}٢١٨٧٥$

٧) أر = ٤,٥، جـ_∞ = ١٨

استخدم $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$:

$١٨ = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$

$١٨(١ - \text{ر}) = \text{أ}$

$١٨ - ١٨\text{ر} = \text{أ}$ .... (١)

وحيث إن أر = ٤,٥، أ = $\frac{٤{,}٥}{\text{ر}}$ ..... (٢)

عوّض عن أ في معادلة (١) لتحصل على ك

$١٨ - ١٨\text{ر} = \frac{٤{,}٥}{\text{ر}}$

$١٨\text{ر} - ١٨\text{ر}^{٢} = ٤{,}٥$

$١٨\text{ر}^{٢} - ١٨\text{ر} + ٤{,}٥ = ٠$

قارن هذا مع $\text{أر}^{٢}$ + ب ر + جـ = ٠، فيكون أ = ١٨،

ب = −١٨، جـ = ٤,٥

واستخدم الصيغة التربيعية:

$\text{ر} = \frac{--١٨ \pm \sqrt{(-١٨)^{٢} - ٤(١٨)(٤{,}٥)}}{٢(١٨)}$

ر = $\frac{١٨}{٣٦}$ أو ٠,٥

وحيث أ = $\frac{٤,٥}{\text{ر}}$ .... (٢)، ر = ٠,٥

الحدّ الأوّل = $\frac{٤,٥}{٠,٥}$ أو ٩

٨) ... ٠,٣١٥١٥١٥١٥ = $\frac{٣}{١٠}$ + $\frac{١٥}{١٠٠٠}$ + $\frac{١٥}{١٠٠٠٠٠}$ + ...

يتألف الطرف الأيمن من $\frac{٣}{١٠}$ إضافة إلى متتالية هندسية غير منتهية حيث أ = $\frac{١٥}{١٠٠٠}$، ر = $\frac{١}{١٠٠}$

فيكون $\frac{٣}{١٠}$ + $\dfrac{\frac{١٥}{١٠٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠}}$

= $\frac{٣}{١٠}$ + $\frac{١}{٦٦}$

= $\frac{٥٢}{١٦٥}$

٩) أ) أر = ٩، أر^{٣} = ٤

اقسم لتحصل على:

$\frac{\text{أر}^{٣}}{\text{أر}}$ = $\frac{٤}{٩}$

ر^{٢} = $\frac{٤}{٩}$

ر = ± $\frac{٢}{٣}$ (تحذف القيمة السالبة)

ر = $\frac{٢}{٣}$

نجد الحدّ الأول أ من تعويض ر = $\frac{٢}{٣}$ في أر = ٩:

أ × $\frac{٢}{٣}$ = ٩

أ = ١٣,٥

ب) استخدم جـ$_{\infty}$ = $\frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$:

جـ$_{\infty}$ = $\dfrac{١٣,٥}{١ - \frac{٢}{٣}}$

جـ$_{\infty}$ = ٤٠,٥

١٠) أ) أر^{٢} = ١٦، أر^{٥} = $-\frac{١}{٤}$

القسمة تعطي: $\frac{\text{أر}^{٥}}{\text{أر}^{٢}}$ = $-\frac{١}{٤}$

ر^{٣} = $-\frac{١}{٦٤}$

ر = $-\frac{١}{٤}$

عوّض عن ر = $-\frac{١}{٤}$ في أر^{٢} = ١٦ لتحصل على:

أ × $(-\frac{١}{٤})^{٢}$ = ١٦

$\frac{١}{١٦}$ أ = ١٦

أ = ٢٥٦

ب) استخدم جـ$_{\infty}$ = $\frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$

جـ$_{\infty}$ = $\dfrac{٢٥٦}{١ - -\frac{١}{٤}}$

جـ$_{\infty}$ = ٢٠٤,٨

١١) أ) أ = ١٣٥، أر = ك، أر^{٢} = ٦٠

فيكون، $\frac{\text{أر}}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{ك}}{١٣٥}$

ر = $\frac{\text{ك}}{١٣٥}$

$\frac{\text{أر}^{٢}}{\text{أر}}$ = $\frac{٦٠}{\text{ك}}$

ر = $\frac{٦٠}{\text{ك}}$

$\frac{٦٠}{\text{ك}}$ = $\frac{\text{ك}}{١٣٥}$

ك^{٢} = ٨١٠٠

ك = ±٩٠ (ترفض القيمة السالبة لأن كل الحدود موجبة)

ك = ٩٠

ر = $\frac{٦٠}{٩٠}$ أو $\frac{٢}{٣}$

ب) استخدم جـ$_{\infty}$ = $\frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$، أ = ١٣٥، ر = $\frac{٢}{٣}$

جـ$_{\infty}$ = $\dfrac{١٣٥}{١ - \frac{٢}{٣}}$

جـ$_{\infty}$ = ٤٠٥

١٢) أ) أ = ك + ١٢، أر = ك، أر^{٢} = ك − ٩

فيكون، $\frac{\text{أر}}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{ك}}{\text{ك} + ١٢}$

$\text{ر} = \frac{\text{ك}}{\text{ك} + ١٢}$

$\frac{\text{أر}^٢}{\text{أر}} = \frac{\text{ك} - ٩}{\text{ك}}$

$\text{ر} = \frac{\text{ك} - ٩}{\text{ك}}$

$\frac{\text{ك}}{\text{ك} + ١٢} = \frac{\text{ك} - ٩}{\text{ك}}$

$\text{ك}^٢ = (\text{ك} + ١٢)(\text{ك} - ٩)$

$\text{ك}^٢ = \text{ك}^٢ + ٣\text{ك} - ١٠٨$

$٣\text{ك} = ١٠٨$

$\text{ك} = ٣٦$

عوّض ك = ٣٦ في $\text{ر} = \frac{\text{ك}}{\text{ك} + ١٢}$ لتحصل على:

$\text{ر} = \frac{٣٦}{٤}$ أو $\frac{٣}{٤}$

ب استخدم $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$: أ = ٤٨، $\text{ر} = \frac{٣}{٤}$

$\text{جـ}_\infty = \frac{٤٨}{١ - \frac{٣}{٤}}$

$\text{جـ}_\infty = ١٩٢$

١٣) **أ** $\text{ر}^٣ = ٤٨$، $\text{جـ}_\infty = ٥\text{أ}$

استخدم $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$:

$٥\text{أ} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$

اقسم الطرفَين على أ

$٥ = \frac{١}{١ - \text{ر}}$

$٥(١ - \text{ر}) = ١$

$٥ - ٥\text{ر} = ١$

$٥\text{ر} = ٤$

$\text{ر} = \frac{٤}{٥}$

وعليه، إذا $\text{أر}^٣ = ٤٨$، عوّض عن ر لتحصل على:

$\text{أ}\left(\frac{٤}{٥}\right)^٣ = ٤٨$

$\text{أ} = ٤٨ \div \left(\frac{٤}{٥}\right)^٣$

أ = ٩٣,٧٥ الحدّ الأول ٩٣,٧٥

١٤) استخدم: $\text{جـ}_\text{ن} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^\text{ن} - ١)}{\text{ر} - ١}$: ن = ٣، $\text{جـ}_\text{ن} = ٣,٩٢$

$٣,٩٢ = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^٣)}{١ - \text{ر}}$

$٣,٩٢(١ - \text{ر}) = \text{أ}(١ - \text{ر}^٣)$

$١ - \text{ر} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^٣)}{٣,٩٢}$ .... (١)

استخدم $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$ ، $\text{جـ}_\infty = ٥$

$٥ = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$

$٥(١ - \text{ر}) = \text{أ}$

$١ - \text{ر} = \frac{\text{أ}}{٥}$ .... (٢)

المساواة بين المعادلتين (١) و (٢) يعطي:

$\frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^٣)}{٣,٩٢} = \frac{\text{أ}}{٥}$

اقسم الطرفين على أ:

$\frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^٣)}{٣,٩٢} = \frac{\text{أ}}{٥}$

$١ - \text{ر}^٣ = \frac{٣,٩٢}{٥}$

$\text{ر}^٣ = \frac{٢٧}{١٢٥}$

$\text{ر} = \frac{٣}{٥}$

عّوض عن $\text{ر} = \frac{٣}{٥}$ في (٢) لتحصل على:

$١ - \frac{٣}{٥} = \frac{\text{أ}}{٥}$

أ = ٢

١٥) **أ** أ = ١، أر = ٢جتا(س) حيث $٠ < \text{س} < \frac{\pi}{٢}$

المتتالية متقاربة إذا كان $-١ < \text{ر} < ١$

$\frac{\text{أر}}{\text{أ}} = \frac{٢\text{جتا}(\text{س})}{١}$

ر = ٢جتا(س)

فيكون $-1 < 2$ جتا(س) < 1

حلّ: ٢جتا(س) < -1:

جتا(س) $< \frac{1}{2}$

المجال المعطى $0 <$ س $< \frac{\pi}{2}$:

$\frac{\pi}{3} <$ س $< \frac{\pi}{2}$

حلّ: ٢جتا(س) > -1

جتا(س) $> -\frac{1}{2}$

والمجال المعطى $0 <$ س $< \frac{\pi}{2}$ ، جتاس موجب في هذا المجال.

الحلّ: $\frac{\pi}{3} <$ س $< \frac{\pi}{2}$

تمارين ٣-٤

١) أ حسابية: الحدّ الأول = ١٦،

الحدّ الثاني = ٢٤، د = ٢٤ − ١٦ = ٨

استخدم $ح_ن = أ + (ن - 1)د$:

$ح_8 = 16 + (8 - 1)8$

$= 72$

$جـ_ن = \frac{ن}{2}(أ + ل)$، أ = ١٦، ل = ٧٢،

$جـ_8 = \frac{8}{2}(16 + 72)$

$= 352$

ب أ = ١٦، أر = ٢٤

$\frac{أر}{أ} = \frac{24}{16}$

ر = ١,٥

استخدم $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - 1)}{ر - 1}$:

ن = ٨، أ = ١٦، ر = ١,٥

$جـ_8 = \frac{16(1,5^8 - 1)}{1,5 - 1}$

$= 788,125$

٢) أ أ = ٢٠، أر = ١٦

$\frac{أر}{أ} = \frac{16}{20}$

ر = ٠,٨

استخدم $جـ_\infty = \frac{أ}{1 - ر}$: أ = ٢٠، ر = ٠,٨

$جـ_\infty = \frac{20}{1 - 0,8}$

$جـ_\infty = 100$

ب الحدّ الأوّل = ٢٠، الحدّ الثاني = ١٦

د = ١٦ − ٢٠ = −٤

استخدم $جـ_ن = \frac{ن}{2}[2أ + (ن - 1)د]$

$-160 = \frac{ن}{2}[2 \times 20 + (ن - 1) \times -4]$

$-320 = ن\,[40 - 4ن + 4]$

$-320 = 44ن - 4ن^2$

$4ن^2 - 44ن - 320 = 0$

$ن^2 - 11ن - 80 = 0$

$(ن - 16)(ن + 5) = 0$

ن = ١٦، أو ن = −٥ (ترفض)

يوجد ١٦ حدًّا.

٣) أ في المتتالية الهندسية:

الحدّ الأول أ = ١٢

الحدّ الثاني $ح_2 = 12ر$

الحدّ الثالث $ح_3 = 12ر^2$

في المتتالية الحسابية:

الحدّ الأول أ = ١٢

الحدّ الرابع ح$_{٤}$ = ١٢+ ٣د

الحدّ العاشر ح$_{١٠}$ = ١٢ + ٩د

١٢+ ٣د = ١٢ر............... (١)

١٢+ ٩د= ١٢ر^{٢} .... (٢)

اضرب المعادلة (١) في ٣ ثم اطرح المعادلة (٢) لتحصل على

٣٦ + ٩د = ٣٦ر

١٢ + ٩د = ١٢ر^{٢}

٢٤ = ٣٦ر − ١٢ر^{٢}

١٢ر^{٢} − ٣٦ر + ٢٤ = ٠

ر^{٢} − ٣ر + ٢ = ٠

(ر − ٢)(ر − ١) = ٠

ر = ٢ أو ر = ١ (مرفوض)

ر = ٢

ب الهندسية: ح$_{ن}$ = أر$^{ن-١}$

ح$_{٦}$ = ١٢× ٢$^{٦-١}$

=٣٨٤

الحسابية: استخدم معادلة (١)، ١٢ + ٣د

= ١٢ × ٢

٣د = ١٢

د = ٤

استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د:

ح$_{٦}$ = ١٢ + (٦ − ١) × ٤

= ٣٢

٤) المتتالية الهندسية ن = ٨، أ = ٢٥٦، ر = $\frac{١}{٢}$ أو ٠,٥

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$:

جـ$_{٨}$ = $\frac{٢٥٦(١ - ٠,٥^{٨})}{١ - ٠,٥}$

جـ$_{٨}$ = ٥١٠

المتتالية الحسابية ن = ٥١، د = $\frac{١}{٢}$ أو ٠,٥

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]،

جـ$_{٥١}$ = $\frac{٥١}{٢}$[٢أ + (٥١ − ١) × ٠,٥]

جـ$_{٥١}$ = $\frac{٥١}{٢}$[٢أ + ٢٥]

فيكون، ٥١٠ = $\frac{٥١}{٢}$[٢أ + ٢٥]

٢٠ = ٢أ + ٢٥

أ = −٢,٥

استخدم ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د:

الحدّ الأخير = −٢,٥ + (٥١ − ١) × ٠,٥

الحدّ الأخير = ٢٢,٥

٥) أ في المتتالية الهندسية:

الحدّ الأول أ = ١٠٠

الحدّ الثاني ح$_{٢}$ = ١٠٠ر

الحدّ الثالث ح$_{٣}$ = ١٠٠ ر^{٢}

في المتتالية الحسابية:

الحدّ الأول أ = ١٠٠

الحدّ السادس ح$_{٦}$ = ١٠٠ + ٥د

الحدّ التاسع ح$_{٩}$ = ١٠٠ +٨د

١٠٠ + ٥د = ١٠٠ ر............. (١)

١٠٠ +٨د = ١٠٠ ر^{٢} .... (٢)

اضرب المعادلة (١) في ٨، والمعادلة (٢) في ٥ ثم اطرح (٢) لتحصل على:

٨٠٠+ ٤٠د = ٨٠٠ ر

٥٠٠ + ٤٠د = ٥٠٠ر^{٢}

فيكون ٣٠٠ = ٨٠٠ ر − ٥٠٠ر^{٢}

٥٠٠ر^{٢} − ٨٠٠ ر + ٣٠٠ = ٠

٥ر^{٢} − ٨ ر + ٣ = ٠

(٥ر − ٣) (ر − ١) = ٠

أما ر − ١ = ٠، فيكون ر = ١ (مرفوض)

أو ر = $\frac{٣}{٥}$

ب المتتالية الهندسية $ح_ن = أر^{ن-١}$

$ح_٥ = ١٠٠ (\frac{٣}{٥})^{٥-١}$

= ١٢,٩٦

المتتالية الحسابية، استخدم المعادلة (١):

١٠٠+ ٥د = ١٠٠ × $\frac{٣}{٥}$

٥د = −٤٠

د = −٨

استخدم $ح_ن$ = أ + (ن − ١) د:

$ح_٥$ = ١٠٠ + (٥ − ١) × −٨

$ح_٥$ = ٦٨

٦) أ أ = ١٦، $جـ_{٢٠}$ = ١٠٨٠

استخدم $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١) د]:

١٠٨٠ = $\frac{٢٠}{٢}$[٢ × ١٦ + (٢٠ − ١) د]

١٠٨ =٣٢ + ١٩د

١٩د = ٧٦

د = ٤

ب في المتتالية الهندسية:

الحدّ الأول أ = ١٦

الحدّ الثاني $ح_٢$ = ١٦ر

الحدّ الثالث $ح_٣$ = ١٦$ر^٢$

في المتتالية الحسابية:

الحدّ الأول أ = ١٦

الحدّ الثالث $ح_٣$ =١٦ + ٢ × ٤ = ٢٤

الحدّ النوني $ح_ن$ = ١٦ + (ن − ١) × ٤

= ١٦ + ٤ن − ٤

= ١٢ + ٤ن

فيكون ٢٤ = ١٦ر

ر= ١,٥

وأيضًا، ١٢ + ٤ن = ١٦$ر^٢$

١٢+ ٤ن = ١٦ × $١,٥^٢$

١٢ + ٤ن = ٣٦

ن = ٦

٧) أ إذا كانت المتتالية حسابية، الحدّ الأول

أ = ٢س، والحدّ الثاني $س^٢$، د = ١٥

فيكون $س^٢$ − ٢س = ١٥

$س^٢$ − ٢س − ١٥ = ٠

(س − ٥)(س + ٣) = ٠

س = ٥ أو س = −٣

إذا كان س= ٥ يكون الحد الثالث $س^٢$ + ١٥

ويساوي $٥^٢$ + ١٥ = ٤٠

إذا كان س= −٣ يكون الحد الثالث $س^٢$ + ١٥

ويساوي $(-٣)^٢$ + ١٥ = ٢٤

القيم الممكنة للحدّ الثالث هي ٢٤، ٤٠

ب إذا كانت المتتالية هندسيّة،

الحدّ الأول أ = ٢س

الحدّ الثاني أر = $س^٢$

الحدّ الثالث $أر^٢$ = −$\frac{١}{١٦}$

$\frac{أر}{أ} = \frac{س^٢}{٢س}$

ر = $\frac{س}{٢}$

و $\frac{أر^٢}{أر} = \frac{-\frac{١}{١٦}}{س^٢}$

ر = −$\frac{١}{١٦س^٢}$

$\frac{س}{٢}$ = −$\frac{١}{١٦س^٢}$

$س^٣$ = −$\frac{١}{٨}$

س = −$\frac{١}{٢}$

الحدّ الأوّل ٢ × −$\frac{١}{٢}$ = −١

ر = $\frac{س}{٢}$ أو $\frac{-\frac{١}{٢}}{٢}$ أو $-\frac{١}{٤}$

استخدم جـ$_{\infty}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$: أ = −١، ر = $-\frac{١}{٤}$

جـ$_{\infty}$ = $\frac{-١}{١ - -\frac{١}{٤}}$

جـ$_{\infty}$ = $-\frac{٤}{٥}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) الأساس:

د = ١,٥ − ١,٧٥ = −٠,٢٥

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢ × ١,٧٥ + (ن − ١) × ٠,٢٥]

−ن = $\frac{ن}{٢}$[٣,٥ − ٠,٢٥ن + ٠,٢٥]

−ن = $\frac{ن}{٢}$[٢ × ١,٧٥ + (ن − ١) × −٠,٢٥]

−٢ن = ٣,٧٥ن − ٠,٢٥ن^{٢}

٠,٢٥ن^{٢} − ٣,٧٥ن − ٢ن = ٠

٠,٢٥ن^{٢} − ٥,٧٥ن = ٠

٠,٢٥ن (ن − ٢٣) = ٠

ن = ٠ ترفض، أو ن = ٢٣

قيمة ن = ٢٣

٢) أر = −١٤٥٨، أر^{٤} = ٤٣٢

أ) $\frac{أر^{٤}}{أر}$ = $\frac{٤٢٣}{-١٤٥٨}$

ر^{٣} = $-\frac{٨}{٢٧}$

ر = $-\frac{٢}{٣}$

ب) أر = −١٤٥٨

أ = −١٤٥٨ ÷ ر

أ = −١٤٥٨ ÷ $-\frac{٢}{٣}$

أ = ٢١٨٧

ج) باستخدام جـ$_{\infty}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$، أ = ٢١٨٧، ر = $-\frac{٢}{٣}$

جـ$_{\infty}$ = $\frac{٢١٨٧}{١ - -\frac{٢}{٣}}$

جـ$_{\infty}$ = ١٣١٢,٢

٣) أ) استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

جـ$_{١٠٠}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$[٢أ + (١٠٠ − ١)د]

جـ$_{١٠٠}$ = ٥٠[٢أ + ٩٩د]

جـ$_{٢٠}$ = ١٠[٢أ + ١٩د]

٥٠[٢أ + ٩٩د] = ٢٥ × ١٠[٢أ + ١٩د]

٢أ + ٩٩د = ١٠أ + ٩٥د

٤د = ٨أ

د = ٢أ

ب) استخدم الحدّ النوني = أ + (ن − ١)د

ح$_{٥٠}$ = أ + (٥٠ − ١) × ٢أ

= أ + ٩٨أ

= ٩٩أ

٤) أ) استخدم الحدّ النوني = أ + (ن − ١)د

ح$_{١٠}$ = أ + (١٠ − ١) × د

١٧ = أ + ٩د .... (١)

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

جـ$_{٥}$ = $\frac{٥}{٢}$[٢أ + (٥ − ١)د]

٧٦ = ٢أ + ٤د

٣٨ = أ + ٢د .... (٢)

اطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) لتحصل على:

−٢١ = ٧د

د = −٣

عوّض عن د = −٣ في المعادلة (١) لتحصل على:

١٧ = أ + ٩ (−٣)

أ = ٤٤

ب استخدم الحدّ النوني $ح_ن$ = أ + (ن − ١)د

−١٩ = ٤٤ + (ن − ١) × −٣

−١٩ = ٤٤ − ٣ن + ٣

٣ن = ٦٦

ن = ٢٢

٥) أ استخدم الحدّ النوني $ح_ن$ = أ + (ن − ١)د

$ح_٥$ = أ + (٥ − ١)د

١٨ = أ + ٤د .... (١)

استخدم $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

$جـ_٨ = \frac{٨}{٢}$[٢أ + (٨ − ١)د]

١٨٦ = ٨أ + ٢٨د

٩٣ = ٤أ + ١٤د................ (٢)

اضرب المعادلة (١) في ٤ ثم اطرح المعادلة (٢) لتحصل على:

٧٢ = ٤أ + ١٦د

−٢١ = ٢د

د = −١٠،٥

الأساس −١٠،٥

عوّض عن د = −١٠،٥ في المعادلة (١) لتحصل على:

١٨ = أ + ٤ (−١٠،٥)

أ = ٦٠

ب أ = ٣٢، أ$ر^٣ = \frac{١}{٢}$

اقسم لتحصل على:

$\frac{أر^٣}{أ} = \frac{\frac{١}{٢}}{٣٢}$

$ر^٣ = \frac{١}{٦٤}$

$ر = \frac{١}{٤}$

استخدم $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$، $ر = \frac{١}{٤}$، أ = ٣٢:

$جـ_\infty = \frac{٣٢}{١ - \frac{١}{٤}}$

$جـ_\infty = ٤٢\frac{٢}{٣}$

٦) أ استخدم الحدّ النوني $ح_ن$ = أ + (ن − ١)د

$ح_٧$ = أ + (٧ − ١)د

١٩ = أ + ٦د .... (١)

استخدم $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

$جـ_{١٢} = \frac{١٢}{٢}$[٢أ + (١٢ − ١)د]

٢٢٤ = ١٢أ + ٦٦د....... (٢)

اضرب المعادلة (١) في ١٢ لتحصل على:

٢٢٨ = ١٢أ + ٧٢د

ثم اطرح المعادلة (٢) لتحصل على:

٦د = ٤

$د = \frac{٢}{٣}$

عوّض عن $د = \frac{٢}{٣}$ في معادلة (١) لتحصل على:

١٩ = أ + ٦$(\frac{٢}{٣})$

أ = ١٥

استخدم الحدّ النوني $ح_ن$ = أ + (ن − ١)د:

$ح_٤ = ١٥ + (٤ - ١) \times \frac{٢}{٣} = ١٧$

ب المتتالية الهندسيّة الأولى:

أ = ٣، الأساس = ر.

$جـ_\infty$ = جـ

المتتالية الهندسيّة الثانية:

أ = ٢، الأساس = $\frac{١}{٥}$ ر

$جـ_\infty$ = جـ

استخدم $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

$\frac{٣}{١ - ر} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٥}ر}$

$٣(١ - \frac{١}{٥}ر) = ٢(١ - ر)$

$٣ - \frac{٣}{٥}ر = ٢ - ٢ر$

$\frac{٧}{٥}ر = -١$

$ر = -\frac{٥}{٧}$

عوّض عن $ر = -\frac{٥}{٧}$، $أ = ٣$

$جـ_{\infty} = جـ$ في $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ لتحصل على:

$جـ = \frac{٣}{١ - \left(-\frac{٥}{٧}\right)}$

$جـ = \frac{٧}{٤}$

٧) أ المتتالية الهندسيّة الأولى:

الحدّ الأول أ، الأساس ر، والمجموع

إلى مالانهاية جـ.

$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ .... (١)

المتتالية الهندسيّة الثانية:

الحدّ الأول ٥أ، الأساس ٣ر، $جـ_{\infty} = ١٠$جـ.

$جـ = \frac{٥أ}{١ - ٣ر}$ .... (٢)

اضرب المعادلة (١) في ١٠ لتحصل على:

$١٠ جـ = \frac{٥أ}{١ - ر}$

ساوِ هذه مع المعادلة (٢) لتحصل على:

$\frac{٥أ}{١ - ٣ر} = \frac{٥أ}{١ - ر}$

$٥أ(١ - ر) = ١٠أ(١ - ٣ر)$

$٥أ - ٥أر = ١٠أ - ٣٠أر$

$٢٥أر = ٥أ$

$ر = \frac{١}{٥}$

ب $أ = -٤$

$ح_{ن} = ٨$

$ح_{٢ن} = ٢٠,٨$

استخدم $ح_{ن} = أ + (ن - ١)د$:

$٨ = -٤ + (ن - ١)د$

$١٢ = (ن - ١)د$ .... (١)

و: $٢٠,٨ = -٤ + (٢ن - ١)د$

$٢٤,٨ = (٢ن - ١)د$ .... (٢)

اقسم المعادلة (٢) على المعادلة (١):

$\frac{٢٤,٨}{١٢} = \frac{(٢ن - ١)د}{(ن - ١)د}$

بسّط د لتحصل على:

$٢٤,٨(ن - ١) = ١٢(٢ن - ١)$

$٢٤,٨ن - ٢٤,٨ = ٢٤ن - ١٢$

$٠,٨ن = ١٢,٨$

$ن = ١٦$

٨) أ **النموذج الأول**: متتالية حسابية

أ = ١٠٠٠ ، د = ١٠٠٠

اليوم الأول الجائزة = ١٠٠٠ ريال عُماني

خلال التبرعات الخيرية = ٥٪ من ١٠٠٠ ريال عُماني = ٥٠ ريالًا عُمانيًا

اليوم الثاني الجائزة = ٢٠٠٠ ريال عُماني

خلال التبرعات الخيرية = ٥٪ من ٢٠٠٠ ريال عُماني = ١٠٠ ريال عُماني

اليوم الثالث الجائزة = ٣٠٠٠ ريال عُماني

خلال التبرعات الخيرية = ٥٪ من ٣٠٠٠ ريال عُماني = ١٥٠ ريالًا عُمانيًا

وهكذا...

التبرعات الخيرية تشكل متتالية هندسيّة:

٥٠، ١٠٠، ١٥٠،....

استخدم $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}]$

أ = ٥٠ ، ن =٤٠ ، د = ٥٠

$\text{جـ}_{٤٠} = \frac{٤٠}{٢}[٢ \times ٥٠ + (٤٠ - ١) \times ٥٠]$

$\text{جـ}_{٤٠} = ٤١٠٠٠$

إذا استخدم النموذج الأول تكون التبرعات الخيرية ٤١٠٠٠ ريال عُماني.

ب **النموذج ٢:** متتالية هندسية أ = ١٠٠٠، د = ١٠٠٠

اليوم الأول الجائزة = ١٠٠٠ ريالات عُمانية

خلال التبرعات الخيرية = ٥٪ من ١٠٠٠ ريالات عُمانية = ٥٠ ريال عُماني

اليوم الثاني الجائزة = ١٠٠٠ × ١,١ = ١١٠٠ ريال عُماني

خلال التبرعات الخيرية= ٥٪ من ١١٠٠ ريالات عُمانية = ٥٥ ريال عُماني

اليوم الثالث الجائزة = ١١٠٠ × ١,١ = ١٢١٠ ريال عُماني

خلال التبرعات الخيرية = ٥٪ من ١٢١٠ ريالات عُمانية = ٦٠,٥ ريال عُماني

وهكذا

استخدم $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$ ،

أ = ٥٠، ر = ١,١، ن = ٤٠

$\text{جـ}_{٤٠} = \frac{٥٠(١^{٤٠} - ١)}{١,١ - ١}$

= ٢٢١٢٩,٦٢

إذا استخدم النموذج ٢ يكون مقدار التبرع الخيري ٢٢١٠٠ ريال عُماني لأقرب ١٠٠ ريال.

ملاحظة: الإجابة نفسها، يكون التبرع للجمعيات الخيرية إذا كان

النموذج ١: أ = ١٠٠٠، د ١٠٠٠، ن = ٤٠

$\text{جـ}_{٤٠} = \frac{٤٠}{٢}[٢ \times ١٠٠٠ + (٤٠ - ١) \times ١٠٠٠]$

= ٨٢٠٠٠٠ ريال عُماني

ثم أوجد ٥ ٪ من ٨٢٠٠٠٠ وهي ٤١٠٠٠ ريال عُماني

النموذج ٢: أ = ١٠٠٠، ر = ١,١، ن = ٤٠

$\text{جـ}_{٤٠} = \frac{١٠٠٠(١,١^{٤٠} - ١)}{١,١ - ١}$

$\text{جـ}_{٤٠}$ = ٤٤٢٥٩٢,٥٥ ثم نجد أن ٥٪ من ٤٤٢٥٩٢,٥٥ = ٢٢١٢٩,٦٢ ريال عُماني (مقربة إلى أقرب عددَين عشريَّين)

٩) أ المتتالية الحسابية:

الحدّ الأول أ = ١

الحدّ الثاني = $(\text{جتا(س)})^٢$

استخدم $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}$:

الحدّ الثاني ن = ٢، أ = ١

$(\text{جتا(س)})^٢ = ١ + (٢ - ١)\,\text{د}$

$(\text{جتا(س)})^٢ - ١ = \text{د}$

استخدم $(\text{جا(س)})^٢ + (\text{جتا(س)})^٢ = ١$

$(\text{جتا(س)})^٢ - ١ = -(\text{جا(س)})^٢$

$\therefore \text{د} = -(\text{جا(س)})^٢$

استخدم $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}]$

ن = ١٠، أ = ١، د = $-(\text{جا(س)})^٢$

$\text{جـ}_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٢ \times ١ + (١٠ - ١) \times -(\text{جا(س)})^٢]$

$\text{جـ}_{١٠} = ٥\,[٢ - ٩(\text{جا(س)})^٢]$

$\text{جـ}_{١٠} = ١٠ - ٤٥(\text{جا(س)})^٢$

أ = ١٠، ب = ٤٥

ب متتالية هندسيّة:

الحدّ الأول أ = ١

الحدّ الثاني أر = $\frac{١}{٣}$ ظا^٢(هـ)

اقسم الحدّ الثاني على الحدّ الأول لتحصل على:

$$\frac{\text{أر}}{\text{أ}} = \frac{\frac{١}{٣}\,\text{ظا}^{٢}(\text{هـ})}{١}$$

ر = $\frac{١}{٣}$ ظا^{٢}(هـ)

المتتالية متقاربة لذا:

$-١ <$ ر < ١

أو: $-١ < \frac{١}{٣}$ ظا^{٢}(هـ) < ١

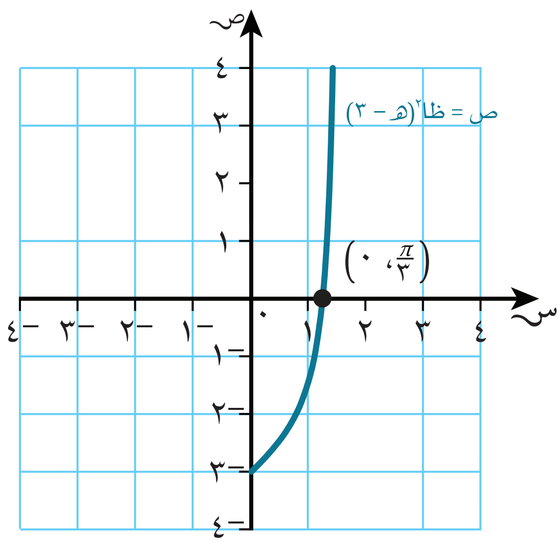
حلّ $\frac{١}{٣}$ ظا^{٢}(هـ) < ١ لتحصل على:

ظا^{٢}(هـ) < ٣

ظا^{٢}(هـ) $-٣ < ٠$

منحنى الدالّة ص = ظا^{٢}(هـ) -٣ لكل $٠ <$ هـ $< \frac{١}{٣}\pi$:

(هذا هو منحنى الدالّة ص = ظا^{٢}(هـ) وقد سُحِب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix}$)



نجد المقطع من المحور −هـ بحل المعادلة

ظا^{٢}(هـ) = ٣

ظا(هـ) = $\pm\sqrt{٣}$

إذا ظا(هـ) = $\sqrt{٣}$ يكون قياس هـ = $\frac{\pi}{٣}$

(إذا ظا (هـ) = $-\sqrt{٣}$ فلا يوجد حلّ في هذا المجال).

حل $\frac{١}{٣}$ ظا^{٢}(هـ) > -١ لتحصل على:

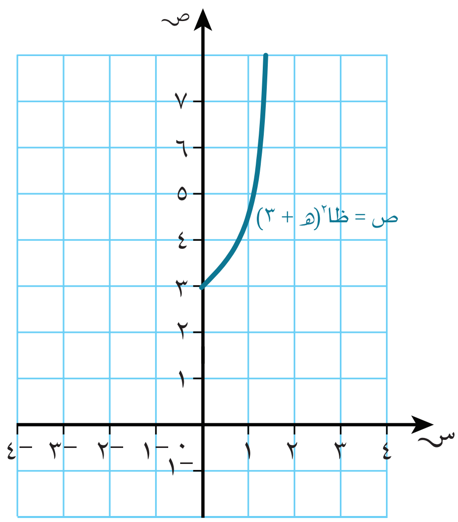
ظا^{٢}(هـ) > -٣

ظا^{٢}(هـ) $+٣ > ٠$

منحنى الدالّة ص

= ظا^{٢}(هـ) + ٣ لكل $٠ <$ هـ $< \frac{١}{٣}\pi$:

(هذا هو منحنى الدالّة ص = ظا^{٢}(هـ) وقد سُحِب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$)



من المنحنى تلاحظ أنه لا يوجد مقطع من محور −هـ

حل بديل: نجد المقطع من المحور −هـ بحلّ:

= ظا^{٢}(هـ) + ٣

ظا^{٢}(هـ) = −٣ لا يوجد حلّ لهذه المعادلة، أي لا يوجد مقطع من المحور −هـ.

للمتباينة $\frac{١}{٣}$ ظا^{٢}(هـ) < ١ نحتاج إلى أن نجد مدى قيم هـ عندما يكون المنحنى سالبًا (تحت المحور −هـ).

الحلّ هو $٠ <$ هـ $< \frac{\pi}{٣}$ (هـ $< \frac{\pi}{٣}$ حلّ مقبول).

٢) استخدم $\text{ج}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$، ر = $\frac{١}{٣}$ ظا^{٢}(هـ)، أ = ١:

$\text{ج}_\infty = \frac{١}{١ - \frac{١}{٣}\text{ظا}^{٢}(\text{هـ})}$، إذًا = $\frac{\pi}{٦}$ فإن:

$\text{ج}_\infty = \frac{١}{١ - \frac{١}{٣}\text{ظا}^{٢}\left(\frac{\pi}{٦}\right)}$،

$\text{ج}_\infty = \frac{١}{١ - \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣}}$،

$\text{ج}_\infty = ١,١٢٥$

١٠) أ متتالية حسابية

الحدّ الأول أ = ٤ س

الحدّ الثاني = س^{٢}

د = ١٢

س^{٢} − ٤س= ١٢

س^{٢} − ٤ س− ١٢ = ٠

(س − ٦) (س + ٢) =٠

س = ٦ أو س = −٢

إذا كان س= ٦ الحدّ الثالث = ٦^{٢} + ١٢ أو ٤٨.

إذا كان س= −٢ الحدّ الثالث = (−٢)^{٢} + ١٢ أو ١٦.

قِيم الحدّ الثالث الممكنة هي ٤٨، ١٦

ب المتتالية هندسيّة

الحدّ الأول أ = ٤س

الحدّ الثاني أر = س^{٢}

اقسم لتحصل على:

$\frac{\text{أر}}{\text{أ}} = \frac{\text{س}^{٢}}{٤\text{س}}$

فيكون ر = $\frac{\text{س}}{٤}$

استخدم $\text{ج}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$

$٨ = \frac{٤\text{س}}{١ - \frac{\text{س}}{٤}}$

$٨\left(١ - \frac{\text{س}}{٤}\right) = ٤\text{س}$

٨ − ٢س = ٤س

٦س = ٨

س = $\frac{٤}{٣}$

وعليه، فإن ر = $\frac{\frac{٤}{٣}}{٤}$ أو $\frac{١}{٣}$

الحدّ الثالث هو أر^{٢} = $٤\left(\frac{٤}{٣}\right)\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٧}$

١١) أ المتتالية الهندسيّة

الحدّ الثالث أر^{٢} = $\frac{١}{٣}$

الحدّ الرابع أر^{٣} = $\frac{٢}{٩}$

اقسم لتحصل على:

$\frac{\text{أر}^{٣}}{\text{أر}^{٢}} = \frac{\frac{٢}{٩}}{\frac{١}{٣}}$

ر = $\frac{٢}{٣}$

الحدّ الأوّل أ حيث $\frac{\text{أر}^{٢}}{\text{أر}^{٢}} = \frac{\frac{١}{٣}}{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}}$

أ = $\frac{٣}{٤}$

استخدم $\text{ج}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$:

$\text{ج}_\infty = \frac{\frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٢}{٣}}$

$\text{ج}_\infty = ٢\frac{١}{٤}$

ب المتتالية الحسابية:

ن = ٥

الحدّ الخامس (الأكبر) = ٤ × الحدّ الأول

وعليه، فإنه إذا كان الحدّ الأول أ فإن الحدّ الخامس ٤أ.

جـ$_{٥}$ = ٣٦٠

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$(أ + ل)

استخدم جـ$_{٥}$ = $\frac{٥}{٢}$ (أ + ٤أ)

٣٦٠ = $\frac{٥}{٢}$ (أ + ٤أ)

١٢,٥أ = ٣٦٠

أ = ٢٨,٨

قياس أكبر زاوية هو ٤ × ٢٨,٨° أو ١١٥,٢°

١٢) أ المتتالية الحسابية

جـ$_{١٠}$ = ٤٠٠

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$[٢أ + ٩د]

٤٠٠ = ١٠أ + ٤٥د............ (١)

مجموع الحدود العشرة من ح$_{١١}$ إلى ح$_{٢٠}$ = ١٠٠٠

جـ$_{١-٢٠}$ = جـ$_{١-١٠}$ + جـ$_{١١-٢٠}$

جـ$_{١-٢٠}$ = ٤٠٠ + ١٠٠٠

= ١٤٠٠

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

جـ$_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$[٢أ + ١٩د]

١٤٠٠ = ٢٠ أ + ١٩٠د .... (٢)

اضرب المعادلة (١) في المعادلة (٢) ثم اطرح المعادلة (٢) لتحصل على:

٨٠٠ = ٢٠أ + ٩٠د

١٤٠٠ = ٢٠أ + ١٩٠د

−٦٠٠ = −١٠٠د

د = ٦

عوّض عن د = ٦ في المعادلة (١) لتحصل على:

٤٠٠ = ١٠أ + ٤٥ × ٦

١٠أ = ١٣٠

أ = ١٣

الأساس ٦ والحدّ الأول ١٣.

ب المتتالية الهندسية...... ١

الحدّ الأول: أ، الأساس: ر، جـ$_{\infty}$ = ٦

جـ$_{\infty}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$ = ٦

أ = ٦(١ − ر) ...... (١)

المتتالية الهندسية...... ٢

الحدّ الأول: ٢أ، الأساس: ر^{٢}، جـ$_{\infty}$ = ٧

جـ$_{\infty}$ = $\frac{٢أ}{١ - ر^{٢}}$ = ٧

٢ أ = ٧ (١ − ر^{٢})

أ = ٣,٥ (١ − ر^{٢}) .... (٢)

مساواة المعادلة (١) مع المعادلة (٢)

٦(١ − ر) = ٣,٥(١ − ر^{٢})

استخدم الفرق بين مربّعَين لتحصل على:

٦(١ − ر) = ٣,٥ (١ − ر)(١ + ر)

اقسم الطرفَين على (١ − ر) لتحصل على:

٦ = ٣,٥(١ + ر)

٦ = ٣,٥ + ٣,٥ر

ر = $\frac{٥}{٧}$

عوّض عن ر= $\frac{٥}{٧}$ في المعادلة (١) لتحصل على:

أ = ٦ (١ − $\frac{٥}{٧}$)

أ = $\frac{١٢}{٧}$

الوحدة الرابعة
تحليل البيانات
Data Analysis

مخطط توزيع الحصص

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٤-١ شريحة عرض توضيحي (PPT) ٤-أ	الوسط الحسابي (المعدل)	٢	٤-١ تحسب وتستخدم الوسط الحسابي لبيانات أولية ومجمّعة ومعروضة في جدول متضمنة بيانات مشفرة.	النزعة المركزية، البيانات المشفرة، الوسط الحسابي
٤-٢ شريحة عرض توضيحي (PPT) ٤-ب	التباين والانحراف المعياري	٤	٤-٢ تحسب وتستخدم التباين والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات، ولمجموعة بيانات مجمّعة من البيانات الأولية، مع المجاميع أو المجاميع المشفرة ($\sum$س، $\sum$س^{٢}، $\sum$(س − أ)، $\sum$(س − أ)^{٢}).	التباين، الانحراف المعياري
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة	١		

٤-١ الوسط الحسابي (المعدل)

ملاحظات للمعلمين

قبل أن تحاول تقديم هذا الدرس إلى الطلبة، من الحكمة أن تتعامل أولًا مع الحسابات الأساسية لإيجاد الوسط الحسابي للجداول التكرارية كما في المثال ٢، وهي فرصة ممكنة لتقديم الرمز Σ (ويقرأ على أنه مجموع أو سيغما). وستواجه لاحقًا موقفًا مشابهًا عندما تتعامل مع الجداول التكرارية المجمعة. لذا تأكد من امتلاك الطلبة مهارة الحسابات الأساسية واستخدام جميع الرموز قبل الشروع في شرح هذا الدرس.

أفكار للتعليم

الوسط الحسابي: شريحة العرض التوضيحي الإلكتروني ٤-١ موجودة لمساعدتك على حساب الوسط الحسابي للجداول التكرارية، وهي إحدى مظاهر التطوير المهمة في هذه الوحدة والتي ستحتاج إليها في الدرس التالي.

ابتعد عن الجداول التكرارية الطويلة التي تتطلّب إجراء حسابات ليست ذات أهمّية، بل تعمّد أن تكون قصيرة حتى لا يشعر الطلبة بالملل.

تتمحور العملية حول س ت، Σت، Σس ت، $\frac{\Sigma \text{س ت}}{\Sigma \text{ت}}$، وهي مهمة في المواقف المختلفة.

يوجد تطور في مفهوم 'الوسط الحسابي' في الأمثلة المحلولة في الدرس، وفي تمارين ٤-١، وقد جُزّئ هذا الدرس إلى أربعة أجزاء وهي: البيانات غير المجمعة (المفردة)، ومجموعة البيانات المجمعة، والجداول التكرارية المجمعة (ذات الفئات)، والبيانات المشفرة. وستجد في التمارين ٤-١ ما يناسب كل مفهوم من هذه المفاهيم.

قد ترغب في استخدام جداول البيانات الإلكترونية أكثر من القلم والورقة والآلة الحاسبة.

سوف يدعم بناء جدول بسيط باستخدام برنامج إكسل Excel العملية بشكل جيد، حيث يحتاج الطلبة إلى فهم العملية ليكون بمقدورهم تضمين الخلايا بالصيغ المطلوبة.

س	ت	س ت
٢	١	٢
٣	٤	١٢
٤	٦	٢٤
٥	٤	٢٠
٦	١	٦
المجموع	١٦	٦٤
	الوسط الحسابي =	٤

التشفير: استخدام الجداول البيانية الإلكترونية تساعد في التحقق من صحة البيانات المشفرة. فإزاحة البيانات لملاحظة التأثير أمر يبيّن الموضوع بشكل أوضح ويعيد التأكيد على الرموز. ومن السهل بناء التلخيصات الأساسية الآتية باستخدام جداول البيانات الإلكترونية. قد يكون الطلبة الأكثر كفاءة قادرين على تحقيق هذه العملية بسهولة.

يجب تشجيع الطلبة على التفكير في الربط بين إزاحة البيانات في كلا الاتجاهَين س ± أ

س	س − ١	ت	(س − ١) ت
٢	١	١	١
٣	٢	٤	٨
٤	٣	٦	١٨
٥	٤	٤	١٦
٦	٥	١	٥
		١٦	٤٨
		$\frac{\sum (س - ١)ت}{\sum ت}$	٣
		$\bar{س} = ٣ + ١ = ٤$	

س	س − ٢	ت	(س − ٢) ت
٢	٠	١	٠
٣	١	٤	٤
٤	٢	٦	١٢
٥	٣	٤	١٢
٦	٤	١	٤
		١٦	٣٢
		$\frac{\sum (س - ٢)ت}{\sum ت}$	٢
		$\bar{س} = ٢ + ٢ = ٤$	

س	س − ٣	ت	(س − ٣) ت
٢	-١	١	-١
٣	٠	٤	٠
٤	١	٦	٦
٥	٢	٤	٨
٦	٣	١	٣
		١٦	١٦
		$\frac{\sum (س - ٣)ت}{\sum ت}$	١
		$\bar{س} = ١ + ٣ = ٤$	

س	س − ٤	ت	(س − ٤) ت
٢	-٢	١	-٢
٣	-١	٤	-٤
٤	٠	٦	٠
٥	١	٤	٤
٦	٢	١	٢
		١٦	٠
		$\frac{\sum (س - ٤)ت}{\sum ت}$	٠
		$\bar{س} = ٠ + ٤ = ٤$	

يمكنك ملاحظة إمكانية استعادة الوسط الحسابي في كل حالة من خلال إجراء الإزاحة العكسية.

دعم الطلبة

يمكن أن يتدرب الطلبة على حساب الوسط الحسابي باستخدام جداول تكرارية بسيطة حتى يصبحوا أكثر ثقة بأنفسهم.

تحدّي الطلبة

سيجد أكثر الطلبة صعوبة في هذا الدرس؛ لذا إذا كانت هذه الوحدة تتضمن الكثير من الأسئلة ذات مستوى متقدّم، فانتهز الفرصة واطلب إليهم تحويل الحل في المثال المحلول إلى حل يستخدم الرمز $\sum$ للتعبير عن المجموع، ليصبح 'استكشف ١' بعد ذلك مثالًا على هذا الاستخدام. يمكن للطلبة المجيدين استكشاف تشفير البيانات عن طريق الضرب في ثابت. ويمكنهم استكشاف كيف تأثر الوسط.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

من خلال هذا النشاط سيحدد الطلبة الحالات التي تكون فيها المعادلة

$\frac{\sum \text{أ} + \sum \text{ب}}{\text{م} + \text{ن}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sum \text{أ}}{\text{م}} + \frac{\sum \text{ب}}{\text{ن}}\right)$ صحيحة، حيث يوجد ثلاث حالات تحقق ذلك:

١ عندما م = ن، أي عندما يكون عدد قيم المجموعة أ يساوي عدد قيم المجموعة ب.

٢ عندما يكون $\sum$أ = $\sum$ب = ٠، أي عندما يكون مجموع قيم كلتا المجموعتَين يساوي صفرًا.

٣ عندما يكون $\frac{\sum \text{أ}}{\text{م}} = \frac{\sum \text{ب}}{\text{ن}}$ (أو ن $\sum$أ = م$\sum$ب)، أي عندما يكون الوسط الحسابي للمجموعة أ، يساوي الوسط الحسابي للمجموعة ب.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٤–١

٤-٢ التباين والانحراف المعياري

ملاحظات للمعلمين

يُعدّ هذا الموضوع مهمًا جدًا بين مواضيع هذه الوحدة، حيث يتم استخدامه في الصناعة والتصنيع. إذ يوجد في الدرس ٤-٢ الكثير من الأمثلة الواقعية المشابهة لمثال ماكينة إعداد القهوة التي تساعد الطلبة على ملاحظة أهمية هذا المفهوم. فعدد قطع الحلوى في صندوق، سوف يختلف حتى لو تمت تعبئته بواسطة الآلة.

أفكار للتعليم

إن تقديم هذا الدرس باستخدام جداول البيانات الإلكترونية (Excel) أمر سهل. ويجده الطلبة مفيدًا في ملاحظة معنى الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربع الانحراف عن الوسط الحسابي، بذلك يكون التعريف واضحًا بدلًا من أن يكون جملًا غير مفهومة أو قواعد حسابية معقدة. كما يساعد هذا الأمر أيضًا في بناء الفكرة تدريجيًا، فمثلًا:

المرحلة ١ (أ) الانحراف عن الوسط الحسابي، (ب) الوسط الحسابي للانحرافات عن الوسط الحسابي، (جـ) هل يحدث هذا لجميع التوزيعات؟ (د) حل مسألة أخرى يختارها الطلبة.

س	ت	س ت
٢	١	٢
٣	٤	١٢
٤	٦	٢٤
٥	٤	٢٠
٦	١	٦
	١٦	٦٤
	س̄ = ٤	

س − س̄	ت	(س − س̄)ت
−٢	١	−٢
−١	٤	−٤
٠	٦	٠
١	٤	٤
٢	١	٢
	١٦	٠
	الوسط الحسابي للانحرافات عن الوسط الحسابي = ٠	

المرحلة ٢ لماذا يحدث هذا بغض النظر عن الأرقام التي نستخدمها؟ كيف نتجاوز هذه المشكلة؟

أحد الحلول هو أخذ القيمة المطلقة لـ س − س̄

المرحلة ٣ أوجِد مربع الانحرافات لتتخلص من الإشارة السالبة للقيم.

أوجِد الانحرافات عن الوسط الحسابي... أوجِد مربع الانحرافات... أوجِد الوسط الحسابي لها.

س	ت	س ت
٢	١	٢
٣	٤	١٢
٤	٦	٢٤
٥	٤	٢٠
٦	١	٦
	١٦	٦٤
	$\bar{س} = ٤$	

س - $\bar{س}$	ت	(س - $\bar{س}$)^٢	(س - $\bar{س}$)^{٢}ت
٢−	١	٤	٤
١−	٤	١	٤
٠	٦	٠	٠
١	٤	١	٤
٢	١	٤	٤
	١٦		١٦
الوسط الحسابي للانحرافات عن الوسط الحسابي			١

يُسمى متوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي بالتباين، وقد تكون وحدة قياسه مثلًا كيلوغرامًا مربعًا، والتي تكون أحيانًا بلا معنى، لذا نأخذ غالبًا الجذر التربيعي لهذه القيمة لنعطيها وحدة قياس مقبولة. ويسمى الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي 'الانحراف المعياري'. من المفيد استكشاف الرمز Σ خلال هذا العمل وذلك للتدرب على استخدامه.

عليك التفكير في تقديم الطريقة البديلة الأكثر فاعلية. وكبديل لذلك، تكفي الإشارة الى موضوع عدم الدقة في الطريقة الأولى في المثال ٩

صيغة بديلة			
س	ت	س ت	س^{٢}ت
٢	١	٢	٤
٣	٤	١٢	٣٦
٤	٦	٢٤	٩٦
٥	٤	٢٠	١٠٠
٦	١	٦	٣٦
	١٦	٦٤	٢٧٢
التباين = $\frac{\Sigma س^٢ ت}{\Sigma ت} - (\bar{س})^٢$			

استخدم حزمة من بطاقات مكتوب عليها رموز مثل Σت ، Σس ت ، Σ(س)^{٢}ت ، Σس،... إلخ، ومجموعة أخرى من البطاقات مكتوب عليها: الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري،... إلخ، على الطلبة عندئذ أن يختاروا أجزاء مكونات الصيغة من حزمة البطاقات الأولى، الأمر الذي يساعد على تثبيت الصيغ الرياضية. وهو تحدٍّ لتجميع كل البطاقات بصورة صحيحة بهدف تركيب الصيغ، وبخاصة إذا ضمنتها بعض البطاقات غير الصحيحة مثل: Σت^٢، Σت^{٢}س. يمكن أن يعمل الطلبة في ثنائيات مع تحديد الوقت... وعندها يمكنهم إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للأوقات التي يستغرقونها للانتهاء من اختيار الصيغ الصحيحة.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

إذا أشرنا إلى الأعداد الـ ٥ بـ $س_١$، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$، نعرف أن $س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤ + س_٥ = ٥٠$

مجموع الانحرافات $= (س_١ - ١٠) + (س_٢ - ١٠) + (س_٣ - ١٠) + (س_٤ - ١٠) + (س_٥ - ١٠)$

$= (س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤ + س_٥) - ٥٠$

$= ٠$

مجموع الانحرافات = ٠ فيكون الوسط الحسابي للانحرافات = ٠

الوسط الحسابي لأي خمسة أعداد $\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤ + س_٥}{٥}$

مجموع الانحرافات $= س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤ + س_٥ - \left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤ + س_٥}{٥}\right) = ٠$

الوسط الحسابي للانحرافات = ٠

الوسط الحسابي (والمجموع) للانحرافات عن الوسط الحسابي لأية مجموعة من الأعداد يساوي صفرًا.

الوسط الحسابي للانحرافات ليست طريقة مناسبة لقياس تباين مجموعة من البيانات، لأن الانحرافات الموجبة والسالبة يلغي بعضها بعضًا.

استكشف ٣

	التباين	الانحراف المعياري (ع)
عامر (س)	٩,٢	٣,٠٣٣
بدر (س - ١)	٩,٢	٣,٠٣٣
سليم (س + ٣)	٩,٢	٣,٠٣٣

مقاييس التباين هي ذاتها للمجموعات الثلاث.

لا يتأثر الانحراف المعياري والتباين بإضافة ثابت لجميع قيم مجموعة البيانات.

- ع(س) = ع(س - ١) = ع(س + ٣)
- تباين (س) = تباين (س - ١) = تباين (س + ٣)

دعم الطلبة

سيفهم معظم الطلبة المنحى السابق وسيتمكنون من استخدام هذه المنهجية، على الرغم من عدم تمكنهم من استخدام الرموز بشكل كامل. قد تكون حسابات بعض الطلبة الآخرين غير مناسبة.

سيجد الطلبة دعمًا لتحقيق النتيجة المطلوبة قبل الوصول إلى دراسة التوزيع المتصل الأكثر تعقيدًا، وذلك من خلال بعض التوزيعات المنفصلة المشابهة للسؤال ٣ من التمارين ٤ - ٢ وبأرقام ضئيلة، بحيث لا تكون الحسابات عائقًا أمام فهم المنهجية.

العرض التوضيحي الإلكتروني ٤-٢ يوضح الطريقة البديلة لتلك المبيّنة في جداول البيانات الإلكترونية.

ذكّر جميع الطلبة بصيغة الوسط الحسابي وبصيغة الانحراف المعياري للبيانات المنفصلة (غير المجمعة) والمجمعة.

لتدعم الطلبة في هذا الدرس، بيّن لهم الصيغ المناسبة، وذكرهم بكونها تدريب جبري أكثر منه أحصائيًا، وبأنه عليهم الحصول أحيانًا على معلومات مفيدة حول الموضوع وليس فقط الاكتفاء باحتساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري كل مرة.

قد تكون فكرة جيدة أن تبدأ معهم بعدد قليل من الأسئلة البسيطة، وباستخدام الوسط الحسابي فقط في البداية، مثل:

أ احسب الوسط الحسابي إذا كان $\sum$س ت = ٢٥ و $\sum$ت = ٢٠

ب الوسط الحسابي ٥ و $\sum$س ت = ٢٥، احسب $\sum$ت؛

بعد الانتهاء من لعبة البطاقات، يمكن أن ينتقلوا إلى حل السؤال ١ من تمارين ٣ج (وأيّة أسئلة إضافية تكون قد كتبتها لهم)، ليجدوا الوسط الحسابي فقط قبل المباشرة بأسئلة التباين والأسئلة المقالية التي تتطلب فهمًا دقيقًا لمواضيع الدرس في تمارين ٣ج.

تحدي الطلبة

سوف تتحدى الأسئلة ١٢، ١٣ من تمارين ٤-٢ معظم الطلبة. الرابط Maximum scattering من الموقع الإلكتروني (NRICH) أشبه بمهمة تساعد الطلبة على التقاط بعض هذه الأفكار، وتعد تحديًا جديرًا بالطلبة المجيدين.

ويمكن أن يتبع ذلك مهمة أخرى على الرابط Spread من (NRICH).

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٤-٢

شرائح عرض توضيحي (PPT) تحليل البيانات

الوحدة الرابعة – تحليل البيانات

العرض التوضيحي (٤ – أ)

https://ict.moe.gov.om/library/file/Content/11/Math/OMN_ADV_MATH_G11_S1_TR_PPT_Unit%204_MOE_21_12_22/index.pdf

اختصار الرابط

https://ict.moe.gov.om

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الوسط الحسابي

سنقوم بمراجعة كيفية حساب الوسط الحسابي من جدول تكراري

س	ت
١	١
٢	٤
٣	٦
٤	٤
٥	١

يشير الجدول إلى أن العدد ١ يظهر مرة واحدة، والعدد ٢ يظهر ٤ مرات، والعدد ٣ يظهر ٦ مرات، وهكذا.

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الوسط الحسابي

س	ت
١	١
٢	٤
٣	٦
٤	٤
٥	١

ناتج ضرب س × ت هي القيم: ١، ٨، ١٨، ١٦، ٥

هل يمكنك أن ترى كيف نسجل هذا الأمر في الجدول؟

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الوسط الحسابي

س	ت	
١	١	١
٢	٤	٨
٣	٦	١٨
٤	٤	١٦
٥	١	٥

يمكننا الآن القيام ببعض الحسابات.

نحتاج إلى المزيد من الخلايا لتسجيل النتائج.

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الوسط الحسابي

س	ت	؟
١	١	١
٢	٤	٨
٣	٦	١٨
٤	٤	١٦
٥	١	٥
	؟	؟

كيف علينا أن نملأ الخلايا التي بها علامة «؟»

سنقوم باستخدام الرمز $\sum$ والذي هو اختصار المجموع.

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الوسط الحسابي

س	ت	؟
١	١	١
٢	٤	٨
٣	٦	١٨
٤	٤	١٦
٥	١	٥
	$\sum$ت = ١٦	؟

يمكننا تسجيل النتائج في صف الخلايا الجديدة. $\sum$ت = ١٦ يعني أنه ينتج من جمع التكرارات ١٦ مدخلة، بالنسبة إلى العمود الأخير... ماذا يمكن أن يكون عنوان العمود؟

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الوسط الحسابي

س	ت	؟
١	١	١
٢	٤	٨
٣	٦	١٨
٤	٤	١٦
٥	١	٥
	$\sum$ت = ١٦	؟

لقد قمنا بضرب الأعداد في العمود س والعمود ت، لذا نسمي عنوان العمود س ت. ماذا نضع في آخر خلية من آخر عمود؟

الوسط الحسابي

س	ت	س ت
١	١	١
٢	٤	٨
٣	٦	١٨
٤	٤	١٦
٥	١	٥
	$\sum$ت = ١٦	$\sum$س ت = ٤٨

في الخلية الأخيرة، نضع مجموع قيم س ت، وهو $\sum$س ت = ٤٨ نستخدم الرمز $\overline{س}$ للوسط الحسابي.

$\therefore$ $\overline{س}$ = $\sum$س ت ÷ $\sum$ت

= ٤٨ ÷ ١٦

= ٣

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الوحدة الرابعة – تحليل البيانات

العرض التوضيحي (٤ – ب)

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

التباين

س	ت
١	١
٢	٤
٣	٦
٤	٤
٥	١

علينا أولًا أن نجد الوسط الحسابي.

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

التباين

س	ت	س ت
٢	١	٢
٣	٤	١٢
٤	٦	٢٤
٥	٤	٢٠
٦	١	٦
	$\sum$ت = ١٦	$\sum$س ت = ٦٤

$$\overline{س} = \frac{٦٤}{١٦} = ٤$$

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

التباين

سنستخدم الصيغة:

$$\text{التباين} = \frac{\sum س^{٢}ت}{١٦} - (\bar{س})^{٢}$$

ما يعني أننا نحتاج إلى عمود آخر لقيم ت^{٢}س:

س	ت	س ت	س^{٢} ت
٢	١	٢	
٣	٤	١٢	
٤	٦	٢٤	
٥	٤	٢٠	
٦	١	٦	
	$\sum$ت = ١٦	$\sum$س ت = ٦٤	

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

التباين

س	ت	س ت	س ت^{٢}
٢	١	٣	٤
٣	٤	١٢	٣٦
٤	٦	٢٤	٩٦
٥	٤	٢٠	١٠٠
٦	١	٦	٣٦
	$\sum$ت = ١٦	$\sum$س ت = ٦٤	$\sum$س^{٢}ت = ٢٧٢

$$\text{التباين} = \frac{\sum س^{٢}ت}{\sum ت} - (\bar{س})^{٢} = \frac{٢٧٢}{١٦} - ٤^{٢} = ١$$

إجابات تمارين كتاب الطالب – الوحدة الرابعة: تحليل البيانات

معرفة قبلية

١) الوسط الحسابي = ٥

٢) ١,٩٤

تمارين ٤-١

١) أ ٥٠ ب ٧,١ ج $٤\frac{١٣}{٤٠}$

٢) أ ب = ±٧ ب ق = ٩ أو –١٠

٣) أ ٢٣,٢٥ ب ١٠٦٢
ج ٨٨ د ١٢
هـ ١١٣,٦٧

٤) أ ١٩
ب ٣,٦٨٨٢٥

٥) أ = ١٢

٦) أ ٤,١
ب ٢٤,٩٢٥

٧) ٧٣,٨٪

٨) ٥٤٦ ريالًا عُمانيًا

٩) ٣٠ سنة: لأقرب شهر
الإجابة ليست دقيقة لأن الوسط الحسابي هنا تقديري ولا نعرف العمر الدقيق لكل عضو.

١٠) أ الوسط الحسابي لأجور معظم الموظفين (باستثناء الموظف الذي يتقاضى ٣٦ ريالًا) هو ٣,٢٥
ب الوسط الحسابي للأجور ٤,١٤ ريال ليس مقياسًا جيدًا، لأن ٣٦ موظفًا يتقاضون في الساعة أقل من الوسط الحسابي.

١١) $٩\frac{٢}{٩}$ سم

١٢) ٥٤,٦

١٣) أ ٧٤ ب ٩٤ ج ٦٤

١٤) ١٨

١٥) ٢٠٤

١٦) ٤٠,٣٥ ملم

١٧) –٠,٨

١٨) ن = ١٢، لم يتم أخذ أي من الثلاجات ال ١٢٠ من المستودع.

١٩) يحتاج إلى يومَين إضافيّين، إذا عمل بالمعدل نفسه، أو أن الغرف الباقية تحتاج إلى الزمن نفسه (أي أن قياساتها متماثلة).

٢٠) أ ١) ٥,٨٩ سم ٢) ٥,٧٦ سم
ب ١٥٢°

تمارين ٤-٢

١) أ الوسط الحسابي = ٣٧,٥، الانحراف المعياري = ١٢,٤
ب الوسط الحسابي = ٠,٤٥، الانحراف المعياري = ٩,٢٣

٢) أ تباين (الأحياء) = تباين (الكيمياء) = تباين (الفيزياء) = ٩٦
ب لا؛ الأوساط الحسابية غير متساوية (الأحياء = ٣٣، الكيمياء = ٥٣، الفيزياء = ٦٣)

٣) الوسط الحسابي = ١ أو ١,٦٩، التباين = ١,٦٤

٤) الوسط الحسابي = ٢، الانحراف المعياري = ٠,٨٠٣

٥) أ الطالبات: الوسط الحسابي = ٤٠
الانحراف المعياري =١٣,٠ دقيقة
الطلاب: الوسط الحسابي = ٤٠
الانحراف المعياري = ١٦,٣ دقيقة

ب ١) الوسط الحسابي متساوٍ للطلاب والطالبات.
٢) وقت الطلاب متباين ومتشتت أكثر من وقت الطالبات.

٦) ٥,٩٤ سم

٧) أ ك = ٦ ب تباين(س) = ٢,٧٢

٨) أ أ = ١٣، ب = ٤٠ ب ٦,٢٣ سم

٩) أ ٦٥,٣٧٥ ب ٩,١٧
ج ١٢٠ د ١٦١٨٠٠
هـ ٢٨

١٠) ١,٥

١١) أ ٧,٩٢ ملم ب ٢٤٠٠٩,٨

١٢) أ الوسط الحسابي= ٠,٩٧ طنًا،
الانحراف المعياري= ٠,٤٤ طنًا
ب يتناقص الوسط الحسابي ويصبح ٠,٧٣ طنًا؛ ويتزايد الانحراف المعياري إلى ٠,٥٧ طنًا

١٣) س = ١٢ ، ص = ١٨
عمر سالم ٢٢ سنة.
يتزايد التباين من ٦٩,١٢ إلى ٧٢,٨٨ سنة

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) أ ١٥,١٥
ب ١٣,٣

٢) ٦

٣) أ برهان
ب ٠,٩١٧ أو ٠,٩٢

٤) أ ٠,٣١٩ م
ب يزداد الوسط الحسابي بمقدار ١,٥ سم ليصبح ٩٠ سم، الانحراف المعياري لا يتغير.

٥) أ الوسط الحسابي = ٦١,٥٥
الانحراف المعياري = ٣٧,٧٣
ب يتأثر الوسط الحسابي بالقيمة المتطرفة ١٨٠

٦) أ ١٧٣ سم
ب ٨٣٤٧٢٨,٦١٩٢
٤,١٦ سم

٧) ٤٥,٨
١٤,٩ ثانية

إجابات تمارين كتاب النشاط – الوحدة الرابعة: تحليل البيانات

تمارين ٤-١

١) أ ٢٣٠ ب ٧,٦٦

٢) أ ١٠ ب تنقص بمقدار ١٠٠

٣) أ س + ١٩

ب العدد الأصغر هو −١، العدد الأكبر هو ٧٧

٤) ٢٢

٥) أ ٩، ١١، ١٣، ١٧ ب ١١,٤٨ دقيقة

٦) ١٦٣

٧) ٢٣

٨) ١٠٣,٦ لتر أو ١٠٣٦٠٠ مللتر

٩) ٣٥٦٠

١٠) $\overline{ص}$ = ١٣,٥

١١) ٣٠,٦° سيليزية

١٢) أ $\overline{س} = -\frac{ب}{٢أ}$

ب معادلة محور التماثل للمعادلة

أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

١٣) أ ١٦٧ سم^٢

ب ٢٠,٢ سم

١٤) ١٣,٠ سم

تمارين ٤ – ٢

١) أ عندما يكون الانحراف المعياري ٠ أو ١

ب عندما يكون ٠ < الانحراف المعياري < ١

٢) أ ٣,٤٩ ب ٤,٢٨

٣) أ ٧٥ كغم؛ القيم الخمس التي استخدمت في الحسابات ليست دقيقة.

ب ٥,٣٠ كغم

٤) المدى = ٦

لذلك فإن الانحراف المعياري يساوي نحو $\frac{١}{٤}$ المدى.

٥) أ ن = ٩

ب ٣,٥١

٦) أ ١,٨٩، ٢,٠٥ و ٢,٤١ م

ب ١) ٢,٠٣ م ٢) ٠,٠٣٥٢ م^٢

٧) أ الوسط الحسابي = ٢٥١ غم،
الانحراف المعياري = ٣,٥١ غم

ب زد عدد الفئات؛ زن بشكل أكثر دقة؛ استخدم عبوات أكثر.

٨) أ الوسط الحسابي = ٣٧,٥ سنة،
الانحراف المعياري = ١١,٩ سنة

ب الوسط الحسابي لأعمار العمال في الشركة الأخرى أقل من الأولى ولكنها أكثر تباعدًا (تشتتًا).

٩) الوسط الحسابي التقديري = ٢٦,٩ سنة
والانحراف المعياري التقديري = ١٣,٠ سنة

١٠) ١٥,٦

١١) ٥٠,٧ غم، ١٠,١ (غم^٢)، غم^٢

١٢) ±١,٢

١٣) أ $٨\sqrt{٦}\,\pi$ سم

ب ٢٢,٥ سم

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) أ ٣٠,٨ ب ٢٩,٥

٢) ٥,٤

٣) ٣٢

٤) الفئة (أ): الوسط الحسابي = ٢٢,٩ سم، الانحراف المعياري = ١,٢٩ سم.
الفئة (ب): الوسط الحسابي = ٢٢,٩ سم،
الانحراف المعياري = ١,١٣ سم.
الوسط الحسابي للفئتَين متساوٍ، لكن الفئة (أ) تباينها أكبر.

٥) الوسط الحسابي = ٠,٧٤، التباين = ١,٢٨

٦) ٢٧,٨ دقيقة.

الوحدة الرابعة: حلول التمارين

تحليل البيانات

تمارين ٤-١

١) أ $\frac{٤٠٠}{٨} = ٥٠$ ب $\frac{٤٢٫٦}{٦} = ٧٫١$ ج $٤\frac{١٣}{٤٠}$ أو ٤٫٣٢٥

٢) أ $\frac{ب^{٢} + ٣٩٢}{٧} = ٦٣$، تعطي $ب = ±٧$

ب $\frac{ق^{٢} + ق + ٧٠}{٨} = ٢٠$

$ق^{٢} + ق - ٩٠ = ٠$

$(ق - ٩)(ق + ١٠) = ٠$

فيكون $ق = ٩$ أو $ق = -١٠$

٣) أ $\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٣٢٥٫٥}{١٤} = ٢٣٫٢٥$

ب $\sum ص = ن \times \bar{ص} = ٤٥ \times ٢٣٫٦ = ١٠٦٢$

ج $\frac{\sum ع \times ت}{ن} = \frac{٤٥٩٨}{٥٢٫٢٥} = ٨٨$

د $\sum ت = \frac{\sum س\,ت}{\bar{س}} = ٨٦ \div ٧\frac{١}{٦} = ١٢$

هـ $\sum س\,ت = \bar{س} \times \sum ت = ٠٫٨٤٢ \times ١٣٥ = ١١٣٫٦٧$

٤) أ $\bar{س} = \frac{\sum س\,ت}{\sum س} = \frac{١٤٤ + ١٨٥ + ٣٢٣ + ٤٦٨ + ٢٠}{٦٠} = ١٩$

ب $\bar{ص} = \frac{\sum ص\,ت}{\sum ت} = \frac{٤٥٩٫٧٤ + ٧٦٢٫٨٥ + ١١٨٤٫٩٦ + ١٠٧٩٫٦١ + ٩٣٨٫٧٤}{١٢٠٠} = \frac{٤٤٢٥٫٩}{١٢٠٠} = ٣٫٦٨٨٢٥$

٥) أ $\bar{ق} = \frac{\sum ق\,ت}{س} = \frac{٦٣ + ١٠٤ + ٩أ + ١١٠}{أ + ٣٣} = \frac{٧٧}{٩}$

$٩(٩أ + ٢٧٧) = ٧٧(أ + ٣٣)$

$أ = ١٢$

٦) أ $\bar{س} \approx \frac{\sum س\,ت}{\sum ت} = \frac{١ \times ٨ + ٣ \times ٩ + ٦ \times ١١ + ١١ \times ٢}{٣٠} = \frac{١٢٣}{٣٠}$

ب $\bar{\text{ص}} \approx \frac{\sum \text{ص ت}}{\sum \text{ت}} = \frac{١٤,٥ \times ٧ + ١٨,٥ \times ١٧ + ٢٤,٥ \times ٢٩ + ٣٠,٥ \times ١٦ + ٣٤,٥ \times ١١}{٨٠} = ٢٤,٩٢٥$

استخدم مراكز الفئات لتحسب الوسط الحسابي التقديري، وتذكّر أن تضرب كلًا منها في تكرار الفئة.

٧) **أ** $\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س ت}}{\sum \text{ت}} = \frac{٧١ \times ٢٢ + ٧٦ \times ٢٨}{٥٠} = ٧٣,٨\%$

٨) **أ** $(٦٤٢ \times ١٣) - (٦٥٠ \times ١٢) = ٥٤٦$ ريالًا عُمانيًّا

٩) عمر العضو الذي ترك النادي هو $٢٦\frac{١}{٤} \times ١٦ - ٢٦ \times ١٥ = ٣٠$ سنة.

ربّما لا يكون هذا دقيقًا لأن الوسطَين الحسابيَّين المعطيَين قد يكونان دقيقَين لأقرب شهر.

إذا كان الوسطان الحسابيان المعطيان دقيقَين لأقرب شهر فيمكننا إيجاد الحد الأدنى والحدّ الأعلى الممكن لعمر هذا الشخص باستخدام

$٢٦\frac{٥}{٢٤} \leq$ الوسط الحسابي لـ $١٦ < ٢٦\frac{٧}{٢٤}$

و $٢٥\frac{٢٣}{٢٤} \leq$ الوسط الحسابي لـ $١٥ < ٢٦\frac{١}{٢٤}$

١٠) **أ** الوسط الحسابي ليس مقياسًا جيدًا للأجور لأن ٣٦ موظفًا من أصل ٣٧ أجرهم أقل من الوسط الحسابي.

ب $\frac{٢ \times ٨ + ٣ \times ١١ + ٤ \times ١٧}{٣٦} = \frac{١١٧}{٣٦} = ٣,٢٥$

١١) تكرارات الفئات هي ١٢، ١٥، ٢١، ٦

المتوسط الحسابي للنصف القصير (أول فئتَين) = $\frac{١٤٢ \times ١٢ + ١٤٧ \times ١٥}{٢٧} \approx ١٤٤\frac{٧}{٩}$ سم

المتوسط الحسابي للنصف الطويل (ثاني فئتَين) = $\frac{١٥٣ \times ٢١ + ١٥٧,٥ \times ٦}{٢٧} \approx ١٥٤$ سم

الفرق = $١٥٤ - ١٤٤\frac{٧}{٩} = ٩\frac{٢}{٩}$ أو ٩,٢٢ سم

١٢) الوسط الحسابي $\approx \frac{٢٤,٥ \times ٣٢٩ + ٣٩,٥ \times ٤١٣ + ٦٤,٥ \times ٧٠٤ + ٩٠ \times ٢٥٨}{١٧٠٤} = ٥٤,٦$

١٣) **أ** $\sum \text{س} = \text{ن} \times \bar{\text{س}} = ١٠ \times ٧,٤ = ٧٤$

ب $\sum (٢ + \text{س}) = ١٠ \times (٧,٤ + ٢) = ٩٤$

ج $\sum (\text{س} + ١) = ١٠ \times (٧,٤ - ١) = ٦٤$

١٤) **أ** $\bar{\text{ع}} = \frac{\sum (\text{ع} - ٧)}{٢٥} + ٧ = \frac{٢٧٥}{٢٥} + ٧ = ١٨$

١٥) **أ** $\frac{\sum (\text{ع} - ٤)}{\text{ن}} + ٤ = ٢٢$

$\therefore \frac{٣٦٧٢}{\text{ن}} = ٢٢ - ٤ \quad \therefore \text{ن} = \frac{٣٦٧٢}{١٨} = ٢٠٤$

١٦) **أ** $\bar{\text{س}} = \frac{\sum (\text{س} - ٤٠)}{٢٥٠٠} + ٤٠ = \frac{٨٧٥}{٢٥٠٠} + ٤٠$

$= ٤٠,٣٥$ ملم

١٧) لتكن القيمة المشفرة السادسة س؛ وعليه، يكون المجموع للقيم الست المشفرة هو ٢٨,٤ + س

$$\frac{٢٨,٤ + س + ٦ \times ١٣}{٦} = ١٧,٦$$

س + ١٠٦,٤ = ١٠٥,٦ ويكون س = −٠,٨

١٨) لتكن م مركز الفئة ٤٠٠ − ل

$$\frac{(١٨٠ \times ١٢) + (٢٦٠ \times ٢٨) + (٣٦٠ \times ٤٨) + (٣٢\ م)}{١٢٠} = ٣٤٨$$

٢٦٧٢٠ + ٣٢ م = ٤١٧٦٠، ويكون م = ٤٧٠

$$\frac{ل + ٤٠٠}{٢} = ٤٧٠$$، ويكون ل = ٥٤٠

$$\frac{(١٢ \times ١٨٠) + ٢٦٠(٢٨ + ن) + (٣٦٠ \times ٤٨) + (٤٧٠ \times ٣٢)}{١٢٠ + ن} = ٣٤٠$$

٤١٧٦٠ + ٢٦٠ن = ٤٠٨٠٠ + ٣٤٠ن ∴ ن = ١٢

نفترض أنه لم يتم أخذ أية ثلاجة من ١٢٠ ثلاجة من المستودع.

١٩) الوسط الحسابي = $\frac{(٥ \times ٢) + (٦,٥ \times ٨)}{٨}$ غرفة في اليوم. إذًا يلزم $\frac{٦٢}{٨}$ = ٧٥ يومًا لإنهاء المهمة.

لذا، نحتاج إلى يومين إضافيين.

نفترض أن العمل قد أُنجز بالمعدل نفسه، وأن الغرف الباقية أخذت الوقت نفسه، بمعدل وسطي، حالها حال الغرف الأخرى التي أنهي العمل فيها.

نحسب فقط الغرف المكتملة. خمس غرف مكتملة تعني ٥ إلى ٦، من غير أن تكون الـ ٦ متضمنة (القيمة الوسطية ٥,٥). ست أو سبع غرف مكتملة تعني من ٦ إلى ٨ من غير أن تكون الـ ٨ متضمنة (القيمة الوسطية ٧).

٢٠) أ ١)
$$\frac{\sqrt{٥٢} + \sqrt{٢٠} + ٦}{٣} = ٥,٨٩ \text{ سم}$$

٢)
$$\frac{\sqrt{٥٢} + \sqrt{٢٠} + ٢\sqrt{٥ + ٢\sqrt{٢}}}{٣} = ٥,٧٦ \text{ سم}$$

ب جتا (جيب التمام) ح م ع ≙

$$\frac{٢^٢ + ٤^٢ - \left(\frac{\sqrt{٥٢} + \sqrt{٢٠}}{٢}\right)^٢}{٢ \times ٢ \times ٤}$$

جتا (جيب التمام) ح $\hat{م}$ ع = −٠,٨٨٢٧٨٢٢١٨

فيكون قياس ح $\hat{م}$ ع هو ١٥٢°

استخدم قانون جيب التمام ح م = ٢، م ع = ٤،
ح ع = $\frac{\sqrt{٥٢} + \sqrt{٢٠}}{٢}$

تمارين ٤-٢

١) أ الوسط الحسابي $= \frac{٢٧ + ٤٣ + ٢٩ + ٣٤ + ٥٣ + ٣٧ + ١٩ + ٥٨}{٨} = ٣٧{,}٥$

الوسط الحسابي للمربعات $= \frac{٢٧^٢ + ٤٣^٢ + ٢٩^٢ + ٣٤^٢ + ٥٣^٢ + ٣٧^٢ + ١٩^٢ + ٥٨^٢}{٨} = \frac{١٢٤٧٨}{٨}$

الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{١٢٤٧٨}{٨} - \left(\frac{٣٠٠}{٨}\right)^٢} = ١٢{,}٤$

ب الوسط الحسابي $= \frac{٢{,}٧}{٦} = ٠{,}٤٥$؛ الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{٥١٢{,}٣٣}{٦} - \left(\frac{٢{,}٧}{٦}\right)^٢} = ٩{,}٢٣$

٢) أ تباين (الأحياء) $= \frac{٢١^٢ + ٣٣^٢ + ٤٥^٢}{٣} - \left(\frac{٢١ + ٣٣ + ٤٥}{٣}\right)^٢ = ٩٦$

تباين (الكيمياء) $= \frac{٤١^٢ + ٥٣^٢ + ٦٥^٢}{٣} - \left(\frac{٤١ + ٥٣ + ٦٥}{٣}\right)^٢ = ٩٦$

تباين (الفيزياء) $= \frac{٥١^٢ + ٦٣^٢ + ٧٥^٢}{٣} - \left(\frac{٥١ + ٦٣ + ٧٥}{٣}\right)^٢ = ٩٦$

طريقة أخرى لإيجاد التباين:

الوسط الحسابي لدرجات إبراهيم في مادة الأحياء هو ٣٣، ولذلك يمكن أن نجد التباين باستخدام الصيغة

$$\frac{\sum (س - \bar{س})^٢}{ن} = \frac{(٢١ - ٣٣)^٢ + (٣٣ - ٣٣)^٢ + (٤٥ - ٣٣)^٢}{٣} = \frac{١٤٤ + ٠ + ١٤٤}{٣} = ٩٦$$

ب التباينات الثلاثة متساوية.

لا ينطبق التعليق نفسه على الوسط الحسابي لدرجات إبراهيم لأنها جميعها مختلفة.

الأحياء: $\frac{٢١ + ٣٣ + ٤٥}{٣} = ٣٣$؛ الكيمياء: $\frac{٤١ + ٥٣ + ٦٥}{٣} = ٥٣$؛ الفيزياء: $\frac{٥١ + ٦٣ + ٧٥}{٣} = ٦٣$

٣) الوسط الحسابي $= \frac{٥٩}{٣٥} = ١\frac{٢٤}{٣٥}$ أو ١,٦٩؛ التباين $= \frac{١٥٧}{٣٥} - \left(\frac{٥٩}{٣٥}\right)^٢ = ١{,}٦٤$

تذكّر أن تستخدم الوسط الحسابي الدقيق (أو قيمته لأقرب ٤ أرقام معنوية) عند إيجادك التباين. إذا استخدمنا ١,٦٩ فسنحصل على قيمة غير صحيحة للتباين وهي ١,٦٣

٤) الوسط الحسابي $= \frac{٧٢٠}{٣٦٠} = ٢$، الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{١٦٧٢}{٣٦٠} - \left(\frac{٧٢٠}{٣٦٠}\right)^٢} = ٠{,}٨٠٣$

٥) أ مراكز الفئات هي ٢٥، ٣٥، ٥٠، ٧٠

الطالبات: الوسط الحسابي $= \frac{١٢٠٠}{٣٠} = ٤٠$ دقيقة؛ الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{٥٣١٠٠}{٣٠} - \left(\frac{١٢٠٠}{٣٠}\right)^٢} = ١٣{,}٠$ دقيقة

الطلبة: الوسط الحسابي $= \frac{١٦٠٠}{٤٠} = ٤٠$ دقيقة؛ الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{٧٤٦٥٠}{٤٠} - \left(\frac{١٦٠٠}{٤٠}\right)^٢} = ١٦{,}٣$ دقيقة

ب ١) الوسط الحسابي للوقت المستغرق متشابه حيث إن كلًّا منهما يساوي ٤٠ دقيقة.

٢) الوقت الذي استغرقه الطلبة متباين أكثر بكثير من الذي استغرقته الطالبات.

٦) مراكز الفئات هي ١٦، ٢١، ٢٧، ٣٣,٥، الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{\text{٢٨٢٦٣}}{\text{٥٠}} - \left(\frac{\text{١١٥١}}{\text{٥٠}}\right)^{\text{٢}}} = \text{٥,٩٤}$

٧) $\frac{\text{٣٠ك + ١٦ك + ٨٠ + ١٧ك − ٥١ + ١٨٠ + ١٥٢ + ٦٠}}{\text{٤ك + ٢٣}} = \text{١٧}$

$\therefore \frac{\text{٦٣ك + ٤٢١}}{\text{٤ك + ٢٣}} = \text{١٧}$

٦٣ ك + ٤٢١ = ٦٨ك + ٣٩١، $\therefore$ ك = ٦

التباين = $\frac{\text{١٣٧١١}}{\text{٤٧}} - \text{١٧}^{\text{٢}} = \text{٢,٧٢}$

٨) أ مراكز الفئات هي ١٤٢، ١٤٧، ١٥٥، ١٦٢,٥

$\frac{\text{١٤٢أ + ١٤٧ب + (١٥٥ × ٦٩) + (١٦٢,٥ × ٢٨)}}{\text{١٥٠}} = \text{١٥٣,٤١}$

١٤٢أ + ١٤٧ ب + ١٥٢٤٥ = ٢٢٩٧١

١٤٢أ + ١٤٧ب = ٧٧٢٦

١٤٢أ + ١٤٧ (٥٣ − أ) = ٧٧٢٦

−٥أ = −٦٥ $\therefore$ أ = ١٣، ب = ٤٠

ب الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{\text{٣٥٢٥٥٩٢}}{\text{١٥٠}} - \left(\frac{\text{٢٢٩٧١}}{\text{١٥٠}}\right)^{\text{٢}}} = \text{٦,٢٣}$ سم

٩) أ تباين (و) = $\frac{\sum \text{و}^{\text{٢}}}{\text{ن}} - \left(\frac{\sum \text{و}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}} = \frac{\text{٥٤٨٠}}{\text{٦٤}} - \left(\frac{\text{٢٨٨}}{\text{٦٤}}\right)^{\text{٢}} - \text{٦٥,٣٧٥}$

ب الانحراف المعياري (ك) = $\sqrt{\frac{\sum \text{ك}^{\text{٢}}}{\text{ن}} - \left(\frac{\sum \text{ك}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}}} = \sqrt{\frac{\text{٤٠٠٠}}{\text{٣٦}} - \text{٥,٢}^{\text{٢}}} = \text{٩,١٧}$

ج $\frac{\text{٦١٢٠}}{\text{٤٠}} - \left(\frac{\sum \text{س ت}}{\text{٤٠}}\right)^{\text{٢}} = \text{١٢}^{\text{٢}}$

$\sum$س ت = ٤٠ × $\sqrt{\frac{\text{٦١٢٠}}{\text{٤٠}} - \text{١٢}^{\text{٢}}} = \text{١٢٠}$

د $\frac{\sum \text{س}^{\text{٢}}\text{ت}}{\text{٥٠}} - \left(\frac{\text{٢٨٠٠}}{\text{٥٠}}\right)^{\text{٢}} = \text{١٠٠}$ $\therefore$

$\sum$س ت = ٤٠ × $\left[\text{١٠٠} + \left(\frac{\text{٢٨٠٠}}{\text{٥٠}}\right)^{\text{٢}}\right] = \text{١٦١٨٠٠}$

هـ $\frac{\text{١٩٣١٤٤}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{٢٣٢٤}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}} = \text{٣}^{\text{٢}}$

$\frac{\text{١٩٣١٤٤}}{\text{ن}} - \frac{\text{٥٤٠٠٩٧٦}}{\text{ن}^{\text{٢}}} = \text{٩}$

٩ن$^{\text{٢}}$ − ١٩٣١٤٤ن + ٥٤٠٠٩٧٦ = ٠

(٩ن − ١٩٢٨٩٢)(ن − ٢٨) = ٠

$\therefore$ ن = ٢٨

١٠) الانحراف المعياري (ص) = الانحراف المعياري (ص − ٥) = $\sqrt{\frac{\text{٨٩٠}}{\text{٢٠}} - \left(\frac{\text{١٣٠}}{\text{٢٠}}\right)^{\text{٢}}} = \text{١,٥}$

١١) الوسط الحسابي (د) = $\frac{\sum(د - ٣)}{٣٦٥} + ٣ = \frac{١٧٩٥,٨}{٣٦٥} + ٣ = ٧,٩٢$ مم

تباين (د) = تباين (د − ٣)

$$\frac{\sum د^{٢}}{٣٦٥} - (٧,٩٢)^{٢} = \frac{٩٩٥٠}{٣٦٥} - (٤,٩٢)^{٢}$$

$$\sum د^{٢} = ٣٦٥ \times \left(\frac{٩٩٥٠}{٣٦٥} - (٤,٩٢)^{٢} + (٧,٩٢)^{٢}\right) = ٢٤٠٠٩,٨$$

١٢) أ مراكز الفئات هي ٠,٢٢ ، ٠,٥٨ ، ١,١١ ، ١,٦٨

الوسط الحسابي $\approx \frac{٠,٢٢ \times ٥ + ٠,٥٨ \times ٨ + ١,١١ \times ٢٠ + ١,٦٨ \times ٦}{٣٩} = \frac{٣٨,٠٢}{٣٩} = ٠,٩٧$ طنًا.

الانحراف المعياري $\approx \sqrt{\frac{(٠,٢٢)^{٢} \times ٥ + (٠,٥٨)^{٢} \times ٨ + (١,١١)^{٢} \times ٢٠ + (١,٦٨)^{٢} \times ٦}{٣٩} - \left(\frac{٣٨,٠٢}{٣٩}\right)^{٢}}$

$= \sqrt{\frac{٤٤,٥٠٩٦}{٣٩} - \left(\frac{٣٨,٠٢}{٣٩}\right)^{٢}} = ٠,٤٤$ طن

ب

مراكز الفئات	٠	٠,٢٢	٠,٥٨	١,١١	١,٦٨
عدد الأسابيع (ت)	١٣	٥	٨	٢٠	٦

الوسط الحسابي $\approx \frac{٣٨,٠٢}{٥٢} = ٠,٧٣$ الانحراف المعياري $\approx \sqrt{\frac{٤٤,٥٠٩٦}{٣٩} - \left(\frac{٣٨,٠٢}{٣٩}\right)^{٢}} = ٠,٥٧$ طنًا.

يتناقص الوسط الحسابي من ٠,٩٧ إلى ٠,٧٣ طنًا، ويتزايد الانحراف المعياري من ٠,٤٤ إلى ٠,٥٧ طنًا.

١٣) أ مراكز الفئات هي ٢٧ ، ٣٤,٥ ، ٤٢ ، ٥٣

$$\frac{(٢٧ \times ١٤) + ٣٤,٥س + ٤٢(٣٠ - س) + (٥٣ \times ٦)}{٥٠} \approx ٣٧,٣٢$$

١٩٥٦ − ٧,٥ س = ١٨٦٦ يعطي س = ١٢، فيكون ص = ٣٠ − ١٢ = ١٨

بعد سنة، تمّ ضمّ عمر سالم إلى أعمار الموظفين،
فازدادت حدود الفئات وقيم مراكز الفئات واحدًا.

العمر معطى بالسنوات الكاملة؛ وعليه، يتمّ احتساب السنوات الكاملة فقط. الشخص الذي عمره ٤٥,٩٥ سنة يُحسب عمره ٤٥ سنة، وليس ٤٦ سنة.
حدود الفئات تصبح ٢٣ ، ٣١ ، ٣٨ ، ٤٦ ، ٦٠

العمر (بالسنوات)	س	٢٤–٣١	٣٢–٣٨	٣٩–٤٦	٤٧–٦٠
مركز الفئة	س	٢٨	٣٥,٥	٤٣	٥٤
عدد الموظفين	١	١٤	١٢	١٨	٦

$$\frac{س + (٢٨ \times ١٤) + (٣٥,٥ \times ١٢) + (٤٣ \times ١٨) + (٥٤ \times ٦)}{٥١} = ٣٨$$

س + ١٩١٦ = ١٩٣٨

عمر سالم هو س = ٢٢ سنة

التباين الأصلي = $\frac{٧٣٠٩٥}{٥٠} - \left(\frac{١٨٦٦}{٥٠}\right)^{٢} = ٦٩,٧٢$ سنة^{٢}

التباين الجديد = $\frac{٧٧٣٦١}{٥١} - \left(\frac{١٩٣٨}{٥١}\right)^{٢} = ٧٢,٨٨$ سنة^{٢}

ازداد التباين (بمقدار ٤٥,٥٪) من١٢,٦٩ إلى ٧٢,٨٨ سنة^{٢}

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) أ ص = س + ٨ ، $\overline{\text{ص}} = \overline{\text{س}} + ٨ = ٧,١٥ + ٨ = ١٥,١٥$

ب $\overline{\text{ع}} = ٢\overline{\text{س}} - ١ = ٢ \times ٧,١٥ - ١ = ١٣,٣$

مراكز الفئات لـ ع (٥، ١١، ١٩، ٢٩) تساوي واحدًا أقل من ضعف مراكز الفئات الأمر الذي يعني أن ع = ٢س − ١

٢) $\frac{٩٠\text{ك} + ٥\text{ك}}{\text{ك} + ٢٦} = ٣,٧٥$

٩٠ + ٥ك = ٣,٧٥ك + ٩٧,٥ ، تعطي ك = ٦

٣) أ ٣٩ − (٣ × ٢,٥) = ٣١,٥

ب $\sqrt{\frac{((٢,٥)^٢ \times ٣) + ((٤,٥)^٢ \times ٧)}{١٠} - (٣,٩)^٢} = ٠,٩١٧$ ريالًا عُمانيًّا أو ٠,٩٢ ريالًا عُمانيًّا.

٤) أ $\sqrt{٠,٨٨٥ - (٠,٨٨٥)^٢} = ٠,٣١٩$ م

ب يتزايد الوسط الحسابي بمقدار ١,٥ سم (إلى ٩٠ سم)؛ الانحراف المعياري لا يتغير.

٥) أ الوسط الحسابي = ٦١,٥٥

الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{٥٧٣٢٣}{١١} - \left(\frac{٦٧٧}{١١}\right)^٢} = ٣٧,٧$

ب يتأثر الوسط الحسابي بالقيمة المتطرفة ١٨٠

٦) أ الأطوال الكلية بعدما يترك أحد الأشخاص المجموعة = (٢٨ × ١٧٢,٦) − ١٦١,٨ = ٤٦٧١ سم

الوسط الحسابي لـ ٢٧ شخصًا الباقين = $\frac{٤٦٧١}{٢٧} = ١٧٣$ سم.

ب $\frac{\sum \text{س}^٢}{٢٨} - (١٧٢,٦)^٢ = (٤,٥٨)^٢$ ، إذًا $\sum \text{س}^٢ = ٢٨ \times ((٤,٥٨)^٢ + (١٧٢,٦)^٢) = ٨٣٤٧٢٨,٦١٩٢$

الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{٨٣٤٧٢٨,٦١٩٢ - (١٦١,٨)^٢}{٢٧} - (١٧٣)^٢} = ٤,١٦$ سم

٧) باستخدام قيم منتصف الفئات، أي ١٣ ، ٣٠,٥ ، ٤٠,٥ ، ٥٠,٥ ، ٧٣

الوسط الحسابي التقديري: $\approx \frac{\sum \text{س ت}}{\sum \text{ت}} = \frac{٥٥٠٠}{١٢٠} = ٤٥,٨$ ثوان.

الانحراف المعياري التقديري $\approx \sqrt{\frac{\sum \text{س}^٢\text{ت}}{\sum \text{ت}} - \left(\frac{\sum \text{س ت}}{\sum \text{ت}}\right)^٢} = \sqrt{\frac{٢٧٨٦٢٠}{١٢٠} - \left(\frac{٥٥٠٠}{١٢٠}\right)^٢} = ١٤,٩$ ثانية.

الوحدة الخامسة

الهندسة الإحداثية Coordinate geometry

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٥-١	طول القطعة المستقيمة وإحداثيات نقطة منتصفها	٢	٥-١ يحسب طول القطعة المستقيمة، ويجد إحداثيات منتصفها.	القطعة المستقيمة، نقطة المنتصف
٥-٢	المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة	٣	٥-٢ يجد ميل مستقيم بمعلومية نقطتين، وميل المستقيم العمودي عليه.	ميل المستقيم، المستقيمات المتوازية، المستقيمات المتعامدة
٥-٣	معادلة الخط المستقيم	٣	٥-٣ يجد معادلة المستقيم عند توفر المعلومات الكافية بما في ذلك معادلة المستقيمات المتوازية أو العمودية لمستقيم آخر.	
٥-٤ (PPT)	معادلة الدائرة	٣	٥-٤ يجد معادلة الدائرة (باستخدام الإكمال إلى مربّع عند الضرورة).	الصورة العامة للدائرة، مركز الدائرة، نصف قطر الدائرة، الصورة القياسية للدائرة
٥-٥	علاقة المستقيم بالدائرة	٥	٥-٥ يستخدم طرق جبرية لحلّ مسائل تتضمّن المستقيمات والدوائر، والعلاقة فيما بينها. ٥-٦ يجد مجموعة قيم ك حيث المستقيم ص = س + ك يتقاطع أو يلامس أو لا يتقاطع مع منحنى الدالة التربيعية أو الدائرة.	مماس الدائرة
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة	١		

٥-١ طول القطعة المستقيمة وإحداثيات نقطة منتصفها

ملاحظات للمعلمين

سبق للطلبة دراسة هذا الموضوع في صفوف دراسية سابقة، لذا قد يحتاجون فقط إلى تحقق سريع من مهاراتهم قبل تطبيقها على الدائرة والمسائل الهندسية. وفي هذا الصف سيمتلكون مهارات جديدة في النمذجة الرياضية كرسم الأشكال، وهو ما يساعدهم على حل المسائل الهندسية بشكل عام وليس فقط على تطبيق بعض القواعد الخاصة. عادة ما يجد الطلبة صعوبة في معرفة كيفية فهم وتحليل مسألة ما، وذلك بسبب افتقادهم إلى رسم توضيحي، أو لأن رسمهم التوضيحي غير واضح وتنقصه معلومات أساسية.

أفكار للتعليم

يبدأ هذا الدرس بفقرة تُذكّر بكيفية إيجاد نقطة المنتصف وطول القطعة المستقيمة. يقدم مثال ١ المحلول طريقة جبرية لإيجاد نقطة المنتصف، ويبيّن المثالان المحلولان ٢ و ٣ كيفية استخدام صيغ نقطة المنتصف وطول القطعة المستقيمة في حل مسائل هندسية بسيطة. سيتطلّب السؤالان ١، ٢ من تمارين ٥ -١ تبريرًا مشابهًا لما جاء في استكشف ١، بينما تتوافر في بقيّة التمارين مجموعة مختارة من المسائل متدرجة الصعوبة لتعميق المفاهيم في هذا الموضوع. هذا الأمر كفيل بمساعدة الطلبة على أن يألفوا المفردات التي تستخدم في المسائل الهندسية وعلى أن يتدربوا على نمذجة المسائل الرياضية.

يمكنك إنهاء الدرس بطرح مسائل للتفكير مثل: "إذا كانت الإجابة هي (٣، ٤)، فماذا تتوقع أن يكون السؤال؟" أو بالمثل "الإجابة هي $٥\sqrt{٢}$ ، فماذا تتوقع أن يكون السؤال؟" سيساعدك هذا على تقييم فهم الطلبة للموضوع، إذ يحتاجون إلى التفكير عكسيًا لإنجاز الأسئلة الممكنة التي يمكن أن تقود إلى هذه الإجابات (يمكن أن تكيّف هذه الفكرة لاستخدامها عند إنهاء الدروس في موضوعات مختلفة). ٢٠٢

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

يركز هذا السؤال على التبرير الهندسي، وقد تطرح الأسئلة الآتية : كيف يمكن أن تعرف ما إذا كان المثلث قائم الزاوية؟ كيف يمكنك استخدام المعلومات المعطاة في السؤال؟ ما الطرائق الأخرى التي تعرفها لتقرر ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا؟ ما الذي تحتاج إلى معرفته عن المثلث حتى تستخدمه؟

ما يدعيه تركي ليس صائبًا لأن $(٢\sqrt{٧})^{٢} + (٤\sqrt{٣})^{٢} \neq (٥\sqrt{٣})^{٢}$

تحدّي الطلبة

السؤال ١٢ من تمارين ٥-١ هو أكثر تحديًا. قد يرغب الطلبة المجيدون في أن يكتبوا سؤالهم الخاص، أو أن يكتبوا ثلاثة أسئلة متدرّجة من الأسهل إلى الأصعب، منتبهين إلى ما يجعل السؤال سهلًا أو صعبًا. سيطوّر هذا النوع من التحدي مهاراتهم في التحليل والتقييم، ويمكن استخدامه في أي موضوع.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥-١

٥-٢ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

ملاحظات للمعلمين

عند حساب الميل قد يقع بعض الطلبة في عدة أخطاء مثل:

١. كتابة الفرق بين الإحداثيات السينية في البسط بدلًا من المقام $\left(م = \frac{س_٢ + س_١}{ص_٢ + ص_١}\right)$.

٢. طرح الإحداثيات الصادية بترتيب معكوس عن طرح الإحداثيات السينية.

ولتصحيح هذه الأخطاء، سيحتاج الطلبة إلى المزيد من التدريبات.

أفكار للتعليم

يعرف الطلبة أن المستقيمات المتوازية لها الميل نفسه، وأن العلاقة بين ميلَي المستقيمَين المتعامدَين هي ($م_١ \times م_٢ = -١$). سيطوّر الطلبة في هذا الموضوع فهمهم لهذه العلاقات من خلال حلّ مسائل هندسية.

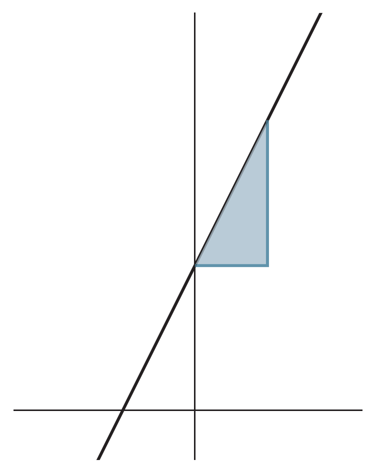
دعم الطلبة

إن حساب الميل لأنواع مختلفة من المستقيمات انطلاقًا من الإحداثيات، وربطه بالتمثيلات البيانية لهذه المستقيمات يساعد الطلبة على فهم الموضوع بشكل أفضل.

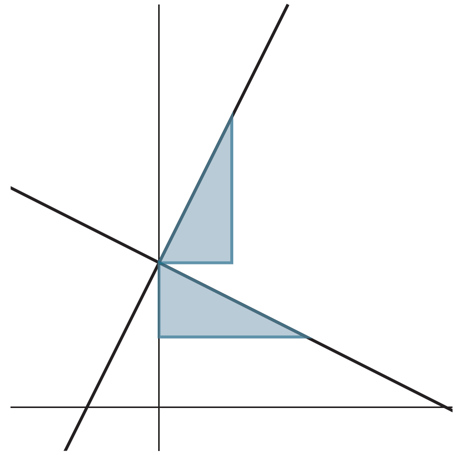
تحدّي الطلبة

قد يرغب الطلبة الذين يحبون التحدي في محاولة برهنة العلاقة $م_١ \times م_٢ = -١$، إذا احتاجوا إلى مساعدة، يمكنك تصميم شكل محدد ومناسب لهم.

يبيّن الرسم البياني الآتي مثلثًا قائم الزاوية يمكن أن يساعد في إيجاد الميل.

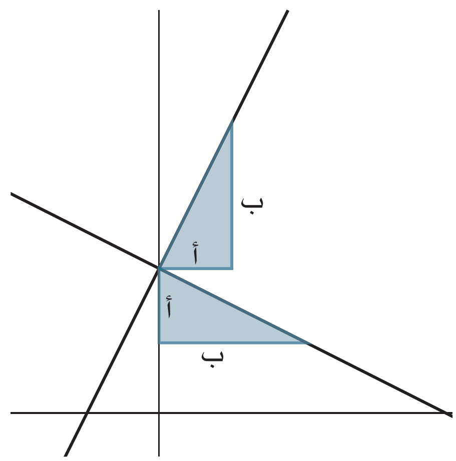


للحصول على المستقيم العمودي، يمكننا تدوير المستقيم ٩٠° وعند تدوير المثلث أيضًا نحصل على الشكل الآتي:



كيف يتم احتساب الميلين؟ وما هي العلاقة بينهما؟

لقد أضفت هنا التسميات:



ميل المستقيم الأصلي يساوي $\frac{ب}{أ}$

ميل المستقيم العمودي على المستقيم الأصلي يساوي $-\frac{أ}{ب}$

عند ضرب الميلين نحصل على −١

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥–٢

٣-٥ معادلة الخط المستقيم

ملاحظات للمعلمين

درس الطلبة سابقًا هذا الموضوع بالتفصيل، وربّما تعرفوا على المعادلة ص = م س + جـ، ولكن من المفيد لهم أن يتعاملوا مع الصيغة ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$) لإيجاد معادلة المستقيم. من الضروري تدريب الطلبة على كيفية الحصول على الميل ونقطة على المستقيم عندما لا تكون ضمن معطيات السؤال بشكل مباشر (كما في مثال ٨).

أفكار للتعليم

من المستحسن الشروع في الدرس من خلال الاطلاع على Straight lines في المصدر (Underground Mathematics). ستحفز هذه البداية النقاش حول التمثيلات المختلفة للمستقيمات، وستساعدك على معرفة الصعوبات فيما يعرفه الطلبة، وكذلك على تنشيط ذاكرتهم حول مختلف جوانب الهندسة الإحداثية مثل معادلة المستقيم. سيقوم الطلبة بالدخول إلى Lots of lines (Underground Mathematics) والقيام بتمييز معادلات لمستقيمات متوازية، وأخرى متعامدة أو لها المقطع نفسه على أحد المحورَين. أمّا المصدر Straight line pairs (Underground Mathematics)، فهو عبارة عن مسائل مفتوحة، حيث يُطلب إلى الطلبة إيجاد معادلة المستقيم التي تلبي شروطًا معينة واستكشاف طرائق مختلفة لتنفيذها.

دعم الطلبة

المثال المحلول الذي يتضمّن السؤال "املأ الفراغات" يساعد الطلبة على بناء الثقة بالنفس قبل البدء بحلّ الأسئلة بأنفسهم (انظر إلى الوحدة الأولى "الدوال التربيعية والمعادلات التربيعية" لترى مثالًا على هذا النوع من المصادر).

تحدي الطلبة

يمكن للمصدر Straight line pairs (Underground Mathematics) أن يوفّر تدريبًا مناسبًا للطلبة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥-٣

٥-٤ معادلة الدائرة

ملاحظات للمعلمين

من المفيد خلال هذا الموضوع تشجيع الطلبة على التفكير في الدائرة على أنها نوع من المنحنيات، يتكوّن محيطها من مجموعة غير منتهية من النقاط ذات مسافة ثابتة من مركزها بحيث يمكن استخدام نظرية فيثاغوروث لإيجادها، وتظهر الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة المركز كانسحاب من نقطة الأصل باتجاه المحورَين السيني أو/ والصادي.

أفكار للتعليم

يساعد المصدر التفاعلي The equation of a circle من GeoGebra على تقديم معادلة الدائرة باستخدام نظرية فيثاغورث حيث يبيّن نقطة يمكن تحريكها على محيط دائرة. يمكن أن تستخدم هذه الفكرة لإثارة نقاش داخل الصف عن علاقة إحداثيات هذه النقطة مع نصف قطر الدائرة، وعن كيفية إيجاد معادلة ممكنة لصيغة الدائرة. يعرض مثال ١٢ المحلول طريقتَين لإيجاد المركز ونصف قطر الدائرة. يمكن أن يعمل الطلبة في ثنائيات أو في مجموعات صغيرة على ربط المعادلات بالدوائر المتعلقة بها، وذلك باستخدام مصدر Teddy bear (Underground Mathematics).

يوجّه مصدر Finding circles (Underground Mathematics) الطلبة إلى استنتاج معادلة الدائرة من ثلاث نقاط. نجد هذه الطريقة في المثال ١٣ المحلول حيث يتم استخدام العمودَين المنصفَين لوترَين في الدائرة. تعتمد شريحة العرض التوضيحي الإلكتروني ٥ على المثال نفسه، ويمكنك استخدامها كمحفز للطلبة للتفكير في الخطوات ومناقشة الطريقة. تعرض بعض الأسئلة في تمارين ٥-٤ خصائص هندسية إضافية من قبيل أن مماس الدائرة عند نقطة التماس عمودي على نصف قطر الدائرة عند تلك النقطة، وأن الزاوية في نصف دائرة هي زاوية قائمة.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

١) يرسم الطلبة في نشاط استكشف ٢ دوائر باستخدام برمجية رسم المنحنيات، ويجدون المركز ونصف القطر لكل دائرة. يمكنك أن تستخدم النشاط كدعم لتثبيت المفهوم إلى أن يألف الطلبة المعادلة، ويمكن أن يناقشوا توقعاتهم ويستخدموا برمجية رسم المنحنيات للتحقق من صحتها.

	معادلة الدائرة	المركز	نصف القطر
أ	$س^2 + ص^2 = ٢٥$	(٠، ٠)	٥
ب	$(س - ٢)^2 + (ص - ١)^2 = ٩$	(٢، ١)	٣
ج	$(س + ٣)^2 + (ص + ٥)^2 = ١٦$	(−٣، −٥)	٤
د	$(س - ٨)^2 + (ص + ٦)^2 = ٤٩$	(٨، −٦)	٧
هـ	$س^2 + (ص + ٤)^2 = ٤$	(٠، −٤)	٢
و	$(س + ٦)^2 + ص^2 = ٦٤$	(−٦، ٠)	٨

٢)	(س + ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١٦	(–٣، –٥)	٤

الإحداثي السيني لمركز الدائرة هو القيمة التي تجعل الجزء (س – أ)^{٢} يساوي صفرًا، أي س = أ

الإحداثي الصادي لمركز الدائرة هو القيمة التي تجعل الجزء (ص – ب)^{٢} يساوي صفرًا، أي ص = ب

نصف القطر هو الجذر التربيعي للقيمة العددية.

إذا كانت المعادلة (س – أ)^{٢} + (ص – ب)^{٢} = نق^{٢}، يكون المركز عند النقطة (أ، ب) ونصف القطر هو نق.

استكشف ٣

هذا النشاط عبارة عن استكشاف بياني لمعادلة دائرة في الصورة القياسية

(س – أ)^{٢} + (ص – ب)^{٢} = نق^{٢} مركزًا على الانسحاب من نقطة الأصل.

- أ تحرك إلى اليمين
- ب تحرك إلى اليسار
- ج تحرك إلى الأعلى
- د تحرك إلى الأسفل

تحدي الطلبة

يقود مصدر Sine-ing the way (Underground Mathematics) الطلبة من نظريات الدائرة إلى برهان قانون الجيب.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥–٤

٥-٥ علاقة المستقيم بالدائرة

ملاحظات للمعلمين

يربط هذا الدرس بين موضوعات جرى تحليلها في الوحدة الأولى (استخدام المميّز وحلّ المعادلات الآنية) من جهة الدرس، وبين الموضوعات المتعلقة بالمستقيمات والدوائر في هذه الوحدة من جهة أخرى، ثم بين موضوعات سيطبق الطلبة معرفتهم على تحليل التقاطع بين المستقيم والدائرة.

أفكار للتعليم

هناك مدى واسع من المسائل الهندسية الممتعة المطروحة التي تتضمن الدوائر والبراهين. إليك مجموعة مختارة قد تجدها مفيدة:

يصف مصدر Belt (Underground Mathematics) دائرتَين مع وجود حزام يربط بينهما.

يقدم مصدر Pairs of circles (Underground Mathematics) الدائرة مع مثلث تقع رؤوسه على محيط الدائرة.

يقدم مصدر Baby circle (NRICH) دائرة صغيرة بين اثنتَين كبيرتَين مع مماس مشترك بينهم.

يقدم مصدر Circles in circles (NRICH) و Retracircles دوائر متماسة.

تساعدك تمارين مراجعة نهاية الوحدة ٥ في تقييم قدرات الطلبة على تشكيل استراتيجيات وتطبيق الطرائق المختلفة في حلّ المسائل.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٥-٥

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

شرائح عرض توضيحي (PPT) الهندسة الإحداثية

https://ict.moe.gov.om/library/file/Content/11/Math/OMN_ADV_Math_G11_s1_TR_PPT_Unit5_MOE_18_12_22/index.pdf

اختصار الرابط

https://qrs.ly/cqee4kz

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

إيجاد معادلة دائرة من ٣ نقاط

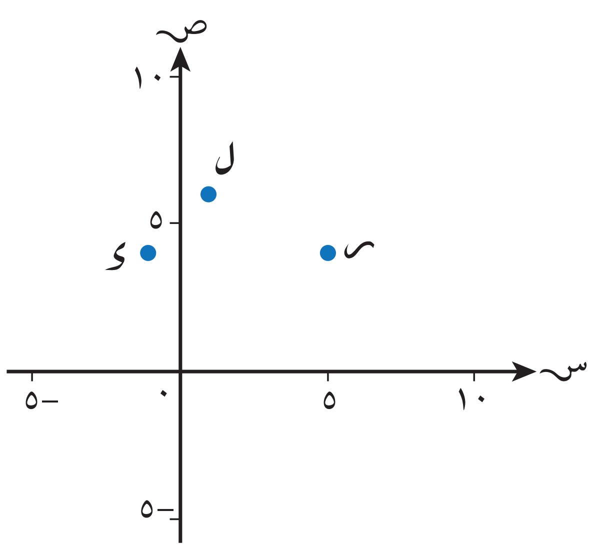
تمر دائرة بالنقاط الثلاث

د (–١، ٤)، ل (١، ٦) ر (٥، ٤)

أوجد معادلة الدائرة

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

أولاً ارسم رسمًا توضيحيًا



ما الذي يجب معرفته لإيجاد معادلة الدائرة؟

- مركزها
- نصف قطرها

كيف يمكننا إيجاد المركز؟

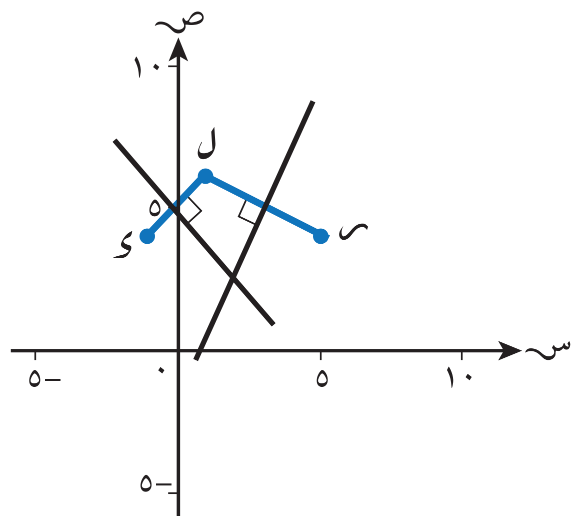
الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

يمر المستقيم العمودي المنصف لوتر بمركز الدائرة.

كم وترًا نحتاج لنجد مركز الدائرة؟

يمر المستقيمان العموديان المنصفان لوترين من خلال المركز، فتكون **نقطة التقائهما** مركز الدائرة

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول



ما الذي يجب معرفته لإيجاد ل نقطة التقاطع؟

معادلتا المستقيمين العموديين المنصفين.

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

أوجد معادلتي المستقيمين العموديين المنصفين

ماذا يجب أن نعرف؟

- ميلاهما
- نقطة على كل مستقيم

إيجاد ميل العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{\text{د ر}}$

د (−١، ٤)، ر (١، ٦)

ميل $\overline{\text{دل}}$ = $\frac{٦ - ٤}{١-(-١)}$ = ١

∴ميل المستقيم العمودي المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{\text{دل}}$ = −١

(م١ × م٢ = −١)

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

نحتاج أيضًا إلى ميل المستقيم العمودي المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{\text{ل ر}}$

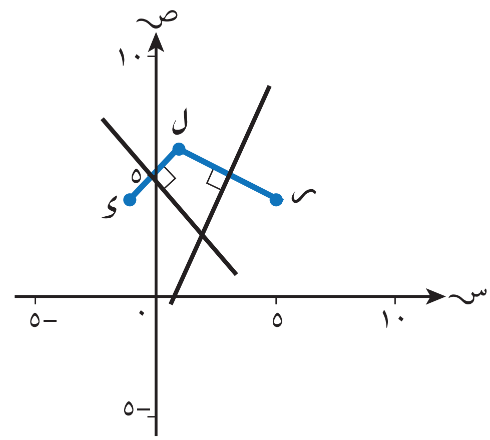
ل (١، ٦)، ر (٥، ٤)

ميل $\overline{\text{ل ر}}$ = $\frac{٦ - ٤}{١ - ٥}$ = $-\frac{١}{٢}$

∴ميل المستقيم العمودي المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{\text{ل ر}}$ = ٢

(م١ × م٢ = −١)

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول



كيف يمكننا إيجاد نقطة على المستقيم العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{\text{د ل}}$؟

يمر المستقيم العمودي المنصف في نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{د ل}}$.

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

نقطة منتصف القطعة المستقيمة

$$\overline{\text{د ل}} = \left(\frac{-١ + ١}{٢} \text{،} \frac{٤ + ٦}{٢}\right) = (٠ \text{،} ٥)$$

نقطة المنصف للقطعة المستقيمة

$$\overline{\text{ل ر}} = \left(\frac{١ + ٥}{٢} \text{،} \frac{٦ + ٤}{٢}\right) = (٣ \text{،} ٥)$$

أوجد معادلتي المستقيمين العموديين المنصفين

بالنسبة إلى المستقيم د̅ل̅ المعادلة هي (ص − ٥) = −١(س − ٠)

ص = − س + ٥

بالنسبة إلى المستقيم ل̅ر̅، المعادلة هي (ص − ٥) = ٢(س − ٣)

ص = ٢س − ١

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين العموديين المنصفين

حل معادلات آنية

ص = − س + ٥ و ص = ٢س − ١

− س + ٥ = ٢س − ١ ⟸ س = ٢، ص = ٣

∴ مركز الدائرة هو (٢ ، ٣)

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

إيجاد معادلة الدائرة

نعرف أن مركزها (م) هو (٢، ٣)

نحتاج أيضًا إلى نصف قطرها. كيف يمكننا إيجاده؟

هو طول القطعة المستقيمة من المركز إلى أي نقطة من النقاط د، ل، ر

بأخذ النقطة ل(٥، ٤):

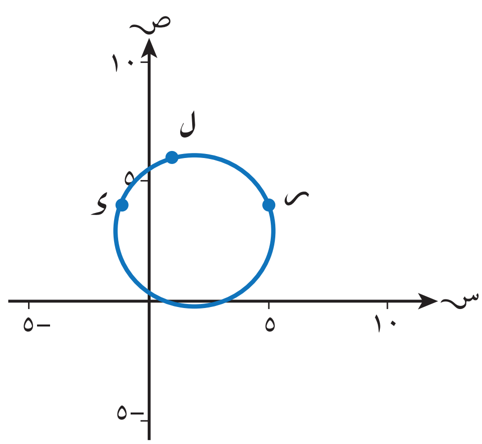
$$نق = \sqrt{(٥ - ٢)^{٢} + (٤ - ٣)^{٢}} = \sqrt{١٠}$$

الرياضيات المتقدّمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول

معادلة الدائرة

المركز (٢، ٣)، نصف القطر $\sqrt{١٠}$

المعادلة هي $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ١٠$



إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة الخامسة: الهندسة الإحداثية

تمارين معرفة قبلية

١) نقطة المنتصف هي $(-٤\frac{١}{٢}، -٢)$، طول القطعة المستقيمة = ١٣

٢) أ ميل المستقيم = $-\frac{١}{٦}$
ب ميل المستقيم العمودي = ٦

٣) أ ميل المستقيم = $\frac{٢}{٣}$
ب الجزء المقطوع من المحور الصادي = −٥
ج $٧\frac{١}{٢}$

٤) أ $(س - ٤)^{٢} - ٢١$ ب $٤ - \sqrt{٢١}$ ، $٤ + \sqrt{٢١}$

٥) أ ٩٠° ب ٩٠° ج ٩٠°

تمارين ٥-١

١) أ $\overline{دل} = ٥\sqrt{٥}$ ، $\overline{لر} = ٤\sqrt{٥}$ ، $\overline{در} = ٣\sqrt{٥}$
مثلث قائم الزاوية
ب $\overline{دل} = \sqrt{١٩٧}$ ، $\overline{لر} = \sqrt{١٤٦}$ ، $\overline{در} = ٣\sqrt{٥}$
مثلث ليس قائم الزاوية

٢) ١٧ وحدة مربعة

٣) أ = ٣ أو أ = −٩

٤) ب = ٣ أو ب = $-٥\frac{٤}{٥}$

٥) أ = ٢، ب = −١

٦) أ (−٢، −١) ب (−١، ٩)
ج $٢\sqrt{٤١}$ ، $٢\sqrt{١٠١}$

٧) ك = ٤

٨) $٣٨\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

٩) ك = ٢

١٠) (−٢ ، ٦)

١١) أ (٥ ، ٢) ب $٨\sqrt{٢}$

١٢) أ (−٥، ٥) ب (٧، ٣) ج (−٣، −٣)

تمارين ٥-٢

١) أ ميل $\overline{اب} = \frac{١}{٥}$ ، ميل $\overline{بج} = \frac{١}{٦}$
ب ليست على استقامة واحدة

٢) برهان

٣) ميل $\overline{جد} = -\frac{٢}{٥}$ ، ميل $\overline{بج} = \frac{٥}{٢}$

٤) (٧ ، −١)

٥) ك = $\frac{٥}{٧}$

٦) ك = ٢، أو ك = ٣

٧) (٠ ، −٢٦)

٨) أ ك = ١ ب ك = ٥

٩) أ = ١٠، ب = ٤

١٠) أ ميل $\overline{دل} = \frac{١}{٢}$ ب الميل العمودي = −٢
ج أ = ٦ أو أ = −٤

١١) أ (٦ ، ٦) ب ع = −٤، ح = ١٦، ط = ١١
ج $٤\sqrt{١٤٥}$ د ١٠٠ وحدة مربعة

تمارين ٥-٣

١) أ ص = ٢س + ١ ب ص = −٣س − ١
ج ٢س + ٣ص = ١

٢) أ ٢ص = ٣س − ٣ ب ٩س + ٥ص = ٢
ج ٢س − ٣ص = ٩

٣) أ ص = ٣س + ٤ ب س + ٢ص = −٨
ج س + ٢ص = ٨ د ٣س + ٢ص = ١٨

٤) أ ص = ٢س + ٢ ب ٥س + ٣ص = ٩
ج ٧س + ٣ص = −٦

٥) ر (٨ ، ٢)

٦) أ ص = $\frac{٣}{٢}$س + ٨ ب (٠ ، ٨)

ج ٣٩ وحدة مربعة

٧) أ ا(٦ ، ٣) ب ص = −$\frac{٢}{٣}$س + ٧

٨) أ ص = $\frac{٤}{٣}$س + ١٠

ب ى(−٧$\frac{١}{٢}$ ، ٠)، ل (٠، ١٠)

ج طول $\overline{ىل}$ = ١٢$\frac{١}{٢}$

٩) أ ٢ص = ٥س + ٣٣

ب ٣٣ وحدة مربعة

١٠) هـ(٤ ، ٦)

ى(١٠ ، ٣)

١١) ك = ١٠

١٢) ى(١٤، −٢)

١٣) أ ص = −٣س + ٢

ب ى(−١ ، ٥)

ج $\overline{اج}$ = ٥$\sqrt{١٠}$، $\overline{بى}$ = ٤$\sqrt{١٠}$

د ١٠٠ وحدة مربعة

١٤) أ ١) ص = ٤$\frac{١}{٢}$

٢) س + ص = ٧

ب (٢$\frac{١}{٢}$ ، ٤$\frac{١}{٢}$)

١٥) أ ص = ٢س − ٧

ب (٤$\frac{٢}{٥}$ ، ١$\frac{٤}{٥}$)

تمارين ٤-٥

١) أ م (٠ ، ٠)، نق = ٤

ب م (٠ ، ٠)، نق = $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

ج م (٠ ، ٢)، نق = ٥

د م (٥ ، −٣)، نق = ٢

هـ م (−٧ ، ٠)، نق = ٣$\sqrt{٢}$

و م (٣ ، −٤)، نق = $\frac{٣\sqrt{١٠}}{٢}$

ز م (٤ ، −١٠)، نق = $\sqrt{٦}$

ح م (٣$\frac{١}{٢}$ ، ٢$\frac{١}{٢}$)، نق = ١٠

٢) أ س^٢ + ص^٢ = ٦٤

ب (س − ٥)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ١٦

ج (س + ١)^٢ + (ص − ٣)^٢ = ٧

د $\left(س - \frac{١}{٢}\right)^٢ + \left(ص + \frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٢٥}{٤}$

٣) (س − ٢)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ٢٥

٤) (س + ٢)^٢ + (ص − ٢)^٢ = ٥٢

٥) (س − ٦)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥

٦) برهان

٧) (س − ٥)^٢ + ص^٢ = ٨، (س − ٥)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٨

٨) (س − ٤)^٢ + (ص − ٢)^٢ = ٢٠

٩) (س − ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١٦، م (٣، −١)، نق = ٤

١٠) أ برهان ب ص = $\frac{٣}{٤}$س − $\frac{٢١}{٢}$

١١) أ (س − ٥)^٢ + (ص − ٢)^٢ = ٢٩

ب برهان

١٢) أ برهان

ب (س + ١)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٢٠

١٣) (س − ٥)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٤٠

١٤) (س − ٩)^٢ + (ص − ٢)^٢ = ٨٥

١٥) (س + ٣)^٢ + (ص + ١٠)^٢ = ١٠٠،

(س − ١٣)^٢ + (ص + ١٠)^٢ = ١٠٠

١٦) أ ١) نق الدائرة الخضراء = ١ + $\sqrt{٢}$

٢) تحقق من رسوم الطلبة

ب ١) نق الدائرة الزرقاء = ٣ + ٢$\sqrt{٢}$

٢) تحقق من رسوم الطلبة

تمارين ٥-٥

١) (−١، −٤)، (٥، ٢)

٢) ٢$\sqrt{٥}$

٣) برهان

٤) −$\frac{٢}{٢٩}$ < م < ٢

٥) أ ب (٠ ، ٦)، أ (٨ ، ١٠)

ب ص = −٢س + ١٦

ج (٥ − $\sqrt{٥}$ ، ٦ + ٢$\sqrt{٥}$)، (٥ + $\sqrt{٥}$ ، ٦ − ٢$\sqrt{٥}$)

د ٢٠$\sqrt{٥}$

٦) برهان؛ (٤، ٣)

٧) أ هو مماس عندما جـ = $\sqrt{٨}$ أو عندما جـ = −$\sqrt{٨}$

ب يتقاطعان مرتين عندما −$\sqrt{٨}$ < جـ < $\sqrt{٨}$

ج لا يتقاطعان عندما جـ < −$\sqrt{٨}$ أو عندما جـ > $\sqrt{٨}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) م = −٤، ن = −١، أو م = ١٢، ن = ٧

٢) ١٠

٣) أ م = ٥، ن = −٢

ب (٤، −٥)

ج ص = −$\frac{٢}{٥}$س − $\frac{١٧}{٥}$

٤) أ ١٦ت^{٢}

ب برهان

٥) (١٣، −٧)

٦) أ (−٢، ٢)، (٤، ٥)

ب ص = −٢س + ٥$\frac{١}{٢}$

٧) أ (−٢، −٣)

ب ص = −$\frac{١}{٢}$س + ٤$\frac{٣}{٤}$

ج $\frac{١٩}{٢}$ − $\sqrt{١١٣}$، $\frac{١٩}{٢}$ + $\sqrt{١١٣}$

٨) أ ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = ٢، م = ١

ب ج (−١، ٦)

ج د(٥، ١٢)

٩) أ ص = ٢س − ٢

ب (٠، −٢)، $\left(\frac{٨}{٥}، \frac{٦}{٥}\right)$

١٠) أ ص = −٢س + ٦، ب (٣، ٠)

ب برهان

ج د(−١، ٨)، $\overline{\text{أد}}$ = ٢$\sqrt{١٠}$

١١) أ ص = −$\frac{٢}{٣}$س + ٣

ب ت = −١

ج (س − ٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٦

١٢) أ د(١٩، ١٣) ب ١٠٤ سم^{٢}

١٣) أ $\left(\frac{١٠}{٣}، ١٠\right)$

ب ك < −١٢، ك > ١٢

١٤) أ ص = −$\frac{٤}{٣}$س + ٢

ب برهان

ج (س − ١٥)^{٢} + (ص − ٧)^{٢} = ٣٢٥

١٥) أ نق = ٤، م (٤، −٢)

ب ٤ − ٢$\sqrt{٣}$ ، ٤ + ٢$\sqrt{٣}$

ج برهان د برهان

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة الخامسة: الهندسة الإحداثية

تمارين ٥-١

١) أ ١٣   ب ٥

ج $\sqrt{٥}$ د $\sqrt{١٠}$

هـ $٢\sqrt{٥}$ و $٢\sqrt{٢}$

ز $\sqrt{١٠}$ ح $\sqrt{١٧}$

٢) أ (٤ ، ١٣)   ب (١ ، ٨)

ج $\left(-\frac{١}{٢} ، -٤\frac{١}{٢}\right)$ د $\left(-٥\frac{١}{٢} ، ٤\frac{١}{٢}\right)$

هـ (٢د + ٣ ، ٢د − ٣)   و (د + ٤ ، −٢)

ز (٣د، ٣ل)   ح (أ + ٣، ب + ١)

٣) $٣أ\sqrt{٥}$

٤) برهان

٥) أ $\overline{أب} = \overline{بج} = ٥$ وحدة طول

ب إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أج}$ هي $\left(\frac{٧}{٢}، \frac{٧}{٢}\right)$ وهذه لا تساوي إحداثيات النقطة ب(٤، ٤)

٦) $١ \pm \frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$

٧) $\overline{أم} = \sqrt{\left(\frac{س_١ - س_٢}{٢} - س_١\right)^٢ + \left(\frac{ص_١ - ص_٢}{٢} - ص_١\right)^٢}$

$\sqrt{\left(\frac{س_٢ - س_١}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{ص_٢ - ص_١}{٢}\right)^٢}$

$= \sqrt{\frac{١}{٤}\left((س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢\right)}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{\left((س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢\right)}$

$\overline{أب} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$\therefore \overline{أم} = \frac{١}{٢}\overline{أب}$

٨) أ ١) $٢\sqrt{٥}\sqrt{ن^٢ + ١}$

٢) (−١ + ٢ن ، ٢ + ن)

ب النسبة ٢ : ١

٩) $٥\sqrt{٥}$ م

تمارين ٥-٢

١) أ متعامدان

ب متوازيان

ج متوازيان

د متوازيان

هـ متعامدان

و لا متوازيان ولا متعامدان

ز لا متوازيان ولا متعامدان

ح لا متوازيان ولا متعامدان

٢) قائم الزاوية في أ، المساحة = ٦,٥

٣) $(٦ \pm ٢\sqrt{٢} ، ٠)$

٤) −١

٥) س = ٥ أو س = −٣

٦) أ ميل $\overline{لك}$ = ميل $\overline{من}$ = $-\frac{١}{٣}$،

ميل $\overline{كن}$ = ٤، ميل $\overline{لم}$ = $\frac{٣}{٤}$

ب شبه منحرف

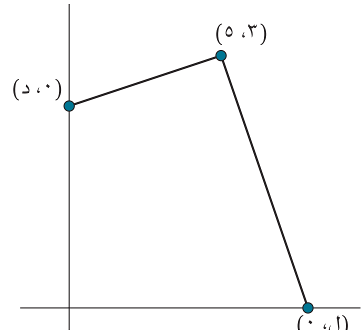
٧) أ $\overline{دهـ} = \overline{دز} = \sqrt{١٠}$، $\overline{هـر} = \overline{رز} = \sqrt{٤٠}$

ب طائرة ورقية (دالتون)

٨) أ م (٦ ، ١)   ب برهان

ج ن $\left(٨ ، ٥\frac{١}{٢}\right)$ د برهان

٩) أ إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية، فإن ناتج ضرب الميلَين يجب أن يكون −١



الميلان هما $\frac{٥ - ل}{٣}$ و $\frac{٥}{٣ - د}$

ناتج ضرب الميلَين يساوي −١،

∴ لدينا $\frac{٥ - ل}{٣} \times \frac{٥}{٣ - د} = -١$

الأمر الذي يعطي $\frac{٢٥ - ٥ل}{٩ - ٣د} = -١$

٢٥ − ٥ل = ٣د − ٩

٣٤ − ٥ل = ٣د − ٩

٣٤ = ٣د + ٥ل وفق المطلوب

ب ك = $\frac{١٤}{٣}$، المساحة = $\frac{٥٣}{٣}$

١٠) **أ** نحتاج إلى برهان أن الأضلاع = ك = كالمتقابلة المتوازية.

ميل $\overline{اب}$ يساوي $\frac{ك + ٢ - ٢}{ك + ١ - ك}$ = ك،

ميل $\overline{ءج}$ يساوي $\frac{ك + ٤ - ٤}{ك - ٣ - (ك - ٤)}$ = ك

وهما متوازيان

ميل $\overline{بج}$ يساوي $\frac{ك + ٤ - (ك + ٢)}{ك - ٣ - (ك + ١)} = \frac{٢}{-٤}$

$= -\frac{١}{٢}$.

ميل $\overline{اء}$ يساوي $\frac{٤ - ٢}{ك - ٤ - ك} = \frac{٢}{-٤} = -\frac{١}{٢}$.

وهما متوازيان

∴ المضلع متوازي أضلاع.

ب ك = ٢

١١) ٧٨

تمارين ٥-٣

١) **أ** عوّض (١، ٤) في ٥س − ٢ص + ٣ = ٠

٥ × ١ − ٢ × ٤ + ٣ = ٠ وفق المطلوب.

ب ٢س+ ٥ص − ٢٢ = ٠

٢) **أ** $\left(٢، \frac{٩}{٢}\right)$

ب ص = ٢,١س + ٢,١

٣) **أ** ٢س + ٣ص = −٥

ب $\overline{ءل} = \frac{١١}{٢}$

٤) **أ** ص = −٢س + ٤

ب $٢\sqrt{٥}$

٥) **أ** س + ٣ص − د − ٣ل = ٠

ب س − د = ٠

ج س − ص− د + ل = ٠

د ل س + دص− د ل= ٠

٦) ص = ٧

٧) ص = م س − م د

٨) عوّض (د، ل) في المعادلة ص = م س + جـ للحصول على ل = م د + جـ

عوض (ر، هـ) في المعادلة ص = م س + جـ للحصول على هـ = م س + جـ

ميل $\overline{ءل}$ يساوي $\frac{هـ - ل}{ر - د}$

عوّض هـ، ل في: $\frac{(مر + جـ) - (مد + جـ)}{ر - د}$

$= \frac{م(ر - د)}{ر - د} = م$

تمارين ٥-٤

١) أ $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٧)^{٢} = ١٦$

ب $(س - ٥)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٣٦$

ج $(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٧$

د $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٥$

٢) أ المركز (٢، −٣)، نصف القطر $\frac{٣}{٢}$

ب المركز (−١، −٥)، نصف القطر $\frac{٢}{٥}$

ج المركز $(٣، \frac{١}{٢})$، نصف القطر $\sqrt{٦}$

د المركز $(-\frac{٣}{٤}، \frac{١}{٥})$، نصف القطر $\sqrt{٣}$

٣) أ المركز (−٢، ٣)، نصف القطر ٣

ب المركز (٤، −١)، نصف القطر ٣

ج المركز (١ ، −٣)، نصف القطر ٣

د المركز (٥، −٢)، نصف القطر $\sqrt{٣٠}$

هـ المركز $\left(-\frac{٥}{٢}، \frac{١}{٢}\right)$، نصف القطر $\frac{٣\sqrt{٢}}{٣}$

و المركز $\left(\frac{٣}{٢}، -\frac{٧}{٢}\right)$، نصف القطر $\frac{\sqrt{٧٠}}{٢}$

ز المركز $\left(٠، \frac{٥}{٢}\right)$، نصف القطر $\frac{\sqrt{٧٣}}{٢}$

ح المركز $\left(-\frac{٣}{٢}، ٠\right)$، نصف القطر $\frac{٧}{٢}$

٤) أ $(س + ٦)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ١١٧$

ب (٠، −٦)، (٠، ١٢)

٥) $(\frac{٥}{٢}، -\frac{١}{٢})$، نق = $\frac{\sqrt{٣٨}}{٢}$

٦) $٤\sqrt{٦}$

٧) أ ميل $\overline{اب}$ يساوي $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

ميل $\overline{ب ج}$ يساوي $\frac{-١٥}{٩} = \frac{-٥}{٣}$

ناتج ضرب الميلَين يساوي −١، أي أن الميلَين متعامدان.

ب $\sqrt{٤٤٢}$

ج $\left(س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} + \left(ص + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٢٢١}{٢}$

٨) د = $\sqrt{١٧}$

٩) أ ٩٠°

ب بما أن الزاوية ء ك ل قائمة، نعرف أن $\overline{ء ك}$ متعامد مع ل ك، أي أن ناتج ضرب ميلَيهما يساوي −١

$$\frac{ص - ب}{س - أ} \times \frac{ص - د}{س - جـ} = -١$$

فكّ الأقواس واضرب المقام:

(ص − ب)(ص − د) = −(س − أ)(س − جـ)

ترتيب ذلك يوصل إلى المعادلة في التمرين.

تمارين ٥-٥

١) أ ص = ٤

ب ص = $\frac{٣}{٥}$ س + $\frac{١٩}{٥}$

ج ص = −س + ٢

د ص = $\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{٤}{٣}$

هـ ص = −٢س + ٩

و ص = −س + ٦

٢) أ $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٢٩$

ب المعادلة هي $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٢٩$

عوّض بدل س = ٠، ص = ١٠ للحصول على

$(-٢)^{٢} + ٥^{٢} + ٤ = ٢٥ = ٢٩$

ج ٧,٤٣

٣) $\frac{٢٠٠}{٣}$

٤) ١,٠٤، ٦,١٦

٥) ٤,١١

٦) أ (٢، −١)

ب إحداثيات النقطة م(٢، −١)، أي ميل $\overline{ءل}$ يساوي

$-\frac{١}{٢}$ ومعادلة ال هي ص = $-\frac{١}{٢}$س

هذا يقطع الدائرة في النقطة ل و س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

عوّض للحصول على س^{٢} + $\frac{س^{٢}}{٤}$ = ٢٥

س^{٢} = ٢٠ إذًا إحداثيات النقطة ء

هي ($\sqrt{٢٠}$، $-\sqrt{٥}$)

نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{ءل}$

هي $\frac{١}{٢}$($\sqrt{٢٠}$، $-\sqrt{٥}$) والتي لا تساوي (٢، −١)

في المعيّن، يتقاطع الوتران في قطعة المنتصف

نفسها، أي أن ء ا ل ب ليس معينًا.

٧) أ (س − ٥)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

عندما س = ٠ تصبح المعادلة ٢٥ + (ص − ٥)^{٢}

= ٢٥ و ص = ٥ الجذر الوحيد، أي أن الدائرة

مماس على المحور الصادي.

عندما ص = ٠ تصبح المعادلة

(س − ٥)^{٢} + ٢٥ = ٢٥ و س = ٥ الجذر الوحيد،

أي أن الدائرة مماس على المحور السيني.

ب عوض (٨، ٩) في الطرف الأيمن في المعادلة

الأصلية للحصول على:

٨^{٢} + ٩^{٢} − ٨٠ − ٩٠ + ٢٥ والتي تساوي صفرًا

كما هو مطلوب.

ج ١٥٠ − ٢٥π

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) أ س + ٣ص = ٩ ب (٠,٩، ٢,٧)

ج $\sqrt{٠,٩}$

٢) أ س + ص = ١

ب (٢، −١) ، (٠، ١)

٣) أ ك = $-\frac{٥}{٢}$

ب −٦

ج ٣س − ٢ص − ٦ = ٠

د (٢، ٠)

٤) أ (١، ٥)

ب عوض عن (٧، ٢) في المعادلة ٧^{٢} − ١٤ + ٢^{٢} − ٢٠ −

١٩، والتي تساوي صفرًا كما هو مطلوب؛

∴ تقع النقطة ا على الدائرة.

ج (٤,٣، ٨,٣)

٥) ك = −١٩

٦) أ ميل $\overline{اب}$ يساوي $\frac{٥}{١}$ وميل $\overline{اج}$ يساوي $-\frac{٥}{١}$ ناتج

ضرب الميلَين يساوي −١، أي أن المستقيمَين

متعامدان.

ب (س − ٦)^{٢} + ص^{٢} = ١٣

ج ٣س + ٢ص − ٥ = ٠

٧) −٦ − ٥$\sqrt{٥}$ < ك < −٦ + ٥$\sqrt{٥}$

٨) أ $\frac{٢٥٦}{٣}$ ب $\frac{١٠٤}{٣}$

٩) ٢م أ ج = أ^{٢} − ج^{٢}

الوحدة الخامسة : حلول التمارين
الهندسة الإحداثية

تمارين ٥-١

١) أ د $(-٤، ٦)$، ل $(٦، ١)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{دل} = \sqrt{(٦ - (-٤))^{٢} + (١ - ٦)^{٢}}$

$= \sqrt{(١٠)^{٢} + (-٥)^{٢}}$

$= \sqrt{١٠٠ + ٢٥}$

$\overline{دل} = \sqrt{١٢٥}$ أو $٥\sqrt{٥}$

ل $(٦، ١)$، س $(٢، ٩)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{لس} = \sqrt{(٢ - ٦)^{٢} + (٩ - ١)^{٢}}$

$= \sqrt{(-٤)^{٢} + ٨^{٢}}$

$= \sqrt{١٦ + ٦٤}$

$\overline{لس} = \sqrt{٨٠}$ أو $٤\sqrt{٥}$

د $(-٤، ٦)$، س $(٢، ٩)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{دس} = \sqrt{(٢ - (-٤))^{٢} + (٩ - ٦)^{٢}}$

$= \sqrt{٦^{٢} + ٣^{٢}}$

$= \sqrt{٣٦ + ٩}$

$\overline{دس} = \sqrt{٤٥}$ أو $٣\sqrt{٥}$

باستخدام نظرية فيثاغورث، ليكون د ل س مثلثًا قائم الزاوية فيجب أن يكون:

$(٣\sqrt{٥})^{٢} + (٤\sqrt{٥})^{٢} = (٥\sqrt{٥})^{٢}$

> عندما تريد اختبار ما إذا كان المثلث قائم الزاوية، اختر الضلع الأكبر ليكون الوتر

٤٥ + ٨٠ يجب أن يساوي ١٢٥

١٢٥ = ١٢٥

وعليه، يكون المثلث د ل س قائم الزاوية.

٢) د $(١، ٦)$، ل $(-٢، ١)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{دل} = \sqrt{(-٢ - ١)^{٢} + (١ - ٦)^{٢}}$

$= \sqrt{(-٣)^{٢} + (-٥)^{٢}}$

$= \sqrt{٩ + ٢٥}$

$\overline{دل} = \sqrt{٣٤}$

ل $(-٢، ١)$ ، س $(٣، -٢)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{لس} = \sqrt{(٣ - (-٢))^{٢} + (-٢ - ١)^{٢}}$

$= \sqrt{٥^{٢} + (-٣)^{٢}}$

$= \sqrt{٢٥ + ٩}$

$\overline{لس} = \sqrt{٣٤}$

د $(١، ٦)$، س $(٣، -٢)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{دس} = \sqrt{(٣ - ١)^{٢} + (-٢ - ٦)^{٢}}$

$= \sqrt{٢^٢ + (-٨)^٢}$

$= \sqrt{٤ + ٦٤}$

$\overline{\text{ى ر}} = \sqrt{٦٨}$

ولأن $\overline{\text{ى ل}} = \overline{\text{ل ر}}$ فإن المثلث متطابق الضلعَين،

وحيث $\sqrt{٦٨} > \sqrt{٣٤}$، اختر $\overline{\text{ى ر}}$ وترًا للمثلث.

باستخدام نظرية فيثاغورث، ليكون ى ل ر مثلثًا قائم الزاوية فيجب أن يكون:

$(\sqrt{٣٤})^٢ + (\sqrt{٣٤})^٢ = (\sqrt{٦٨})^٢$

أي ٣٤ + ٣٤ يجب أن يساوي ٦٨

$٦٨ = ٦٨$

وعليه، فإن المثلث قائم الزاوية في ل.

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٣٤} \times \sqrt{٣٤}$

$= \frac{١}{٢} \times ٣٤$

= ١٧ وحدة مربعة.

٣) ى (أ، −١)، ل (−٥، أ)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{ى ل}} = \sqrt{(-٥ - \text{أ})^٢ + (\text{أ} - (-١))^٢}$

$= \sqrt{(-٥ - \text{أ})^٢ + (\text{أ} + ١)^٢} = ٤\sqrt{٥}$

$\overline{\text{ى ل}} = ٤\sqrt{٥}$

فيكون $٤\sqrt{٥} = \sqrt{(-٥ - \text{أ})^٢ + (\text{أ} + ١)^٢}$

ربّع الطرفَين فتحصل على:

$٨٠ = (-٥ - \text{أ})^٢ + (\text{أ} + ١)^٢$

$٨٠ = ٢٥ + ١٠\text{أ} + \text{أ}^٢ + \text{أ}^٢ + ٢\text{أ} + ١$

$٢\text{أ}^٢ + ١٢\text{أ} - ٥٤ = ٠$

$\text{أ}^٢ + ٦\text{أ} - ٢٧ = ٠$

$(\text{أ} + ٩)(\text{أ} - ٣) = ٠$

أ = −٩ أو أ = ٣

٥) ليكن ى (−٦، −٥)، ل (أ، ب)

نقطة منتصف القطعة المستقيمة هي:

$\text{م} = \left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$

$\text{م} = \left(\frac{-٦ + \text{أ}}{٢} ، \frac{-٥ + \text{ب}}{٢}\right)$ وهذا يساوي (−٢، −٣)

وعليه، يكون $\frac{-٦ + \text{أ}}{٢} = -٢$ و $\frac{-٥ + \text{ب}}{٢} = -٣$

$-٦ + \text{أ} = -٤$ و $-٥ + \text{ب} = -٦$

حل كل من المعادلتَين يعطي:

أ = ٢، ب = −١

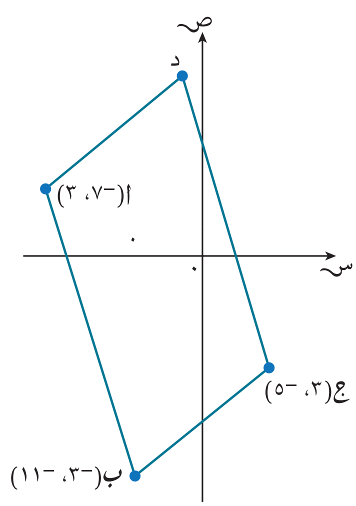
عندما تحل مسائل تتعلق بالهندسة الإحداثية، استخدم الرسم دائمًا. تأكد من تسمية النقاط، ومن أنك وصلت بينها بالترتيب الصحيح كما هو منصوص عليه في السؤال.

٦) أ يبيّن الشكل المعلومات المتضمنة في السؤال.

تأكد من أن تصل بين النقاط بالترتيب الصحيح

الآتي: ا ← ب ← ج ← د ← ا

عكس اتجاه عقارب الساعة.



ا (−٧، ٣)، ج (٣، −٥)

نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ج هي

$= \left(\frac{\text{س}_{1} + \text{س}_{2}}{٢} ، \frac{\text{ص}_{1} + \text{ص}_{2}}{٢}\right)$

$= \left(\frac{-٧ + ٣}{٢} ، \frac{٣ + (-٥)}{٢}\right) = (-٢ ، -١)$

ب إحداثيات النقطة ى هي (م، ن)

وحيث أن أ ب ج ى متوازي أضلاع، فإن نقطة منتصف $\overline{\text{ب ى}}$ هي النقطة نفسها لمنتصف $\overline{\text{أ ج}}$

إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{ب ى}}$ =

$\left(\frac{-٣ + \text{م}}{٢} ، \frac{-١١ + \text{ن}}{٢}\right) = (-٢ ، -١)$

المساواة بين الإحداثيات السينية يعطي:

$\frac{-٣ + \text{م}}{٢} = -٢$

$-٣ + \text{م} = -٤$

$\text{م} = -١$

المساواة بين الإحداثيات الصادية يعطي:

$\frac{-١١ + \text{ن}}{٢} = -١$

$-١١ + \text{ن} = -٢$

$\text{ن} = ٩$

فتكون إحداثيات د (−١، ٩).

ج أ(−٧، ٣)، ج (٣، −٥)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{أ ج}} = \sqrt{(٣ - (-٧))^{٢} + (-٥ - ٣)^{٢}}$

$= \sqrt{١٠^{٢} + (-٨)^{٢}}$

$= \sqrt{١٠٠ + ٦٤}$

$\overline{\text{أ ج}} = \sqrt{١٦٤}$ أو $٢\sqrt{٤١}$

ب (−٣، −١١)، د (−١، ٩)

$\overline{\text{ب ى}} = \sqrt{(-١ - (-٣))^{٢} + (٩ - (-١١))^{٢}}$

$= \sqrt{٢^{٢} + ٢٠^{٢}}$

$= \sqrt{٤ + ٤٠٠}$

$\overline{\text{ب ى}} = \sqrt{٤٠٤}$ أو $٢\sqrt{١٠١}$

٧)

> انتبه! لم يذكر سؤال ٧ أن النقاط أ، ى، **ب** تقع على خط مستقيم. إذا كان طول أ ى يساوي طول ى **ب** عندها تقع النقطة ى في أي مكان على العمود المنصف للقطعة أ **ب**

المعطيات ى (ك، ٢ك)، أ(٨، ١١) ، **ب** (١، ١٢)

وطول $\overline{\text{أ ى}}$ يساوي طول $\overline{\text{ب ى}}$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{أ ى}} = \sqrt{(٨ - \text{ك})^{٢} + (١١ - ٢\text{ك})^{٢}}$

$\overline{\text{ب ى}} = \sqrt{(١ - \text{ك})^{٢} + (١٢ - ٢\text{ك})^{٢}}$

$\sqrt{(٨ - \text{ك})^{٢} + (١١ - ٢\text{ك})^{٢}} = \sqrt{(١ - \text{ك})^{٢} + (١٢ - ٢\text{ك})^{٢}}$

ربّع طرفَي المعادلة:

$(٨ - \text{ك})^{٢} + (١١ - ٢\text{ك})^{٢} = (١ - \text{ك})^{٢} + (١٢ - ٢\text{ك})^{٢}$

الطرف الأيمن يساوي:

$٦٤ - ١٦\text{ك} + \text{ك}^{٢} + ١٢١ - ٤٤\text{ك} + ٤\text{ك}^{٢}$

$= ٥\text{ك}^{٢} - ٦٠\text{ك} + ١٨٥$

الطرف الأيسر يساوي:

$١ - ٢\text{ك} + \text{ك}^{٢} + ١٤٤ - ٤٨\text{ك} + ٤\text{ك}^{٢}$

$= ٥\text{ك}^{٢} - ٥٠\text{ك} + ١٤٥$

$\therefore ٥\text{ك}^{٢} - ٦٠\text{ك} + ١٨٥ = ٥\text{ك}^{٢} - ٥٠\text{ك} + ١٤٥$

$١٠\text{ك} = ٤٠$

$\text{ك} = ٤$

٨) أ (−٦، ٣)، **ب** (٣، ٥)، **ج** (١، −٤)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{اج}} = \sqrt{(١ - (-٦))^٢ + (-٤ - ٣)^٢}$

$= \sqrt{٧^٢ + (-٧)^٢}$

$= \sqrt{٤٩ + ٤٩}$

$\overline{\text{اج}} = \sqrt{٩٨}$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{اب}} = \sqrt{(٣ - (-٦))^٢ + (٥ - ٣)^٢}$

$= \sqrt{٩^٢ + ٢^٢}$

$= \sqrt{٨١ + ٤}$

$\overline{\text{اب}} = \sqrt{٨٥}$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

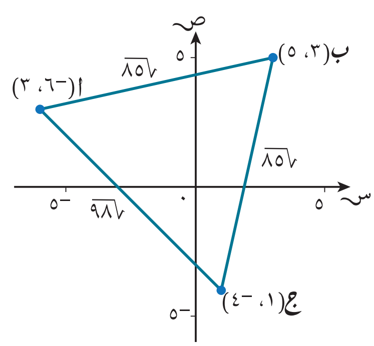
$\overline{\text{بج}} = \sqrt{(١ - ٣)^٢ + (-٤ - ٥)^٢}$

$= \sqrt{(-٢)^٢ + (-٩)^٢}$

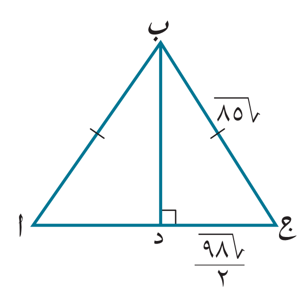
$= \sqrt{٤ + ٨١}$

$\overline{\text{بج}} = \sqrt{٨٥}$

إذًا $\overline{\text{اب}} = \overline{\text{بج}}$ ، ويكون المثلث ا ب ج متطابق الضلعَين.



لا نعرف ما إذا كان هذا المثلث قائم الزاوية، ولكننا يمكن أن نحسب مساحته. لتكن ى نقطة منتصف القطعة $\overline{\text{اج}}$ فيكون $\overline{\text{بى}}$ هو ارتفاع المثلث.



استخدم نظرية فيثاغورث لتجد طول ب ى:

$\overline{\text{بى}} = \sqrt{(\sqrt{٨٥})^٢ - \left(\frac{\sqrt{٩٨}}{٢}\right)^٢}$

$= \sqrt{٨٥ - \frac{٩٨}{٤}}$

$\overline{\text{بى}} = \sqrt{\frac{١٢١}{٢}}$

مساحة المثلث ا ب ج $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢}\left(\sqrt{\frac{١٢١}{٢}} \times \sqrt{٩٨}\right)$

$= ٣٨{,}٥$ وحدة مربعة

٩) استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{اب}} = \sqrt{(٣ - (-٧))^٢ + (\text{ك} - ٨)^٢}$

$= \sqrt{١٠^٢ + (\text{ك} - ٨)^٢}$

$= \sqrt{١٠٠ + \text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ٦٤}$

$\overline{\text{اب}} = \sqrt{\text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ١٦٤}$

$\overline{\text{بج}} = \sqrt{(٨ - ٣)^٢ + (٥ - \text{ك})^٢}$

$= \sqrt{٢٥ + ٢٥ - ١٠\text{ك} + \text{ك}^٢}$

$= \sqrt{\text{ك}^٢ - ١٠\text{ك} + ٥٠}$

لأن $\overline{\text{اب}} = ٢\,\overline{\text{بج}}$ فيكون:

$\sqrt{\text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ١٦٤} = ٢\sqrt{\text{ك}^٢ - ١٠\text{ك} + ٥٠}$

ربّع الطرفَين لتحصل على:

$\text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ١٦٤ = ٤(\text{ك}^٢ - ١٠\text{ك} + ٥٠)$

$\text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ١٦٤ = ٤\text{ك}^٢ - ٤٠\text{ك} + ٢٠٠$

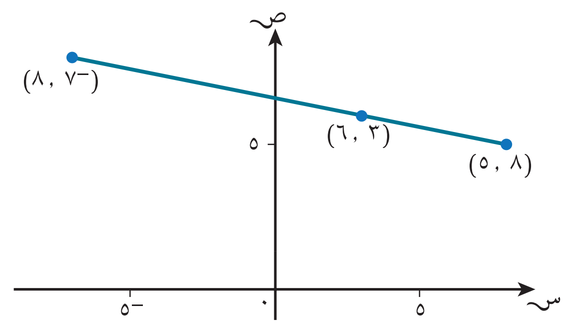
$٣\text{ك}^٢ - ٢٤\text{ك} + ٣٦ = ٠$

$\text{ك}^٢ - ٨\text{ك} + ١٢ = ٠$

$(\text{ك} - ٦)(\text{ك} - ٢) = ٠$

ك = ٢ أو ك = ٦

ك = ٦ حل مرفوض لأنها تجعل الشكل مستقيمًا وليس مثلثًا (لاحظ الرسم).



الحل، ك = ٢

١٠) س + ص = ٤ .... (١)

$ص = ٨ - \frac{٥}{س}$ .... (٢)

حلّ المعادلتَين (١) و(٢) بشكل آني يعطي النقطتَين ا، ب

من المعادلة (١) ص = ٤ − س

عوّض عن ص في المعادلة (٢) لتحصل على:

$٤ - س = ٨ - \frac{٥}{س}$

$٤ س - س^{٢} = ٨ س - ٥$

$س^{٢} + ٤ س - ٥ = ٠$

$(س - ١)(س + ٥) = ٠$

س = ١ أو س = −٥

عوّض عن س = ١ في معادلة (١) لتحصل على:

١ + ص = ٤ ومنها ص = ٣

عوّض عن س = −٥ في معادلة (١) لتحصل على:

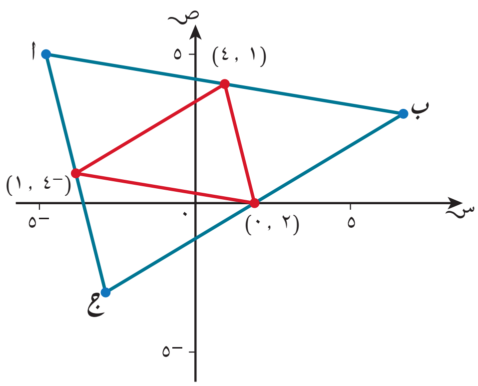
−٥ + ص = ٤ ومنها ص = ٩

النقطتان هما ا (١، ٣) ، ب (−٥، ٩)

نقطة منتصف $\overline{اب} = \left(\frac{١ + (-٥)}{٢}، \frac{٣ + ٩}{٢}\right)$

أو (−٢، ٦)

١٢)



لتكن إحداثيات ا $(س_{١}، ص_{١})$

ب $(س_{٢}، ص_{٢})$

ج $(س_{٣}، ص_{٣})$

نقطة منتصف $\overline{اب} = \left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}\right)$

= (١، ٤)

$\therefore \frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} = ١$ أو $س_{١} + س_{٢} = ٢$ .... (١)

$\frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢} = ٤$ أو $ص_{١} + ص_{٢} = ٨$

نقطة منتصف $\overline{بج} = \left(\frac{س_{٢} + س_{٣}}{٢}، \frac{ص_{٢} + ص_{٣}}{٢}\right)$

= (٢، ٠)

$\therefore \frac{س_{٢} + س_{٣}}{٢} = ٢$ أو $س_{٢} + س_{٣} = ٤$

$\frac{ص_{٢} + ص_{٣}}{٢} = ٠$ أو $ص_{٢} + ص_{٣} = ٠$

نقطة منتصف $\overline{اج} = \left(\frac{س_{١} + س_{٣}}{٢}، \frac{ص_{١} + ص_{٣}}{٢}\right)$

= (−٤ ، ١)

$\therefore \frac{س_{١} + س_{٣}}{٢} = -٤$ أو $س_{١} + س_{٣} = -٨$

$\frac{ص_{١} + ص_{٣}}{٢} = ١$ أو $ص_{١} + ص_{٣} = ٢$

أصبح لدينا:

س$_1$ + س$_2$ = ٢ .... (١)

س$_2$ + س$_3$ = ٤ .... (٢)

س$_1$ + س$_3$ = −٨ .... (٣)

اطرح (٢) من (١) لتحصل على:

س$_1$ − س$_3$ = −٢ .... (٤)

أضف (٤) إلى (٣) لتحصل على:

٢س$_1$ = −١٠، فيكون س$_1$ = −٥

وحيث إن س$_1$ + س$_2$ = ٢

−٥ + س$_2$ = ٢، فيكون س$_2$ = ٧

وحيث إن س$_1$ + س$_3$ = −٨

−٥ + س$_3$ = −٨، فيكون س$_3$ = −٣

كما أن لدينا:

ص$_1$ + ص$_2$ = ٨ .... (٥)

ص$_2$ + ص$_3$ = ٠ .... (٦)

ص$_1$ + ص$_3$ = ٢ .... (٧)

اطرح (٦) من (٥) لتحصل على:

ص$_1$ − ص$_3$ = ٨ .... (٨)

ثم أضف (٨) إلى (٧) لتحصل على:

٢ص$_1$ = ١٠، فيكون ص$_1$ = ٥

وحيث إن ص$_1$ + ص$_2$ = ٨

٥ + ص$_2$ = ٨ ، ∴ ص$_2$ = ٣

وحيث إن ص$_1$ + ص$_3$ = ٢

٥ + ص$_3$ = ٢ فيكون ص$_3$ = −٣

الحلّ هو أ (−٥، ٥) ، **ب** (٧، ٣)، **ج** (−٣، −٣)

تمارين ٥-٢

١) أ) أ(−٦، ٤) ، ب (٤، ٦) ، ج (١٠، ٧)

ميل $\overline{\text{أب}}$ =

$$= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$= \frac{٦ - ٤}{٤ - (-٦)}$$

$$= \frac{١}{٥}$$

ميل $\overline{\text{بج}}$ $= \frac{٧ - ٦}{١٠ - ٤}$

$$= \frac{١}{٦}$$

ب) على الرغم من أن $\overline{\text{أب}}$ و $\overline{\text{بج}}$ يشتركان في النقطة ب فإن النقاط أ ، ب ، ج لا تقع على مستقيم واحد، لأن ميل $\overline{\text{أب}}$ لا يساوي ميل ب ج

٢) نقطة منتصف د(−٤، ٥) و ل (٦، ١) هي:

م = $\left(\frac{-٤ + ٦}{٢} ، \frac{٥ + ١}{٢}\right)$

م = (١، ٣)

إحداثيات ر (−٣، −٧)

ميل $\overline{\text{رم}}$ = $\frac{-٧ - ٣}{-٣ - ١}$، أو $\frac{٥}{٢}$

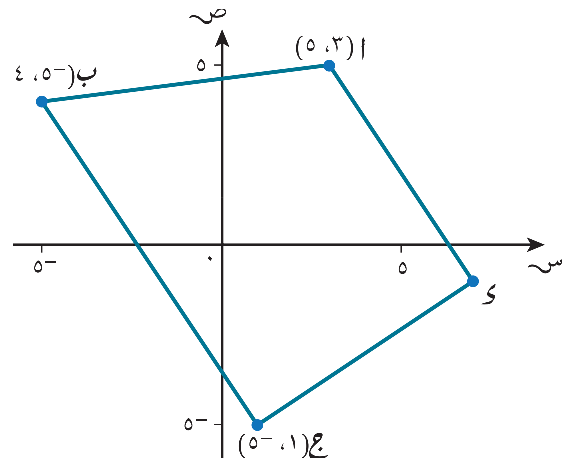
ميل $\overline{\text{دل}}$ = $\frac{١ - ٥}{٦ - (-٤)}$ أو $-\frac{٢}{٥}$

إذا كان ميلا مستقيمَين متعامدَين هما م$_1$، م$_2$ فإن

م$_1$ × م$_2$ = −١

$\frac{٥}{٢} \times \frac{٢}{٥} = -١$ فيكون $\overline{\text{رم}}$ عموديًا على $\overline{\text{دل}}$

٤) يشبه رسم الشكل الآتي:



ميل $\overline{\text{ب ج}} = \frac{-٥ - ٤}{١ - (-٥)}$، أو $-\frac{٣}{٢}$

وعليه، يكون ميل $\overline{\text{ا ى}} = -\frac{٣}{٢}$

لتكن إحداثيات ى (س، ص)

ميل $\overline{\text{ا ى}} = \frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٣}$

وحيث إن ميل $\overline{\text{ا ى}}$ يساوي ميل $\overline{\text{ب ج}}$ يكون:

$-\frac{٣}{٢} = \frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٣}$

∴ −٣(س − ٣) = ٢(ص − ٥)

−٣س + ٩ = ٢ص − ١٠

٢ص + ٣س = ١٩ .... (١)

وحيث إن الزاوية ا ى ج = ٩٠°،

ميل $\overline{\text{ا ى}}$ × ميل $\overline{\text{ج ى}}$ = −١

ميل $\overline{\text{ج ى}} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{ص} - (-٥)}{\text{س} - ١} = \frac{٢}{٣}$

٣(ص + ٥) = ٢(س − ١)

٣ص + ١٥ = ٢س − ٢

٣ص − ٢س = −١٧ .... (٢)

اضرب المعادلة (١) في ٢ لتحصل على

٤ص + ٦س = ٣٨ .... (٣)

اضرب المعادلة (٢) في ٣ لتحصل على

٩ص − ٦س = −٥١ ..... (٤)

اجمع المعادلتَين (٣)، (٤) لتحصل على:

١٣ص = −١٣

ص = −١

عوّض في معادلة (١) لتحصل على:

٢(−١) + ٣س = ١٩

−٢ + ٣س = ١٩

س = ٧

إحداثيات ى (٧، −١)

٥) ا، ب، ج تقع على مستقيم واحد، فيكون

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ يساوي ميل $\overline{\text{ب ج}}$

ميل $\overline{\text{ا ب}} = \frac{٥ - ٨}{\text{ك} - ٥} = \frac{-٣}{\text{ك} - ٥}$

ميل $\overline{\text{ب ج}} = \frac{٤ - ٥}{-\text{ك} - \text{ك}} = \frac{-١}{-٢\text{ك}}$

∴ $\frac{-٣}{\text{ك} - ٥} = \frac{-١}{-٢\text{ك}}$

−٣(−٢ك) = −١(ك − ٥)

٦ك = −ك + ٥

٧ك = ٥

ك = $\frac{٥}{٧}$

٦) ا(−٩، ٢ك − ٨)، ب(٦، ك)، ج(ك، ١٢)

إذا كان قياس الزاوية ا ب ج هو ٩٠° فإن:

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ × ميل $\overline{\text{ب ج}}$ = −١

ميل $\overline{\text{ا ب}} = \frac{\text{ك} - (٢\text{ك} - ٨)}{٦ - (-٩)} = \frac{-\text{ك} + ٨}{١٥}$

ميل $\overline{\text{ب ج}} = \frac{١٢ - \text{ك}}{\text{ك} - ٦}$

وعليه، يكون $\frac{-\text{ك} + ٨}{١٥} \times \frac{١٢ - \text{ك}}{\text{ك} - ٦} = -١$

$\frac{(-\text{ك} + ٨)(١٢ - \text{ك})}{١٥(\text{ك} - ٦)} = -١$

(−ك +٨)(ك − ١٢) = −١٥(ك − ٦)

−١٢ك + $\text{ك}^{٢}$ + ٩٦ − ٨ك = −١٥ك + ٩٠

$\text{ك}^{٢}$ − ٥ك + ٦ = ٠

(ك − ٢)(ك − ٣) = ٠

ك = ٢ أو ك = ٣

٧) لتكن إحداثيات ج (س، ص)

إذا كان قياس الزاوية ا ب ج هو ٩٠

فإن $\overline{\text{ا ب}}$ يعامد $\overline{\text{ب ج}}$

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ = $\frac{\text{٦ − ٨}}{\text{٨ − ٠}}$ أو $-\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

فيكون ميل $\overline{\text{ب ج}}$ = ٤ لأن $\text{م}_{\text{١}} \times \text{م}_{\text{٢}}$ = −١

ميل $\overline{\text{ب ج}}$ = $\frac{\text{ص − ٦}}{\text{س − ٨}}$

$\frac{\text{ص − ٦}}{\text{س − ٨}}$ = ٤

ص − ٦ = ٤(س − ٨)

ص − ٦ = ٤س − ٣٢

ص = ٤س − ٢٦

∵ النقطة ج تقع على المحور الصادي

فإن س = ٠

∴ ص = −٢٦

إحداثيات ج (٠ ، −٢٦)

٨) أ النقاط ا ، ب، ج على استقامة واحدة.

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ يساوي ميل $\overline{\text{ب ج}}$ ، كلاهما يمر في النقطة ب

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ = $\frac{\text{٨ − ٤}}{\text{١٩ − ٧}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

ميل $\overline{\text{ب ج}}$ = $\frac{\text{٢ك − ٨}}{\text{ك − ١٩}}$

$\frac{\text{٢ك − ٨}}{\text{ك − ١٩}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

٣(٢ك − ٨) = ١(ك − ١٩)

٦ك − ٢٤ = ك − ١٩

٥ك = ٥

ك = ١

ب إذا كان قياس الزاوية ج ا ب هو ٩٠°، فيكون

ميل $\overline{\text{ج ا}}$ × ميل $\overline{\text{ا ب}}$ = −١

ميل $\overline{\text{ج ا}}$ = $\frac{\text{٢ك − ٤}}{\text{ك − ٧}}$

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ = $\frac{\text{٨ − ٤}}{\text{١٩ − ٧}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

$\frac{\text{٢ك − ٤}}{\text{ك − ٧}} \times \frac{\text{١}}{\text{٣}}$ = −١

$\frac{\text{٢ك − ٤}}{\text{٣ك − ٢١}}$ = −١

٢ك − ٤ = −٣ك + ٢١

٥ك = ٢٥

ك = ٥

٩) $\frac{\text{س}}{\text{أ}} - \frac{\text{ص}}{\text{ب}}$ = ١،

عند النقطة ى، ص = ٠ إذًا:

$\frac{\text{س}}{\text{أ}} - \frac{\text{٠}}{\text{ب}}$ = ١

$\frac{\text{س}}{\text{أ}}$ = ١

س = أ فتكون ى (أ، ٠)

عند النقطة ل، س = ٠ إذًا:

$\frac{\text{٠}}{\text{أ}} - \frac{\text{ص}}{\text{ب}}$ = ١

$-\frac{\text{ص}}{\text{ب}}$ = ١

ص = − ب، ∴ ل (٠، − ب)

ميل $\overline{\text{ى ل}}$ = $\frac{\text{−ب − ٠}}{\text{٠ − أ}}$ أو $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

$\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$ فيكون، ب = $\frac{\text{٢أ}}{\text{٥}}$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

طول $\overline{\text{ى ل}}$ = $\sqrt{(\text{٠ − أ})^{٢} + (\text{−ب − ٠})^{٢}}$

= $\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$

طول $\overline{\text{ى ل}}$ = $\text{٢}\sqrt{\text{٢٩}}$

ربّع الطرفَين لتحصل على:

$\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$ = ١١٦

عوّض بدل ب لتحصل على:

$\text{أ}^{٢} + \left(\frac{\text{٢أ}}{\text{٥}}\right)^{٢}$ = ١١٦

$$أ^٢ + \frac{٤أ^٢}{٢٥} = ١١٦$$

$$٢٥أ^٢ + ٤أ^٢ = ٢٩٠٠$$

$$أ^٢ = ١٠٠$$

أ = ± ١٠ لكن أ موجبة؛ وعليه، يكون أ = ١٠

عوّض بدل أ في ب = $\frac{أ٢}{٥}$ ،

$$ب = \frac{٢(١٠)}{٥}$$

الحلّ أ = ١٠ ، ب = ٤

١٠) المعطيات ى (أ، أ − ٢)، ل (٤ − ٣أ، −أ)

أ ميل $\overline{ى ل}$ = $\frac{-أ - (أ - ٢)}{٤ - ٣أ - أ}$

$$= \frac{٢ - ٢أ}{٤ - ٤أ}$$

$$= \frac{٢(١ - أ)}{٤(١ - أ)}$$

$$= \frac{١}{٢}$$

ب ميل المستقيم العمودي على ى ل = −٢ لأن للمستقيمَين المتعامدَين

$م_١ × م_٢ = -١$

ج باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$\overline{ى ل} = \sqrt{((٤ - ٣أ) - أ)^٢ + (-أ - (أ - ٢))^٢}$$

$$= \sqrt{(٤ - ٣أ - أ)^٢ + (-أ - أ + ٢)^٢}$$

$$= \sqrt{(٤ - ٤أ)^٢ + (-٢أ + ٢)^٢}$$

$$= \sqrt{١٦ - ٣٢أ + ١٦أ^٢ + ٤أ^٢ - ٨أ + ٤}$$

$$= \sqrt{٢٠أ^٢ - ٤٠أ + ٢٠}$$

$$١٠\sqrt{٥} = \sqrt{٢٠أ^٢ - ٤٠أ + ٢٠}$$

ربّع الطرفَين لتحصل على:

$$٥٠٠ = ٢٠أ^٢ - ٤٠أ + ٢٠$$

$$٢٠أ^٢ - ٤٠أ - ٤٨٠ = ٠$$

$$أ^٢ - ٢أ - ٢٤ = ٠$$

$$(أ - ٦)(أ + ٤) = ٠$$

أ − ٦ = ٠ أو أ + ٤ =٠

أ = ٦ أو أ = −٤

١١) يجب أن تعرف خصائص الأشكال الرباعية المميزة لتساعدك على الإجابة عن أسئلة الهندسة الإحداثية.

أ م = $\left(\frac{٤ + ٨}{٢}، \frac{١٠ + ٢}{٢}\right)$ = (٦، ٦)

ب م هي نقطة منتصف $\overline{أ ج}$ فيكون:

$$م = \left(\frac{ع + ح}{٢}، \frac{١ + ط}{٢}\right)$$

وعليه، يكون $\frac{ع + ح}{٢} = ٦$

ع + ح = ١٢ .... (١)

و $\frac{١ + ط}{٢} = ٦$

١ + ط = ١٢

ط = ١١

وحيث إن قطرَي المعين متعامدان، قياس الزاوية ٩٠° فإن ميل $\overline{أ ج}$ × ميل $\overline{ب ى}$ = −١

$\frac{ط - ١}{ح - ع} × \frac{١٠ - ٢}{٤ - ٨} = -١$، وحيث إن ط = ١١،

$$\frac{١٠}{ح - ع} × -٢ = -١$$

(انتبه هنا! فالبسط فقط هو الذي يضرب في −٢)

$$\frac{١٠(-٢)}{ح - ع} = -١$$

$$-٢٠ = -١(ح - ع)$$

−٢٠ = −ح + ع .... (٢)

اجمع المعادلتَين (١) و (٢) لتحصل على:

$$٢ع = -٨$$

$$ع = -٤$$

عوّض بدل ع = −٤ في المعادلة (١) لتحصل على:

$$-٤ + ح = ١٢$$

ح = ١٦

الحلّ ع = −٤، ح = ١٦، ط = ١١

ج) أطوال أضلاع المعين الأربعة متساوية.

ا = (−٤ ، ١) ، ب (٨، ٢)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{اب} = \sqrt{(٨ - (-٤))^{٢} + (٢ - ١)^{٢}}$

$= \sqrt{١٤٤ + ١}$

$\overline{اب} = \sqrt{١٤٥}$

محيط المعين يساوي $٤\sqrt{١٤٥}$

د) مساحة المعين = $\frac{\overline{اج} \times \overline{بى}}{٢}$

ا = (−٤، ١)، ب (٨، ٢)، ج (١٦، ١١)، ى (٤، ١٠)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{اج} = \sqrt{(١٦ - (-٤))^{٢} + (١١ - ١)^{٢}}$

$= \sqrt{٤٠٠ + ١٠٠}$

$\overline{اج} = \sqrt{٥٠٠}$

$\overline{بى} = \sqrt{(٤ - ٨)^{٢} + (١٠ - ٢)^{٢}}$

$= \sqrt{١٦ + ٦٤}$

$\overline{بى} = \sqrt{٨٠}$

المساحة = $\frac{\sqrt{٥٠٠} \times \sqrt{٨٠}}{٢}$

المساحة = $\frac{\sqrt{٤٠٠٠٠}}{٢}$

المساحة = ١٠٠

تمارين ٥-٣

١) أ) المستقيم ميله ٢ ويمر بالنقطة (٤، ٩)

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = م\,(س - س_{١})$ حيث

$م = ٢،\ س_{١} = ٤،\ ص_{١} = ٩$

ص − ٩ = ٢(س − ٤)

ص − ٩ = ٢س − ٨

ص = ٢س + ١

٢) أ) لتكن نقطتان على المستقيم (١، ٠) ، (٥، ٦)

الميل م = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٦ - ٠}{٥ - ١} = \frac{٣}{٢}$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = م\,(س - س_{١})$ حيث

$م = \frac{٣}{٢}،\ س_{١} = ١،\ ص_{١} = ٠$

$ص - ٠ = \frac{٣}{٢}(س - ١)$

٢ص = ٣س − ٣

٣) أ) ميل المستقيم ص = ٣س − ٥ يساوي ٣.

أي مستقيم يوازي هذا المستقيم يكون له

الميل نفسه أي م = ٣

يمر المستقيم في النقطة (١، ٧)

فيكون $س_{١} = ١،\ ص_{١} = ٧$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = م\,(س - س_{١})$

ص − ٧ = ٣(س − ١)

ص − ٧ = ٣س − ٣

ص = ٣س + ٤

ج) ميل المستقيم ص = ٢س − ٣ يساوي ٢

استخدم $م_{١} \times م_{٢} = -١$، ميل أي مستقيم يوازي هذا المستقيم يساوي $-\frac{١}{٢}$

يمر المستقيم في النقطة (٦، ١)

فيكون $س_{١} = ٦،\ ص_{١} = ١$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = م\,(س - س_{١})$

$ص - ١ = -\frac{١}{٢}(س - ٦)$

٢ص − ٢ = −س + ٦

س + ٢ص = ٨

٤) أ) (٥، ٢)، (−٣، ٦)

ميل المستقيم = $\frac{٦ - ٢}{-٣ - ٥} = -\frac{١}{٢}$

استخدم $م_{١} \times م_{٢} = -١$ ، ميل المستقيم العمودي يساوي ٢

نقطة منتصف $\overline{اب}$

$= \left(\frac{٥ + (-٣)}{٢} ، \frac{٢ + ٦}{٢}\right) = (١، ٤)$

∴ العمود المنصف مستقيم ميله ٢ ويمر في النقطة (١، ٤)

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$،

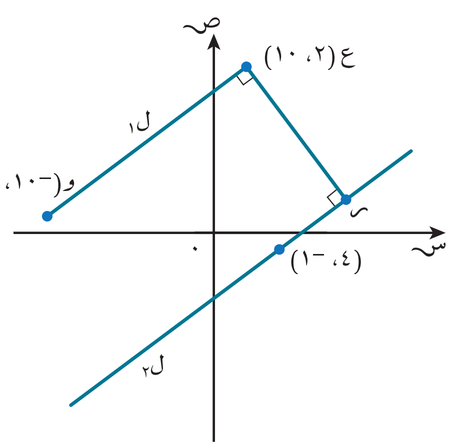
$س_{١} = ١$، $ص_{١} = ٤$، $م = ٢$

ص − ٤ = ٢(س − ١)

ص − ٤ = ٢س − ٢

ص = ٢س + ٢

٥)



أوجِد أولًا معادلة المستقيم العمودي على $ل_{١}$ ، ويمر بالنقطة ع (٢، ١٠)

ميل المستقيم $ل_{١} = م = \frac{١٠ - ١}{٢ - (-١٠)} = \frac{٣}{٤}$

وحيث إن المستقيمَين متعامدان،

فيكون $م_{١} \times م_{٢} = -١$، ويكون ميل المستقيم العمودي على $ل_{١}$ يساوي $-\frac{٤}{٣}$

تقع ع (٢، ١٠) على المستقيم العمودي، فنجد معادلة المستقيم باستخدام

$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$

$ص - ١٠ = -\frac{٤}{٣} (س - ٢)$

٣ص − ٣٠ = −٤(س − ٢)

٣ص − ٣٠ = −٤س + ٨

٣ص +٤س = ٣٨ .... (١)

ولتجد معادلة المستقيم $ل_{٢}$:

ميل $ل_{٢} = \frac{٣}{٤}$،

وتقع النقطة (٤، −١) على المستقيم $ل_{٢}$،

استخدم $ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$

$ص - (-١) = \frac{٣}{٤} (س - ٤)$

٤(ص + ١) = ٣(س − ٤)

٤ص + ٤ = ٣س − ١٢

٤ص − ٣س = −١٦ .... (٢)

ر هي نقطة تقاطع هذَين المستقيمَين.

حل: ٣ص + ٤س = ٣٨ ..... (١)

و ٤ص − ٣س = −١٦ ..... (٢)

اضرب المعادلة (١) في ٣، والمعادلة (٢) في ٤ لتحصل على:

٩ص + ١٢س = ١١٤، ١٦ص − ١٢س = −٦٤

اجمع المعادلتَين لتحصل على:

٢٥ص = ٥٠

ص = ٢

عوّض بدل ص = ٢ في (١) لتحصل على:

٣(٢) + ٤س = ٣٨

س = ٨

إحداثيات ر هي (٨، ٢)

٦) أ د (−٤، ٢)، ع (٥، −٤)

ميل $\overline{دع} = \frac{-٤ - ٢}{٥ - (-٤)} = -\frac{٢}{٣}$

وحيث المستقيمان متعامدان فيكون $م_{١} \times م_{٢} = -١$،

∴ ميل المستقيم العمودي على $\overline{دع}$ هو $\frac{٣}{٢}$

استخدم $ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$ لتجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ ويمر في د (−٤، ٢):

$ص - ٢ = \frac{٣}{٢}(س - (-٤))$

$ص - ٢ = \frac{٣}{٢}(س + ٤)$

$٢ص - ٤ = ٣(س + ٤)$

$٢ص - ٤ = ٣س + ١٢$

$٢ص = ٣س + ١٦$

ب تقع النقطة ب على المحور الصادي،

فيكون س = ٠

عوّض بدل س = ٠ في المعادلة

٢ص = ٣س + ١٦ لتحصل على:

٢ص = ١٦   ص = ٨

فتكون ر (٠، ٨)

ج قياس الزاوية ى ر ع هو ٩٠°

مساحة المثلث ى ع ر = $\frac{١}{٢} \times \overline{ى ر} \times \overline{ى ع}$

استخدم فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{ى ر} = \sqrt{(٠ - (-٤))^٢ + (٨ - ٢)^٢}$

$\overline{ى ر} = \sqrt{١٦ + ٣٦}$

$\overline{ى ر} = \sqrt{٥٢}$

استخدم فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{ى ع} = \sqrt{(٥ - (-٤))^٢ + (-٤ - ٢)^٢}$

$\overline{ى ع} = \sqrt{٨١ + ٣٦}$

$\overline{ى ع} = \sqrt{١١٧}$

مساحة المثلث ى ع ر = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٥٢} \times \sqrt{١١٧}$

= ٣٩ وحدة^٢

٧) **أ** ٣س − ٢ص = ١٢ .... (١)

ص = ١٥ − ٢س .... (٢)

حلّ المعادلتَين (١)، (٢) آنيًا لتحصل على

إحداثيات النقطة أ :

عوّض عن ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١)

فتحصل على:

٣س − ٢(١٥ − ٢س) = ١٢

٣س − ٣٠ + ٤س = ١٢

٧س = ٤٢

س = ٦

عوّض عن س = ٦ في المعادلة (٢) فتحصل على:

ص = ١٥ − ٢ × (٦)

ص = ٣

إحداثيات النقطة ا هي (٦، ٣)

ب معادلة المستقيم $ل_١$ هي ٣س − ٢ص = ١٢

أعد الترتيب لتحصل على:

٢ص = ٣س − ١٢

$ص = \frac{٣}{٢}س - ٦$

ميل المستقيم $ل_١$ هو $\frac{٣}{٢}$

ليكن $ل_٢$ المستقيم الذي يمر بالنقطة أ

ويكون عموديًا على $ل_١$

ميل $ل_٢$ هو $-\frac{٢}{٣}$. المستقيم $ل_٢$ يمر بالنقطة (٦، ٣)

استخدم $ص - ص_١ = م(س - س_١)$:

$ص - ٣ = -\frac{٢}{٣}(س - ٦)$

$ص - ٣ = -\frac{٢}{٣}س + ٤$

$ص = -\frac{٢}{٣}س + ٧$

٨) **أ** النقطتان ا (−١٠، ٥)، ب (−٢، −١)

نقطة منتصف $\overline{ا ب} = \left(\frac{-١٠ + ٢}{٢}، \frac{٥ + (-١)}{٢}\right) =$

أو (−٦، ٢)

ميل $\overline{ا ب} = \frac{-١ - ٥}{-٢ - (-١٠)}$ ، أو $-\frac{٣}{٤}$

ميل المستقيم العمودي على المستقيم ا ب = $\frac{٤}{٣}$،

لأن للمستقيمَين المتعامدَين

يكون $م_١ \times م_٢ = -١$

أوجِد معادلة العمود المنصف ى ل

باستخدام ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$):

ص − ٢ = $\frac{٤}{٣}$ (س − (−٦))

ص − ٢ = $\frac{٤}{٣}$ س + ٨

ص = $\frac{٤}{٣}$ س + ١٠

ب عوّض عن ص = ٠ لتجد أين يقطع العمود المنصف المحور السيني:

٠ = $\frac{٤}{٣}$ س + ١٠

$\frac{٤}{٣}$ س = −١٠

س = −٧,٥

إحداثيات النقطة ى (−٧,٥، ٠)

عوّض عن س = ٠ لتجد أين يقطع العمود المنصف المحور الصادي:

ص = $\frac{٤}{٣}$ (٠) + ١٠

ص = ١٠

إحداثيات النقطة ل (٠، ١٠)

ج استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{ىل}}$ = $\sqrt{١٠^٢ + (−٧,٥)^٢}$

$\overline{\text{ىل}}$ = ١٢,٥

٩) أ أولاً ، أوجد ميل المستقيم $ل_١$

٢س + ٥ص = ١٠ نعيد الترتيب لنحصل على

ص = −$\frac{٢}{٥}$ س + ٢

الميل هو $\frac{−٢}{٥}$

الميل العمودي هو $\frac{٥}{٢}$

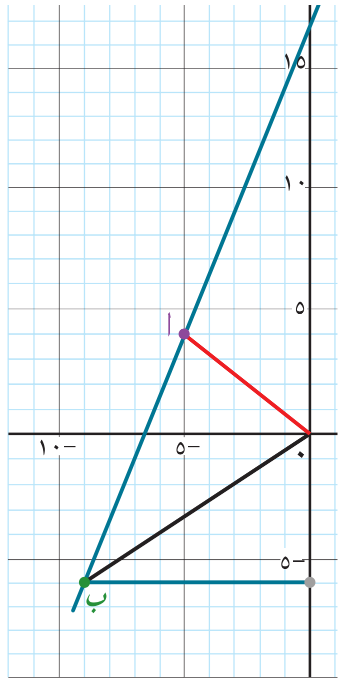
معادلة المستقيم $ل_١$ هي ص = $\frac{٥}{٢}$ س + جـ ويمر المستقيم في النقطة أ(−٩، −٦)

∴ جـ = ١٦,٥

ص = $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٣٣}{٢}$

ب يتقاطع المستقيمان عند −$\frac{٢}{٥}$ س + ٢ = $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٣٣}{٢}$

س = −٥ و ص = ٤



مساحة المثلث **أ ب و** هي مساحة المثلث الكبير مطروحًا منها مساحة المثلثين الآخرين.

مساحة المثلث الكبير $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٢٢,٥

مساحة المثلث السفلي هي $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٦

مساحة المثلث العلوي هي $\frac{١}{٢}$ × ١٦,٥ × ٥

∴ مساحة المثلث **أ ب و** هي ٣٣ وحدة^٢

١٠) النقطة ى منتصف القطعة $\overline{\text{هـع}}$ وتقع أيضًا على $\overline{\text{ىع}}$ ، لإيجاد إحداثيات النقطة ى، أوجد معادلة $\overline{\text{ىع}}$ ثم حلّ معادلتَي $\overline{\text{ىع}}$ ، $\overline{\text{هـع}}$ آنيًا:

معادلة $\overline{\text{هـع}}$ هي: س + ٢ص = ١٦ .... (١)

يمكن إيجاد ميل $\overline{\text{هـع}}$ بإعادة ترتيب المعادلة

س + ٢ص = ١٦ لتصبح ٢ص = ١٦ − س،

ص = ٨ − $\frac{١}{٢}$ س أو ص = −$\frac{١}{٢}$ س + ٨

∴ ميل $\overline{\text{هـع}}$ = −$\frac{١}{٢}$

وحيث إن $\overline{\text{ءع}}$ عمودي على $\overline{\text{هـع}}$، وللمستقيمَين المتعامدَين يكون م$_1$ × م$_2$ = −١، فإن ميل $\overline{\text{ءع}}$ = ٢

تقع النقطة ع (٥، −٧) أيضًا على المستقيم $\overline{\text{ءع}}$.

لإيجاد معادلته استخدم

ص − ص$_1$ = م (س − س$_1$)

ص − (−٧) = ٢(س − ٥)

ص + ٧ = ٢س − ١٠

ص = ٢س − ١٧ .... (٢)

لحلّ المعادلتَين (١) و (٢)، عوّض بدلًا عن ص في المعادلة (١) لتحصل على:

س + ٢(٢س − ١٧) = ١٦

س + ٤س − ٣٤ = ١٦

٥س = ٥٠

س = ١٠

عوّض بدلًا عن س في المعادلة (٢) لتحصل على:

ص = ٢(١٠) − ١٧

ص = ٣ إحداثيات ء هي (١٠، ٣)

لإيجاد إحداثيات هـ أوجد أولًا موقع النقطة ع

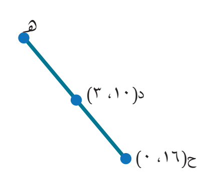
عند النقطة ع، الإحداثي ص = ٠

عوّض في المعادلة س + ٢ص = ١٦ لتحصل على

س + ٢(٠) = ١٦

س= ١٦، فتكون ع (١٦، ٠)

وحيث ء هي نقطة منتصف $\overline{\text{هـع}}$ فيمكن إيجاد إحداثيات النقطة هـ باستخدام المتجهات:



$\overrightarrow{\text{عء}} = \begin{pmatrix} -٦ \\ ٣ \end{pmatrix}$ إذًا $\overrightarrow{\text{ءهـ}} = \begin{pmatrix} -٦ \\ ٣ \end{pmatrix}$

وإحداثيات هـ هي (٤، ٦)

١١) ا (−٤، −١)، ب (٨، −٩)، ج (ك، ٧)

م نقطة منتصف $\overline{\text{اب}}$ = $\left(\frac{-٤ + ٨}{٢}، \frac{-١ + (-٩)}{٢}\right)$

∴ م = (٢، −٥)

ميل $\overline{\text{اب}}$ = $\frac{-٩-(-١)}{٨-(-٤)}$ أو $-\frac{٢}{٣}$

$\overline{\text{مج}}$ عمودي على $\overline{\text{اب}}$، فيكون ميله $\frac{٣}{٢}$

وحيث إن م (٢، −٥) و ج (ك، ٧) فإنه يمكن كتابة ميل $\overline{\text{مج}}$ على الشكل

$\frac{٧ - (-٥)}{\text{ك} - ٢}$ أو $\frac{١٢}{\text{ك} - ٢}$

∴ $\frac{١٢}{\text{ك} - ٢} = \frac{٣}{٢}$

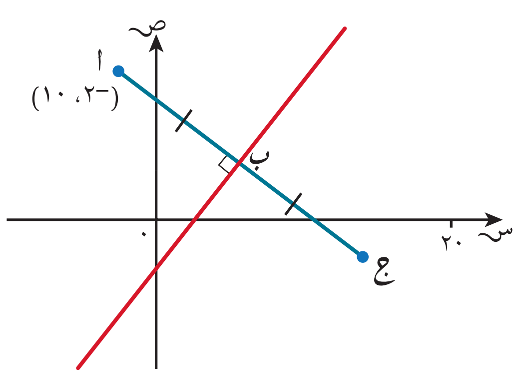
حلّ المعادلة لتحصل على:

٢٤ = ٣(ك − ٢)

٢٤ = ٣ك − ٦

ك = ١٠

١٢)



النقطة ا (−٢ ، ١٠) والنقطة ء على بُعدَين متساويَين من المستقيم ٤ س − ٣ ص = ١٢، وعند وصلهما معًا يؤلفان المستقيم $\overline{\text{اء}}$ وهو عمودي على المستقيم

٤ س − ٣ ص = ١٢ ..... (١)

أوجِد ميل المستقيم ٤ س − ٣ ص = ١٢

٣ص = ٤س − ١٢

ص = $\frac{٤}{٣}$ س − ٤ ∴ م = $-\frac{٣}{٤}$ لأن م$_1$ × م$_2$ = −١ للمستقيمَين المتعامدَين.

استخدم م = $-\frac{٣}{٤}$ والنقطة (−٢، ١٠) لتجد معادلة المستقيم العمود:

ص − ١٠ = $-\frac{٣}{٤}$ (س − (−٢))

٤ص − ٤٠ = −٣ (س + ٢)

٤ص − ٤٠ = −٣س − ٦

٣س + ٤ص = ٣٤ .... (٢)

لحلّ المعادلتَين (١) و (٢)، اضرب المعادلة (١) في ٤ واضرب المعادلة (٢) في ٣ لتحصل على:

١٦س − ١٢ص = ٤٨ .... (٣)

٩س + ١٢ص = ١٠٢ .... (٤)

اجمع المعادلتَين (٣) و (٤) لتحصل على:

٢٥س = ١٥٠

س = ٦

عوّض بدلًا عن س = ٦ في معادلة (١) لتحصل على:

٤(٦) − ٣ص = ١٢

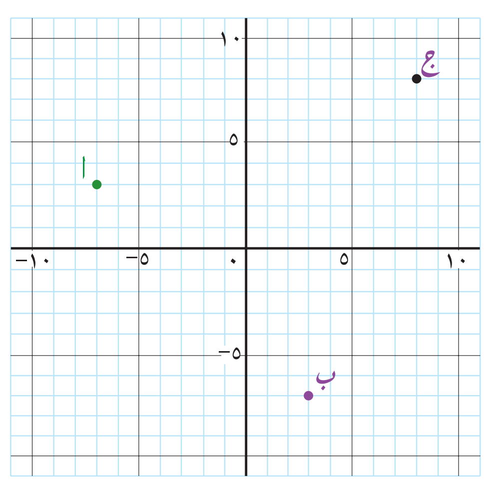
٣ص = ١٢

ص = ٤

يتقاطع المستقيم العمودي مع محور الانعكاس في النقطة (٦، ٤)، سمّ هذه النقطة ب كما في الشكل.

باستخدام المتجهات $\overline{\text{ا ب}}$ = $\begin{pmatrix} ٨ \\ -٦ \end{pmatrix}$ = $\overline{\text{ب د}}$، فإن إحداثيات د (١٤، −٢)

١٣) أ



$\overline{\text{ب د}}$ عمودي على $\overline{\text{ا ج}}$

د هي نقطة تعامد ب على المستقيم $\overline{\text{ا ج}}$

ميل المستقيم $\overline{\text{ا ج}}$ هو $\frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$ ،

∴ ميل $\overline{\text{د ب}}$ هو −٣

معادلة المستقيم $\overline{\text{ب د}}$ هي: ص = −٣ س + جـ

وتمر بالنقطة (٣، −٧)

ص = −٣ س + ٢

ب معادلة المستقيم $\overline{\text{ا ج}}$ هي: ص = $\frac{١}{٣}$ س + جـ وتمر بالنقطة (٨,٨)

ص = $\frac{١}{٣}$ س + $\frac{١٦}{٣}$

د هي نقطة تقاطع المستقيمين:

−٣ س + ٢ = $\frac{١}{٣}$ س + $\frac{١٦}{٣}$

− $\frac{١٠}{٣}$ س + $\frac{١٠}{٣}$

س = −١ و ص = ٥

د(−١، ٥)

ج طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{ا ج}}$:

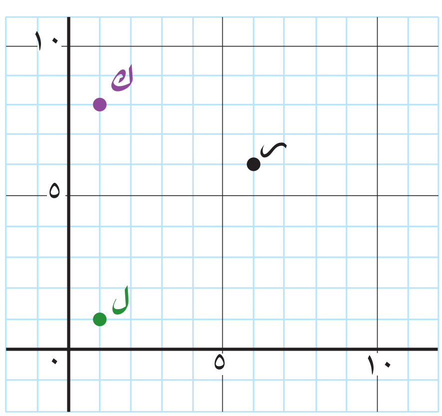
$\sqrt{١٥^٢ + ٥^٢} = \sqrt{٢٥٠} = ٥\sqrt{١٠}$

طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{ب د}}$:

$\sqrt{١٢^٢ + ٤^٢} = \sqrt{١٦٠} = ٤\sqrt{١٠}$

د مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٥\sqrt{١٠} \times ٤\sqrt{١٠}$ = ١٠٠ وحدة^٢

١٤)



أ ١) المنصف العمودي لـ $\overline{\text{لك}}$ هو ص = ٤,٥

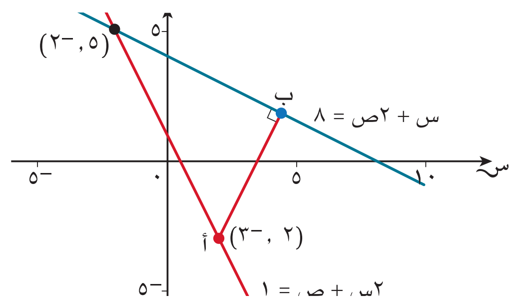
٢) ميل القطعة المستقيمة $\overline{\text{ءل}}$ يساوي ١،
وبالتالي فإن ميل العمودي يساوي −١ ويمر
في نقطة منتصف $\overline{\text{ءل}}$ ، وهي (٣,٥ ، ٣,٥)،
وبالتالي تكون المعادلة ص = −س + ٧

ب نحتاج إلى إيجاد النقطة التي تقع عند تقاطع المستقيمين، لذا ٤,٥ = − س + ٧، و س = ٢,٥

∴ ص = ٤,٥

إحداثيات النقطة التي تقع على مسافة واحدة من النقاط الثلاث ء، ل، ك هي (٢,٥ ، ٤,٥)

١٥ أ الرسم التوضيحي مبيّن أدناه. المطلوب إيجاد معادلة الضلع الثالث في المثلث أي $\overline{\text{اب}}$



معادلة $\overline{\text{بج}}$ هي س + ٢ص = ٨

نجد ميل المستقيم $\overline{\text{بج}}$ بإعادة ترتيب المعادلة،

أي ٢ص = − س + ٨

ص = $-\frac{١}{٢}$س + ٤

فيكون ميل $\overline{\text{بج}}$ هو $-\frac{١}{٢}$

وحيث إن المستقيم $\overline{\text{اب}}$ يعامد المستقيم $\overline{\text{بج}}$ ،

استخدم م$_١$ × م$_٢$ = −١ لتحصل على:

$-\frac{١}{٢}$ × ميل $\overline{\text{اب}}$ = −١

أعد الترتيب لتجد أن ميل $\overline{\text{اب}}$ = ٢

نجد معادلة المستقيم $\overline{\text{اب}}$ باستخدام

ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$)

حيث م = ٢، أ(٢، −٣):

ص − (−٣) = ٢(س − ٢)

ص + ٣ = ٢س − ٤

معادلة الضلع الثالث هي: ص = ٢ س − ٧

ب حلّ المعادلتَين س + ٢ص = ٨ .... (١)

و ص = ٢ س − ٧ .... (٢)

آنيًا يعطي إحداثيات النقطة ب.

استخدم المعادلة (٢) لتعوّض بدلًا من ص في المعادلة (١) لتحصل على:

س + ٢(٢س − ٧) = ٨

س + ٤س − ١٤ = ٨

٥س = ٢٢

س = ٤,٤

عوّض هذه القيمة في المعادلة (٢) لتحصل على:

ص = ٢ × (٤,٤) − ٧

ص = ١,٨

فتكون إحداثيات ب (٤,٤ ، ١,٨)

تمارين ٥-٤

١) ب ٢س^٢ + ٢ص^٢ = ٩

اقسم طرفَي المعادلة على ٢ لتحصل على:

س^٢ + ص^٢ = $\frac{٩}{٢}$

قارن المعادلة مع الصورة

(س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢، وهي معادلة دائرة مركزها (أ، ب) ونصف قطرها نق.

(س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢، أ = ٠، ب = ٠،

نق^٢ = $\frac{٩}{٢}$

نق = $\sqrt{\frac{٩}{٢}}$ أو $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

المركز (٠ ، ٠)، نصف القطر

ز س^٢ + ص^٢ − ٨ س + ٢٠ص+ ١١٠ = ٠

أعد كتابة المعادلة في الصورة:

س^٢ − ٨ س + ص^٢ + ٢٠ص+ ١١٠ = ٠

أوجِد المربعات الكاملة:

(س − ٤)^٢ − ٤^٢ + (ص + ١٠)^٢ − ١٠^٢ + ١١٠ = ٠

(س − ٤)^٢ + (ص + ١٠)^٢ = ٦

قارن مع المعادلة (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢

أ = ٤، ب = −١٠، نق^٢ = ٦

المركز (٤، −١٠) ، ونصف القطر = $\sqrt{٦}$

٢) ب المركز (٥، −٢) ، نق = ٤

معادلة الدائرة هي (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢، حيث أ = ٥، ب = −٢ ، نق = ٤

(س − ٥)^٢ + (ص − (−٢))^٢ = ٤^٢

(س − ٥)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ١٦

٣) حيث إن (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢

عوّض أ = ٢، ب = ٥ لتحصل على:

(س − ٢)^٢ + (ص − ٥)^٢ = نق^٢ .... (١)

بما أن النقطة (٦، ٨) تقع على الدائرة، عوّض س = ٦، ص = ٨ في المعادلة (١) لتجد قيمة نق.

(٦ − ٢)^٢ + (٨ − ٥)^٢ = نق^٢

١٦ + ٩ = نق^٢

نق^٢ = ٢٥

(س − ٢)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ٢٥

٤) مركز الدائرة ج هي نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$.

ج = $\left(\frac{-٦ + ٢}{٢}، \frac{٨ + (-٤)}{٢}\right)$ = (−٢، ٢)

نصف قطر الدائرة، نق، يساوي $\overline{\text{ب ج}}$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل:

نق = $\sqrt{[(-٢ - ٢)^٢ + (٢ - (-٤))^٢]}$ = $\sqrt{٥٢}$

معادلة الدائرة هي (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢

حيث أ = −٢، ب = ٢، نق = $\sqrt{٥٢}$

(س + ٢)^٢ + (ص − ٢)^٢ = ($\sqrt{٥٢}$)^٢

(س + ٢)^٢ + (ص − ٢)^٢ = ٥٢

٥) تمس الدائرة المحور السيني ومركزها هو (٦، −٥)، فيكون نصف قطر الدائرة ٥ وحدات.

ليكن (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢،

عوّض عن (نق) ر^٢ = ٥ ٢، أ = ٦، ب = −٥ :

(س − ٦)^٢ + (ص − (−٥))^٢ = ٢٥

(س − ٦)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥

٦) يقع مركز الدائرة على العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{ى ل}}$ نقطة منتصف القطعة

$\overline{\text{ى ل}}$ = $\left(\frac{١ + ٧}{٢}، \frac{-٢ + ١}{٢}\right)$ = (٤، −$\frac{١}{٢}$)

ميل $\overline{\text{ى ل}}$ = $\frac{١ - (-٢)}{٧ - ١}$ = $\frac{١}{٢}$

فيكون ميل العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{ءل}}$ = −٢، لأن للمستقيمَين المتعامدَين يكون $\text{م}_{١} \times \text{م}_{٢}$ = −١

معادلة العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{ءل}}$ هي:

(ص − (−$\frac{١}{٢}$)) = −٢(س − ٤)

ص + $\frac{١}{٢}$ = −٢س + ٨

٢ص + ١ = −٤س + ١٦

∴ ٤س + ٢ص = ١٥، وهذا هو المطلوب.

٧) إذا كان نق = ٢$\sqrt{٢}$ أو $\sqrt{٨}$ أو نق^{٢} = ٨

فاستخدم (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}

عوّض بدلًا عن س = ٣، ص = ٢، نق^{٢} = ٨ لتحصل على: (٣ − أ)^{٢} + (٢ − ب)^{٢} = ٨ .... (١)

عوّض بدلًا عن س = ٧، ص = ٢ ، نق^{٢} = ٨ لتحصل على: (٧ − أ)^{٢} + (٢ − ب)^{٢} = ٨ .... (٢)

اطرح المعادلة (٢) من معادلة (١) لتحصل على:

(٣ − أ)^{٢} − (٧ − أ)^{٢} = ٠، بسّط المعادلة لتحصل على:

٩ − ٦أ + أ^{٢} − (٤٩ − ١٤أ + أ^{٢}) = ٠

٩ − ٦أ + أ^{٢} − ٤٩ + ١٤أ − أ^{٢} = ٠

٨أ − ٤٠ = ٠

أ = ٥

عوّض في المعادلة (١) لتحصل على:

(٣ − ٥)^{٢} + (٢ − ب)^{٢} = ٨

٤ + (٢ − ب)^{٢} = ٨

(٢ − ب)^{٢} = ٤

٢ − ب = ±٢

ب = ٠ أو ب = ٤

عوّض عن أ = ٥، ب = ٠، نق^{٢} = ٨

في (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢} لتحصل على:

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٠)^{٢} = ٨

أو (س − ٥)^{٢} + ص^{٢} = ٨

عوّض أ = ٥، ب = ٤، نق^{٢} = ٨

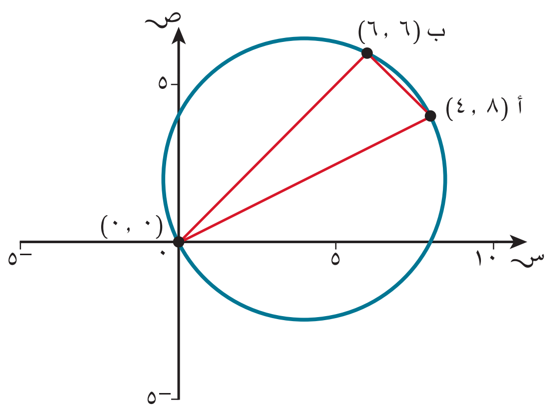
في (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢} لتحصل على:

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٨

الحلان هما (س − ٥)^{٢} + ص^{٢} = ٨

و (س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٨

٨) يُظهر الشكل:



إذا كان و ا قطرًا في الدائرة، فإن قياس الزاوية و ب ا يساوي ٩٠° (زاوية في نصف دائرة).

لذا يكون $\overline{\text{و ب}}$ عموديًا على $\overline{\text{ا ب}}$

ميل $\overline{\text{و ب}}$ = $\frac{٦ - ٠}{٦ - ٠}$ = ١

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ = $\frac{٦ - ٤}{٦ - ٨}$ = −١

ميل $\overline{\text{و ب}}$ × ميل ب = ١ × −١ = −١

لذا، وجب أن يكون و ا قطرًا في الدائرة.

العواميد المنصفة لكل من $\overline{\text{و ا}}$، $\overline{\text{ا ب}}$، $\overline{\text{و ب}}$ تلتقي في مركز الدائرة، لكن يتطلب فقط اثنان منها لتحديد المركز.

نقطة منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ = $\left(\frac{٦ + ٨}{٢} ، \frac{٦ + ٤}{٢}\right)$ = (٧، ٥)

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ = −١

ميل العمود المنصف لـ $\overline{\text{ا ب}}$ = ١ وذلك لأن للمستقيمَين المتعامدَين، يكون $\text{م}_{١} \times \text{م}_{٢}$ = −١ .

معادلة العمود المنصف لـ $\overline{\text{اب}}$ هي:

$$(\text{ص} - ٥) = ١\,(\text{س} - ٧)$$

$\text{ص} = \text{س} - ٢$ .... (١)

نقطة منتصف $\overline{\text{وب}}$ = $\left(\frac{٠ + ٦}{٢}، \frac{٠ + ٦}{٢}\right) = (٣، ٣)$

ميل $\overline{\text{وب}}$ = ١

ميل العمود المنصف لـ $\overline{\text{وب}}$ = −١ وذلك لأن للمستقيمَين المتعامدَين، يكون $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$

معادلة العمود المنصف لـ $\overline{\text{وب}}$ هي:

$$(\text{ص} - ٣) = -١(\text{س} - ٣)$$

$\text{ص} = -\text{س} + ٦$ .... (٢)

حلّ المعادلتَين (١) و (٢) لتحصل على:

س= ٤، ص = ٢

مركز الدائرة ج (٤، ٢)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

نصف القطر

$$\overline{\text{وج}} = \sqrt{(٤ - ٠)^٢ + (٢ - ٠)^٢} = \sqrt{٢٠}$$

وعليه، معادلة الدائرة هي:

$$(\text{س} - ٤)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢ = ٢٠$$

٩) $(\text{س} - ٣)^٢ - ٩ + (\text{ص} + ١)^٢ - ١ = ٦$

$$(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ = ١٦$$

$$(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ = ٤^٢$$

إحداثيات مركز الدائرة (٣، −١) ونصف قطرها ٤

١٠) أ إذا وقعت النقطة ا (٦، −٦) على الدائرة، إذا عوضنا ص = −٦ و س = ٦ في معادلة الدائرة، وجب أن يبقى طرفا المعادلة متساويَين.

$$(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} + ٢)^٢ = ٢٥$$

$$(٦ - ٣)^٢ + (-٦ + ٢)^٢ = ٢٥$$

٩ + ١٦ = ٢٥ وهذا صحيح. لذا النقطة ا تقع بالفعل على الدائرة.

ب يجب أن يمر العمود على المماس من النقطة (٦، −٦) في مركز الدائرة ج (٣ ، −٢)

ميل $\overline{\text{اج}} = \frac{-٢ - (-٦)}{٣ - ٦}$ أو $-\frac{٤}{٣}$

ميل المماس عند النقطة ا يساوي $\frac{٣}{٤}$، لأن للمستقيمَين المتعامدَين، يكون $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$

استخدم $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_١)$، أ (٦، −٦)، م = $\frac{٣}{٤}$ لتحصل على:

$$\text{ص} - (-٦) = \frac{٣}{٤}\,(\text{س} - ٦)$$

$$\text{ص} + ٦ = \frac{٣}{٤}\,(\text{س} - ٦)$$

$$\text{ص} = \frac{٣}{٤}\,\text{س} - \frac{٢١}{٢}$$

١١) أ يقطع المستقيم ٢س + ٥ص = ٢٠ المحور السيني عند النقطة أ (١٠، ٠)

(عوّض ص = ٠ في ٢س + ٥ص = ٢٠)

كما يقطع المحور الصادي في ب (٠، ٤)

(عوّض س = ٠ في ٢س + ٥ص = ٢٠)

إحداثيات ج مركز الدائرة هي $\left(\frac{١٠ + ٠}{٢}، \frac{٠ + ٤}{٢}\right)$ أو (٥، ٢)

نصف قطر الدائرة هو $\overline{\text{اج}}$ (أو $\overline{\text{جب}}$)

استخدم نظرية فيثاغورث لتجد نصف القطر $\overline{\text{اج}}$:

$$\overline{\text{اج}} = \sqrt{(٥ - ١٠)^٢ + (٢ - ٠)^٢}$$

نصف القطر $\overline{\text{اج}} = \sqrt{٢٩}$

عوّض بدلًا عن ب (٥، ٢) و نق² = ٢٩

في $(\text{س} - \text{أ})^٢ + (\text{ص} - \text{ب})^٢ = \text{نق}^٢$ لتحصل على:

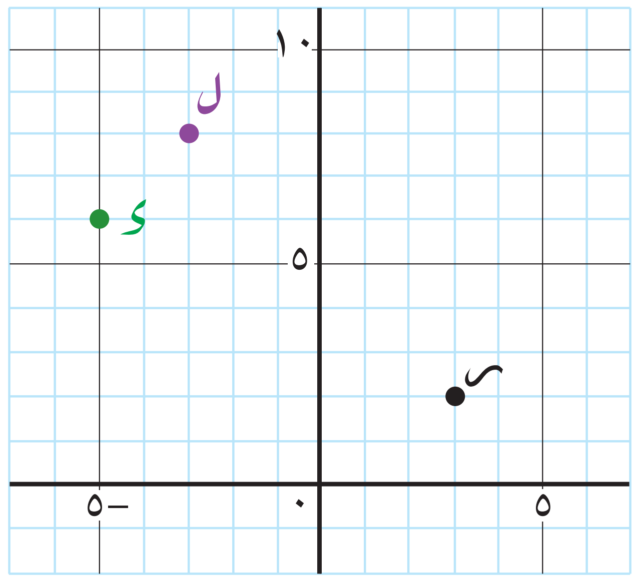
$(\text{س} - ٥)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢ = ٢٩$ .... (١)

ب إذا وقعت النقطة (٠، ٠) على الدائرة، عندها وجب أن يُبقي تعويض س = ٠ و ص = ٠ في المعادلة طرفَي المعادلة متساويَين.

$(٠ - ٥)^{٢} + (٠ - ٢)^{٢} = ٢٩$

٢٥ + ٤ = ٢٩ وهذا صحيح. ∴ تمر الدائرة بالفعل في النقطة (٠، ٠)

١٢)



معادلة $\overline{ى ل}$ هي: ص = س + ١١

معادلة $\overline{ل ر}$ هي: ص = − س + ٥

ميل المستقيمين ١ ، −١، ∴ هما متعامدين وزاوية المثلث ى ل ر هي زاوية قائمة

ب $\overline{ى ر}$ قطر في الدائرة، وعليه يكون مركز الدائرة هو نقطة منتصف القطر،

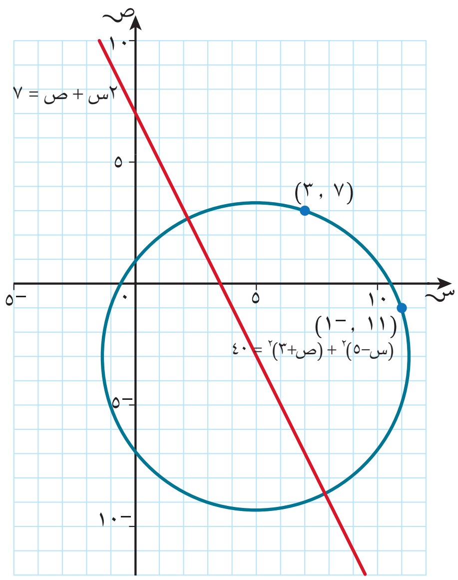
$\left(\frac{-٥ + ٣}{٢} ، \frac{٦ + ٢}{٢}\right) = (-١، ٤)$

نصف قطر الدائرة هو المسافة من (−١، ٤) إلى ر، ويكون $\sqrt{٤^{٢} + ٢^{٢}} = \sqrt{٢٠}$

معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط ى، ل، ر هي:

$(س + ١)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٢٠$

١٣) يُظهر الشكل



يقع مركز الدائرة على العمود المنصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين (٧، ٣) و (١١، −١)

نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين (٧، ٣) و (١١، −١) هي:

$\left(\frac{٧ + ١١}{٢} ، \frac{٣ + (-١)}{٢}\right)$ أو (٩، ١)

ميل المستقيم الواصل بين (٧، ٣) و (١١، −١) = $\frac{-١ - ٣}{١١ - ٧} = -١$

يكون ميل العمود المنصف ١ لأن للمستقيمَين المتعامدَين يكون $م_{١} \times م_{٢} = -١$

معادلة العمود المنصف باستخدام $ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$، م = ١، ويمر بالنقطة (٩، ١) هي:

ص − ١ = ١(س − ٩)

ص = س − ٨ .... (١)

ولدينا كذلك أن المركز يقع على المستقيم

٢س + ص = ٧ .... (٢)

حلّ المعادلتَين (١) و (٢) لتحصل على س = ٥، ص = −٣

وعليه، يكون مركز الدائرة هو (٥، −٣)

أوجِد نصف قطر الدائرة باستخدام نظرية فيثاغورث.

والنقاط ج (٥، −٣) و (٧، ٣) [أو (١١، −١)]:

نق = $\sqrt{(٧ - ٥)^{٢} + (٣ - (-٣))^{٢}}$

= $\sqrt{٤ + ٣٦}$

نق = $\sqrt{٤٠}$

فتكون معادلة الدائرة:

$(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} =$ نق^{٢}،

حيث أ = ٥، ب = −٣، نق = $\sqrt{٤٠}$

$(س - ٥)^{٢} + (ص - (-٣))^{٢} = ٤٠$

$(س - ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٤٠$

١٤) لإيجاد مركز الدائرة علينا إيجاد العمودين المنصفين لضلعين ثم إيجاد نقطة تقاطعهما.

المنصف العمودي لـ **وى** هي: ص = −س + ١١

المنصف العمودي لـ **ول** هي: ص = $-\frac{١}{٣}$ س + جـ،

وتمر بنقطة منتصفها $(\frac{٣}{٢}، \frac{٩}{٢})$ وعليه تكون المعادلة

ص = $-\frac{١}{٣}$ س + ٥

يتقاطع المستقيمين المتعامدين عندما تكون

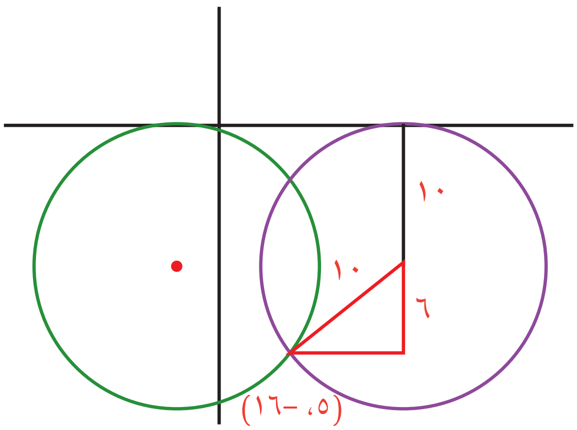
−س + ١١ = $-\frac{١}{٣}$ س + ٥

س = ٩ و ص = ٢

قطر الدائرة هو المسافة من **و** إلى (٩، ٢) أي $\sqrt{٨٥}$

∴ تكون معادلة الدائرة $(س - ٩)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٨٥$

١٥)



يوضح الشكل أعلاه دائرتين محتملتين، وتم توضيح بعض الأطوال المفيدة على إحداهما.

طول الجزء الأفقي من المثلث القائم الزاوية هو $\sqrt{١٠^{٢} - ٦^{٢}} = ٨$، لذا فإن مركز تلك الدائرة يقع عند (١٣، −١٠) فنحصل على المعادلة

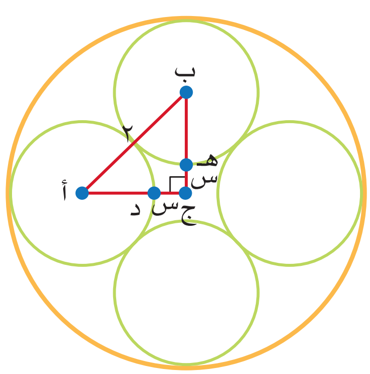
$(س - ١٣)^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} = ١٠^{٢}$

بالنسبة للدائرة الأخرى، يكون المركز ٨ وحدات على يسار (٥ ، −١٦) ، ويقع عند (−٣ ، −١٠)

للحصول على المعادلة

$(س + ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٠^{٢}$

١٦)



أ (١) نصف قطر كل دائرة خضراء ١ وحدة

قياس الزاوية **ب ج ا** هو ٩٠°، $\overline{\text{ا ب}}$ = ٢ وحدة

ليكن $\overline{\text{ى ج}}$ = $\overline{\text{هـ ج}}$ = س

استخدم فيثاغورث لتحصل على:

(١ + س)^{٢} + (١ + س)^{٢} = ٢^{٢}

٢(١ + س)^{٢} = ٤

(١ + س)^{٢} = ٢

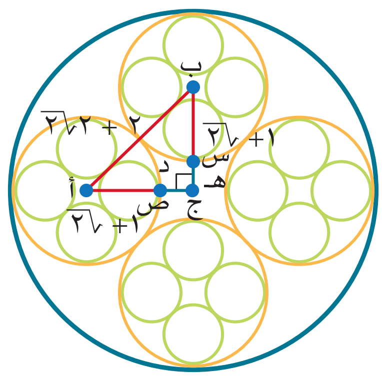
١ + س = ± $\sqrt{٢}$

س = $\sqrt{٢}$ − ١ أو س = −$\sqrt{٢}$ − ١ (حل مرفوض)

نصف قطر الدائرة البرتقالية هو ١ + ١ + س

أو: ١ + ١ + $\sqrt{٢}$ − ١ = ١ + $\sqrt{٢}$

ب ١)



أ ب^{٢} = أ هـ^{٢} + ب هـ^{٢}

(٢ + ٢$\sqrt{٢}$)^{٢} = (١ + $\sqrt{٢}$ + ص)^{٢} + (١ + $\sqrt{٢}$ + ص)^{٢}

(٢ + ٢$\sqrt{٢}$)^{٢} = ٢(١ + $\sqrt{٢}$ + ص)^{٢}

٢ + ٢$\sqrt{٢}$ = ±$\sqrt{٢}$(١ + $\sqrt{٢}$ + ص)

إما $\sqrt{٢}$ + ٢ = ١ + $\sqrt{٢}$ + ص

أو $\sqrt{٢}$ + ٢ = −١ − $\sqrt{٢}$ − ص

ص = ١ أو ص = −٣ − ٢$\sqrt{٢}$ (مرفوض لأن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا).

نصف قطر الدئرة الزرقاء يساوي:

١ + $\sqrt{٢}$ + ١ + $\sqrt{٢}$ + ١ أو ٣ + ٢$\sqrt{٢}$

تمارين ٥-٥

١) عوّض عن قيمة ص = س − ٣ في (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٠

(س − ٣)^{٢} + (س − ١)^{٢} = ٢٠

٢س^{٢} − ٨س + ١٠ = ٢٠

٢س^{٢} − ٨س − ١٠ = ٠

س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

(س − ٥)(س + ١) = ٠

س = ٥ أو س = −١

عوّض عن س = ٥ في ص = س − ٣

تحصل على: ص = ٢

عوّض عن س = −١ في ص = س − ٣

تحصل على: ص = −٤

نقاط التقاطع هي (٥ ، ٢) و (−١، −٤)

٣) حلّ بشكل آني المعادلتَين ٣س + ص = ٦ .... (١)

و س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ١٦ص + ٢٨ = ٠ ..... (٢)

لتجد نقطة التقائهما.

أوجد ص بدلالة س في المعادلة (١) وعوّض القيمة في المعادلة (٢):

س^{٢} + (٦ − ٣س)^{٢} + ٤س + ١٦(٦ − ٣س) + ٢٨ = ٠

س^{٢} + ٣٦ − ٣٦س + ٩س^{٢} + ٤س + ٩٦ − ٤٨س + ٢٨ = ٠

١٠س^{٢} − ٨٠س + ١٦٠ = ٠

س^{٢} − ٨س + ١٦ = ٠

(س − ٤)^{٢} = ٠

س = ٤

عوّض في المعادلة الخطية (١) لتحصل على:

ص = −٦

نقطة التقاطع (٤، −٦)

يوجد حلّ وحيد (جذر مكرر)، لذا وجب أن يكون المستقيم مماسًا للدائرة.

٤) ص = م س + ١ …… (١)

(س − ٧)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٠ ……. (٢)

عوّض بدل ص من المعادلة (١) في المعادلة (٢) لتحصل على:

(س − ٧)^{٢} + (م س + ١ − ٥)^{٢} = ٢٠

(س − ٧)^{٢} + (م س − ٤)^{٢} = ٢٠

س^{٢} − ١٤س + ٤٩ + م^{٢}س^{٢} − ٨ م س + ١٦ = ٢٠

(١+ م^{٢}) س^{٢} + س (−١٤ − ٨ م) + ٤٥ = ٠

قارن المعادلة مع أس^{٢} + ب س + جـ = ٠،

لتحصل على:

أ = ١ + م^{٢}، ب = −١٤ − ٨ م، جـ = ٤٥

ليكون للمعادلة جذران حقيقيان يكون ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

(−١٤ − ٨ م)^{٢} −٤(١ + م^{٢}) (٤٥) > ٠

١٩٦ + ٢٢٤م + ٦٤م^{٢} − ١٨٠ − ١٨٠م^{٢} > ٠

−١١٦م^{٢} + ٢٢٤م + ١٦ > ٠

منحنى ص = −١١٦م^{٢} + ٢٢٤م + ١٦ شكله ∩

لتجد المقطع من المحور −م وباستخدام الصيغة التربيعية مرة ثانية:

م = $\frac{-٢٢٤ \pm \sqrt{٢٢٤^{٢} - ٤(-١١٦)(١٦)}}{٢(-١١٦)}$

م = −$\frac{٢}{٢٩}$ أو م = ٢

وحيث يتطلب الأمر أن يكون

−١١٦م^{٢} + ٢٢٤م + ١٦ > ٠، فإننا نريد جزء المنحنى

ص= −١١٦م^{٢} + ٢٢٤م + ١٦ الذي يقع فوق المحور −م

وعليه، يكون −$\frac{٢}{٢٩}$ < م < ٢

٥) ٢ص − س = ١٢ ….. (١)

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س − ١٢ص + ٣٦ = ٠ …. (٢)

أ لتجد النقطتَين ا، **ب**، أعد ترتيب المعادلة (١) لتجد أن س = ٢ص − ١٢ وعوّض في المعادلة (٢):

(٢ص−١٢)^{٢} + ص^{٢} − ١٠(٢ص−١٢) − ١٢ص + ٣٦ = ٠

٤ص^{٢} − ٤٨ص + ١٤٤ + ص^{٢} − ٢٠ص + ١٢٠ − ١٢ص + ٣٦ = ٠

٥ص^{٢} − ٨٠ ص + ٣٠٠ = ٠

ص^{٢} − ١٦ص + ٦٠ = ٠

(ص − ١٠) (ص − ٦) = ٠

ص = ١٠ أو ص = ٦ عوّض كلًا من الحلَّين في المعادلة (٢) لتحصل على:

س = ٨ أو س = ٠

إحداثيات ا (٠، ٦)، **ب** (٨، ١٠) أو بالعكس.

ب نقطة منتصف $\overline{\text{اب}}$ = $\left(\frac{٠ + ٨}{٢}، \frac{٦ + ١٠}{٢}\right)$

أو (٤، ٨)

ميل $\overline{\text{اب}}$ = $\frac{١٠ - ٦}{٨ - ٠}$ أو $\frac{١}{٢}$

للمستقيمَين المتعامدَين: م$_{١}$ × م$_{٢}$ = −١، إذًا ميل العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{اب}}$ = −٢

معادلة العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{اب}}$ هي

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)، م = −٢،

ويمر في النقطة (٤، ٨)

ص − ٨ = −٢(س − ٤)

ص − ٨ = −٢س + ٨

ص = −٢س + ١٦

ج يمكن أن نجد النقطتَين ى، ل من خلال المعادلتَين الآتيتَين آنيًا:

ص = −٢س + ١٦ ………. (١)

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س − ١٢ص + ٣٦ = ٠ ….. (٢)

استخدم المعادلة (١) للتعويض في (٢) لتحصل على:

$س^{٢} + (-٢س + ١٦)^{٢} - ١٠س - ١٢(-٢س + ١٦) + ٣٦ = ٠$

$س^{٢} + ٤س^{٢} - ٦٤س + ٢٥٦ - ١٠س + ٢٤س - ١٩٢ + ٣٦ = ٠$

$٥س^{٢} - ٥٠س + ١٠٠ = ٠$

$س^{٢} - ١٠س + ٢٠ = ٠$

استخدم الصيغة التربيعية حيث أ = ١، ب = −١٠، جـ = ٢٠ لتحصل على:

$$س = \frac{-(-١٠) \pm \sqrt{(-١٠)^{٢} - ٤(١)(٢٠)}}{٢(١)}$$

$$س = \frac{١٠ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$$

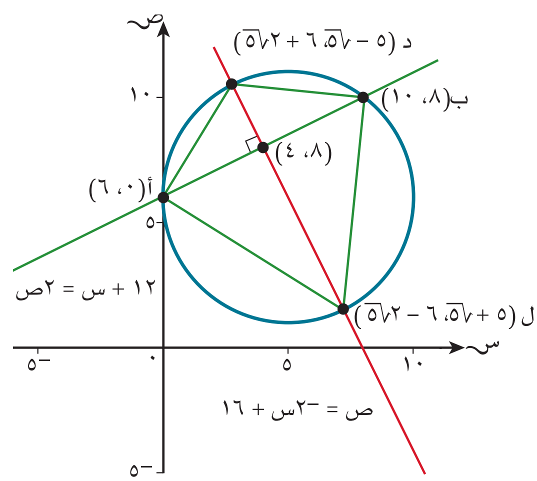
$س = ٥ + \sqrt{٥}$ و $٥ - \sqrt{٥}$

عوّض بدلًا عن $س = ٥ + \sqrt{٥}$ في المعادلة (١) لتحصل على $ص = ٦ - ٢\sqrt{٥}$

عوّض بدلًا عن $س = ٥ - \sqrt{٥}$ في المعادلة (١) لتحصل على $ص = ٦ + ٢\sqrt{٥}$

إحداثيات ى $(٥ - \sqrt{٥}،\ ٦ + ٢\sqrt{٥})$، ل $(٥ + \sqrt{٥}،\ ٦ - ٢\sqrt{٥})$ والعكس صحيح.

د



يأخذ أ ى ب ل شكل طائرة ورقية.

مساحة الطائرة الورقية $= \frac{١}{٢}(\overline{اب} \times \overline{ىل})$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{اب} = \sqrt{(٨ - ٠)^{٢} + (١٠ - ٦)^{٢}}$

$\overline{اب} = \sqrt{٨٠}$

$\overline{ىل} = \sqrt{[(٥ + \sqrt{٥}) - (٥ - \sqrt{٥})]^{٢} + [(٦ - ٢\sqrt{٥}) - (٦ + ٢\sqrt{٥})]^{٢}}$

$\overline{ىل} = ١٠$

مساحة ا ى ب ل = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٨٠} \times ١٠$

مساحة ا ى ب ل = $٢٠\sqrt{٥}$

٦) مركز الدائرة الأولى (٠، ٠) ونصف قطرها = ٥

مركز الدائرة الثانية (١٢، ٩) ونصف قطرها = ١٠

المسافة بين المركزين = $\sqrt{١٢^{٢} + ٩^{٢}}$

= $\sqrt{١٤٤ + ٨١}$

= $\sqrt{٢٢٥}$

= ١٥

بما ان مجموع نصفي القطر = ٥ + ١٠ =

المسافة بين المركزين، فإن الدائرتين متماستان.

لإيجاد إحداثيات نقطة المماس، استخدم

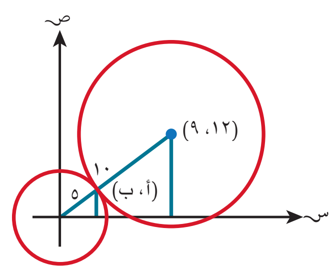
المثلّثات المتشابهة:

نسبة المثلّث الصغير هي أ: ب: ٥

نسبة المثلّث الكبير هي ١٥: ٩: ١٢

بما أن النسبتين متساويتين، فإن أ: ب: ٥ = ٥: ٣: ٤

∴ إحداثيات نقطة المماس هي (٤، ٣)



٧) معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤

عوض عن ص = س + جـ في س^{٢} + ص^{٢} = ٤

س^{٢} + (س + جـ)^{٢} = ٤

فك الأقواس:

س^{٢} + س^{٢} + ٢جـ س + جـ^{٢} = ٤

٢س^{٢} + ٢س جـ + (س٢ − ٤) = ٠

يدلنا المميز على عدد الجذور :

المميز = (٢جـ)^{٢} − ٤ × ٢ × (ج^{٢} − ٤)

= ٤جـ^{٢} − ٨جـ^{٢} + ٣٢

= −٤جـ^{٢} + ٣٢

عندما يساوي هذا المقدار صفرًا، نحصل على ٤جـ^{٢} + ٣٢ = ٠

أي أن جـ = ± $\sqrt{٨}$

المميز يساوي −٤جـ^{٢} + ٣٢ وهو تربيعي سالب، وهذا التربيع يساوي صفرًا عندما جـ = $\sqrt{٨}$ أو عندما جـ = −$\sqrt{٨}$ ويكون موجبًا عندما −$\sqrt{٨}$ جـ − $\sqrt{٨}$ ، ويكون سالبًا عندما جـ < −$\sqrt{٨}$ أو عندما جـ > $\sqrt{٨}$

أ هو مماس عندما جـ = $\sqrt{٨}$ أو عندما جـ = −$\sqrt{٨}$

ب يتقاطعان مرتين عندما −$\sqrt{٨}$ < جـ < $\sqrt{٨}$

ج لا يتقاطعان عندما جـ < −$\sqrt{٨}$ أو عندما جـ > $\sqrt{٨}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) أ (م، ٣) ، ب (٤، ب)

ميل $\overline{\text{أب}} = \dfrac{\text{ن} - ٣}{٤ - \text{م}} = -\dfrac{١}{٢}$

٢ن − ٦ = −٤ + م

م = ٢ن − ٢ .... (١)

استخدم نظرية فيثاغورث لتجد أن:

$\overline{\text{أب}} = \sqrt{(٤ - \text{م})^{٢} + (\text{ن} - ٣)^{٢}}$

مُعطى $\overline{\text{أب}} = ٤\sqrt{٥}$

$(٤\sqrt{٥})^{٢} = (٤ - \text{م})^{٢} + (\text{ن} - ٣)^{٢}$

$٨٠ = (٤ - \text{م})^{٢} + (\text{ن} - ٣)^{٢}$

عوّض عن م في المعادلة (١) لتحصل على:

$٨٠ = (٤ - (٢\text{ن} - ٢))^{٢} + (\text{ن} - ٣)^{٢}$

$٨٠ = (٦ - ٢\text{ن})^{٢} + (\text{ن} - ٣)^{٢}$

$٨٠ = ٣٦ - ٢٤\text{ن} + ٤\text{ن}^{٢} + \text{ن}^{٢} - ٦\text{ن} + ٩$

$٥\text{ن}^{٢} - ٣٠\text{ن} - ٣٥ = ٠$

$\text{ن}^{٢} - ٦\text{ن} - ٧ = ٠$

(ن − ٧)(ن + ١) = ٠

ن = ٧ أو ن = −١

إذا كانت ن = ٧ فإن م = ٢(٧) − ٢ أي أن م = ١٢

إذا كانت ن = −١ فإن م = ٢(−١) − ٢ أي أن م = −٤

م = −٤، ن = −١ أو م = ١٢، ن = ٧

٢) أوجد نقطتي التقاطع ى و ل بحلّ المعادلتين آنيًا:

$\text{ص} = ٣\sqrt{\text{س} - ٢}$ .... (١)

٣س − ٤ص + ٣ = ٠ .... (٢)

باستخدام المعادلة (١)، $\sqrt{\text{س} - ٢} = \dfrac{\text{ص}}{٣}$

$\text{س} - ٢ = \dfrac{\text{ص}^{٢}}{٩}$

$\text{س} = \dfrac{\text{ص}^{٢}}{٩} + ٢$

استخدم (١) عبر تعويض ص في (٢) :

$٣\left(\dfrac{\text{ص}^{٢}}{٩} + ٢\right) - ٤\text{ص} + ٣ = ٠$

$\text{ص}^{٢} + ١٨ - ١٢\text{ص} + ٩ = ٠$

$\text{ص}^{٢} - ١٢\text{ص} + ٢٧ = ٠$

(ص − ٩)(ص − ٣) = ٠

ص = ٩ أو ص = ٣

إذا كان ص = ٩ فإن ٣س −٤(٩) + ٣ = ٠

نجد أن س = ١١

إذا كان ص = ٣ فإن ٣س −٤(٣) + ٣ = ٠

نجد أن س = ٣

إحداثيات ى، ل (١١ ، ٩)، (٣ ، ٣)

استخدم نظرية فيثاغورث لتجد أن:

$\overline{\text{ىل}} = \sqrt{(٤ - ١١)^{٢} + (٣ - ٩)^{٢}}$

$= \sqrt{٦٤ + ٣٦}$

$\overline{\text{ىل}} = \pm ١٠$ (−١٠ مرفوض لأن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا).

$\overline{\text{ىل}} = ١٠$

٣) أ المعطيات: أ (١٠، ١٠) ، ب (ن، ١٠ن)

و م س − ٢ص = ٣٠

عوّض عن س = ١٠ في المعادلة م س − ٢ص = ٣٠ يعطي ١٠م − ٢٠ = ٣٠، فتكون م = ٥

فتصبح معادلة المستقيم ٥س − ٢ص = ٣٠

عوّض س = ن، ص = ١٠ن في المعادلة

٥س − ٢ص = ٣٠ لتحصل على ٥ن − ٢٠ن = ٣٠

فتكون ن = −٢

ب إحداثيات ب (−٢، −٢٠)

إحداثيات نقطة منتصف أ ب هي:

$\left(\frac{١٠ + −٢}{٢} ، \frac{١٠ + −٢٠}{٢}\right)$ أو (٤، −٥)

ج ميل $\overline{أب}$ يساوي $\frac{−٢٠ − ١٠}{−٢ − ١٠}$ أو $\frac{٥}{٢}$

ميل المستقيم العمودي على $\overline{أب}$ يساوي $-\frac{٢}{٥}$،

(لأن للمستقيمَين المتعامدَين $م_١ \times م_٢ = −١$)

استخدم المعادلة $ص − ص_١ = م (س − س_١)$،

حيث $م = -\frac{٢}{٥}$، النقطة (٤، −٥)

$ص − (−٥) = -\frac{٢}{٥} (س − ٤)$

$ص + ٥ = -\frac{٢}{٥} س + \frac{٨}{٥}$

$ص = -\frac{٢}{٥} س - \frac{١٧}{٥}$ أو ص = −٤,٠ س − ٣,٤

٤) استخدم المعادلة $ص − ص_١ = م (س − س_١)$،

حيث م = −٢، النقطة (٣ت، ٢ت)

ص − ٢ت = −٢(س − ٣ت)

ص − ٢ت = −٢س + ٦ت

ص = −٢س + ٨ ت

عند النقطة أ، ص = ٠ فيكون ٠ = −٢س + ٨ ت

فيكون: س = ٤ت

أ (٤ت، ٠)

تقع النقطة ب على المحور الصادي، ∴ س = ٠

فيكون ص = −٢(٠) + ٨ ت فيكون:

ص = ٨ ت

ب (٠، ٨ ت)

أ المثلث أ و ب قائم الزاوية في و، $\overline{أو}$ = ٤ت،

$\overline{بو}$ = ٨ ت

مساحة المثلث أ و ب = $\frac{١}{٢}$ × ٤ت × ٨ ت أو

$١٦ت^٢$ وحدة مربعة.

ب ميل $\overline{أب}$ = $\frac{٨ت − ٠}{٠ − ٤ت}$ أو −٢

ميل المستقيم العمودي على $\overline{أب}$ يساوي $\frac{١}{٢}$، (لأن للمستقيمَين المتعامدَين $م_١ \times م_٢ = −١$) .

إذا مرّ المستقيم العمودي في النقطة د(٣ت، ٢ت)

فاستخدم المعادلة $ص − ص_١ = م (س − س_١)$،

حيث $م = \frac{١}{٢}$، والنقطة د (٣ت، ٢ت) لتحصل على:

$ص − ٢ت = \frac{١}{٢} (س − ٣ت)$

إذا قطع هذا المستقيم محور السينات في النقطة ج فعوّض عن ص = ٠ لتحصل على:

$−٢ت = \frac{١}{٢} (س − ٣ت) − ٤ت = س − ٣ت$

فيكون س = −ت

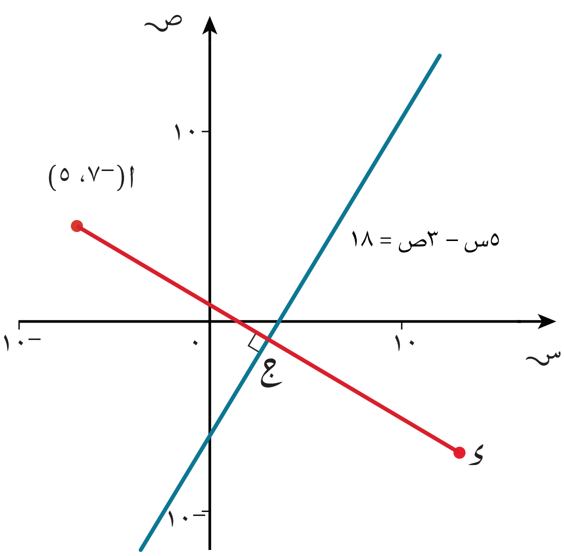
ج (−ت، ٠)

نقطة منتصف القطعة $\overline{دج}$ هي:

$\left(\frac{٣ت + −ت}{٢} ، \frac{٠ + ٢ت}{٢}\right)$ أو (ت، ت)

∴ تقع هذه على المستقيم ص = س

٥) انظر الشكل. سمِّ النقطة (−٧، ٥)



أوجِد ميل المستقيم ٥س − ٣ص = ١٨ .... (١)

٣ص = ٥س − ١٨

$ص = \frac{٥}{٣} س − ٦$ ، فيكون الميل $\frac{٥}{٣}$

فيكون ميل المستقيم العمودي على ٥س − ٣ص = ١٨
هو $-\frac{٣}{٥}$

(لأن للمستقيمَين المتعامدَين م١× م٢ = −١)

أوجِد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم
٥س − ٣ص = ١٨ ويمر في
النقطة (−٧، ٥) باستخدام:

ص − ص١ = م (س − س١)، حيث م = $-\frac{٣}{٥}$ ، النقطة (−٧، ٥)

ص − ٥ = $-\frac{٣}{٥}$ (س − (−٧))

٥ص − ٢٥ = −٣س − ٢١

٣س + ٥ص = ٤ .... (٢)

حلّ المعادلتَين (١) ، (٢) آنيًا يعطي نقطة تقاطع المستقيمَين.

٥س − ٣ص = ١٨ .... (١)

٣س + ٥ص = ٤ .... (٢)

اضرب المعادلة (١) في ٥، واضرب المعادلة (٢) في ٣ لتحصل على:

٣٤س = ١٠٢

س = ٣

عوّض عن قيمة س= ٣ في المعادلة (٢) لتحصل على:

٣(٣) + ٥ص = ٤

ص = −١

يتقاطع المستقيمان في النقطة ج (٣، −١).

وحيث إن المستقيم ٥س − ٣ص = ١٨ عمود منصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين (−٧، ٥)، و ى،

فاستخدم المتجهات لتجد:

$\overline{\text{اج}} = \begin{pmatrix} ٣ - (-٧) \\ -١ - ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ -٦ \end{pmatrix}$

$\overline{\text{اج}} = \overline{\text{جى}}$

$\overline{\text{جى}} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ -٦ \end{pmatrix}$ فتكون إحداثيات ى (١٣، −٧)

∴ ج نقطة منتصف $\overline{\text{اى}}$

ويفرض أن ى (س، ص)

نستخدم قانون نقطة المنتصف:

$(٣، -١) = \left(\frac{-٧ + \text{س}}{٢} ، \frac{٥ + \text{ص}}{٢}\right)$

∴ $\frac{-٧ + \text{س}}{٢} = ٣$ ⇐ −٧ + س = ٦ ⇐ س = ٦ + ٧

⇐ س = ٣

$\frac{٥ + \text{ص}}{٢} = -١$ ⇐ ٥ + ص = −٢ ⇐ ص = −٢ − ٥

⇐ ص = −٧

∴ إحداثيات النقطة هي : (١٣، −٧)

٦) أ ص = س + ٢ − $\frac{٤}{\text{س}}$ ، .... (١)

س − ٢ص + ٦ = ٠ .... (٢)

حلّ المعادلتَين (١)، (٢) آنيًا لتجد إحداثيات النقطتَين أ، ب. عوّض عن قيمة ص من المعادلة (١) في المعادلة (٢) لتجد أن:

س − ٢$\left(\text{س} + ٢ - \frac{٤}{\text{س}}\right)$ + ٦ = ٠

س − ٢س − ٤ + $\frac{٨}{\text{س}}$ + ٦ = ٠

س^٢ − ٢س^٢ − ٤س + ٨ + ٦س = ٠

س^٢ − ٢س − ٨ = ٠

(س − ٤)(س + ٢) = ٠

س = ٤ أو س = −٢

عوّض عن س = ٤ في المعادلة (٢) لتجد أن:

٤ − ٢ص + ٦ = ٠

ص = ٥

عوّض عن س = −٢ في المعادلة (٢) لتجد أن:

−٢ − ٢ص + ٦ = ٠

ص = ٢

إحداثيات النقطتين أ، ب هي (٤، ٥)، (−٢، ٢)

ب إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ هو

$\left(\frac{٤ + −٢}{٢}، \frac{٥ + ٢}{٢}\right)$ أو $\left(١، \frac{٧}{٢}\right)$

ميل $\overline{\text{أب}}$ يساوي $\frac{٢ − ٥}{−٢ − ٤}$ أو $\frac{١}{٢}$

ميل العمود المنصف يساوي −٢

(لأن للمستقيمَين المتعامدَين $م_{١} \times م_{٢}$ = −١)

استخدم المعادلة ص − $ص_{١}$ = م (س − $س_{١}$)،

م = −٢ و $\left(١، \frac{٧}{٢}\right)$

ص − $\frac{٧}{٢}$ = −٢(س − ١)

ص − $\frac{٧}{٢}$ = −٢س + ٢

ص = −٢س + $\frac{١١}{٢}$

٧) أ عوّض عن س = ٥، ص = ١١ في المعادلة

ص = م س + ١ لتجد أن:

١١ = ٥م + ١

م = ٢

فتكون معادلة المستقيم هي ص = ٢س + ١ ... (١)

معادلة الدائرة $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ − ١٩س − ٥١ = ٠ ... (٢)

عوّض عن قيمة ص من المعادلة (١) في المعادلة (٢) لتجد:

$س^{٢}$ + $(٢س + ١)^{٢}$ − ١٩س − ٥١ = ٠

$س^{٢}$ + ٤$س^{٢}$ + ٤س + ١ − ١٩س − ٥١ = ٠

٥$س^{٢}$ − ١٥س − ٥٠ = ٠

$س^{٢}$ − ٣س − ١٠ = ٠

(س − ٥) (س + ٢) = ٠

س = ٥ (الإحداثي السيني للنقطة د) أو س = −٢

عوّض عن س = −٢ في المعادلة (١) لتحصل على: ص = ٢(−٢) + ١

ص = −٣

إحداثيات ل هي (−٢ ، −٣)، $\left(\frac{٣}{٢}، ٤\right)$

$\overline{\text{دل}}$ = $\left(\frac{٤ + −٢}{٢}، \frac{١١ + −٣}{٢}\right)$ أو $\left(٤، \frac{٣}{٢}\right)$

ميل $\overline{\text{دل}}$ يساوي $\frac{−٣ − ١١}{−٢ − ٥}$ أو ٢

ميل العمود المنصف يساوي −$\frac{٣}{٢}$ (لأن للمستقيمَين المتعامدَين $م_{١} \times م_{٢}$ = −١)

استخدم المعادلة ص − $ص_{١}$ = م (س − $س_{١}$)،

م = −$\frac{١}{٢}$ ، و $\left(\frac{٣}{٢}، ٤\right)$

ص − ٤ = −$\frac{١}{٢}$ (س − $\frac{٣}{٢}$)

ص − ٤ = −$\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٤}$

ص = −$\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١٩}{٤}$

ج حل المعادلتين $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ − ١٩س − ٥١ = ٠ .. (٢)

ص = −$\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١٩}{٤}$ .... (٣) آنيًا لتجد إحداثيات نقاط تقاطع العمود المنصف مع الدائرة.

عوّض عن قيمة ص من المعادلة (٣) في المعادلة (٢) لتحصل على

$س^{٢}$ + $\left(−\frac{١}{٢}س + \frac{١٩}{٤}\right)^{٢}$ − ١٩س − ٥١ = ٠

$س^{٢}$ + $\frac{١}{٤}$$س^{٢}$ − $\frac{١٩}{٤}$ س + $\frac{٣٦١}{١٦}$ − ١٩س − ٥١ = ٠

١٦$س^{٢}$ + ٤$س^{٢}$ − ٧٦س + ٣٦١ − ٣٠٤س − ٨١٦ = ٠

$٢٠س^٢ - ٣٨٠س - ٤٥٥ = ٠$

$٤س^٢ - ٧٦س - ٩١ = ٠$

استخدم الصيغة التربيعية حيث

ا = ٤، ب = −٧٦، ج = −٩١ لتجد أن:

$س = \frac{-\,-٧٦ \pm \sqrt{(-٧٦)^٢ - ٤(٤)(-٩١)}}{٢(٤)}$

$س = \frac{٧٦ \pm \sqrt{٧٢٣٢}}{٨}$

$س = \frac{٧٦ \pm ٨\sqrt{١١٣}}{٨}$ ،

$س = \frac{١٩}{٢} + \sqrt{١١٣}$ ، $\frac{١٩}{٢} + \sqrt{١١٣}$

قد يظهر في التمثيل البياني أن قياس الزاوية ٩٠°، لا تفترض ذلك أبدًا، ما لم يُذكر ذلك بوضوح، أو تجد ذلك من خلال الحسابات.

٨) أ ميل $\overline{اب}$ يساوي = $\frac{٢٢ - (-٢)}{١٥ - ٣} = ٢$

ميل $\overline{اب}$ = ٢ م

٢ م = ٢

م = ١

ب ج هي نقطة تقاطع المستقيمَين $\overline{بج}$ و $\overline{اج}$

ميل $\overline{بج}$ = م أو ١

استخدم الصيغة ص − ص١ = م (س − س١)،

حيث م = ١، إحداثيات النقطة (١٥، ٢٢)، فتكون

معادلة المستقيم $\overline{بج}$ هي:

ص − ٢٢ = ١(س − ١٥)

ص − ٢٢ = س − ١٥

ص = س + ٧ ...... (١)

ميل $\overline{اج}$ = −٢ م أو −٢

استخدم الصيغة ص − ص١ = م (س − س١)،

حيث م = −٢، إحداثيات النقطة (٣، −٢) فتكون

معادلة المستقيم $\overline{اج}$ هي:

ص − (−٢) = −٢(س − ٣)

ص + ٢ = −٢س + ٦

ص = −٢س + ٤ ...... (٢)

حل المعادلتين (١) و (٢) آنيًّا لتجد:

س + ٧ = −٢س + ٤

٣س = −٣

س = −١

عوِّض عن س = −١ في (١) لتحصل على

ص = −١ + ٧

ص = ٦

فتكون إحداثيات ج هي (−١، ٦).

ج إحداثيات نقطة منتصف $\overline{اب}$ هي

$\left(\frac{١٥ + ٣}{٢} ، \frac{٢٢ + -٢}{٢}\right) = (٩، ١٠)$

ميل العمود المنصف للقطعة $\overline{اب}$ يساوي $-\frac{١}{٢}$.

(لأن للمستقيمَين المتعامدَين م١ × م٢ = −١)

استخدم الصيغة ص − ص١ = م (س − س١)،

حيث م = $-\frac{١}{٢}$، إحداثيات النقطة (٩، ١٠)، لتجد

معادلة المستقيم العمودي المنصف للقطعة $\overline{اب}$:

ص − ١٠ = $-\frac{١}{٢}$ (س − ٩)

ص − ١٠ = $-\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٩}{٢}$

ص = $-\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٢٩}{٢}$ ...... (٣)

حل المعادلتين (٣) و (١) آنيًّا لتجد:

$-\frac{١}{٢}$س + $\frac{٢٩}{٢}$ = س + ٧

−س + ٢٩ = ٢س + ١٤

٣س = ١٥، س = ٥

عوِّض عن س = ٥ في المعادلة (١) لتحصل على:

ص = ٥ + ٧

ص = ١٢

فتكون إحداثيات النقطة ى هي (٥، ١٢)

٩) أ إحداثيات نقطة منتصف القطعة ا ب هي

$\left(\frac{-١ + ٧}{٢} ، \frac{٦ + ٢}{٢}\right)$ أو (٣، ٤)

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ $\frac{٢ - ٦}{٧ -(-١)}$ أو $-\frac{١}{٢}$

ميل العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{ا ب}}$ يساوي ٢

(لأن للمستقيمَين المتعامدَين يكون $م_١ \times م_٢ = -١$)

استخدم الصيغة $ص - ص_١ = م(س - س_١)$،

حيث م = ٢، إحداثيات النقطة (٤، ٣)، لتجد

معادلة المستقيم العمودي المنصف للقطعة $\overline{\text{ا ب}}$:

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$، م = ٢، (٣ ، ٤)

$ص - ٤ = ٢(س - ٣)$

$ص - ٤ = ٢س - ٦$

$ص = ٢س - ٢$

ب إحداثيات ج (د ل)، و (٠ ، ٠)

استخدم نظرية فيثاغورث لتجد:

$\overline{\text{و ج}} = \sqrt{د^٢ + ل^٢}$ (الجذر هنا لا يساوي د + ل)

معطى $\overline{\text{و ج}} = ٢$

فيكون $٢ = \sqrt{د^٢ + ل^٢}$ أو $د^٢ + ل^٢ = ٤$ .... (١)

وحيث إن ج تقع على المستقيم ص = ٢ س − ٢،

عوّض عن س= د ، ص = ل في المعادلة لتحصل

على: ل = ٢د − ٢ .... (٢)

حل المعادلتَين (١)، (٢) آنيًا عوّض بدل ل من

المعادلة (٢) في المعادلة (١) تحصل على:

$د^٢ + (٢د - ٢)^٢ = ٤$

$د^٢ + ٤د^٢ - ٨د + ٤ = ٤$

$٥د^٢ - ٨د = ٠$

$د(٥د - ٨) = ٠$

د = ٠ أو $د = \frac{٨}{٥}$

إذا كان د = ٠، عوّض في المعادلة ل = ٢د − ٢

لتحصل على: ل = ٢ (٠) − ٢

ل = −٢

إذا كان $د = \frac{٨}{٥}$ ، عوّض في المعادلة ل = ٢د − ٢

لتحصل على: $ل = ٢\left(\frac{٨}{٥}\right) - ٢$

$ل = \frac{٦}{٥}$

فتكون إحداثيات ج (٠، −٢) أو $\left(\frac{٨}{٥}، \frac{٦}{٥}\right)$

١٠) أ إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{ا ج}}$ هي

$\left(\frac{-٣ + ٥}{٢} ، \frac{٢ + ٦}{٢}\right)$ أو (١، ٤)

ميل المستقيم $\overline{\text{ا ج}} = \frac{٦ - ٢}{٥ -(-٣)}$ أو $\frac{١}{٢}$

ميل العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{ا ج}}$ يساوي −٢

(لأن للمستقيمَين المتعامدَين يكون $م_١ \times م_٢ = -١$)

استخدم الصيغة $ص - ص_١ = م(س - س_١)$،

حيث م = ٢، إحداثيات النقطة (١، ٤) لتجد

معادلة المستقيم العمودي المنصف للقطعة $\overline{\text{ا ج}}$:

$ص - ٤ = -٢(س - ١)$

$ص - ٤ = -٢س + ٢$

$ص = -٢س + ٦$

تقع ب على المحور السيني فيكون ص = ٠

وعليه، فإن ٠ = −٢س + ٦

س = ٣

إحداثيات ب (٣ ، ٠).

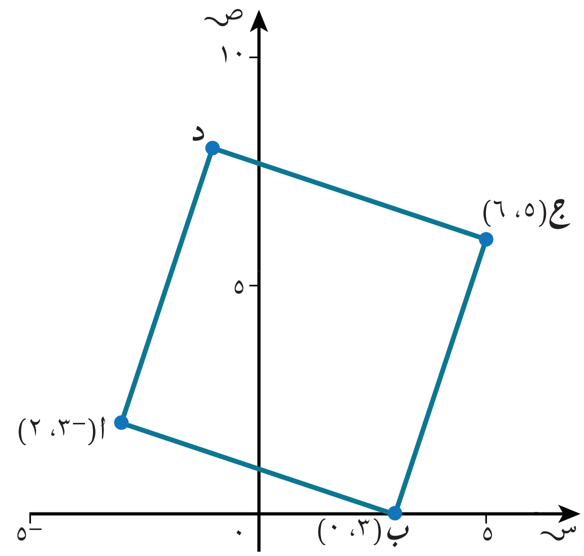
ب ميل $\overline{\text{ب ج}}$ يساوي $\frac{٦ - ٠}{٥ - ٣}$ أو ٣

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ يساوي $\frac{٠ - ٢}{٣ -(-٣)} = -\frac{١}{٣}$

ميل $\overline{\text{ب ج}}$ × ميل $\overline{\text{ا ب}}$ = ٣ × $-\frac{١}{٣}$ أو −١

لذا يكون المستقيمان $\overline{اب}$ و $\overline{ب ج}$ متعامدَين،
لأن $م_١ \times م_٢ = -١$

ج انظر الشكل أدناه



وحيث إن ا ب ج ى مربع تكون الأضلاع المتقابلة متساوية الطول ومتوازية. لذا استخدم المتجهات لتجد:

$\overrightarrow{اب} = \begin{pmatrix} -٣ & -٣ \\ ٢ & -٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٦ \\ ٢ \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{اب} = \overrightarrow{ىج}$

$\overrightarrow{ىج} = \begin{pmatrix} -٦ \\ ٢ \end{pmatrix}$ وعليه، فإن إحداثيات النقطة ى $(-١، ٨)$

$\overline{اى} = \sqrt{(-١ - (-٣))^٢ + (٨ - ٢)^٢}$

$\overline{اى} = \sqrt{٤٠}$ أو $٢\sqrt{١٠}$

(١١) أ إحداثيات نقطة منتصف ا ب هي

$\left(\frac{١ + ٥}{٢}، \frac{-٢ + ٢}{٢}\right)$ أو $(٣، ١)$

ميل $\overline{اب}$ يساوي $\frac{٤ - (-٢)}{٥ - ١}$ أو $\frac{٣}{٢}$

معادلة العمود المنصف للقطعة $\overline{اب} = -\frac{٢}{٣}$

(لأن للمستقيمَين المتعامدَين يكون $م_١ \times م_٢ = -١$)

استخدم الصيغة $ص - ص_١ = م (س - س_١)$،

حيث $م = -\frac{٢}{٣}$، إحداثيات النقطة (١، ٣)، لتجد معادلة المستقيم العمودي المنصف للقطعة $\overline{اب}$:

$ص - ١ = -\frac{٢}{٣}(س - ٣)$

$ص - ١ = -\frac{٢}{٣}س + ٢$

$ص = -\frac{٢}{٣}س + ٣$

ب يجب أن يمر العمود المنصف للقطعة $\overline{اب}$ في مركز الدائرة ج (٦، ت).

لذا عوّض عن س = ٦، ص = ت في المعادلة

$ص = -\frac{٢}{٣}س + ٣$ لتحصل على:

$ت = -\frac{٢}{٣}(٦) + ٣$

$ت = -١$

ج أوجِد نصف قطر الدائرة أي طول القطعة المستقيمة $\overline{ب ج}$

استخدم نظرية فيثاغورث:

$\overline{ب ج} = \sqrt{(-١ - ٤)^٢ + (٦ - ٥)^٢}$

$\overline{ب ج} = \sqrt{٢٦}$ طول نصف القطر

معادلة الدائرة $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = نق^٢$

إذا كان لك أن تختار، فاستخدم صورة المربع الكامل أسهل من الصورة العامة للدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٢ هـ س + ٢ د ص + ج = ٠$

معادلة الدائرة التي مركزها (٦ ، -١)، ونصف قطرها $\sqrt{٢٦}$ هي:

$(س - ٦)^٢ + (ص - (-١))^٢ = ٢٦$

$(س - ٦)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٢٦$

١٢) أ ميل المستقيم $\overline{ا ب}$ يساوي $\left(\frac{١٧ - ٢}{١٣ - ٣}\right)$ أو $\frac{٣}{٢}$

ميل $\overline{ا ى}$ = $-\frac{٢}{٣}$،

(لأن للمستقيمَين المتعامدَين $م_١ \times م_٢ = -١$)

استخدم الصيغة ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)،

حيث م = $-\frac{٢}{٣}$، إحداثيات النقطة (١٣، ١٧)، لتجد

معادلة المستقيم $\overline{ا ى}$:

ص − ١٧ = $-\frac{٢}{٣}$ (س − ١٣)

ص − ١٧ = $-\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٢٦}{٣}$

ص = $-\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٧٧}{٣}$ ...... (١)

قياس الزاوية ا ى ج = ٩٠° لأن قياس الزاوية ب ا د = قياس الزاوية ج ى ا زاويتان داخليتان للمستقيمَين المتوازيَين $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ى ج}$

ميل $\overline{ج ى}$ = $\frac{٣}{٢}$

استخدم الصيغة ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)،

حيث م = $\frac{٣}{٢}$ ، إحداثيات النقطة (١٣، ٤) لتجد

معادلة المستقيم $\overline{ج ى}$:

ص − ٤ = $\frac{٣}{٢}$ (س − ١٣)

ص − ٤ = $\frac{٣}{٢}$ س − $\frac{٣٩}{٢}$

ص = $\frac{٣}{٢}$ س − $\frac{٣١}{٢}$ ...... (٢)

حل المعادلتَين (١)، (٢) آنيًا لتجد إحداثيات النقطة ى :

$-\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٧٧}{٣}$ = $\frac{٣}{٢}$ س − $\frac{٣١}{٢}$

−٤س + ١٥٤ = ٩س − ٩٣

١٣س = ٢٤٧

س = ١٩

عوّض عن س = ١٩ في المعادلة (٢) لتحصل على

ص = $\frac{٣}{٢}$(١٩) − $\frac{٣١}{٢}$

ص = ١٣

فتكون إحداثيات ى (١٩، ١٣)

ب مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$(أ + ب) ع

استخدم نظرية فيثاغورث لتجد:

أ = $\overline{ا ب}$ = $\sqrt{(١٣ - ٣)^٢ + (١٧ - ٢)^٢}$ أو $\sqrt{٣٢٥}$

ب = $\overline{ج ى}$ = $\sqrt{(١٩ - ١٣)^٢ + (١٣ - ٤)^٢}$ أو $\sqrt{١١٧}$

ع = $\overline{ا ى}$ = $\sqrt{(١٩ - ١٣)^٢ + (١٣ - ١٧)^٢}$ أو $\sqrt{٥٢}$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}(\sqrt{٣٢٥} + \sqrt{١١٧})\sqrt{٥٢}$

المساحة = ١٠٤

١٣) أ حل المعادلتين

س ص = ١٢ ...... (١)

٣س + ص = ٢٠ ...... (٢)

آنيًا لتجد أحداثيات نقطتي التقاطع أ، ب من المعادلة (٢) قيمة ص = ٢٠ − ٣س، عوّض عن ص في المعادلة (١) لتجد:

س (٢٠ − ٣س) = ١٢

٣$س^٢$ − ٢٠س + ١٢ = ٠

(٣س − ٢)(س − ٦) = ٠

س = $\frac{٢}{٣}$ أو س = ٦

عوّض عن س = $\frac{٢}{٣}$ في المعادلة (١) لتجد أن ص = ١٨

عوّض عن س = ٦ في المعادلة (١) لتجد أن ص = ٢

إحداثيات ا و ب هي ($\frac{٢}{٣}$ ، ١٨)، (٦ ، ٢)

إحداثيات نقطة المنتصف $\overline{ا ب}$

= $\left(\frac{\frac{٢}{٣} + ٦}{٢} ، \frac{١٨ + ٢}{٢}\right)$ أو $\left(\frac{١٠}{٣} ، ١٠\right)$

ب س ص = ١٢ ...... (١)

٣س + ص = ك ...... (٢)

من المعادلة (١) نجد أن ص = $\frac{١٢}{س}$

عوّض عن ص في المعادلة (٢) لتجد أن:

$٣\text{س} + \frac{١٢}{\text{س}} = \text{ك}$

$٣\text{س}^{٢} + ١٢ = \text{ك س}$

$٣\text{س}^{٢} - \text{ك س} + ١٢ = ٠$

قارن المعادلة مع $\text{أس}^{٢} + \text{ب س} + \text{ج} = ٠$ تجد أن:

أ = ٣، ب = − ك، ج = ١٢

ليكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان فإن

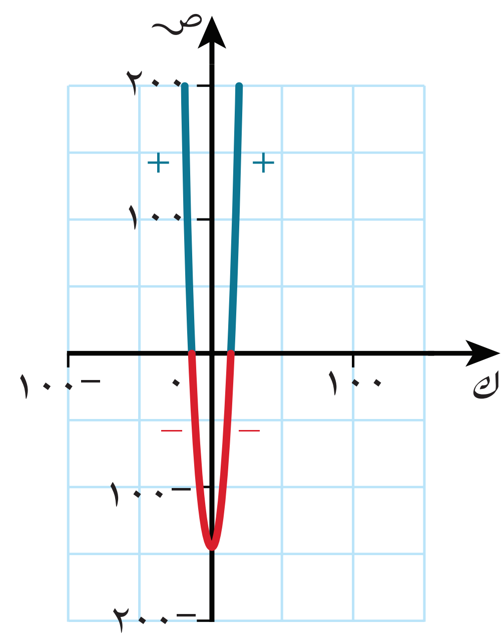
$\text{ب}^{٢} - ٤\text{أج} > ٠$

عوّض قيم أ ، ب ، ج تحصل على:

$(-\text{ك})^{٢} - ٤(٣)(١٢) > ٠$

$\text{ك}^{٢} - ١٤٤ > ٠$ أو $(\text{ك} - ١٢)(\text{ك} + ١٢) > ٠$

ارسم منحنى ص = (ك − ١٢)(ك + ١٢)، شكله ∪ لأن معامل $\text{ك}^{٢}$ موجب.



المقطعان من المحور ك هما ك = −١٢، ك = ١٢

ليكون (ك −١٢) (ك + ١٢) > ٠ يجب أن نجد مجال ك التي يكون المنحنى عندها موجبًا − يقع فوق المحور ك −.

الحل ك < −١٢ أو ك > ١٢

١٤) أ ا (−٣ ، ٦) و ب (٩ ، −١٠)

ميل $\overline{\text{اب}}$ يساوي $\frac{-١٠ + -٦}{٩ - (-٣)} = -\frac{٤}{٣}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)،

حيث م = $-\frac{٤}{٣}$، إحداثيات النقطة (−٣، ٦)، لتجد معادلة المستقيم $\overline{\text{اب}}$:

$\text{ص} - ٦ = \frac{٤}{٣}(\text{س} - (-٣)))$

$\text{ص} - ٦ = \frac{٤}{٣}\text{س} - ٤$

$\text{ص} = \frac{٤}{٣}\text{س} + ٢$

ب إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{اب}}$ هي

$\left(\frac{-٣ + ٩}{٢} ، \frac{٦ + (-١٠)}{٢}\right)$ أو $(٣، -٢)$

ميل المستقيم $\overline{\text{اب}}$ يساوي $-\frac{٤}{٣}$

ميل العمود المنصف على $\overline{\text{اب}}$ يساوي ٣ (لأن للمستقيمَين المتعامدَين م$_{١}$ × م$_{٢}$ = −١)

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)،

حيث م = $\frac{٣}{٤}$، إحداثيات النقطة (٣، −٢)، لتجد معادلة العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{اب}}$:

$\text{ص} - (-٢) = \frac{٣}{٤}(\text{س} - ٣)$

$\text{ص} + ٢ = \frac{٣}{٤}\text{س} - \frac{٩}{٤}$

$\text{ص} = \frac{٣}{٤}\text{س} - \frac{١٧}{٤}$

٤ص = ٣س − ١٧ أو ٣س − ٤ص = ١٧

ج العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{\text{اب}}$ يجب أن يمر في مركز الدائرة.

لذا س = ١٥ يحقق المعادلة ٣س − ٤ص = ١٧

٣ (١٥) − ٤ص = ١٧

٤ص = ٤٥ − ١٧

ص = ٧

فتكون إحداثيات مركز الدائرة ج (١٥ ، ٧).

ونصف قطرها $\overline{\text{أ ج}}$ أو $\overline{\text{ب ج}}$

استخدم نظرية فيثاغورث:

$\overline{\text{أ ج}} = \sqrt{(-٣ - ١٥)^٢ + (٦ - ٧)^٢}$ أو $\sqrt{٣٢٥}$

معادلة الدائرة (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢

استخدم إحداثيات المركز ج(١٥، ٧)،

نق = $\sqrt{٣٢٥}$ لتحصل على:

(س − ١٥)^٢ + (ص − ٧)^٢ = ٣٢٥ معادلة الدائرة المطلوبة

١٥) أ س^٢ + ص^٢ − ٨س + ٤ ص + ٤ = ٠

وبصورة عامة:

س^٢ − ٨س + ص^٢ + ٤ص + ٤ = ٠

(س − ٤)^٢ − ٤^٢ + (ص + ٢)^٢ − ٢^٢ + ٤ = ٠

(س − ٤)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ١٦

فيكون نق ٤ ومركزها (٤، −٢)

ب تقطع الدائرة محور السينات حيث ص = ٠، لذا

يكون س^٢ − ٨س + ٤ = ٠

استخدم الصيغة التربيعية : أ = ١، ب = −٨، ج = ٤

$\text{س} = \frac{-(-٨) \pm \sqrt{(-٨)^٢ - ٤(١)(٤)}}{٢(١)}$

$\text{س} = \frac{٨ \pm \sqrt{٤٨}}{٢}$

س = ٤ − ٢$\sqrt{٣}$ أو س = ٤ + ٢$\sqrt{٣}$

ج عوّض عن س = ٦ و ص = ٢$\sqrt{٣}$ − ٢ في المعادلة

(س − ٤)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ١٦ فيكون

(٦ − ٤)^٢ + (٢$\sqrt{٣}$ − ٢ + ٢)^٢ = ١٦

٤ + (٢$\sqrt{٣}$) = ١٦

٤ + ١٢ = ١٦

١٦ = ١٦

الطرفان متساويان؛ وعليه، فإن النقطة أ تقع على الدائرة.

د ميل المستقيم الذي يصل بين أ (٦، ٢$\sqrt{٣}$ − ٢)

والمركز (٤، −٢) يساوي:

$\frac{٢\sqrt{٣} - ٢ - (-٢)}{٢}$ أو $\sqrt{٣}$ وعليه، يكون ميل

المماس عند النقطة أ يساوي $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(لأن للمستقيمَين المتعامدَين يكون $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$)

استخدم الصيغة ص − $\text{ص}_١$ = م (س − $\text{س}_١$)،

حيث م = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$، إحداثيات النقطة (٦، ٢$\sqrt{٣}$ − ٢)

ص − (٢$\sqrt{٣}$ − ٢) = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (س − ٦)

ص − ٢$\sqrt{٣}$ + ٢ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (س − ٦)

$\sqrt{٣}$ص − ٦ + ٢$\sqrt{٣}$ = −١ (س − ٦)

$\sqrt{٣}$ص − ٦ + ٢$\sqrt{٣}$ = −١س + ٦

٣ص − ٦$\sqrt{٣}$ + ٦ = −$\sqrt{٣}$ س + ٦$\sqrt{٣}$

$\sqrt{٣}$ س + ٣ص = ١٢$\sqrt{٣}$ − ٦

الوحدة السادسة
المصفوفات Matrices

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الموضوع	عدد الحصص	الأهداف التعليمية	المفردات
٦–١ (PPT)	المصفوفات والعمليات عليها	٤	٦–١ يعرف معنى المصفوفة ويعبر عنها بدلالة صفوفها وأعمدتها، ويتعرّف على المصفوفة الصفرية والمصفوفة المحايدة. ٦–٢ يتذكر رتبة المصفوفة لزوج من المصفوفات لكي يتم جمعهما أو طرحهما أو ضربهما. ٦–٣ يتعرف متى تكون المصفوفتان متساويتين. ٦–٤ يجمع ويطرح ويضرب المصفوفات، ويعرف خصائص التبديل والتجميع لضرب المصفوفات.	المصفوفة، العنصر الصف، العمود، الرتبة مصفوفة مربعة مصفوفة صفرية مصفوفة محايدة
٦–٢	محدد المصفوفة	٢	٦–٥ يحسب محدد المصفوفة التي من الرتبة ٢×٢، ٣×٣	محدد المصفوفة، المصفوفة المنفردة، المصفوفة غير المنفردة، مصفوفة صف، مصفوفة عمود
٦–٣	معكوس المصفوفة	٣	٦–٦ يتذكر معنى المصطلحات "منفردة" و"غير منفردة" في المصفوفات المربّعة، ويجد معكوسات المصفوفات غير المنفردة ٢×٢، ٣×٣	المعادلة المصفوفية، المصفوفة المعززة، معكوس المصفوفة
٦–٤	استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات	٣	٦–٧ يستخدم المصفوفات لحلّ أنظمة المعادلات الآنية (لمجهولين أو ثلاثة مجاهيل).	
	تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة	١		

٦-١ المصفوفات والعمليات عليها

ملاحظات للمعلمين

هذه المقدمة حول المصفوفات مهمة، ولذلك ينبغي على الطلبة متابعة الموضوعات الواردة فيها بعناية وتمهل، إذ سوف تتيح لهم فهم المصفوفات بشكل ملموس، وتبيّن لهم متى يمكن استخدامها ومتى لا يمكن ذلك. ينبغي توضيح التعاريف والمصطلحات من خلال أمثلة، وتحفيز الطلبة على استخدام المفردات الصحيحة عند تقديم شروحهم وإجاباتهم.

أفكار للتعليم

ابدأ بتقديم المصفوفة على أنها عرض لمعلومات معيّنة منظمة في جدول. في ما يأتي مثال على جدول يبيّن عدد أكواب القهوة والشاي وقطع الحلوى التي تباع كل ساعة في اثنين من المقاهي:

	القهوة	الشاي	الحلوى
المقهى (أ)	١٠	٦	١١
المقهى (ب)	١٥	٥	١٢

وهو ما يمكن تقديمه على شكل مصفوفة: $\begin{pmatrix} ١٠ & ٦ & ١١ \\ ١٥ & ٥ & ١٢ \end{pmatrix}$

فهي تشتمل على الأعداد فقط من دون العناوين في الأعلى أو على الجانب.

عند الانتقال إلى معطيات أخرى عن البيع في الساعة القادمة مثلًا، هل سيتمكن الطلبة من تحويلها إلى المصفوفة المناسبة؟

	القهوة	الشاي	الحلوى
المقهى (أ)	١٢	١٠	٨
المقهى (ب)	٢٠	٣	١٢

يمكن أن يقدم هذا في صورة مصفوفة: $\begin{pmatrix} ١٢ & ١٠ & ٨ \\ ٢٠ & ٣ & ١٢ \end{pmatrix}$

يمكننا إعطاء كل واحدة من هذه المصفوفات اسمًا يكون عادةً عبارة عن حرف (قد يكون حرفًا حجمه أكبر من المعتاد، أو قد نعطيه خاصية Bold وتحته خط).

$\underline{ج} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٦ & ١١ \\ ١٥ & ٥ & ١٢ \end{pmatrix}$ و $\underline{ك} = \begin{pmatrix} ١٢ & ١٠ & ٨ \\ ٢٠ & ٣ & ١٢ \end{pmatrix}$

يمكننا الآن البدء في التفكير في معاني صيغ من قبيل:

$\underline{ج} + \underline{ك}$

$\underline{ك} - \underline{ج}$

$٣\underline{ج}$

$\underline{ج} \times \underline{ك}$

$\underline{ج} \div \underline{ك}$

لنعد إلى جدولَي المعلومات. ما الذي علينا أن نفهمه من $\underline{ج} + \underline{ك}$ ؟ يتعيّن علينا أن نجمع في الجداول الأعداد التي هي في الخانات المتقابلة:

	القهوة	الشاي	الحلوى
المقهى (أ)	١٠ + ١٢	٦ + ١٠	١١ + ٨
المقهى (ب)	١٥ + ٢٠	٥ + ٣	١٢ + ١٢

وهذا منطقي؛ لأن الناتج يعبّر عن الكميّة التي تمّ بيعها في الساعتَين معًا. وهذا هو بالضبط ما نقوم به عندما نجمع مصفوفتَين معًا:

$$\underline{ج} + \underline{ك} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٦ & ١١ \\ ١٥ & ٥ & ١٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢ & ١٠ & ٨ \\ ٢٠ & ٣ & ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٢ & ١٦ & ١٩ \\ ٣٥ & ٨ & ٢٤ \end{pmatrix}$$

مما سبق نستنتج أن الجمع لا يمكن أن يتم إلّا بين مصفوفات من الرتبة نفسها، فلا يمكننا مثلًا أن نجمع مصفوفة من الرتبة ٣ × ١ مع مصفوفة أخرى من الرتبة ٢ × ٢

يمكننا تعميم ما سبق لجميع المصفوفات من الرتبة ٢ × ٢ كالآتي:

$$\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} هـ & و \\ ز & ح \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ + هـ & ب + و \\ ج + ز & د + ح \end{pmatrix}$$

عملية الطرح تشبه عملية الجمع في معناه وفي طريقة عمله. تمكننا عملية الطرح $\underline{ك} - \underline{ج}$ من مقارنة الكميّات المبيعة من كل نوع ما بين الساعتَين الأولى والثانية:

$$(\underline{ك} - \underline{ج}) = \begin{pmatrix} ١٢ & ١٠ & ٨ \\ ٢٠ & ٣ & ١٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٠ & ٦ & ١١ \\ ١٥ & ٥ & ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ & -٣ \\ ٥ & -٢ & ٠ \end{pmatrix}$$

وفي ذلك إشارة إلى أن المصفوفات يمكن لها أن تشتمل على أصفار أو أعداد سالبة. في هذا السياق، يمكننا، من خلال ضرب المصفوفة في عدد ما، أن نفهم الكميّة المبيعة في هذا العدد من الساعات، إذا كانت الكميّة لا تتغير بين ساعة وأخرى.

$$٣\underline{ج} = ٣\begin{pmatrix} ١٠ & ٦ & ١١ \\ ١٥ & ٥ & ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٠ & ١٨ & ٣٣ \\ ٤٥ & ١٥ & ٣٦ \end{pmatrix}$$

يبيّن السياق هنا أيضًا أنه يمكن أن يكون ثمّة معنى لضرب المصفوفة في العدد ٣ طالما أن معلومة البيع للساعات الثلاث تكون متساوية. فالبيع يقتضي أن يضرب هذا العدد في كل أعداد الجدول.

الصيغتان الأخيرتان (×) و (÷) لا معنى لهما. فالضرب إذا كان بمعنى ضرب الأعداد المتناظرة (كضرب كميّات القهوة المبيعة) هو عملية لا معنى لها، وكذلك الأمر بالنسبة إلى القسمة.

لا توجد عملية اسمها قسمة مصفوفة على مصفوفة أخرى (على الرغم من أن قسمة كل عناصر مصفوفة على عدد يمكن أن نحصل عليه من خلال ضرب المصفوفة بمعكوس العدد). أمّا ضرب المصفوفات، فهناك طريقة مختلفة لإجرائها تختلف عن عمليتي الجمع والطرح، وهي تستحق أن تدرس بالتفصيل. ماذا لو كان ثمن كوب القهوة ١,٥ ريال وثمن كوب الشاي هو ١ ريال وثمن قطعة الحلوى ٢ ريال، وأردنا تعريف قيمة إيرادات كل مقهى في تلك الساعة المحددة؟

لدينا الجدول الأساسي والمصفوفة:

	القهوة	الشاي	الحلوى
المقهى (أ)	١٠	٦	١١
المقهى (ب)	١٥	٥	١٢

$$\underline{ج} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٦ & ١١ \\ ١٥ & ٥ & ١٢ \end{pmatrix}$$

وهذا جدول للأسعار مع المصفوفة المناسبة:

	الثمن
القهوة	١,٥
الشاي	١
الحلوى	٢

$$\underline{\text{ث}} = \begin{pmatrix} ١,٥ \\ ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$$

لمعرفة الإيرادات، نحتاج أن نضرب أولًا العدد الذي تمّ بيعه من كل نوع في الثمن المتعلق به:

	القهوة	الشاي	الحلوى	المجموع
المقهى أ	١٠ × ١,٥ = ١٥	٦ × ١ = ٦	١١ × ٢ = ٢٢	١٥ + ٦ + ٢٢ = ٤٣
المقهى ب	١٥ × ١,٥ = ٢٢,٥	٥ × ١ = ٥	١٢ × ٢ = ٢٤	٢٢,٥ + ٥ + ٢٤ = ٥١,٥

$$\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ث}} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٦ & ١١ \\ ١٥ & ٥ & ١٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١,٥ \\ ١ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \times ١,٥ + ٦ \times ١ + ١١ \times ٢ \\ ١٥ \times ١,٥ + ٥ \times ١ + ١٢ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٣ \\ ٥١,٥ \end{pmatrix}$$

نرى المزيد من الإيضاح حول هذا الموضوع في شريحة العرض الإلكتروني ٦.

هناك المزيد من النقاط حول موضوع ضرب المصفوفات:

- $\underline{\text{ا}}^{٢}$ تعني $\underline{\text{ا}} \times \underline{\text{ا}}$ (حيث $\underline{\text{ا}}$ مصفوفة مربعة).
- لا يمكننا أن نجري ضرب المصفوفتَين $\underline{\text{ا}}$، $\underline{\text{ب}}$ إلّا إذا كان عدد أعمدة $\underline{\text{ا}}$ مساويًا لعدد صفوف $\underline{\text{ب}}$.
- بشكل عام، $\underline{\text{ا}} \times \underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ا}}$ (مع أن المعادلة يمكن أن تكون صحيحة أحيانًا).
- $(\underline{\text{ا}} \times \underline{\text{ب}})\,\underline{\text{ج}} = \underline{\text{ا}}\,(\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}})$

ينبغي أن يكون بمتناول الطلبة تمارين كثيرة للتدرب على ضرب المصفوفات الأمر الذي يتيح لهم التحقق من صحة النقطتَين الأخيرتَين في ما سبق.

اسأل الطلبة أن يقوموا بضرب مصفوفة ٢ × ٢ في المصفوفة المحايدة (في الاتجاهَين) وناقش معهم ما يميز هذه المصفوفة، مبينًا أهمية ذلك. مثلًا:

$$\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

تحوّل إلى الحالة العامة لتبيّن أن $\underline{\text{ا}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{م}} \times \underline{\text{ا}} = \underline{\text{ا}}$ حيث $\underline{\text{م}}$ المصفوفة المحايدة

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} \times ١ + \text{ب} \times ٠ & \text{أ} \times ٠ + \text{ب} \times ١ \\ \text{ج} \times ١ + \text{د} \times ٠ & \text{ج} \times ٠ + \text{د} \times ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$$

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

كما بيّنا، فإن ضرب المصفوفتَين أ × ب ممكن إذا كان العدد الثاني في رتبة أ مساويًا للعدد الأول في رتبة ب مثلًا، يمكننا ضرب مصفوفة ٣ × ٢ في مصفوفة ٢ × ١ لنحصل على مصفوفة ٣ × ١

مصفوفة (١ × ٣) × مصفوفة (٣ × ٢) ليعطي مصفوفة ١ × ٢

مصفوفة (٤ × ٣) × مصفوفة (٢ × ٥) لا يمكن أن يتم لأن الأعداد الداخلية (٣ و٢) غير متساوية.

مصفوفة (٢ × ٢) × مصفوفة (٢ × ٢) ليعطي مصفوفة ٢ × ٢ كما رأينا مسبقًا.

تساعد هذه الملاحظات على إعادة التأكد من أن أ × ب ≠ ب × أ بشكل عام.

مثلًا مصفوفة (١ × ٣) × مصفوفة (٣ × ١) ليعطي مصفوفة ١ × ١ بينما

مصفوفة (٣ × ١) × مصفوفة (١ × ٣) ليعطي مصفوفة ٣ × ٣

يفيد هذا أيضًا بأن المصفوفة المحايدة يجب أن تكون مربعة.

دعم الطلبة

ركز على الأمثلة التي يمكن فيها ربط المصفوفات بالواقع، حاول أن تقدم للطلبة سيناريوهات مشابهة لما هو وارد في «أفكار للتعليم».

تحدّي الطلبة

اسألهم أن يبيّنوا أن $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة للمصفوفات ٣ × ٣

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦–١

مصادر تعليمية اختيارية مفيدة

Crush Me أو Fix Me : NRICH

٦-٢ محدد المصفوفة

ملاحظات للمعلمين

ثمّة طريقتان للتعبير عن محدد المصفوفة أ: إما أن يُكتب Δ (تُقرأ دلتا) أو يكتب رمز المصفوفة أ بين خطين رأسيين | أ |.

المحدد هو قيمة عددية وليس مصفوفة.

سوف يتّضح معنى المحددات وأهمية استخدامها في الفقرة الآتية.

أفكار للتعليم

اشرح للطلبة أن محدد مصفوفة من الرتبة ٢ × ٢ معرّف كما يلي:

$$\begin{vmatrix} ب & أ \\ د & ج \end{vmatrix} = أ د - ب ج$$

المحدد لا يكون إلّا لمصفوفة مربعة.

لا بد لاحتساب محدد لمصفوفة من الرتبة ٣ × ٣ من معالجة ثلاث مصفوفات ٢ × ٢ في إطار قاعدة خاصة.

سوف نأخذ على سبيل المثال المصفوفة الآتية المستخدمة في كتاب الطالب:

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ١ \\ ٨ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢٠ & ٥ \end{pmatrix} = أ$$

المحدد مبيّن كالتالي:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ١ \\ ٨ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢٠ & ٥ \end{vmatrix}$$

ركز على العنصر في أعلى يمين المصفوفة:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ١ \\ ٨ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢٠ & ٥ \end{vmatrix}$$

قم بمحو العناصر التي هي في صف وعمود هذا العنصر نفسه:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ١ \\ ٨ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٠٢ & ٥ \end{vmatrix}$$

قم بإيجاد محدد المصفوفة ٢ × ٢ المتبقية بعد حذف العناصر المذكورة ثم اضرب هذا المحدد في العنصر الموجود داخل الدائرة.

يعطينا هذا: $١ \times \begin{vmatrix} ٨ & ٤ \\ ٤ & ٢٠ \end{vmatrix}$

قم بوضع دائرة حول العنصر التالي في الصف الأول، ثم قم بحذف الصف الأول والعمود الثاني كما سبق:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ١ \\ ٨ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢٠ & ٥ \end{vmatrix}$$

قم بإيجاد محدد المصفوفة ٢ × ٢ المتبقية واضرب هذا المحدد في العدد داخل الدائرة كما فعلنا سابقًا مع مراعاة وضع إشارة سالبة.

يعطينا هذا: $-٦ \times \begin{vmatrix} ٨ & ١ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

قم بتكرار العملية للعنصر المتبقي في الصف الأول من دون وضع إشارة سالبة.

$$\begin{vmatrix} ١ & ٦ & \circled{٣} \\ ١ & ٤ & ٨ \\ ٥ & ٢٠ & ٤ \end{vmatrix}$$

يعطينا هذا: $٣ \times \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٢٠ \end{vmatrix}$

قم في النهاية بجمع هذه الإجابات الثلاث.

$$١ \times \begin{vmatrix} ٤ & ٨ \\ ٢٠ & ٤ \end{vmatrix} - ٦ \times \begin{vmatrix} ١ & ٨ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} + ٣ \times \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٢٠ \end{vmatrix}$$

$= ١(١٦ - ١٦٠) - ٦(٤ - ٤٠) + ٣(٢٠ - ٢٠)$

$= -١٤٤ + ٢١٦ + ٠ = ٧٢$

∴ المحدد هو ٧٢

$$\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٦ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٨ \\ ٥ & ٢٠ & ٤ \end{pmatrix}$$

يمكن إيجاد محدد المصفوفة باستخدام أي عمود أو صف في المصفوفة مع مراعاة تبديل الإشارة وفق الشطرنج (طريقة الاختزال الصفي).

يمكننا أيضًا إيجاد المحدد بطريقة أبسط وذلك من خلال عمليات على الصفوف تؤدي إلى حساب أبسط كما هو مبين في ما يلي:

$\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٦ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٨ \\ ٥ & ٢٠ & ٤ \end{pmatrix}$ تحديد قطر المصفوفة $ص_٢ \Leftarrow ص_٢ - ص_١$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٦ & ٣ \\ ٠ & -٢ & ٥ \\ ٥ & ٢٠ & ٤ \end{pmatrix}$ $ص_٣ \Leftarrow ص_٣ - ٥ص_١$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٦ & ٣ \\ ٠ & -٢ & ٥ \\ ٠ & -١٠ & -١١ \end{pmatrix}$ باستخدام العمود الأول

$\Delta\, \underline{أ} = ١ \times \begin{vmatrix} -٢ & ٥ \\ -١٠ & -١١ \end{vmatrix} = (٢٢ + ٥٠) = ٧٢$

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

٢٦٥

يقدم هذا التمرين فرصة للطلبة لإيجاد عدد كبير من المحددات. سوف يكتشفون أن التبديل في المصفوفة ما بين صفَّين (أو عمودَين) يؤدي إلى المحدد الأصلي مضروب في العدد −١، وهو ما يصلح لأي مصفوفة مربعة من أيّ رتبة كانت.

بإمكانهم عندئذ برهنة ذلك من خلال القواعد الجبرية:

$\begin{vmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{vmatrix}$ = أ د − ب ج

إذا قمنا بتبديل الصفَّين نحصل على:

$\begin{vmatrix} ج & د \\ أ & ب \end{vmatrix}$ = ج ب − د أ

وهو ما ينطبق على المصفوفات من الرتبة ٣ × ٣ أيضًا.

دعم الطلبة

أعطهم الكثير من الفرص للتدرّب على إيجاد المحددات.

تحدّي الطلبة

يمثل البرهان في استكشف ٢ للمصفوفات ٣ × ٣ تحديًا للطلبة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦−٢

٦-٣ معكوس المصفوفة

ملاحظات للمعلمين

لدينا قاعدة مباشرة لإيجاد معكوس المصفوفة من الرتبة ٢ × ٢، ولكن ليس لدينا قاعدة مباشرة للمصفوفات من الرتبة ٣ × ٣. الطريقة المعتمدة في كتاب الطالب لإيجاد معكوس المصفوفة من الرتبة ٣ × ٣ تقضي بإيجاد مصفوفة معززة ومعالجتها عن طريق عمليات الصف على نحو معيّن (انظر كتاب الطالب - الدرس ٦-٣).

من المفيد أن يبدأ الطلبة باستخدام هذه القاعدة لإيجاد معكوس المصفوفة من الرتبة ٢ × ٢ أيضًا، على الرغم من أنهم سوف يُعطَون بعد ذلك القاعدة المباشرة.

معكوس المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$ (من الرتبة ٢ × ٢) هو $\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{أد - بج} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{pmatrix}$

من المهم أن نتبيّن أن الكسر في بداية صيغة معكوس المصفوفة هو مقلوب المحدد. وذلك يعني أن المصفوفة التي محددها يساوي صفرًا (مصفوفة منفردة) لا معكوس لها؛ لأنه يكون لدينا $\frac{1}{٠}$ (لهذا السبب تمّ التركيز على المحدد في الدرس ٦-٢).

يمكن اعتماد عمليات الصف (وليس عمليات العمود) على المصفوفة المعززة. الأمر الذي يعني أننا نستطيع أن نقوم بتبديل مواقع صفَّين في المصفوفة، أو أن نضرب كل عناصر صف ما بعدد، أو أن نستبدل صفًا معيّنًا بصف ناتج من جمعه أو طرحه من صف آخر.

أفكار للتعليم

من المفيد أن تبدأ بالإشارة إلى المجالات ذات الصلة بالرياضيات والأكثر قربًا إلى أذهان الطلبة.

رأينا في الدرس ٦-١ أنه لا يمكن قسمة مصفوفة على أخرى، غير أننا نستطيع أن نجد معكوسًا لمصفوفة غير منفردة.

عندما نجري عملية الضرب المعتادة، نتحدث عن معكوس العدد، مثلًا عندما نضرب العدد ٤ في العدد ٤^{-1}، نحصل على العدد ١ (العنصر المحايد لعملية الضرب، أي أن ضرب أيّ عدد فيه لا يغيّر شيئًا). وكذلك بالنسبة إلى المصفوفات، فمعكوس المصفوفة $\underline{أ}$ تكتب $\underline{أ}^{-1}$ (إنها تعني فقط معكوس المصفوفة بالمعنى المعروف، ولا علاقة لها بمفهوم المعكوس في عالم الأعداد). فعندما نضرب المصفوفتَين ($\underline{أ}$، $\underline{أ}^{-1}$)إحداهما في الأخرى بأي ترتيب (في أيّ اتجاه)، نحصل على المصفوفة المحايدة.

∴ بحسب التعريف، $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-1} = \underline{أ}^{-1} \times \underline{أ} = \underline{م}$

اسأل الطلبة عمّا يمكن أن نحصل عليه عندما نحاول إيجاد معكوس مصفوفة ما. من الممكن أن يفكر الطلبة أنه لا يمكننا إيجاد معكوس للعدد صفر في عملية الضرب (لا يمكن إيجاد ٠^{-1})، فمن الممكن أن يكون الأمر على هذا النحو في المصفوفات. كذلك، فبإمكاننا في المصفوفة المربعة ضرب المصفوفة في عكسها من الجهتَين.

هناك طرائق متعددة لإيجاد معكوس المصفوفة، بعض تلك الطرائق يعتمد القواعد الجبرية.

إذا كان $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$، يمكننا أن نكتب $\underline{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$.

لإيجاد عناصر $\underline{أ}^{-1}$، يكفي أن نكتب $\underline{أ}^{-1} \times \underline{أ} = \underline{م}$ ونحل نظام المعادلات الناتج.

مشكلة هذه الطرائق أنها في العادة طويلة، وتشكّل بعض الصعوبة، لذلك لجأنا في كتاب الطالب إلى اعتماد المصفوفة المعززة الناتجة من وضع $\underline{أ}$ على جهة اليمين والمحايدة إلى اليسار، ثم البدء بمعالجة هذه المصفوفة المعززة عن طريق عمليات الصف حتى نصل إلى المصفوفة المحايدة على جهة اليمين.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} ٠ & ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & ٤ & ٣ \end{array}\right)$$

ص$_٢$ ← ص$_٢$ − ٣ص$_١$ هي عملية على الصف الثاني. فهي تعني أن نقوم بطرح ٣ص$_١$ من ص$_٢$ ثم نضع الناتج في مكان ص$_٢$.

٣ص$_١$ يعطينا ٣ ٦ | ٣ ٠

ص$_٢$ − ٣ × ص$_١$ يعطينا ٠ −٢ | −٣ ١

عندما نضع ذلك في الصف ٢ نحصل على: $\left(\begin{array}{cc|cc} ٠ & ١ & ٢ & ١ \\ ١ & -٣ & -٢ & ٠ \end{array}\right)$

لماذا اخترنا أن نقوم بذلك؟ لأنه ببساطة يعطينا العدد «صفر» في أسفل يمين المصفوفة، وهو ما يقرّبنا خطوة من المصفوفة المحايدة.

قم بقسمة الصف الثاني على −٢ لتحصل على العدد ١ في المكان الثاني للصف الثاني (وهو ما سيقرّبنا أكثر فأكثر من المصفوفة المحايدة).

اسأل الطلبة أن يقوموا بذلك كعملية صفِّية: ص$_٢$ ← ص$_٢$ ÷ (−٢)

لدينا الآن: $\left(\begin{array}{cc|cc} ٠ & ١ & ٢ & ١ \\ -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} & ١ & ٠ \end{array}\right)$

بعد أن أصبح الصف الثاني مشابهًا لما نريده (الصف الأسفل للمحايدة)، نعود إلى الصف الأول للقيام بالعمل ذاته.

ص$_١$ ← ص$_١$ − ٢ص$_٢$ يعطينا

$$\left(\begin{array}{cc|cc} ١ & -٢ & ٠ & ١ \\ -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} & ١ & ٠ \end{array}\right)$$

هكذا يصبح الجزء الأيمن من المصفوفة المعززة مطابقًا للمصفوفة المحايدة. الجزء الأيسر هو معكوس المصفوفة أ.

∴ أ$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \end{pmatrix}$

غالبًا ما نقوم بوضع الكسر كعامل مشترك خارج المصفوفة لنعطيها الشكل الأمثل (عناصر المصفوفة أعداد صحيحة). نكتب مثلًا: أ$^{-١}$ = $-\frac{١}{٢}$ $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$

يمكنك الإشارة هنا إلى أن محدد المصفوفة الأصلية هو −٢ وأن صيغة معكوس المصفوفة تبدأ بالكسر $-\frac{١}{٢}$. هل يستطيع الطلبة أن يلاحظوا كيف تغيرت الأعداد في المصفوفة الأصلية لتشكيل معكوس المصفوفة؟

من المفيد أن يكرر الطلبة هذا العمل على مصفوفات أخرى من رتبة ٢ × ٢، وذلك لتهيئة أنفسهم للمصفوفات من الرتبة ٣ × ٣.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٣

الفكرة من المصفوفة المعززة هي جعل المصفوفة والمصفوفة المحايدة يتغيران معًا – صفيًا – بطريقة واحدة. بإمكاننا أن نتبيّن أن عمليات الصف توصل إلى إيجاد معكوس المصفوفة.

استكشف ٤

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\text{ ، } \underline{\text{ب}}^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\text{ ، } \underline{\text{ج}}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 51 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -100 & -12 \\ 50 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-1} = \frac{1}{-39 - (-459)}\begin{pmatrix} 13 & 9 \\ -51 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{420}\begin{pmatrix} 31 & 9 \\ -51 & -3 \end{pmatrix}$$ ملاحظة: المصفوفة أعلاه مربعة.

$$(\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}})^{-1} = \frac{1}{-180 - (-600)}\begin{pmatrix} 18 & 12 \\ -50 & -10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{420}\begin{pmatrix} 18 & 12 \\ -50 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}}^{-1} \times \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{ج}}^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{420}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{420}\begin{pmatrix} 13 & 9 \\ -51 & -3 \end{pmatrix}$$ هذا يساوي $(\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-1}$

$$\underline{\text{ج}}^{-1} \times \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{ب}}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{420}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -15 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{420}\begin{pmatrix} 18 & 12 \\ -50 & -10 \end{pmatrix}$$ هذا يساوي $(\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}})^{-1}$

علينا أن نعكس ترتيب المصفوفات الثلاث. لدينا ∴ $(\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-1} = \underline{\text{ب}}^{-1} \times \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{ج}}^{-1}$ ، $(\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}})^{-1} = \underline{\text{ج}}^{-1} \times \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{ب}}^{-1}$

يرتبط ذلك بالدرس ٦-١ حيث رأينا كيف يمكن أن نضع أقواسًا في عمليات ضرب المصفوفات من دون أن يؤثر ذلك على الإجابة النهائية. معكوس المصفوفة لـ $\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$ هي $(\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-1}$ ونعلم أن $(\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}) \times (\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-1} = \underline{\text{م}}$، لكننا نستطيع أن نكتب أيضًا $\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} \times (\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-1} = \underline{\text{م}}$

كذلك يمكن أن نكتب $(\underline{\text{ج}} \times (\underline{\text{أ}} \times (\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ب}}^{-1}) \times \underline{\text{أ}}^{-1}) \times \underline{\text{ج}}^{-1}) = \underline{\text{م}}$

مما يعني أن $(\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-1} = \underline{\text{ب}}^{-1} \times \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{ج}}^{-1}$

لنقم بدلًا من ذلك بكتابة $(\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-1} = ((\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}}) \times \underline{\text{ب}})^{-1}$. نحن نعلم أن $(\underline{\text{د}} \times \underline{\text{هـ}})^{-1} = \underline{\text{هـ}}^{-1} \times \underline{\text{د}}^{-1}$

نكتب $((\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}}) \times \underline{\text{ب}})^{-1} = \underline{\text{ب}}^{-1} \times (\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}})^{-1}$ و $(\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}})^{-1} = \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{ج}}^{-1}$

$\therefore (\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-1} = \underline{\text{ب}}^{-1} \times \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{ج}}^{-1}$

دعم الطلبة

على غرار الدروس السابقة، من المفيد أن يعطى الطلبة في هذا الدرس المزيد من التدرب، وكذلك الربط بين ما يتعلمونه الآن وما تدربوا عليه سابقًا.

تحدّي الطلبة

قد يتمكن بعض الطلبة من إيجاد قاعدة معكوس المصفوفة ٢ × ٢ باستعمال القواعد الجبرية. (وقد يستصعبون إيجاد معكوس المصفوفة من الرتبة ٣ × ٣).

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦–٣

٦-٤ استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات

ملاحظات للمعلمين

نستعمل في هذا الدرس المصفوفة المعززة (التي تعرّف عليها الطلبة في الدرس ٦-٣) لحل نظام المعادلات. كما في الدروس السابقة، هنا أيضًا يمكننا الاستفادة من مواضيع وطرائق تعلّمها الطلبة سابقًا.

أفكار للتعليم

يمكنك أن تبدأ بالتذكير بالطرائق الثلاث لحل نظام من معادلتَين بمجهولَين.

- الحذف (عندما يكون معامل س هو نفسه في كلتا المعادلتَين فنقوم بالطرح للتخلّص من س).
- التعويض (عندما نعتمد مجهولًا معيّنًا ونجد قيمته بدلالة المجهول الثاني من المعادلة الأولى، ثم نعوض هذا المجهول في المعادلة الثانية).
- بيانيًا (عندما نرسم المستقيمَين اللذَين يمثلان المعادلتَين، ثم نجد إحداثيات نقطة التقاطع بينهما).

سوف نستعمل هذه الطرائق الثلاث في هذا الدرس.

تمّ إعطاء هذا المثال في كتاب الطالب:

٢س − ص + ٣ع = ٤

ليكن نظام المعادلات الآتي: ٣س + ٢ص + ٨ع = ١٣ نريد حلّه بإيجاد قيم س، ص، ع

٤س + ٢ص + ١١ع = ١٦

اكتب النظام على الصورة: $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٨ \\ ٤ & ٢ & ١١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ١٣ \\ ١٦ \end{pmatrix}$

تأكد ممّا إذا كان الطلبة يفهمون كيفية الربط بين المعادلة بالمصفوفات مع المعادلة الأصلية (اطلب إليهم إجراء عملية ضرب المصفوفات). سوف نقوم بتحويل المعادلة إلى مصفوفة معززة (كما في الدرس السابق)، ثم نقوم بإجراء عمليات الصف لتحويلها إلى مصفوفة أبسط.

جاء في كتاب الطالب:

يوجد طريقة جيدة لحل هذا النظام باستخدام أسلوب تبسيط الصف.

بالنسبة إلى المصفوفة المعززة $\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٨ & ١٣ \\ ٤ & ٢ & ١١ & ١٦ \end{array}\right)$، فإننا نحصل من العملية $ص_{٣} \leftarrow ص_{٣} - ٢ص_{١}$

على $\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٨ & ١٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ & ٨ \end{array}\right)$

ومن العملية $ص_{٢} \leftarrow ٢ص_{٢} - ٣ص_{١}$ نحصل على $\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٧ & ١٤ \\ ٠ & ٤ & ٥ & ٨ \end{array}\right)$

ومن العملية $ص_{٣} \leftarrow ٧ص_{٣} - ٤ص_{٢}$ نحصل على $\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٧ & ١٤ \\ ٠ & ٠ & ٧ & ٠ \end{array}\right)$

بإمكانك أن تشير إلى أن الطريقة هي عينها التي تعتمد على ضرب إحدى المعادلات في عدد معيّن، ثم جمعه مع معادلة أخرى أو طرحه منها من أجل التخلص من بعض المجهولات. عمليات الصف هي طريقة أبسط وأسهل من متابعة كل الخطوات المطلوبة للوصول إلى الحل.

∴ قمنا حتى الآن بحل نظام المعادلات باستخدام طريقة الحذف. يكفي أن نحل بالتعويض لإيجاد الحل النهائي.

٢س − ص + ٣ع = ٤

٧ص + ٧ع = ١٤

٧ع = ٠

∴ ع = ٠، ص = ٢، س = ٣

للنظام حل واحد هو (٣ ، ٢ ، ٠)

نجد أولًا قيمة ع ثم نعوضها لنجد قيمة ص ثم نعوضها لنجد قيمة س.

من غير المحتمل أن تستعمل الطريقة البيانية في حل بعض المعادلات المحددة، ولكنها تساعد على فهم الحالات التي يكون فيها لدينا عدد مختلف من الحلول، ويمكن للطلبة أن يتخيّلوا مستقيمَين في مستوى إحداثي، وقد تعلموا في وقت سابق أن إحداثيات نقطة التقاطع هي حل النظام المشتمل على معادلتَي المستقيمَين.

ما الذي يمكن أن يحدث؟ إذا تقاطع المستقيمان في نقطة، يكون هناك حل واحد لنظام المعادلتَين. إذا كان المستقيمان متطابقَين، فإن كل نقطة على المستقيم تمثل حلًا للنظام. أمّا إذا كان المستقيمان متوازيَين، فلن يكون هناك نقاط التقاء، وبالتالي لن يكون هناك حل للنظام.

هذه هي السيناريوهات المتوقعة لكل أنظمة المعادلات.

دعم الطلبة

من المفيد للطلبة الذين يجدون صعوبة في هذا الدرس أن تبدأ معهم بالأنظمة ذات المعادلتَين والمجهولَين، ثم الانتقال إلى أنظمة الثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل.

تحدي الطلبة

من أجل تدريب بعض الطلبة أكثر، يمكن الطلب إليهم القيام بحل أنظمة عن طريق المصفوفات وبالطرائق الجبرية، ثم مقارنة خصائص كل طريقة وشرح مراحلها. الأسئلة ٤، ٥، ٦، ٧ من تمارين ٦−٤ تشكّل تحديًا للطلبة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦−٤

شرائح عرض توضيحي (PPT) المصفوفات

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

الوحدة السادسة: المصفوفات

العرض التوضيحي ٦

https://ict.moe.gov.om/library/file/Content/11/Math/OMN_ADV_Math_G11_s1_TR_PPT_Unit6_MOE_1_1_23/index.pdf

اختصار الرابط

https://qrs.ly/akef8cw

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

العمليات على المصفوفات

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢- & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٢- & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد ناتج كل مما يأتي:

أ $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}$

ب $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$

ج $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

أ لإيجاد ناتج $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}$، اجمع العناصر المتناظرة:

$$\begin{pmatrix} (٢-) + ١ & ٤ + ٣ \\ ١ + ٢- & ٣ + ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢- & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢- & ٥ \end{pmatrix}$$

نبسّط الناتج لتصبح الإجابة $\begin{pmatrix} ١- & ٧ \\ ١- & ٨ \end{pmatrix}$

العمليات على المصفوفات

إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

فأوجد ناتج كل مما يأتي:

- **أ** أ + ب
- **ب** أ − ب
- **ج** أ × ب

ب أولاً: نختبر شرط إمكانية ضرب المصفوفات لإيجاد ناتج أ − ب، اطرح العناصر المتناظرة:

$$\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ - ٤ & ١ - (-٢) \\ ٥ - ٣ & -٢ - ١ \end{pmatrix}$$

نبسّط الناتج لتصبح الإجابة $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

العمليات على المصفوفات

إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

فأوجد ناتج كل مما يأتي:

أ $\underline{أ} + \underline{ب}$

ب $\underline{أ} - \underline{ب}$

ج $\underline{أ} \times \underline{ب}$

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

ج أولاً: نختبر شرط إمكانية ضرب المصفوفات لإيجاد $\underline{أ} \times \underline{ب}$، اضرب عناصر الصف الأول في عناصر العمود الأول، ثم أوجِد مجموع ناتجَي الضرب. كرّر العملية للصفَّين والعمودَين الآخرَين:

$$\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

اضرب ٣ في ٤ ثم ١ في ٣. اجمع ناتجَي الضرب. العدد في أعلى يمين مصفوفة الإجابة هو ٣ × ٤ + ١ × ٣، والذي يساوي ١٥

لإيجاد العدد في أعلى يسار مصفوفة الإِجابة،
اضرب ٣ في -٢ ثم ١ في ١. اجمع ناتجَي الضرب.

$$\begin{pmatrix} & ١٥ \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢- & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢- & ٥ \end{pmatrix}$$

العدد في أعلى يسار مصفوفة الإجابة هو
٣ × (-٢) + ١ × ١، والذي يساوي -٥

كرّر هذه العملية للصف الأدنى من المصفوفة الأولى.

$$\begin{pmatrix} ٥- & ١٥ \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢- & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢- & ٥ \end{pmatrix}$$

العدد في أسفل يمين مصفوفة الإجابة هو
٥ × ٤ + (-٢) × ٣، والذي يساوي ١٤

هل بإمكانك توقع العدد في أدنى اليسار؟

كرّر هذه العملية للصف الأدنى من المصفوفة الأولى.

$$\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥ & -٥ \\ ١٤ & \boxed{} \end{pmatrix}$$

العدد في أدنى يسار مصفوفة الإجابة هو

٥ × (−٢) + (−٢) × ١، والذي يساوي −١٢

الرياضيّات المتقدمة للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الأول: دليل المعلم

∴ الإجابة هي:

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥ & -٥ \\ ١٤ & -١٢ \end{pmatrix}$$

إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة السادسة: المصفوفات

تمارين ٦-١

١) أ ٢ × ٤، ٣ × ٣، ٣ × ١

ب قيم $أ_{٢٢}$ = ١١، $ب_{١٢}$ = ٦، $ج_{٢١}$ = −١٢

ج $\begin{pmatrix} -٢٨ \\ ٤٨ \\ -١٦ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٠ & ٦ & -١٤ & -١٠ \\ -١٢ & -٢٢ & -١٦ & ٤ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٣٦ & ١ & -٣ \\ ٣٦ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

٢) أ $\begin{pmatrix} ١٢ \\ ٢٠ \end{pmatrix}$

ب لا يمكن إجراء عملية الضرب

ج $\begin{pmatrix} ٣٨ & ٢١ \end{pmatrix}$

د لا يمكن إجراء عملية الضرب

٣) أ س = ٢، ص = −٥,٥

ب س = −٩، ص = ٨

٤) برهان

٥) أ $\begin{pmatrix} ٠ & ٨١ \\ -٥ & ١٦ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٢٨ & ٢٤ \\ ١٨ & ٤ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٣٩٩ & ٣٠٢ \\ ٧٩ & ٥٧ \end{pmatrix}$

٦) أ $\begin{pmatrix} -٥٨ & -١٠٠ & ٢ \\ ٦ & -٤٤ & ٦ \\ -١١ & -٣٠ & ٣ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٦ & ٩ & -٢٥ \\ -٢ & -٢١ & ١٢ \\ ٨ & -٩ & -٣ \end{pmatrix}$

٧) أ $\begin{pmatrix} -٢٠ & ٩ & ١٧ \\ ٢٦ & ١٨ & ٠ \\ -١٠ & -٢٥ & ٢٣ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} -١٠٨ & -١٣٠ & ١١٤ \\ -١٧٤ & -٣٩ & ١٣٥ \\ ٢٥٠ & ٢٨١ & -٢٤٩ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} -٢٧٠ & ٣٩٥ & ٣٧ \\ ٣٦٠ & -٣٨٨ & -٤٤ \\ -٩٥٦ & ٦٠٩ & ١٠٥ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} -١٥٧ & ١٣٩ & ٢٠ \\ ١٧٧ & ٢١٦ & -٩ \\ ٢٩٠ & -٣٠١ & -٣٥ \end{pmatrix}$

٨) برهان

٩) $\begin{pmatrix} ١٨ & ٩ & ٠ \\ ١٢ & ١٧ & ١٢ \\ ٤٨ & ٢٣١ & ١٧٢ \end{pmatrix}$

١٠) أ $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٤ \\ -١ & ٠ & -٣ \\ ١ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $أ^{٣} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٨ \\ -١ & ٠ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

ب $أ^{ن} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢^{ن} \\ -١ & ٠ & ١-٢^{ن} \\ ١ & ٠ & ٢^{ن}-١ \end{pmatrix}$

تمارين ٦-٢

١) أ غير منفردة

ب منفردة

ج غير منفردة

٢) −١، ٤

٣) برهان

٤) أ برهان ب برهان

٥) أ −١٢

ب ٠

ج −٩٦

٦) $أ = \frac{١}{٢}$

٧) ٣٠

تمارين ٦-٣

١) أ $\frac{١}{٩}\begin{pmatrix} -٥ & -٧ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ب $\frac{١}{٥٢}\begin{pmatrix} ١٢ & -٢ \\ ٨ & ٣ \end{pmatrix}$

ج $\frac{١}{٣١}\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ د $\frac{١}{٢٤}\begin{pmatrix} -١١ & ٣ \\ ٨ & ٠ \end{pmatrix}$

٢) أ $\frac{١٥}{٢}$ ب $\begin{pmatrix} ٧٩ & -٣٠ \\ -٥٠ & ١٩ \end{pmatrix}$

٣) $\frac{١}{١٥}\begin{pmatrix} -٨ & ٧ \\ ٩ & -٦ \end{pmatrix}$

٤) $\frac{١}{١٨}\begin{pmatrix} ٧ & -٨ & ١١ \\ ١ & ٤ & -١ \\ -٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

٥) أ $\text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٧ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٢ \end{pmatrix}$ ب برهان ج برهان

٦) أ $\text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$، $\text{أ}^{٣} = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ & ٨ \\ ٨ & ٨ & ١٦ \\ ٦ & ٤ & ٨ \end{pmatrix}$

ب ك = ٣

ج $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & -٢ \\ -٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & -١ & ١ \end{pmatrix}$

٧) $\frac{١}{٢٠}\begin{pmatrix} -٨ & -٨ & -٢ \\ ٨ & -٢ & -٣ \\ ٤ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}$

تمارين ٦-٤

١) أ لا حلول له

ب حل وحيد: س = $\frac{١١}{٥}$، ص = $-\frac{٢}{٥}$

ج عدد لانهائي من الحلول

٢) أ ج = $-\frac{٤}{٣}$، د ≠ ٤,٥

ب ج = $-\frac{٤}{٣}$، د = ٤,٥

ج ج ≠ $-\frac{٤}{٣}$، د ∈ ع

٣) أ لا حلول له ج

ب حل وحيد: س = $\frac{٧}{٢٤}$، ص = $\frac{١}{٤}$، ع = $\frac{١}{٦}$

ج عدد لانهائي من الحلول

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{٧}{٣} \\ \frac{٢}{٣} \\ ٠ \end{pmatrix} + \text{ز}\begin{pmatrix} ١٣ \\ -٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

٤) ك = ٧

٥) س = $\frac{٥}{٣}$، ص = $-\frac{١}{٣}$، ع = ٠

٦) ز $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$

٧) أ حل وحيد

ب لا حلول له

ج عدد لانهائي من الحلول

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) أ $\underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} -١٢٤ & -١٢٢ \\ -٣٦ & -٣٦ \end{pmatrix}$

ب $\underline{\text{ك}} = \frac{١}{١٦}\begin{pmatrix} -٧ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$

٢) أ أ = -١

ب $\underline{\text{ب}}^{-١} = \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ١٦ & -١٦ & -٦ \\ ١ & ٤ & -١ \\ -٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$

٣) أ غير منفردة ب منفردة

٤) س = ٥، م = ٢٤، ن = ١

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة السادسة: المصفوفات

تمارين ٦-١

١) أ = −٢، ب = ٤٫٥، ج = −٥

٢) أ $\begin{pmatrix} ١٣ & ١ \\ -٧ & ٨ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٢٤ & -١٢ \\ ٨ & ٠ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ١٦ & -٢٦ \\ ٣٠ & -٢٢ \end{pmatrix}$

٣) $\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ي}} = \begin{pmatrix} ١٢ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ي}} \times \underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} ١١ & -٢ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$،

$\therefore \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ي}} \neq \underline{\text{ي}} \times \underline{\text{ج}}$

٤) أ $\begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٠ \\ -٢ & -١٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٠ & -٤ & -١ \\ -١١ & -٢ & ٠ \\ -٢ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٧ & ٨ & ٠ \\ -١٤ & -١٢ & -٤ \\ ٣ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

٥) ١) ٣٢ × ٢٫٣ × ٢٫٣

٢) أ يمكن حسابه، ورتبتها ٢ × ٢

ب حسابها غير ممكن

ج يمكن حسابه، ورتبتها ٣ × ٣

د حسابها غير ممكن

هـ يمكن حسابه، ورتبتها ٣ × ٢

و حسابها غير ممكن

٦) أ $\begin{pmatrix} ١ & ٩ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ١ & -٦ & ١٢ \\ -٢ & ١ & -٢ \\ ٣ & -١٨ & ٢٥ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ١ & ٣ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$

٧) $\underline{\text{هـ}} \times \underline{\text{ن}} = \begin{pmatrix} \text{ب} + ١٢ & ٦ + ٣\text{أ} \\ ٢\text{ب} + ٨ & ١٢ + ٢\text{أ} \end{pmatrix}$،

$\underline{\text{ن}} \times \underline{\text{هـ}} = \begin{pmatrix} \text{ب} + ١٢ & ٣\text{ب} + ١٢ \\ ٤ + ٢\text{أ} & ١٢ + ٢\text{أ} \end{pmatrix}$

العنصران الموجودان في أعلى يمين المصفوفة متساويان، كما العنصران في أسفل يسار المصفوفة.

يعطينا العنصران في أعلى اليسار ٦ + ٣أ = ٣ب + ١٢

∴ أ = ب + ٢

يعطينا العنصران في أسفل اليمين

٢ب + ٨ = ٤ + ٢أ ∴ أ = ب + ٢

٨) أ $\underline{\text{أ}}^{٢} = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

ب $\underline{\text{أ}}^{٣} = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$

ج $\underline{\text{أ}}^{\text{ن}} = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{\text{ن}-١} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -\text{ن} & ١ \end{pmatrix}$

٩) $\underline{\text{ك}} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} = ٤ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = ٤\underline{\text{م}}$

$\underline{\text{أ}} \times ٤\underline{\text{م}} = ٤\underline{\text{م}} \times \underline{\text{أ}} \therefore \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ك}} = \underline{\text{ك}} \times \underline{\text{أ}}$

حل آخر:

نفرض أن: $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{pmatrix}$

$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ك}} = \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤\text{ب} + ٠ & ٠ + ٤\text{جـ} \\ ٤\text{د} + ٠ & ٠ + ٤\text{هـ} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤\text{ب} & ٤\text{جـ} \\ ٤\text{د} & ٤\text{هـ} \end{pmatrix} = ٤ \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{pmatrix} = ٤\underline{\text{أ}}$ ...... (١)

$\underline{\text{ك}} \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤\text{ب} + ٠ & ٤\text{جـ} + ٠ \\ ٠ + ٤\text{د} & ٠ + ٤\text{هـ} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤\text{ب} & ٤\text{جـ} \\ ٤\text{د} & ٤\text{هـ} \end{pmatrix} = ٤ \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{pmatrix} = ٤\underline{\text{أ}}$ ..... (٢)

من (١)، (٢): $\therefore \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ك}} = \underline{\text{ك}} \times \underline{\text{أ}}$

تمارين ٦-٢

١) |أ × ب| = ٨، |أ| = ٢، |ب| = ٤

٢) أ غير منفردة   ب منفردة

ج غير منفردة   د منفردة

هـ منفردة

٣) أ ٠   ب ١   ج ٠

٤) أ س = ٤ أو س = −٤

ب نحصل على $ص^٢$ − ٣س + ١٠ = ٠، والتي ليس لها حل (لأن المميز < صفر) ∴ لا توجد قيم ممكنة لـ ص.

ج ع = ٠

د أ = −٤

٥) المحدد يساوي $س^٢$ + ٢، والتي لا يمكن أن تساوي الصفر (لأن المميز < صفر).

٦) |أ| = ٥ و |ب| = ١، ∴ |أ × ب| = ٥ × ١ = ٥

٧) $$\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & ٢ \\ \text{س} & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & \text{س} \end{vmatrix} - ٠ \begin{vmatrix} \text{س} & ١ \\ ٣ & \text{س} \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = \text{س} \times (٢\text{س} - ١) - ٠ + ٢ \times (\text{س} - ٦)$$

$$= ٢\text{س}^٢ - \text{س} + ٢\text{س} - ١٢ = ٢\text{س}^٢ + \text{س} - ١٢$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٥ \\ ٠ & -٣ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} - ٠ \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ٠ & -٣ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ١ \times (-٦ - ٠) - ٠ + ٥ \times ٠ = -٦$$

∵ $٢س^٢$ + س − ١٢ = −٦

$٢س^٢$ + س − ٦ = ٠

س = −٢ أو س = $\frac{٣}{٢}$

٨) إذا كانت ثلاث من المدخلات موجبة ومدخل واحد سالبًا، يكون إما أ × د موجبًا، ب × ج سالبًا، فيكون ناتج أ × د − ب × ج موجبًا، أو يكون أ × د سالبًا، ب × ج موجبًا، فيكون في هذه الحالة ناتج أ × د − ب × ج سالبًا. فلا يمكن أن يكون صفرًا في أيّ من الحالَين.

∴ لا يمكن أن تكون المصفوفة منفردة.

تمارين ٦-٣

١) أ $\frac{١}{١٨}\begin{pmatrix} ٧ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٤ & -٥ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ د $\frac{١}{٢٠}\begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$

٢) أ $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ب $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٥ & ٤ \end{pmatrix}$

ج $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١٩ & -١٤ \\ -٣٥ & ٢٦ \end{pmatrix}$ د $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١٩ & -١٤ \\ -٣٥ & ٢٦ \end{pmatrix}$

٣) $\frac{٥}{٢}\begin{pmatrix} ٦ & -٧ \\ -٤ & ٥ \end{pmatrix}$

٤) أ $\frac{١}{٧}\begin{pmatrix} -١ & -٢ & ٢ \\ -٥ & ٤ & ٣ \\ ٤ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ ب $\frac{١}{٦}\begin{pmatrix} -٢ & ٢ & ٤ \\ ٦ & ٣ & -٦ \\ ٠ & -٣ & ٠ \end{pmatrix}$

٥) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٦ & ٩ \end{pmatrix}$

٦) أ $\frac{١}{١٦}\begin{pmatrix} -١٢ & ١ \\ ٢٠ & -٣ \end{pmatrix}$

ب $\frac{١}{١٦}\begin{pmatrix} -١٧ & -٥ \\ ١٠ & ٢ \end{pmatrix}$

ج $\frac{١}{١٦}\begin{pmatrix} -١٢ & ١ \\ ٢٠ & -٣ \end{pmatrix}$

تمارين ٦-٤

١) أ س = $\frac{١١}{١٩}$ و ص = $\frac{١٢}{١٩}$

ب عدد لانهائي من الحلول

ج لا حلول له

٢) أ أ ≠ −٤، ب ∈ ع

ب أ = −٤، ب = ١٤

ج أ = −٤، ب ≠ ١٤

٣) أ ج ≠ $-\frac{١}{٢}$، د ∈ ع

ب ج = $-\frac{١}{٢}$، د = −٢

ج ج = $-\frac{١}{٢}$، د ≠ −٢

٤) أ س = $-\frac{٢}{١٣}$، ص = $\frac{٢٢}{١٣}$، ع = $\frac{١٩}{١٣}$

ب س = −١، ص = $-\frac{٨}{٣}$، ع = $-\frac{١٣}{٣}$

ج س = $-\frac{٢١}{١٧}$، ص = $\frac{١١}{١٧}$، ع = $\frac{٣٩}{١٧}$

٥) (١، ١، −١)

٦) أ س = −١، ص = −٤، ع = ٥

ب س = ٧، ص = ١٦، ع = −١٩

ج س = $\frac{٥}{٣}$، ص = $\frac{٨}{٣}$، ع = −٣

د س = $\frac{١٣}{١١}$، ص = $\frac{١٦}{١١}$، ع = $-\frac{١٧}{١١}$

٧) أ = $\frac{١٥}{٨}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) أ $\begin{pmatrix} ٠ & ٦ & ٧ \\ -٥ & ١٠ & ٥ \\ ٥ & ٣ & ١١ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} -١ & ١ & ٤ \\ ٤ & -٦ & ٣ \\ -٤ & ٨ & ٨ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ & -٥ \\ ٤ & -٢ & ٠ \\ ٥ & ٧ & -١٠ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٥ & -٨ & -١ \\ ٢ & -٦ & -٢ \end{pmatrix}$

٢) أ ١١ ب ٠ ج −١٦

٣) أ س = ٤

ب ص = −١

ج ع = ٠ أو ع = ٤

٤) أ $\frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ -٦ & ٣ \end{pmatrix}$ ب $\frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ -٦ & ٣ \end{pmatrix}$

ج $\frac{١}{٩}\begin{pmatrix} ٣٧ & -١٦ \\ -٤٨ & ٢١ \end{pmatrix}$

٥) أ س = $\frac{٧}{٤}$، ص = $\frac{٣}{٤}$، ع = $-\frac{٩}{٤}$

الوحدة السادسة: حلول التمارين
المصفوفات Matrices

تمارين ٦-١

١) أ رتبة $\underline{أ}$ = ٢ × ٤

رتبة $\underline{ب}$ = ٣ × ٣

رتبة $\underline{ج}$ = ٣ × ١

ب قيم $أ_{٢٣}$ = ١١، $ب_{١٢}$ = ٦، $ج_{٢١}$ = −١٢

ج $$-٤\underline{ج} = -٤ \times \begin{pmatrix} ٧ \\ -١٢ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢٨ \\ ٤٨ \\ -١٦ \end{pmatrix}$$

$$-٢\underline{أ} = -٢ \begin{pmatrix} ٥ & ٧ & -٣ & ٠ \\ -٢ & ٨ & ١١ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٠ & -١٤ & ٦ & ٠ \\ ٤ & -١٦ & -٢٢ & -١٢ \end{pmatrix}$$

$$\frac{١}{٢}\underline{ب} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٤ & ٦ & ٢ \\ -٦ & ٢ & ٥٢ \\ ٦ & ٨ & ٧٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ -٣ & ١ & ٢٦ \\ ٣ & ٤ & ٣٦ \end{pmatrix}$$

٢) أ نعم، يساوي عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى عدد الصفوف في المصفوفة الثانية، ∴ يمكن ضربهما.

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \\ ٢٠ \end{pmatrix}$$

ب كلا، في المصفوفة الأولى عمود واحد بينما في المصفوفة الثانية صفان.

ج نعم، في المصفوفة الأولى ثلاثة أعمدة وفي المصفوفة الثانية ثلاثة صفوف.

$$\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ٠ \\ ٣ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & ٣٨ \end{pmatrix}$$

د كلا، في المصفوفة الأولى أربعة أعمدة بينما في المصفوفة الثانية صفان، لذا لا يمكن إجراء عملية الضرب.

٣) أ $\begin{pmatrix} -٦ & ٥ \\ س+١٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ص+٥ & ٥ \\ ١٤ & ٤ \end{pmatrix}$ المدخلات المتساوية مرتبطة بها، لذا

−٦ = ٢ ص + ٥ و ص = −٥٫٥

س + ١٢ = ١٤، ∴ س = ٢

ب $\begin{pmatrix} ٦ & س+٣ \\ -٤ & \frac{١}{٢}ص+٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & \frac{٢}{٣}س \\ -٤ & ص+١ \end{pmatrix}$

$\frac{٢}{٣}$س = س + ٣ فنحصل على $-\frac{١}{٣}$س = ٣، ∴ س = −٩

ص + ١ = $\frac{١}{٢}$ص + ٥ فنحصل على $\frac{١}{٢}$ص = ٤، ∴ ص = ٨

٤) $\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ -٩ & ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ٤ & ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٤ & ٧٤ \\ -١١ & ٩٣ \end{pmatrix}$

$\underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ٤ & ١٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ -٩ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥١ & ١ \\ -١٠٠ & ٧٦ \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{أ} \times \underline{ب} \neq \underline{ب} \times \underline{أ}$

٥) أ أولًا، $\underline{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٣ & ٥٦ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix}$

ثم، $٢\,\underline{أ} \times \underline{ب} = ٢ \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix} = ٢ \begin{pmatrix} ١٩ & -٢٨ \\ ٤ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ & -٥٦ \\ ٨ & -١٦ \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{أ}^{٢} + ٢\,\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{pmatrix} ٤٣ & ٥٦ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣٨ & -٥٦ \\ ٨ & -١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨١ & ٠ \\ ١٦ & -٥ \end{pmatrix}$

ب أولًا، $\underline{ب}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١٦ \end{pmatrix}$

ثم، $\underline{ب}^{٢} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٤ & ٢٨ \\ ٤ & ١٨ \end{pmatrix}$

ج أولًا، $\underline{أ}^{٣} = \underline{أ}^{٢}\,\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٤٣ & ٥٦ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣١٤ & ٤١٣ \\ ٥٩ & ٧٨ \end{pmatrix}$

ثم $\underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ١٤ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{أ}^{٣} - \underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣١٤ & ٤١٣ \\ ٥٩ & ٧٨ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٢ & ١٤ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٠٢ & ٣٩٩ \\ ٥٧ & ٧٩ \end{pmatrix}$

٦) أ أولًا، ب^{٢} = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١٠ & -١ \\ ٠ & ١٦ & ١٢ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$

ثم أ × ب^{٢} = $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ ٦ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & -١٠ & -١ \\ ٠ & ١٦ & ١٢ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & -١٠٠ & -٥٨ \\ ٦ & -٤٤ & ٦ \\ ٣ & -٣٠ & -١١ \end{pmatrix}$

> كان يمكننا حساب أ × ب أولًا، بما أن (أ × ب) ب = أ (ب × ب)

ب ليكن أ^{٢} − أ × ب = أ × (أ − ب)

$= \begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ ٦ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ ٦ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} \right]$

∴ أ^{٢} − أ × ب = $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ ٦ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & -٣ & ٠ \\ ٦ & -٣ & -٢ \\ ٣ & ٠ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢٥ & ٩ & ٦ \\ ١٢ & -٢١ & -٢ \\ -٣ & -٩ & ٨ \end{pmatrix}$

> يمكننا القيام بهذا لأن أ × ب + أ × ج = أ (ب + ج)

٢٨٥

٧) أ أولًا، ٢أ + ٥ب = ٢ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ٩ & ٣ \\ -١ & -٥ & ١٠ \end{pmatrix}$ + ٥ $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٥ & -٣ & -٦ \end{pmatrix}$

نجمعهما فنحصل على:

$\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & -١٠ \\ ٠ & ١٨ & ٦ \\ -٢ & -١٠ & ٢٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٥ & ٥ & -١٠ \\ ٠ & ٠ & ٢٠ \\ ٢٥ & -١٥ & -٣٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٧ & ٩ & -٢٠ \\ ٠ & ١٨ & ٢٦ \\ ٢٣ & -٢٥ & -١٠ \end{pmatrix}$

ب ب^{٢} = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٥ & -٣ & -٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٥ & -٣ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٩ & ١٠ \\ ٢٠ & -١٢ & -٢٤ \\ -١٥ & ٢٣ & ١٤ \end{pmatrix}$

∴ أ × ب^{٢} = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ٩ & ٣ \\ -١ & -٥ & ١٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -١ & ٩ & ١٠ \\ ٢٠ & -١٢ & -٢٤ \\ -١٥ & ٢٣ & ١٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١٤ & -١٣٠ & -١٠٨ \\ ١٣٥ & -٣٩ & -١٧٤ \\ -٢٤٩ & ٢٨١ & ٢٥٠ \end{pmatrix}$

ج) $\text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ٩ & ٣ \\ -١ & -٥ & ١٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ٩ & ٣ \\ -١ & -٥ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٤٥ & -٤٩ \\ -٣ & ٦٦ & ٥٧ \\ -١١ & -٩٧ & ٩٠ \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}^{٢} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٥ & -٣ & -٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٤٥ & -٤٩ \\ -٣ & ٦٦ & ٥٧ \\ -١١ & -٩٧ & ٩٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٧ & ٣٩٥ & -٢٧٠ \\ -٤٤ & -٣٨٨ & ٣٦٠ \\ ١٠٥ & ٦٠٩ & -٩٥٦ \end{pmatrix}$

د) باستخدام نتيجة $\underline{\text{أ}}^{٢}$ من الفرع ج،

$٢\underline{\text{أ}} + ٣\underline{\text{أ}}^{٢} = ٢\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ٩ & ٣ \\ -١ & -٥ & ١٠ \end{pmatrix} + ٣\begin{pmatrix} ٦ & ٤٥ & -٤٩ \\ -٣ & ٦٦ & ٥٧ \\ -١١ & -٩٧ & ٩٠ \end{pmatrix}$

نضرب المصفوفتين في العدد القياسي الخاص بكل واحدة، ثم نجمع الحاصل:

$\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & -١٠ \\ ٠ & ١٨ & ٦ \\ -٢ & -١٠ & ٢٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٨ & ١٣٥ & -١٤٧ \\ -٩ & ١٩٨ & ١٧١ \\ -٣٣ & -٢٩١ & ٢٧٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٠ & ١٣٩ & -١٥٧ \\ -٩ & ٢١٦ & ١٧٧ \\ -٣٥ & -٣٠١ & ٢٩٠ \end{pmatrix}$

٨) أ) أولًا، $\underline{\text{أ}}^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

ثم $\underline{\text{أ}}^{٣} = \underline{\text{أ}}^{٢} \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

يمكن ملاحظة العنصر $\underline{\text{أ}}^{٢١} = -\text{ن}$ في $\underline{\text{أ}}^{\text{ن}}$

٩) نحسب $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{م}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{م}} \times \underline{\text{أ}}$ على شكل $(\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{م}}) \times (\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{م}}) \times \underline{\text{أ}}$ وهو ما يساوي $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}}$

لأن $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{ج}}$

نحسب أولًا $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} ٠ & -٣ & ٠ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥ & ٩ & -٣ \\ -٢ & ١ & ٧ \\ ١ & ٨ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ & -٢١ \\ ٤ & ١ & -٧ \\ ١٦ & ٣٥ & -٥ \end{pmatrix}$

$\therefore (\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}}) \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ & -٢١ \\ ٤ & ١ & -٧ \\ ١٦ & ٣٥ & -٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & ٦ & ٠ \\ ٠ & -١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٩ & ١٨ \\ ١٢ & ١٧ & ١٢ \\ ١٧٢ & ٢٣١ & ٤٨ \end{pmatrix}$

١٠) أ) أولًا، $\underline{\text{أ}}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ -٣ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

ثم $\underline{\text{أ}}^{٣} = \underline{\text{أ}}^{٢} \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ -٣ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٠ & ٠ \\ -٧ & ٠ & -١ \\ ٧ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

ب أولًا، $\underline{ا}^{٤} = \underline{ا}^{٣} \times \underline{ا} = \begin{pmatrix} ٨ & ٠ & ٠ \\ -٧ & ٠ & -١ \\ ٧ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٦ & ٠ & ٠ \\ -١٥ & ٠ & -١ \\ ١٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

لدينا أربع مصفوفات، الأمر الذي يسهّل علينا قليلًا رؤية النمط.

$$\underline{ا}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢^{٢} & ٠ & ٠ \\ ١-٢^{٢} & ٠ & -١ \\ ٢^{٢}-١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\underline{ا}^{٣} = \begin{pmatrix} ٢^{٣} & ٠ & ٠ \\ ١-٢^{٣} & ٠ & -١ \\ ٢^{٣}-١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\underline{ا}^{٤} = \begin{pmatrix} ٢^{٤} & ٠ & ٠ \\ ١-٢^{٤} & ٠ & -١ \\ ٢^{٤}-١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{ا}^{ن} = \begin{pmatrix} ٢^{ن} & ٠ & ٠ \\ ١-٢^{ن} & ٠ & -١ \\ ٢^{ن}-١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

يبدو لنا أن صيغة العنصر الأول في المصفوفة هي $٢^{ن}$. يقودنا ذلك إلى معرفة النمط الذي سيظهر في العناصر الأخرى من العمود الأول للمصفوفة $\underline{ا}^{ن}$.

تمارين ٦-٢

١) **أ** ليكن $\underline{ا} = \begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

$\Delta = ٥ \times ٢ - ٨ \times ٤ = -٢٢ \neq ٠$

$\therefore$ $\underline{ا}$ غير منفردة.

ب ليكن $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ -٦ & -١٤ \end{pmatrix}$

$\Delta = ٣ \times (-١٤) - (-٦) \times ٧ = ٠$

$\therefore$ $\underline{ب}$ منفردة.

ج ليكن $\underline{ج} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

$\Delta = ١ \times ٠ - (-١) \times ٤ = ٤ \neq ٠$

$\therefore$ $\underline{ج}$ غير منفردة.

٢) حتى تكون $\underline{ا}$ منفردة، وجب أن يكون $\Delta = ٠$.

نستنتج من صيغة $\underline{ا}$ أن:

$\Delta =$ س $\times$ (س $- ٣) - ٤ \times ١ =$ س$^{٢} - ٣$س $- ٤$

نحلل س$^{٢} - ٣$س $- ٤ = ٠$ إلى عوامل لنكتب

(س $- ٤$)(س $+ ١) = ٠$

$\therefore$ س $= -١$ أو س $= ٤$ هما بالضبط قيمتا س لتكون المصفوفة ا منفردة.

٣) أولًا، $\Delta =$ س $\times$ (س $+ ١) - (-٢) \times ٥ =$ س$^{٢} +$ س $+ ١٠$

نلاحظ بعد ذلك أن س^{٢} + س + ١٠ =

$\left(\text{س} + \frac{١}{٢}\right)^{٢} + ١٠ - \frac{١}{٤}$

$$\therefore |\underline{\text{ب}}| = \left(\text{س} + \frac{١}{٢}\right)^{٢} + \frac{٣٩}{٤}$$

∴ $|\underline{\text{ب}}| \geq \frac{٣٩}{٤}$ الأمر الذي يعني أن $|\underline{\text{ب}}| \neq ٠$ لأيّ قيمة للمتغير س.

٤) $|\underline{\text{أ}}| = ٣ \times ٥ - ١ \times ٤ = ١١$،

$$|\underline{\text{ب}}| = (-١) \times (-٣) - ٢ \times ٦ = -٩$$

$$\therefore \underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & -٦ \\ ٢٩ & -١٣ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \Delta(\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}}) = ٢١ \times (-١٣) - (-٦) \times ٢٩ = -٩٩$$

$$\therefore \Delta(\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}}) = \Delta(\underline{\text{أ}}) \times \Delta(\underline{\text{ب}})$$

$$\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٦ \\ ١٥ & ٩ \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}| = (-١) \times ٩ - ٦ \times ١٥ = -٩٩$$

$$\therefore |\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}| = |\underline{\text{أ}}| \times |\underline{\text{ب}}|$$

٥) أ ليكن $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٣ & ٥ \\ ٣ & ١ & ٤ \\ ٣ & -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

$$\therefore \Delta = ٣\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ -٥ & ٣ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} + ٥\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(٣ + ٢٠) - ٣(٩ - ١٢) + ٥(-١٥ - ٣) = -١٢$$

ب ليكن $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٧ \\ -٣ & ٠ & -١٣ \\ ٤ & ١١ & ٣٢ \end{pmatrix}$

$$\therefore \Delta = ١\begin{vmatrix} ٠ & -١٣ \\ ١١ & ٣٢ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} -٣ & -١٣ \\ ٤ & ٣٢ \end{vmatrix} + ٧\begin{vmatrix} -٣ & ٠ \\ ٤ & ١١ \end{vmatrix}$$

$$= ١٤٣ - ٢(-٩٦ + ٥٢) + ٧(-٣٣) = ٠$$

ج ليكن $\underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} ١ & ٨ & ٦ \\ ٠ & -٨ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ١٢ \end{pmatrix}$

$$\therefore \Delta = ١\begin{vmatrix} -٨ & ٤ \\ ٠ & ١٢ \end{vmatrix} - ٨\begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٠ & ١٢ \end{vmatrix} + ٦\begin{vmatrix} ٠ & -٨ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= -٩٦ - ٨(٠) + ٦(٠) = -٩٦$$

بما أن لهذه المصفوفة أصفارًا فقط أسفل قطر المصفوفة، يصح أيضًا أن نكتب $\Delta = ١ \times (-٨) \times ١٢ = -٩٦$، وهو ضرب العناصر الموجودة على الخط المائل.

٦) نهدف إلى إيجاد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & ٢\text{أ} \\ ٣\text{أ} & -\text{أ} & ٠ \\ ٤\text{أ} & ٢\text{أ} & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{أ}\begin{vmatrix} -\text{أ} & ٠ \\ ٢\text{أ} & \text{أ} \end{vmatrix} - \text{أ}\begin{vmatrix} ٣\text{أ} & ٠ \\ ٤\text{أ} & \text{أ} \end{vmatrix} + ٢\text{أ}\begin{vmatrix} ٣\text{أ} & -\text{أ} \\ ٤\text{أ} & ٢\text{أ} \end{vmatrix}$$

$$= -\text{أ}^{٣} - ٣\text{أ}^{٣} + ٢٠\text{أ}^{٣} = ١٦\text{أ}^{٣}$$

$١٦\text{أ}^{٣} = ٢$، $\text{أ}^{٣} = \frac{١}{٨}$ و $\text{أ} = \frac{١}{٢}$

٧) أولًا $\Delta = ١\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$

$$= ١(-٨) - ٢(-٤) + ٣(-١) = -٣$$

بالطريقة نفسها نوجد محدد المصفوفة ب

$$\Delta = ١\begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} - ٥\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٠ - ٠ + ٢(-٢-٣) = -١٠$$

باستخدام $|\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}| = |\underline{\text{أ}}| \times |\underline{\text{ب}}|$

$$= (-٣) \times (-١٠) = ٣٠$$

يمكنك بالطبع أن تجد أولًا المصفوفة أ × ب وبعد ذلك المحددة. سيتطلب ذلك ضرب مصفوفتَين من الرتبة ٣ × ٣، ولكنها مع ذلك طريقة جيدة.

تمارين ٦-٣

١) $\underline{أ} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{م}$، اضرب الجهتين بـ $\underline{أ}^{-١}$ لتحصل على

$\underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{م}$

إلّا أن $\underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{م}$ ∴ لدينا $\underline{م} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{م}$

ونحن نعلم أنه لأي مصفوفة $\underline{س}$:

$\underline{س} \times \underline{م} = \underline{م} \times \underline{س} = \underline{س}$

∴ $\underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{أ}^{-١}$

اضرب الجهتين في $\underline{ب}^{-١}$ لتحصل على

$\underline{ج} \times \underline{ب} \times \underline{ب}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{ب}^{-١}$

ولكن $\underline{ب} \times \underline{ب}^{-١} = \underline{م}$ ∴ $\underline{ج} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{ب}^{-١}$

نجد معكوس المصفوفة $\underline{س}$ من خلال تبديل العنصرَين في الخط المائل الأساسي، وضرب العنصرَين المتبقيين في -١، والقسمة على محددة $\underline{س}$. بالنسبة إلى المصفوفتَين $\underline{أ}$ و $\underline{ب}$:

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١٥ - ٠}\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} \quad و \quad \underline{ب}^{-١} = \frac{١}{٢ - ٣}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$∴ \underline{ج} = \frac{١}{١٥} \times \frac{١}{-١} \times \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{١}{١٥}\begin{pmatrix} ٨ & -٧ \\ -٩ & ٦ \end{pmatrix}$$

يمكننا أيضًا كتابة $\underline{ج} = \frac{١}{١٥}\begin{pmatrix} -٨ & ٧ \\ ٩ & -٦ \end{pmatrix}$

> تأكد من فهمك للمعادلات الجبرية للمصفوفات،
> لأنها ستكون مفيدة لاحقًا.

٢) **أ** حتى لا تكون للمصفوفة $\underline{أ}$ معكوس يجب أن يكون

$\Delta = ٠$

نكتب من صيغة أ، $\Delta = ٢ك - ١٥$

∴ حتى يتحقق شرط $\Delta = ٠$، وجب أن يكون $٢ك - ١٥ = ٠$، أي $ك = \frac{١٥}{٢}$

ب في هذه الحالة، $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$

أولًا $\underline{ب} \times \underline{أ} \times \underline{أ} = \underline{م}$، ثم $\underline{ب} \times \underline{أ} \times \underline{أ} \times \underline{أ}^{-١}$

$= \underline{م} \times \underline{أ}^{-١}$

بما أن $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{م}$ ولكل مصفوفة $\underline{س}$:

$\underline{س} \times \underline{م} = \underline{م} \times \underline{س} = \underline{م}$

∴ $\underline{ب} \times \underline{أ} = \underline{أ}^{-١}$، الأمر الذي يعني

أن $\underline{ب} \times \underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ}^{-١}$

∴ $\underline{ب} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ}^{-١}$

$$\text{نحسب } \underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١٦ - ١٥}\begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$∴ \underline{ب} = \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧٩ & -٣٠ \\ -٥٠ & ١٩ \end{pmatrix}$$

٣) لتكن المصفوفة المعززة

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٣ & -٢ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ١ & ٢ & ٠ & ٠ & ١ \end{array}\right)$$

ثم باستخدام عمليات الصف التالية

$ص_٣ \leftarrow ص_٣ - ص_١$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٣ & -٢ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & -٢ & ٤ & -١ & ٠ & ١ \end{array}\right)$$

$ص_٣ \leftarrow ٢ص_٣ + ص_٢$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٣ & -٢ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٩ & -٢ & ١ & ٢ \end{array}\right)$$

$ص_١ \leftarrow ٤ص_١ - ٣ص_٢$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٤ & ٠ & -١١ & ٤ & -٣ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٩ & -٢ & ١ & ٢ \end{array}\right)$$

$ص_١ \leftarrow ٩ص_١ + ١١ص_٣$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٣٦ & ٠ & ٠ & ١٤ & -١٦ & ٢٢ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٩ & -٢ & ١ & ٢ \end{array}\right)$$

$ص_٢ \leftarrow ٩ص_٢ - ص_٣$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٣٦ & ٠ & ٠ & ١٤ & -١٦ & ٢٢ \\ ٠ & ٣٦ & ٠ & ٢ & ٨ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٩ & -٢ & ١ & ٢ \end{array}\right)$$

$ص_١ \leftarrow \frac{١}{٣٦} ص_١$

$ص_٢ \leftarrow \frac{١}{٣٦} ص_٢$

$ص_٣ \leftarrow \frac{١}{٩} ص_٣$

فنحصل على $\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & \frac{٧}{١٨} & -\frac{٨}{١٨} & \frac{١١}{١٨} \\ ٠ & ١ & ٠ & \frac{١}{١٨} & \frac{٤}{١٨} & -\frac{١}{١٨} \\ ٠ & ٠ & ١ & -\frac{٤}{١٨} & \frac{٢}{١٨} & \frac{٤}{١٨} \end{array}\right)$

∴ معكوس المصفوفة هي $أ^{-١} = \frac{١}{١٨}\begin{pmatrix} ٧ & -٨ & ١١ \\ ١ & ٤ & -١ \\ -٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

حل آخر:

قاعدة الشطرنج في المصفوفة تقضي بأن تضرب المدخلات بالإشارة الموجبة أو السالبة بالتتالي بدءًا بالموجب في الصف الأول من جهة اليمين، ثم تعكس إلى السالب في الصف الثاني، وهكذا على الشكل:

+ − + − ....

− + − + ...

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٤ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ نجد محدد المصفوفة باستخدام العمود الأول لأنه يحتوي على صفر فتقل العمليات والحسابات.

$|أ| = ١ \times (٨ - ١) + ١ \times (١١)$

$= ٧ + ١١ = ١٨$

نجد المحددات المربعة الصغيرة المناظرة لكل عنصر من عناصر المصفوفة وهي المصفوفة المساند

$$\left|\begin{array}{ccc} \oplus\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} & \ominus\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} & \oplus\begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} \\ \ominus\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} & \oplus\begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} & \ominus\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} \\ \oplus\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} & \ominus\begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} & \oplus\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix} \end{array}\right|$$

$= \begin{pmatrix} ٧ & ١ & -٤ \\ -٨ & ٤ & ٢ \\ ١١ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$ (المصفوفة المساندة)

تقلب الصفوف إلى أعمدة لتصبح المصفوفة المساندة

$= \begin{pmatrix} ٧ & -٨ & ١١ \\ ١ & ٤ & -١ \\ -٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

$∴ أ^{-١} = \frac{١}{١٨}\begin{pmatrix} ٧ & -٨ & ١١ \\ ١ & ٤ & -١ \\ -٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

٤) أ) $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ -٢ & -٥ \end{pmatrix}$

$∴ أ^{-١} = \frac{١}{-٥ + ١٤}\begin{pmatrix} -٥ & -٧ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} = \frac{١}{٩}\begin{pmatrix} -٥ & -٧ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

ب) $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -٨ & ١٢ \end{pmatrix}$

$∴ ب^{-١} = \frac{١}{٣٦ + ١٦}\begin{pmatrix} ١٢ & -٢ \\ ٨ & ٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٥٢}\begin{pmatrix} ١٢ & -٢ \\ ٨ & ٣ \end{pmatrix}$

ج) $ج = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

$∴ ج^{-١} = \frac{١}{-١٦ - ١٥}\begin{pmatrix} -٤ & -٥ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} = \frac{١}{٣١}\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

د) $د = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix}$

$∴ د^{-١} = \frac{١}{٠ - ٢٤}\begin{pmatrix} ١١ & -٣ \\ -٨ & ٠ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢٤}\begin{pmatrix} -١١ & ٣ \\ ٨ & ٠ \end{pmatrix}$

٥) $أ^{٢} = \begin{pmatrix}١&٢\\٣&٤\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١&٢\\٣&٤\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٧&١٠\\١٥&٢٢\end{pmatrix}$

ليكن $أ^{٢} - ك\,أ = ث\,م$

أو $\begin{pmatrix}٧&١٠\\١٥&٢٢\end{pmatrix} - ك\begin{pmatrix}١&٢\\٣&٤\end{pmatrix} = ث\begin{pmatrix}١&٠\\٠&١\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}٧&١٠\\١٥&٢٢\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}ك&٢ك\\٣ك&٤ك\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ث&٠\\٠&ث\end{pmatrix}$

إذا نظرنا إلى العنصر الأول في العمود الثاني، نحصل على الشرط $١٠ - ٢ك = ٠$ ما يعني أن $ك = ٥$

$\therefore أ^{٢} - ٥أ = \begin{pmatrix}٧&١٠\\١٥&٢٢\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٥&١٠\\١٥&٢٠\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٢&٠\\٠&٢\end{pmatrix} = ٢\begin{pmatrix}١&٠\\٠&١\end{pmatrix}$

ما يعني $أ\,(أ - ٥م) = ٢م$

$\therefore أ^{-١} \times أ \times (أ - ٥م) = ٢أ^{-١}م$، لكن بما أن $أ^{-١} \times أ = م$

و $س \times م = م \times س = س$ لأي مصفوفة $س$،

$أ - ٥م = ٢أ^{-١}$ أو $أ^{-١} = \frac{١}{٢}(أ - ٥م)$

$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٢}\left[\begin{pmatrix}١&٢\\٣&٤\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٥&٠\\٠&٥\end{pmatrix}\right] = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix}-٤&٢\\٣&-١\end{pmatrix} = -\frac{١}{٢}\begin{pmatrix}٤&-٢\\-٣&١\end{pmatrix}$

عند التفكيك إلى عوامل في المصفوفات، تذكّر أنه يجب كتابة $أ^{٢} + ك \times أ$ على الشكل $أ\,(أ + ك \times م)$ بما أن $ك$ هي الوحيدة التي ليست مصفوفة.

٦) **أ** أولًا، $أ^{٢} = \begin{pmatrix}١&٠&٢\\٢&١&١\\٠&١&١\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}١&٠&٢\\٢&١&١\\٠&١&١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١&٢&٤\\٤&٢&٦\\٢&٢&٢\end{pmatrix}$

ثم $أ^{٣} = أ^{٢}\,أ = \begin{pmatrix}١&٢&٤\\٤&٢&٦\\٢&٢&٢\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}١&٠&٢\\٢&١&١\\٠&١&١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٥&٦&٨\\٨&٨&١٦\\٦&٤&٨\end{pmatrix}$

ب ليكن $أ^{٣} + ٢أ - ٤م = ك\,أ^{٢}$

نحسب جهة اليمين من المعادلة،

$\begin{pmatrix}٥&٦&٨\\٨&٨&١٦\\٦&٤&٨\end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix}١&٠&٢\\٢&١&١\\٠&١&١\end{pmatrix} - ٤\begin{pmatrix}١&٠&٠\\٠&١&٠\\٠&٠&١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٣&٦&١٢\\١٢&٦&١٨\\٦&٦&٦\end{pmatrix}$

بالطريقة نفسها، نرى أن جهة اليسار من هذه المعادلة هي

$$\underline{\text{ك}}\,\underline{\text{أ}}^{٢} = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ١٢ \\ ١٢ & ٦ & ١٨ \\ ٦ & ٦ & ٦ \end{pmatrix} = \underline{\text{ك}} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$$

حتى تصح قيمة العناصر في العمود الأول، نحتاج $\underline{\text{ك}} = ٣$

نعوض ك = ٣، فنرى أن $٣\,\underline{\text{أ}}^{٢} = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ١٢ \\ ١٢ & ٦ & ١٨ \\ ٠ & ٦ & ٦ \end{pmatrix}$

وهو يساوي $\underline{\text{أ}}^{٣} + ٢\underline{\text{أ}} - ٤\,\underline{\text{م}}$

$\therefore \underline{\text{ك}} = ٣$

ج لدينا من الجزء ($\underline{\text{ب}}$) أن $\underline{\text{أ}}^{٣} - ٣\underline{\text{أ}}^{٢} + ٢\underline{\text{أ}} - ٤\,\underline{\text{م}} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

نعيد كتابتها على الشكل $\underline{\text{أ}}\,(\underline{\text{أ}}^{٢} - ٣\,\underline{\text{أ}} + ٢\,\underline{\text{م}}) = ٤\,\underline{\text{م}}$

نكتب $\underline{\text{أ}}^{-١}\,\underline{\text{أ}}\,(\underline{\text{أ}}^{٢} - ٣\underline{\text{أ}} + ٢\underline{\text{م}}) = ٤\,\underline{\text{أ}}^{-١}\,\underline{\text{م}}$

باستخدام $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$ و $\underline{\text{س}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{م}} \times \underline{\text{س}} = \underline{\text{س}}$ لأي مصفوفة $\underline{\text{س}}$، يكون لدينا

$(\underline{\text{أ}}^{٢} - ٣\underline{\text{أ}} + ٢\underline{\text{م}}) = ٤\underline{\text{أ}}^{-١}$

$\therefore \underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{٤}\,(\underline{\text{أ}}^{٢} - ٣\underline{\text{أ}} + ٢\underline{\text{م}})$

عوضًا من حساب الجهة اليسرى مباشرة، سنحلل أولًا إلى عوامل:

$\frac{١}{٤}(\underline{\text{أ}}^{٢} - ٣\,\underline{\text{أ}} + ٢\,\underline{\text{م}}) = \frac{١}{٤}\,(\underline{\text{أ}} - \underline{\text{م}})\,(\underline{\text{أ}} - ٢\,\underline{\text{م}})$

$$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{م}} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

بالطريقة نفسها $\underline{\text{أ}} - ٢\,\underline{\text{م}}$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{٤} \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{pmatrix} = \frac{١}{٤} \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & -٢ \\ -٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & -١ & ١ \end{pmatrix}$$

٧) المعطى هو $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{م}}$، سنعيد الترتيب لإيجاد $\underline{\text{ج}}$.

نكتب أولًا $\underline{\text{أ}}^{-١} = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{م}}$

باستخدام $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$ و $\underline{\text{س}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{م}} \times \underline{\text{س}} = \underline{\text{س}}$ لأي مصفوفة $\underline{\text{س}}$، يكون لدينا $\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-١}$

ثم نكتب $\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ب}}^{-١} = \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{ب}}^{-١}$، والتي يمكن تبسيطها بالطريقة نفسها إلى $\underline{\text{ج}} = \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{ب}}^{-١}$

لاحظ أنه يمكننا كتابتها على الشكل ج = (ب × أ)$^{-١}$

نحسب ب × أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & -١ & -١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ -٢ & -٢ & -٣ \\ ٤ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

باستخدام $\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & -٢ & -٢ & -٣ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \end{array}\right)$

وعمليات الصف التالية: $ص_١ \leftrightarrow ص_٣$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٠ & -٢ & -٢ & -٣ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_٢ \leftarrow ٢ص_٢ + ٣ص_١$ فنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_٣ \leftarrow ٢ص_٣ + ص_٢$ فنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_١ \leftarrow ٥ص_١ - ٢ص_٣$ فنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -١ & -٤ & -٤ & ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_٢ \leftarrow ٥ص_٢ - ٤ص_٣$ فنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -١ & -٤ & -٤ & ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & -٨ & ٠ & -٢٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

بعد ذلك نقسم كل صف لتعطي المصفوفة المحايدة من الجهة اليسرى، فنحصل على:

$$ص_١ \leftarrow \frac{١}{١٠} ص_١$$

$$ص_٢ \leftarrow -\frac{١}{٢٠} ص_٢$$

$$ص_٣ \leftarrow \frac{١}{١٠} ص_٣$$

ونحصل على النتيجة $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{٢}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} & ٠ & ٠ & ١ \\ -\frac{٣}{٢٠} & -\frac{٢}{٢٠} & \frac{٨}{٢٠} & ٠ & ١ & ٠ \\ \frac{٦}{٢٠} & \frac{٤}{٢٠} & \frac{٤}{٢٠} & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$

فتكون النتيجة النهائية

ج = (ب × أ)$^{-١}$ = $\frac{١}{٢٠} \begin{pmatrix} -٢ & -٨ & -٨ \\ -٣ & -٢ & ٨ \\ ٦ & ٤ & ٤ \end{pmatrix}$

بما أنه كان لدينا ج = أ$^{-١}$ × ب$^{-١}$، كان يمكننا حساب أ$^{-١}$، ب$^{-١}$ بشكل مستقل. لاحظ أن أ$^{-١}$ × ب$^{-١}$ = (ب × أ)$^{-١}$ تعني أننا كنا بحاجة إلى حساب معكوس مصفوفة واحدة. انتبه جيدًا لرتبة مصفوفاتك عند اعتمادك هذه الملاحظة.

حل آخر:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & -٢ & -٢ & -٣ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \end{array}\right)$$ المصفوفة المعززة

ص$_{١}$ ← ص$_{٣}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٠ & -٢ & -٢ & -٣ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{٢}$ ← ٢ص$_{٢}$ + ٣ص$_{١}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{٣}$ ← ٢ص$_{٣}$ + ص$_{٢}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{١}$ ← ٥ص$_{١}$ − ٢ص$_{٣}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -١ & -٤ & -٤ & ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & ٤ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{٢}$ ← ٥ص$_{٢}$ − ٤ص$_{٣}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -١ & -٤ & -٤ & ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & -٨ & ٠ & -٢٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{١}$ ← $\frac{١}{١٠}$ ص$_{١}$

ص$_{٢}$ ← − $\frac{١}{٢٠}$ ص$_{٢}$

ص$_{٣}$ ← $\frac{١}{١٠}$ ص$_{٣}$

المصفوفة المحددة

$$\text{أ}^{-١} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{١}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & ٠ & ٠ & ١ \\ -\frac{٣}{٢٠} & -\frac{٢}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} & ٠ & +١ & ٠ \\ \frac{٣}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{١}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & ٠ & ٠ & ١ \\ -\frac{٣}{٢٠} & -\frac{٢}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} & ٠ & ١ & ٠ \\ \frac{٣}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -\frac{١}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} \\ -\frac{٣}{٢٠} & -\frac{٢}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} \\ \frac{٣}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & \frac{٢}{١٠} \end{array}\right) = \text{أ}^{-١} \Leftarrow$$

نأخذ $\frac{١}{٢٠}$ عامل مشترك

$$\left(\begin{array}{ccc} -٢ & -٨ & -٨ \\ -٣ & -٢ & ٨ \\ ٦ & ٤ & ٤ \end{array}\right) \frac{١}{٢٠} = \text{أ}^{-١}$$

تمارين ٦-٤

١) أ استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

$$\left(\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ٦ \\ -٦ & ٢ & -١٣ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & ٢ \\ -٦ & ٢ & -١٣ \end{array}\right) \leftarrow \text{ص}_١ = \frac{\text{ص}}{٣}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & ٢ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{array}\right) \leftarrow \text{ص}_٢ = \text{ص}_٢ + ٦\text{ص}_١$$

∴ الصف الأخير ⇐ ٠ = −١

∴ لا توجد حلول

ب $$\left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & -١ & ٧ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & -١ & ٧ \end{array}\right) \leftarrow \text{ص}_١ = \frac{\text{ص}_١}{٢}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٠ & \frac{٥}{٢} & ١ \end{array}\right) \leftarrow \text{ص}_٢ = \text{ص}_٢ - ٣\text{ص}_١$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٠ & ١ & -\frac{٢}{٥} \end{array}\right) \leftarrow \text{ص}_٢ = \frac{٢}{٥}\text{ص}_٢$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & ٠ & \frac{١١}{٥} \\ ٠ & ١ & -\frac{٢}{٥} \end{array}\right) \leftarrow \text{ص}_١ = \text{ص}_١ - \frac{١}{٢}\text{ص}_٢$$

∴ س = $\frac{١١}{٥}$ ، ص = $\frac{٢}{٥}$

ج $$\left(\begin{array}{cc|c} ٥ & -٤ & ٢ \\ ١٠ & -٨ & ٤ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{٤}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ ١٠ & -٨ & ٤ \end{array}\right) \leftarrow \text{ص}_١ = \frac{\text{ص}_١}{٥}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{٤}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right) \leftarrow \text{ص}_٢ = \text{ص}_٢ - ١٠\text{ص}_١$$

∴ لهذا النظام عدد لانهائي من الحلول

$$\text{س} - \frac{٤}{٥} - \text{ص} = \frac{٢}{٥}$$

حل آخر:

أ ابدأ بـ $\left(\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ٦ \\ -٦ & ٢ & -١٣ \end{array}\right)$

ثم استعمل $\text{ص}_١ \leftarrow \frac{١}{٣}\text{ص}_١$، $\text{ص}_٢ \leftarrow ٦\text{ص}_١ + \text{ص}_٢$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & ٢ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{array}\right)$

ينص الصف الأخير على أن ٠ = −١ ∴ لا توجد حلول.

ب استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & -١ & ٧ \end{array}\right)$، ثم استعمل

$\text{ص}_١ \leftarrow \frac{١}{٢}\text{ص}_١$، $\text{ص}_٢ \leftarrow -٣\text{ص}_١ + \text{ص}_٢$،

$\text{ص}_٢ \leftarrow -\frac{٢}{٥}\text{ص}_٢$، $\text{ص}_١ \leftarrow -\frac{١}{٢}\text{ص}_٢ + \text{ص}_١$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{cc|c} ١ & ٠ & \frac{١١}{٥} \\ ٠ & ١ & -\frac{٢}{٥} \end{array}\right)$

∴ س = $\frac{١١}{٥}$، ص = $-\frac{٢}{٥}$

ج استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{cc|c} ٥ & -٤ & ٢ \\ ١٠ & -٨ & ٤ \end{array}\right)$، ثم استعمل

$\text{ص}_١ \leftarrow \frac{١}{٥}\text{ص}_١$، $\text{ص}_٢ \leftarrow -١٠\text{ص}_١ + \text{ص}_٢$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{٤}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$

وهذا يعطي س $-\frac{٤}{٥}$ ص $= \frac{٢}{٥}$ والتي لها عدد غير منتهٍ من الحلول.

٢) استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

$$\left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ج & ٣ \\ ٣ & -٢ & د \end{array}\right) \leftarrow ص_١ = \frac{ص_١}{٢}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & \frac{ج}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ٣ & -٢ & د \end{array}\right) \leftarrow ص_١ = \frac{ص_١}{٢}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & \frac{ج}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ٠ & -٢-\frac{٣}{٢}ج & د-\frac{٩}{٢} \end{array}\right) ص_٢ = ص_٢ - ٣ص_١$$

أ لا تكون لها حلول إذا كان

$-٢ - \frac{٣}{٢}ج = ٠ \Leftarrow \frac{٣}{٢}ج = -٢ \Leftarrow ج = \frac{-٤}{٣}$

$د - \frac{٩}{٢} \neq ٠ \Leftarrow د \neq \frac{٩}{٢}$

ب يكون لها عدد لانهائي من الحلول إذا كان

$-٢ - \frac{٣}{٢}ج = ٠ \Leftarrow ج = \frac{-٤}{٣}$

$د - \frac{٩}{٢} = ٠ \Leftarrow د = \frac{٩}{٢}$

ج يكون لها حل وحيد، إذا كان

$-٢ - \frac{٣}{٢}ج \neq ٠ \Leftarrow ج \neq \frac{-٤}{٣}$

و $د \in ع$

حل آخر:

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ج & ٣ \\ ٣ & -٢ & د \end{array}\right)$، ثم استعمل

$ص_٢ \leftarrow \frac{٣}{٢}ص_١ - ص_٢$، $ص_١ \leftarrow \frac{١}{٢}ص_١$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{cc|c} ١ & \frac{ج}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ٠ & \frac{٣}{٢}ج+٢ & \frac{٩}{٢}-د \end{array}\right)$

أ إذا لم تكن هناك حلول، يكون $\frac{٣}{٢}ج + ٢ = ٠$

$\therefore أ = -\frac{٤}{٣}، د \neq \frac{٩}{٢}$

ب إذا كان لها عدد غير منتهٍ من الحلول،

يكون $\frac{٣}{٢}ج + ٢ = ٠$، $\frac{٩}{٢} - د = ٠$

نحل المعادلتين لنحصل على $ج = -\frac{٤}{٣}$، $د = \frac{٩}{٢}$

ج إذا كان لها حل وحيد، يمكن أن تساوي العبارة $\frac{٣}{٢}ج + ٢ \neq ٠$

لا يمكن لـ ج أن تكون $-\frac{٤}{٣}$ كما يمكن لـ $\frac{٩}{٢} - د$ أن تأخذ أي قيمة.

$\therefore ج \neq -\frac{٤}{٣}، د \in ع$

٣) أ استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & -٢ & ٢ \\ -٢ & -١٠ & -٦ & ٣ \\ ٣ & ١٤ & ٤ & ٧ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & -٢ & ٢ \\ ٠ & -٢ & -١٠ & ٧ \\ ٣ & ١٤ & ٤ & ٧ \end{array}\right) \leftarrow ص_٢ = ص_٢ + ٢ص_١$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & -٢ & ٢ \\ ٠ & -٢ & -١٠ & ٧ \\ ٠ & ٢ & ١٠ & ١ \end{array}\right) \leftarrow ص_٣ = ص_٣ - ٣ص_١$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & -٢ & ٢ \\ ٠ & -٢ & -١٠ & ٧ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٨ \end{array}\right)$$

$\because$ الصف الأخير فيه $٠ = ٨$

$\therefore$ لا توجد حلول.

ب $\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ١٠ & ٣ \\ ٤ & ٠ & -١ & ١ \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٩ & ٢ \\ ٤ & ٠ & -١ & ١ \end{array}\right) \leftarrow ص_٢ \leftarrow ص_٢ - ص_١$$

$\left(\begin{array}{c|ccc} ١ & ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٩ & ٢ & ٠ \\ -١ & -٣ & -٢ & ٠ \end{array}\right)$ ← ص$_٣$ ← ص$_٣$ − ٢ص$_١$

$\left(\begin{array}{c|ccc} ١ & ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٩ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٦ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$ ← ص$_٣$ ← ص$_٢$ + ص$_٣$

٦ع = ١، ع = $\frac{١}{١٦}$

٢ص + ٩ع = ٢، ٦ص = ٢ − $\frac{٣}{٢}$ ⇐ ص = $\frac{١}{٤}$

٢س + ص + ع = ١

٢س + $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٤}$ = ١

٢س = ١ − $\frac{٥}{١٢}$

٢س = $\frac{٧}{١٢}$

س = $\frac{٧}{٢٤}$

ج) $\left(\begin{array}{c|ccc} ١ & -١ & ٥ & ١ \\ ٠ & -٤ & ٧ & ٢ \\ -٢ & -١٠ & ١١ & ٤ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{c|ccc} ١ & -١ & ٥ & ١ \\ -٢ & -٢ & -٣ & ٠ \\ -٢ & -١٠ & ١١ & ٤ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{c|ccc} ١ & -١ & ٥ & ١ \\ -٢ & -٢ & -٣ & ٠ \\ -٦ & -٦ & -٩ & ٠ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{c|ccc} ١ & -١ & ٥ & ١ \\ -٢ & -٢ & -٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$

عدد لانهائي من الحلول

−٣ص − ٢ع = −٢ ⇐ ٢ع = ٢ − ٣ص

٣ص = ٢ − ٢ع، ع = ١ − $\frac{٣}{٢}$ ص

ص = $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{٢}{٣}$ ع

س + ٥ص − ع = ١

س + $\frac{١٠}{٣}$ − $\frac{١٠}{٣}$ ع − ع = ١

س = $\frac{١٣}{٣}$ ع − $\frac{٧}{٣}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{٧}{٣} \\ \frac{٢}{٣} \\ ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٣ \\ -٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ ز

ز = $\frac{ع}{٣}$

حل آخر:

استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{c|ccc} ٢ & -٢ & ٤ & ١ \\ ٣ & -٦ & -١٠ & -٢ \\ ٧ & ٤ & ١٤ & ٣ \end{array}\right)$، ثم استعمل

ص$_٢$ ← ٢ص$_١$ + ص$_٢$،

ص$_٣$ ← −٣ص$_١$ + ص$_٣$، ص$_٢$ ← − $\frac{١}{٢}$ ص$_٢$،

ص$_٣$ ← − ٩ص$_٢$ + ص$_٣$، ص$_١$ ← − ٥ص$_٢$ + ص$_١$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{c|ccc} ١٦ & -٢٢ & ٠ & ١ \\ -٣,٥ & ٥ & ١ & ٠ \\ ٨ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$

ينصّ الصف الأخير على أن ٠ = ٨

∴ لا توجد حلول.

ب) استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{c|ccc} ١ & ١ & ١ & ٢ \\ ٣ & ١٠ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ & ٤ \end{array}\right)$، ثم استعمل

ص$_١$ ← $\frac{١}{٢}$ ص$_١$، ص$_٢$ ← −٢ص$_١$ + ص$_٢$،

ص$_٣$ ← − ٤ص$_١$ + ص$_٣$

ص$_٢$ ← $\frac{١}{٢}$ ص$_٢$،

ص$_٣$ ← ٢ص$_٢$ + ص$_٣$، ص$_٣$ ← $\frac{١}{٦}$ ص$_٣$،

ص$_٢$ ← − $\frac{٩}{٢}$ ص$_٣$ + ص$_٢$،

ص$_١$ ← − $\frac{١}{٢}$ ص$_٣$ + ص$_١$،

ص$_١$ ← − $\frac{١}{٢}$ ص$_٢$ + ص$_١$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٠ & ٠ & \frac{٧}{٢٤} \\ ٠ & ١ & ٠ & \frac{١}{٤} \\ ٠ & ٠ & ١ & \frac{١}{٦} \end{array}\right)$

هناك حل وحيد هو $س = \frac{٧}{٢٤}$، $ص = \frac{١}{٤}$، $ع = \frac{١}{٦}$

ج) استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٥ & -١ & ١ \\ ٢ & ٧ & -٤ & ٠ \\ ٤ & ١١ & -١٠ & -٢ \end{array}\right)$، ثم استعمل

$ص_٢ \leftarrow -٢ص_١ + ص_٢$،

$ص_٣ \leftarrow -٤ص_١ + ص_٣$، $ص_٢ \leftarrow -\frac{١}{٣}ص_٢$

$ص_٣ \leftarrow -٩ص_٢ + ص_٣$، $ص_١ \leftarrow -٥ص_٢ + ص_١$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٠ & -\frac{١٣}{٣} & -\frac{٧}{٣} \\ ٠ & ١ & \frac{٢}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$

يوجد عدد لانهائي من الحلول

٤) استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٠ & ١ \\ ٢ & -١ & ٥ & ٤ \\ ١ & ٢ & ١٥ & ك \end{array}\right)$

$\xleftarrow{ص_٢ \leftarrow ص_٢ - ٢ص_١} \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٥ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١٥ & ك \end{array}\right)$

$\xleftarrow{ص_٣ \leftarrow ص_٣ - ص_١} \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ١٥ & ك - ١ \end{array}\right)$

$\xleftarrow{ص_٣ \leftarrow ص_٣ - ٣ص_٢} \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ك - ٧ \end{array}\right)$

ليكون لها عدد لانهائي من الحلول

$\therefore ك - ٧ = ٠ \Leftarrow ك = ٧$

حل آخر:

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٠ & ١ \\ ٢ & -١ & ٥ & ٤ \\ ١ & ٢ & ١٥ & ٤ \end{array}\right)$، ثم استعمل

$ص_٢ \leftarrow -٢ص_١ + ص_٢$، $ص_٣ \leftarrow -ص_١ + ص_٣$،

$ص_٣ \leftarrow -٣ص_٢ + ص_٣$

$ص_١ \leftarrow ص_٢ + ص_١$

إذا كان لها عدد لانهائي من الحلول، يكون

$ك - ٧ = ٠$

$\therefore ك = ٧$

٥) استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٤ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٧ & ١١ & ٤ \\ ٢ & -٥ & ٣ & ٥ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٤ & ٤ & ٣ \\ ٠ & -٣ & ٧ & ١ \\ ٢ & -٥ & ٣ & ٥ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٤ & ٤ & ٣ \\ ٠ & -٣ & ٧ & ١ \\ ٠ & ٣ & -٥ & -١ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٤ & ٤ & ٣ \\ ٠ & -٣ & ٧ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$

$٢ع = ٠ \Leftarrow ع = ٠$

$-٣ص + ٧ع = ١ \Leftarrow ص = -\frac{١}{٣}$

$س - ٤ص + ٤ع = ٣$

$س = ٣ - \frac{٤}{٣} \Leftarrow س = \frac{٥}{٣}$

حل آخر:

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٤ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٧ & ١١ & ٤ \\ ٢ & -٥ & ٣ & ٥ \end{array}\right)$، ثم استعمل

ص$_٢$ ← −ص$_١$ + ص$_٢$، ص$_٣$ ← −٢ص$_١$ + ص$_٣$،

ص$_٢$ ← $-\frac{١}{٣}$ ص$_٢$

ص$_٣$ ← ٣ص$_٢$ + ص$_٣$، ص$_٣$ ← $\frac{١}{٢}$ ص$_٣$،

ص$_٢$ ← $\frac{٧}{٣}$ ص$_٣$ + ص$_٢$،

ص$_١$ ← −٤ص$_٣$ + ص$_١$، ص$_١$ ← ٤ص$_٢$ + ص$_١$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٠ & ٠ & \frac{٥}{٣} \\ ٠ & ١ & ٠ & \frac{-١}{٣} \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \end{array}\right)$

∴ النقطة الوحيدة حيث تلتقي كل المستويات هي

س = $\frac{٥}{٣}$، ص = $-\frac{١}{٣}$، ع = ٠

٦) استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٦ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٤ & -١٧ & ٤ \\ ٣ & ١٢ & -٣٣ & ٦ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٦ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١٦ & -١٧ & ٠ \\ ٠ & ١٠ & -١١ & ٠ \end{array}\right)$ ← ص$_٢$ ← −٢ص$_١$ + ص$_٢$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٦ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١٦ & -١٧ & ٠ \\ ٠ & ٣٠ & -٣٣ & ٦ \end{array}\right)$ ← ص$_٣$ ← ٣ص$_١$ + ص$_٣$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٦ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١٦ & -١٧ & ٠ \\ ٣ & ١٢ & -٣٣ & ٦ \end{array}\right)$ ← ص$_٣$ ← $\frac{١}{٣}$ ص$_٣$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٦ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١٦ & -١٧ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٦ & ٠ \end{array}\right)$ ← ص$_٣$ ← ١٠ص$_٢$ + ١٦ص$_٣$

−٦ع = ٠ ← ع = ٠

حل آخر:

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٦ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٤ & -١٧ & ٤ \\ ٣ & ١٢ & -٣٣ & ٦ \end{array}\right)$، ثم استعمل

ص$_٢$ ← −٢ص$_١$ + ص$_٢$، ص$_٣$ ← −٣ص$_١$ + ص$_٣$،

ص$_٢$ ← $\frac{١}{١٦}$ ص$_٢$

ص$_٣$ ← −٣٠ص$_٢$ + ص$_٣$، ص$_٣$ ← $-\frac{٨}{٩}$ ص$_٣$،

ص$_٢$ ← $\frac{١٧}{١٦}$ ص$_٣$ + ص$_٢$،

ص$_١$ ← ٦ص$_٢$ + ص$_١$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \end{array}\right)$

∴ نقطة الالتقاء هي س = ٢، ص = ٠، ع = ٠

١٦ص − ١٧ع = ٠

س − ٦ص = ٢ ← س = ٢، ص = ٠

٧) استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ١ & -٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٦ & ل & ك \end{array}\right)$

أ $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ١ & -٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٦ & ٥ & ٥ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & -٣ & -١ & -٢ \\ ٣ & ٦ & ٥ & ٥ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & -٣ & -١ & -٢ \\ ٠ & ٣ & ٤ & ٢ \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & -٣ & -١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & -٥ & ٠ \end{array}\right)$

س + ص + ٣ع = ١

س = ١ − $\frac{٢}{٣}$

س = $\frac{١}{٣}$

−٥ع = ٠ ⇐ ع = ٠

−٣ص − ع = −٢ ⇐ ص = $\frac{٢}{٣}$

ب
$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ١ & -٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٦ & ١٠ & ١٠ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & -٣ & -١ & -٢ \\ ٣ & ٦ & ١٠ & ١٠ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & -٣ & -١ & -٢ \\ ٠ & ٣ & ١ & ٧ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & -٣ & -١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٥ \end{array}\right)$$

ليس لها حلول

ج
$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ١ & -٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٦ & ١٠ & ٥ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & -٣ & -١ & -٢ \\ ٣ & ٦ & ١٠ & ٥ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & -٣ & -١ & -٢ \\ ٠ & ٣ & ١ & ٢ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & -٣ & -١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

عدد لانهائي من الحلول.

$-٣ص - ع = -٢ \Leftarrow ص = \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}ع$

$س + ص + ٣ع = ١$

$س + \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}ع + ٣ع = ١ \Leftarrow س = -\frac{١}{٣} - \frac{٨}{٣}ع$

حل آخر:

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ١ & -٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٦ & ٥ & ٥ \end{array}\right)$، ثم استعمل

$ص_٢ \leftarrow -ص_١ + ص_٢$،

$ص_٣ \leftarrow -٣ص_١ + ص_٣$، $ص_٢ \leftarrow -\frac{١}{٣}ص_٢$

$ص_١ \leftarrow ص_١ - ص_٢$،

$ص_٣ \leftarrow -٣ص_٢ + ص_٣$، $ص_٣ \leftarrow -\frac{١}{٥}ص_٣$

$ص_١ \leftarrow ص_١ - \frac{٨}{٣}ص_٣$،

$ص_٢ \leftarrow -\frac{١}{٣}ص_٣ + ص_٢$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٠ & ٠ & \frac{١}{٣} \\ ٠ & ١ & ٠ & \frac{٢}{٣} \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \end{array}\right)$

يوجد حل وحيد هو $س = \frac{١}{٣}$، $ص = \frac{٢}{٣}$، $ع = ٠$

ب استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٣ & ١ \\ ١ & -٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٦ & ١٠ & ١٠ \end{array}\right)$، ثم استعمل

$ص_٢ \leftarrow -ص_١ + ص_٢$، $ص_٣ \leftarrow -٣ص_١ + ص_٣$،

$ص_٢ \leftarrow -\frac{١}{٣}ص_٢$

$ص_٣ \leftarrow -٣ص_٢ + ص_٣$،

$ص_١ \leftarrow -ص_٢ + ص_١$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٠ & \frac{٨}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ٠ & ١ & \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٥ \end{array}\right)$

يشير الصف الأخير إلى أن ٠ = ٥ ∴ لا توجد حلول، وليس ضروريًا أن نكمل للوصول إلى صورة صفوف إيشلون.

ج استخدم المصفوفة المعززة مع عمليات الصف لتحصل على صورة صفوف إيشلون.

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{c|ccc} ١ & ٣ & ١ & ١ \\ ١- & ٢ & ٢- & ١ \\ ٥ & ١٠ & ٦ & ٣ \end{array}\right)$، ثم استعمل

$ص_{٢} \leftarrow -ص_{١} + ص_{٢}$،

$ص_{٣} \leftarrow -٣ص_{١} + ص_{٣}$، $ص_{٢} \leftarrow -\frac{١}{٣}ص_{٢}$،

$ص_{٣} \leftarrow -٣ص_{٢} + ص_{٣}$،

$ص_{١} \leftarrow -ص_{٢} + ص_{١}$

الأمر الذي يعطي $\left(\begin{array}{c|ccc} \frac{١}{٣} & \frac{٨}{٣} & ٠ & ١ \\ \frac{٢}{٣} & \frac{١}{٣} & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$

∴ يوجد عدد لانهائي من الحلول لأن المتغيرات ليست مستقلة بعضها عن بعض.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) أ $\underline{ب} \times \underline{ج} = \underline{أ} + \underline{أ}^{٢}$

اضرب من جهة اليمين في $\underline{ب}^{-١}$ لتحصل على $\underline{ب}^{-١} \times \underline{ب} \times \underline{ج} = \underline{ب}^{-١} \times (\underline{أ} + \underline{أ}^{٢})$

الأمر الذي يؤدي إلى $\underline{ج} = \underline{ب}^{-١} (\underline{أ} + \underline{أ}^{٢})$

$$\underline{ب}^{-١} = \frac{١}{(-١) \times (-٤) - ٢ \times ١} \begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ -١ & -١ \end{pmatrix} = -\frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\underline{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٥ & ٤٦ \\ ١٩ & ١٨ \end{pmatrix}$$

$$\underline{أ} + \underline{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤٥ & ٤٦ \\ ١٩ & ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥٠ & ٥٢ \\ ٢٢ & ٢٠ \end{pmatrix}$$

هذا يعني أن $\underline{ج} = -\frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥٠ & ٥٢ \\ ٢٢ & ٢٠ \end{pmatrix}$

$$= -\frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٢٤٤ & ٢٤٨ \\ ٧٢ & ٧٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -١٢٢ & -١٢٤ \\ -٣٦ & -٣٦ \end{pmatrix}$$

ب $\underline{أ} \times \underline{د} \times \underline{ب} = \underline{م}$

اضرب من جهة اليمين في $\underline{أ}^{-١}$ ومن جهة اليسار في $\underline{ب}^{-١}$ للطرفين لتحصل على

$\underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} \times \underline{د} \times \underline{ب} \times \underline{ب}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{م} \times \underline{ب}^{-١}$

الأمر الذي يؤدي إلى $\underline{د} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{ب}^{-١} = (\underline{ب} \times \underline{أ})^{-١}$

$$\underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٧ & -٢ \end{pmatrix}$$

$$(\underline{ب} \times \underline{أ})^{-١} = \frac{١}{(-٢) \times (-٧) - ١ \times (-٢)} \begin{pmatrix} -١ & -٧ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{١٦} \begin{pmatrix} -١ & -٧ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$$

هذا يعني أن $\underline{د} = \frac{١}{١٦} \begin{pmatrix} -١ & -٧ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$

٢) أ $\Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ٢ & \text{أ}-٣ \\ ٠ & \text{أ}+٤ \end{vmatrix} - ٢ \times \begin{vmatrix} ٠ & \text{أ}-٣ \\ ١ & \text{أ}+٤ \end{vmatrix} + \text{أ} \times \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix}$

= ١ × [٢ × (أ + ٤) − (أ − ٣) × ٠] − ٢ × [٠ × (أ + ٤) − ١ × (أ − ٣)] + أ (٠ − ٢)

= ٢أ + ٨ + ٢أ − ٦ − ٢أ = ٢أ + ٢

وحتى تكون المصفوفة منفردة، وجب أن تكون محددتها = ٠

٢أ + ٢ = ٠ تعطي أ = −١

ب المصفوفة المعززة عندما أ = ٤ هي:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٢ & ٤ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٨ & ٠ & ٠ & ١ \end{array}\right)$$

ص٣ ← ص٣ − ص١

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٢ & ٤ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & -٢ & ٤ & -١ & ٠ & ١ \end{array}\right)$$

ص٣ ← ص٣ + ص٢

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٢ & ٤ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ & -١ & ١ & ١ \end{array}\right)$$

ص١ ← ٥ص١ − ٤ص٣

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٥ & ١٠ & ٠ & ٩ & -٤ & -٤ \\ ٠ & ٢ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ & -١ & ١ & ١ \end{array}\right)$$

ص٢ ← ٥ص٢ − ص٣

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٥ & ١٠ & ٠ & ٩ & -٤ & -٤ \\ ٠ & ١٠ & ٠ & ١ & ٤ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٥ & -١ & ١ & ١ \end{array}\right)$$

ص١ ← ص١ − ص٢

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٥ & ٠ & ٠ & ٨ & -٨ & -٣ \\ ٠ & ١٠ & ٠ & ١ & ٤ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٥ & -١ & ١ & ١ \end{array}\right)$$

ص١ ← ص١ ÷ ٥

ص٢ ← ص٢ ÷ ١٠

ص٣ ← ص٣ ÷ ٥

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & \frac{٨}{٥} & -\frac{٨}{٥} & -\frac{٣}{٥} \\ ٠ & ١ & ٠ & \frac{١}{١٠} & \frac{٤}{١٠} & -\frac{١}{١٠} \\ ٠ & ٠ & ١ & -\frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{array}\right)$$

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{٨}{٥} & -\frac{٨}{٥} & -\frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{١٠} & \frac{٤}{١٠} & -\frac{١}{١٠} \\ -\frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix} = \frac{١}{١٠} \begin{pmatrix} ١٦ & -١٦ & -٦ \\ ١ & ٤ & -١ \\ -٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$$

٣) أ ليكن $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٨ & ٧ \\ ١ & ١٠ & ١١ \end{pmatrix}$

$\therefore \Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ٨ & ٧ \\ ١٠ & ١١ \end{vmatrix} - ٢ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ١ & ١١ \end{vmatrix} + ٣ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix}$

= ١(٨٨ − ٧٠) − ٢(٢٢ − ٧) + ٣(٢٠ − ٨) = ٢٤

≠ ٠ ∴ أ غير منفردة.

ب ليكن $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ -١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & ٦ & ٦ \end{pmatrix}$

$\therefore \Delta = ١ \times \begin{vmatrix} -٢ & ٠ \\ ٦ & ٦ \end{vmatrix} - ٢ \times \begin{vmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} + ١ \times \begin{vmatrix} -١ & -٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$

$= ١(-١٢ - ٠) - ٢(-٦ - ٠) + ١(-٦ + ٦) = ٠$

$\Delta = ٠$

$\therefore$ $\underline{ب}$ منفردة.

٤) $\begin{pmatrix} ١ & -س + ٢ \\ ٥ & ن^٢ + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ \sqrt{م + ١} & ٢ن \end{pmatrix}$

$-س + ٢ = -٣$

$\therefore س = ٥$

$\sqrt{م + ١} = ٥$، وبالحل تحصل على: م = ٢٤

$ن^٢ + ١ = ٢ن$

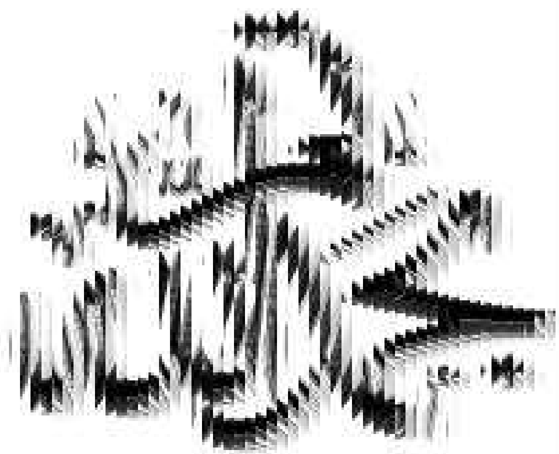
أعد الترتيب لتحصل على: $ن^٢ - ٢ن + ١ = ٠$

ثم $(ن - ١)^٢ = ٠$

$\therefore ن = ١$

فتكون الإجابة:

س = ٥، م = ٢٤، ن = ١



الرياضيات المتقدمة

دليل المعلّم

الصف الحادي عشر

يتوافر في دليل المعلم الدعم لتخطيط الدروس وتقديمها بأسلوب واضح، تغني المعلمين عن بذل الوقت والجهد في تحضير لدروس والإجابة عن المسائل المطروحة في كتاب الطالب.

من ميزات دليل المعلم أنه يقدّم:

- أفكارًا وإرشادات داعمة لكل وحدة، بما في ذلك شرائح باوربوينت PowerPoint لعرضها أمام طلبة الصف.
- توجيهات حول كيفية مساعدة الطلبة على التقدم في الموضوعات.
- إجابات عن جميع الأسئلة والتمارين الواردة في كتاب الطالب وكتاب الأنشطة.

يشمل منهج الرياضيات للصف الحادي عشر من هذه السلسلة أيضًا:

– كتاب الطالب
– كتاب النشاط

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om