سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية
1445 هـ - 2023 م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف الحادي عشر – من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Pure Mathematics 1 –
للمؤلف سو بمبرتن، و Mathematics 1 وProbability & Statistics 1 للمؤلف دين
تشارلمرز و Cambridge International AS & A Level Further Mathematics
للمؤلفين لي ماكلفي و مارتين كروزير.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
–طيّب اللّه ثراه–

حضـرة صـاحـب الجـلالـة
السلطان هيثم بن طارق المعظم
– حـفـظـه اللّه ورعاه –

سلطنـــــة عُمـــــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا جَلالَةَ السُّلْطان

وَالشَّعْبَ في الأَوْطان بِالْعِزِّ والأَمان

وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ

فارْتَقي هامَ السَّماء وَامْلَئي الْكَوْنَ ضياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد للّه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مُكوِّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقرّرات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلبة، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلبة النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّه ورعاه.

واللّه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

الوحدة الرابعة: مقاييس النزعة المركزية

الوحدة الخامسة: مقاييس التشتت

المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والتي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.

بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءً عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس، وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة ' ★ ، ★ ، ★ أو ★ ' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' ولا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحُلّ معادلات تربيعية (متضمنة التي تحتاج إلى إعادة ترتيب) باستخدام التحليل إلى عوامل.
١-٢ تحُلّ زوجًا من المعادلات الآنية التي تتضمّن معادلة خطّية ومعادلة تربيعية (التحليل إلى عوامل).
١-٣ تجِد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة التربيعية د: س ⟼ أس^{٢} + ب س + جـ ذات الجذر (الجذور) الحقيقية وباستخدام التماثل.
١-٤ تستخدم القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لـ د(س) لرسم المنحنى حيث د(س) دالّة تربيعية.
١-٥ تجِد مجموعة الحلول لمتباينات تربيعية.
١-٦ تستخدم المميز لتحديد عدد حلول د(س) = ٠ حيث د(س) دالة تربيعية.
١-٧ تحدّد عدد الحلول لزوج من المعادلات الآنيّة التي تتضمّن معادلة تربيعية ومعادلة خطّية (التحليل إلى عوامل).
١-٨ تحدّد ما إذا كان خط مستقيم ومنحنى تربيعي يلتقيان عند نقطة أو نقطتَين أو لا يتقاطعان.
١-٩ تطبّق وتفسّر المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية كتمثيلات رياضية في مواقف من الحياة اليومية، مثل المواقف الفيزيائية (الحركة)، التطبيقات التجارية (الربح، التكلفة، هكذا) والمواقف الفنّية والتصميم (رسم الأشكال والأنماط باستخدام المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية كشكل أساسي).

الأهداف التعليمية تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الثالثة	تعالج الصيغ الجبرية التي تتضمن مربعات وجذورًا تربيعية وتعوّض فيها.	١) إذا كانت ص = $\sqrt{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}} - \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{٢}}$ فأوجِد القيمة الموجبة لكل من: أ ص عندما س = ١٣، أ = ٤، ب = $\sqrt{٣٥٢}$ ب س عندما ص = ١٢، أ = ٥، ب = ١١
الصف العاشر الوحدة الخامسة	تحسب الوسط الحسابي والوسيط والمدى والمنوال لبيانات أولية.	٢) ما مدى مجموعة البيانات؟ ٩، ٢، ٤، ٠، ٣، ١٥، ١١، ٨

المفردات

البيانات غير المجمعة ungrouped
المدى range
البيانات المجمعة grouped
المدى الرُبيعي interquartile range
الربيع الأعلى upper quartile
الربيع الأدنى Lower quartile

معرفة قبلية تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

نتيجة ١

الحدّ العام (الحدّ النوني) للمتتالية الحسابية التي حدها الأول أ ، وأساسها د هو ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د، حيث ن عدد صحيح موجب.

نتيجة: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

المدى
range

المفردات الأساسية هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

مثـال ١

حلّ المعادلة س^{٢} = ٣س + ٢٨

الحـلّ:

س^{٢} = ٣س + ٢٨ .... اكتب المعادلة في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

س^{٢} − ٣س − ٢٨ = ٠ .... حلّل إلى العوامل.

(س − ٧)(س + ٤) = ٠ .... استخدم الحقيقة إذا كان ناتج الضرب ل ك = ٠، فإن ل = ٠ أو ك = ٠

س − ٧ = ٠ أو س + ٤ = ٠ .... حلّ.

∴ س = ٧ أو س = $^{-}$٤

أمثلة تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

استكشف ١

يقال إن عالِم الرياضيات كارل جاوس Carl Gauss وهو في الثامنة من عمره قد سُئل عن إيجاد مجموع الأعداد من ١ إلى ١٠٠؛ ظنّ معلّمه أن هذه المهمّة ستشغله لبعض الوقت، لكنه فوجئ بأن كتب الإجابة الصحيحة بعد عدة ثوان. كانت طريقته أن جمع الأعداد أزواجًا: ١ + ١٠٠= ١٠١، ٢ + ٩٩ = ١٠١، ٣ + ٩٨ = ١٠١، ...

١) هل يمكنك أن تكمل طريقة جاوس لتجد الإجابة؟

استكشف تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

مُساعَدة

لنوجد $\sum س^{٢}$ فإننا نجمع مربعات القيم. من الأخطاء الشائعة إيجاد مجموع القيم ثم تربيع الناتج، يعبّر عن ذلك بالرمز $(\sum س)^{٢}$

مساعدة: تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

هل تعلم؟

أن أول شخص قدّم الأعداد العشرية غير المنتهية هو سيمون ستيفن Simon Stevin سنة ١٥٨٥م. كان رياضيًّا مهمًا، وهو من جعل استخدام الأعداد العشرية أكثر عمومية في كتابه الذي أسماه 'الأعشار De Thiende'.

هل تعلم؟ تحتوي على حقائق مثيرة للاهتمام تظهر كيف ترتبط الرياضيات بالعالم الأوسع.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- مقاييس النزعة المركزية هي الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال.
- للبيانات غير المجمّعة يُعدّ المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا.
- للبيانات المجمعة، الفئة المنوالية هي الفئة الأكثر كثافة تكرارية، وتمثل العمود الأعلى في المدرّج التكراري.
- للبيانات غير المجمّعة، $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$
- للبيانات المجمّعة، $\overline{س} = \frac{\sum س ت}{\sum ت}$ أو $\frac{\sum ت س}{\sum ت}$
- للبيانات غير المجمّعة، الوسيط عند القيمة التي رتّبتها $\left(\frac{ن + ١}{٢}\right)$.
- للبيانات المجمّعة، الوسيط التقديري يقع عند القيمة التي رتّبتها $\frac{ن}{٢}$ على المنحنى التكراري التراكمي.

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس.
- هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.
- يجب ألّا تستخدم الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثالثة

١) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٣٥ والحدّ الثاني ⁻١٤؛ فأوجِد:

أ الحدّ الرابع في المتتالية.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

٢) متتالية هندسية أول ثلاثة حدود فيها هي (٢ك + ٦)، (ك + ١٢)، (ك) على الترتيب. جميع حدود المتتالية موجبة. أوجِد:

أ قيمة ك

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

الوحدة الأولى
المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية
Equations, Inequalities, and Quadratic Functions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحُلّ معادلات تربيعية (متضمنة التي تحتاج إلى إعادة ترتيب) باستخدام التحليل إلى عوامل.

١-٢ تحُلّ زوجًا من المعادلات الآنية التي تتضمّن معادلة خطّية ومعادلة تربيعية (التحليل إلى عوامل).

١-٣ تجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة التربيعية د : س ⟼ أس^{٢} + ب س + جـ ذات الجذر (الجذور) الحقيقية وباستخدام التماثل.

١-٤ تستخدم القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لـ د(س) لرسم المنحنى حيث د (س) دالّة تربيعية.

١-٥ تجِد مجموعة الحلول لمتباينات تربيعية.

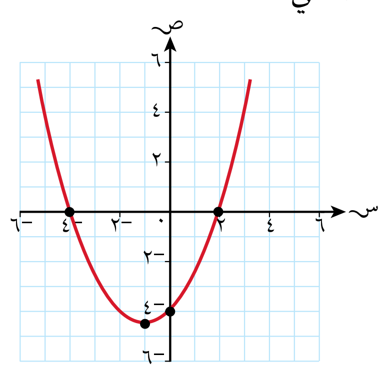
١-٦ تستخدم المميز لتحديد عدد حلول د(س) = ٠ حيث د(س) دالة تربيعية.

١-٧ تحدّد عدد الحلول لزوج من المعادلات الآنيّة التي تتضمّن معادلة تربيعية ومعادلة خطّية (التحليل إلى عوامل).

١-٨ تحدّد ما إذا كان خط مستقيم ومنحنى تربيعي يلتقيان عند نقطة أو نقطتَين أو لا يتقاطعان.

١-٩ تطبّق وتفسّر المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية كتمثيلات رياضية في مواقف من الحياة اليومية، مثل المواقف الفيزيائية (الحركة)، التطبيقات التجارية (الربح، التكلفة، هكذا) والمواقف الفنّية والتصميم (رسم الأشكال والأنماط باستخدام المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية كشكل أساسي).

معرفة قبلية

المصدر	تعلّمت سابقًا أن	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الحادية عشرة	تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.	١) حلّ: أ $س^٢ + س - ١٢ = ٠$ ب $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$ ج $٣س^٢ - ١٧س - ٦ = ٠$
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ متباينات خطّية.	٢) حلّ: أ $٥س - ٨ > ٢$ ب $٣ - ٢س \leqslant ٧$
الصف العاشر الوحدة التاسعة	تحلّ معادلتَين آنيتَين إحداهما خطّية والأخرى تربيعية.	٣) حلّ: $ص = س^٢ - ٩س + ٣٠$ $ص = ٣س - ٦$
الصف التاسع الوحدة الرابعة عشرة	تفسّر منحنيات الدوال التربيعية. تحدّد الجذور ونقاط التحوّل بيانيًّا.	٤) حدّد الجذور وإحداثيات نقطة التحوّل لمنحنى الدالة التربيعية الآتي: 

المفردات

حلّل إلى العوامل Expand

منحنى الدالة التربيعية Quadratic curve

نقطة القيمة الصغرى minimum point

نقطة القيمة العظمى maximum point

نقطة الثبات stationary point

نقطة التحوّل turning point

الجذور roots

المميّز discriminant

المماسّ tangent

لماذا ندرس المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية؟

سبق أن تعلّمت في الصف التاسع، الوحدة السابعة، عن التمثيل البياني للمستقيمات وخصائصها، حيث تظهر في الحياة اليومية من حولك. فمثلًا، يمكن لعقد الهاتف النقّال أن يتضمّن تكلفة شهرية ثابتة وتكلفة إضافية لكلّ دقيقة من المكالمات: التكلفة الشهرية (ص) تعطى في صورة ص = م س + جـ، حيث جـ التكلفة الشهرية الثابتة، م تكلفة الدقيقة الواحدة، س عدد الدقائق المستخدمة. من المهم أن تعرف أنه ليست كل العلاقات خطية، بل نحتاج أحيانًا إلى مجموعات أخرى من الدوال مثل الدوال التربيعية.

تكون الدوال التربيعية في صورة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ (أ $\neq$ ٠) ولها خصائص مثيرة للاهتمام تجعلها تختلف كثيرًا عن الدوال الخطّية. للدوال التربيعية قيمة عظمى أو قيمة صغرى، كما أن منحناها متماثل. تؤمّن دراسة الدوال التربيعية طريقًا للتفكير في دوال أكثر تعقيدًا مثل ص = ٧س^{٥} − ٤س^{٤} + س^{٢} + س + ٣

رسمت سابقًا منحنى لدوال تربيعية مثل د(س) = ١٠ − س^{٢} وهي من المنحنيات الأكثر شيوعًا الذي يمثّل مسار كرة تم رميها في الهواء. واكتشاف أنّ هذا المسار يتمثّل بدالة تربيعية كان لجاليليو Galileo مع بداية القرن السابع عشر، الذي توصل إلى أنّ الحركة الرأسية لكرة تم رميها رأسيًا إلى الأعلى يمكن تمثيلها بدالة تربيعية.

كما أن الخوارزمي كتب أول كتاب في الجبر، حيث أتت كلمة 'الجبر' 'Algebra' مستمدّة من عنوان هذا الكتاب (الجبر والمقابلة). يمثّل الجبر والمقابلة العمليتَين الأساسيتَين التي استخدمهما الخوارزمي في حل المعادلات التربيعية. لقد أسس كتاب الخوارزمي أول حلّ نظامي للمعادلات الخطية والتربيعية وأحد إنجازاته في الجبر كان برهان كيفية حلّ المعادلات التربيعية.

١-١ حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل إلى عوامل

سبق أن تعلّمت طريقة التحليل إلى عوامل وطريقة الصيغة التربيعية لحلّ المعادلات التربيعية جبريًا.

مثــال ١

حلّ المعادلة س^{٢} = ٣س + ٢٨

الحــلّ:

س^{٢} = ٣س + ٢٨	اكتب المعادلة في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠
س^{٢} − ٣س − ٢٨ = ٠	حلّل إلى العوامل.
(س − ٧)(س + ٤) = ٠	استخدم الحقيقة إذا كان ناتج الضرب ل ك = ٠، فإن ل = ٠ أو ك = ٠
س − ٧ = ٠ أو س + ٤ = ٠	حلّ.

$\therefore$ س = ٧ أو س = $^{-}$٤

مثــال ٢

حلَّ المعادلة الآتية ٩س^{٢} − ٣٩س − ٣٠ = ٠

الحــلّ:

٩س^{٢} − ٣٩س − ٣٠ = ٠ .... اقسم الطرفَين على العامل المشترك ٣

٣س^{٢} − ١٣س − ١٠ = ٠ .... حلّل إلى العوامل.

(٣س + ٢)(س − ٥) = ٠

٣س + ٢ = ٠ أو س − ٥ = ٠ .... حلّ.

س = − $\frac{٢}{٣}$ أو س = ٥

مساعدة

اقسم أولًا، إن أمكن، على العامل المشترك.

استكشف ١

٢س^{٢} + ٣س − ٥ = (س − ١)(س − ٢)

المعروض أدناه هو حلّ مُنى للمعادلة السابقة:

حلّلت الطرف الأيمن إلى عوامل: (س − ١)(٢س + ٥) = (س − ١)(س − ٢)

٢س^{٢} + ٣س − ٥ = س^{٢} − ٣س + ٢

٢س^{٢} − ٣ = ٠

أعادت ترتيب الحدود: س = $^{-}$٧

ناقش حلّ مُنى مع أقرانك في الصفّ موضّحًا الخطأ الذي ارتكبته،

ثم حلَّ المعادلة حلًّا صحيحًا.

مثــال ٣

حلَّ المعادلة $\frac{٢١}{٢س} - \frac{٢}{س + ٣} = ١$

الحــلّ:

$\frac{٢١}{٢س} - \frac{٢}{س + ٣} = ١$ .... اضرب الطرفَين في ٢س(س + ٣).

$٢١(س + ٣) - ٤س = ٢س(س + ٣)$ .... فكَّ الأقواس وأَعد ترتيب الحدود.

$٢س^٢ - ١١س - ٦٣ = ٠$ .... حلّل إلى العوامل.

$(٢س + ٧)(س - ٩) = ٠$

$٢س + ٧ = ٠$ أو $س - ٩ = ٠$ .... حلّ.

$\therefore س = -\frac{٧}{٢}$ أو $س = ٩$

مساعدة

عند التعامل مع المقادير النسبية، يجب أن يذكر أن المقام لا يمكن أن يكون صفرًا إذًا هنا $س \neq ٠$ و$س \neq -٣$

مثــال ٤

حلَّ المعادلة $\frac{٣س^٢ + ٢٦س + ٣٥}{س^٢ + ٨} = ٠$

الحــلّ:

$\frac{٣س^٢ + ٢٦س + ٣٥}{س^٢ + ٨} = ٠$ .... اضرب طرفَي المعادلة في $(س^٢ + ٨)$

$٣س^٢ + ٢٦س + ٣٥ = ٠$ .... حلّل إلى العوامل.

$(٣س + ٥)(س + ٧) = ٠$

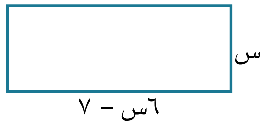
$٣س + ٥ = ٠$ أو $س + ٧ = ٠$ .... حلّ.

$\therefore س = -\frac{٥}{٣}$ أو $س = -٧$

مثــال ٥

مستطيل بُعداه (س) سم و (٦س − ٧) سم ومساحته ٩٠ سم^{٢}.

أوجد بُعدَي المستطيل.



الحــلّ:

المساحة = س(٦س − ٧)	فكّ الأقواس.
٦س^{٢} − ٧س = ٩٠	اكتب المعادلة.
٦س^{٢} − ٧س − ٩٠ = ٠	حلّل إلى العوامل.
(٢س − ٩)(٣س + ١٠) = ٠	
٢س − ٩ = ٠ أو ٣س + ١٠ = ٠	حلّ.
س = $\frac{٩}{٢}$ = ٤$\frac{١}{٢}$ أو س = − $\frac{١٠}{٣}$ (مرفوض)	بما أن بُعدَي المستطيل كمّية موجبة، فإن قيمة س = ٤$\frac{١}{٢}$

عندما يكون س = ٤$\frac{١}{٢}$ فإن ٦س − ٧ = ٢٠

∴ بُعدَي المستطيل ٤$\frac{١}{٢}$ سم، ٢٠ سم

مثــال ٦

لدى سعيد ٢٠ لعبة يريد بيعها، وربحه يعتمد على عدد الألعاب التي سيبيعها، وعلى سعر اللعبة الواحدة.

شكّل سعيد دالة ليحدّد سعر البيع س (بالريال العُماني) الذي يجب أن يبيع به كل لعبة ليحصل على الربح (ح)

ح = س(س − ٢٠)

أوجِد سعر البيع للّعبة الواحدة إذا كان سعيد يريد ربح ١٢٠٠٠ ريال عُماني.

الحــلّ:

ح = س (س − ٢٠)	عوّض عن قيمة ح في الصيغة.
١٢٠٠٠ = س(س − ٢٠)	فكّ الأقواس.
١٢٠٠٠ = س^{٢} − ٢٠س	أعِد ترتيب المعادلة التربيعية لتصبح مساوية للصفر.
س^{٢} − ٢٠س − ١٢٠٠٠ = ٠	حلّل المعادلة التربيعية إلى العوامل.
(س + ١٠٠)(س − ١٢٠) = ٠	حدّد قيمة س التي تجعل كل عامل صفرًا.
س = −١٠٠ (مرفوض) أو س = ١٢٠	اختر قيمة س التي تتناسب مع سياق المسألة، حيث إنه من المستحيل لسعر الألعاب أن يكون عددًا سالبًا.

س = ١٢٠ ريال عُماني

سعر البيع للعبة الواحدة يساوي ١٢٠ ريالًا عُمانيًا.

تمارين ١-١

١) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام التحليل إلى العوامل:

أ $س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠$

ب $٥س^{٢} + ١٩س + ١٢ = ٠$

ج $٢٠ - ٧س = ٦س^{٢}$

د $س(١٠س - ١٣) = ٣$

٢) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ $س - \frac{٦}{س - ٥} = ٠$

ب $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س + ٢} = ١$

ج $\frac{٥س + ١}{٤} - \frac{٢س - ١}{٢} = س^{٢}$

د $\frac{٥}{س + ٣} + \frac{٣س}{س + ٤} = ٢$

هـ $\frac{٣}{س + ١} + \frac{١}{س(س + ١)} = ٢$

و $\frac{٣}{س + ٢} + \frac{١}{س - ١} = \frac{١}{(س + ١)(س + ٢)}$

٣) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ $\frac{٣س^{٢} + س - ١٠}{س^{٢} - ٧س + ٦} = ٠$

ب $\frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} + ٥} = ٠$

ج $\frac{س^{٢} - ٩}{٧س + ١٠} = ٠$

د $\frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س^{٢} + ٧س + ١٠} = ٠$

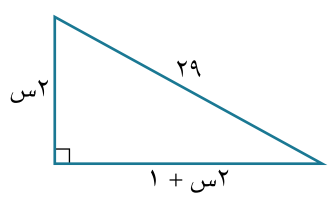
هـ $\frac{٦س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} + ٧س + ٤} = ٠$

و $\frac{٢س^{٢} + ٩س - ٥}{س^{٤} + ١} = ٠$

مُساعَدة

تذكّر أن تتحقّق من كلّ ناتج من النواتج.

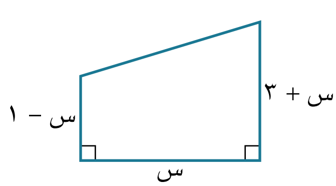
٤) يبيّن الشكل المجاور مثلّثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه (٢س) سم، (٢س + ١) سم، ٢٩ سم.



أ بيّن أن $٢س^{٢} + س - ٢١٠ = ٠$

ب أوجد أطوال أضلاع المثلّث.

٥) مساحة شبه المنحرف المجاور ٣٥,٧٥ سم^{٢}.
أوجد قيمة س.



★ **٦)** تمّ رمي كرة في الهواء. يمكن تمثيل ارتفاعها عن سطح الأرض (ع متر)، بالمعادلة:

$$ع = ٣ + ٢ن - ن^{٢}،$$

حيث ن الزمن بالثواني.

بقيت الكرة في الهواء منذ اللحظة الأولى لرميها. أوجد:

أ الارتفاع الذي كانت عليه الكرة عند رميها في اللحظة الأولى.

ب الزمن اللازم لتكون الكرة على ارتفاع ٤ أمتار.

٧) يتم تحديد أرباح مصنع (بمئات الريالات العُمانية) لعملية تصنيع منتج ما في شهر واحد بواسطة:

$$ر = ٢س^{٢} - ٧س$$

حيث س عدد القطع المنتجة.

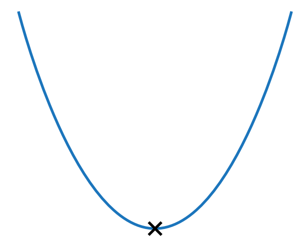
أ كم قطعة يجب أن ينتج المصنع ليبيعها فيكون الربح صفرًا؟ وضّح إجابتك.

ب كم قطعة يجب أن ينتج المصنع لربح ٦٦٠٠٠ ريالًا عُمانيًّا؟

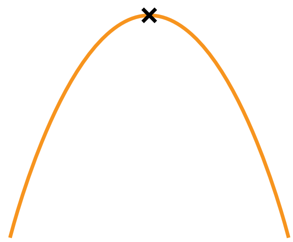
١-٢ القيم العظمى و القيم الصغرى للدالة التربيعية

الصورة العامّة للدالة التربيعية هي د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠

يُسمّى شكل منحنى الدالة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ **منحنى الدالة التربيعية quadratic curve**. يعتمد وضع المنحنى على قيمة أ، أي إشارة معامل س^{٢}



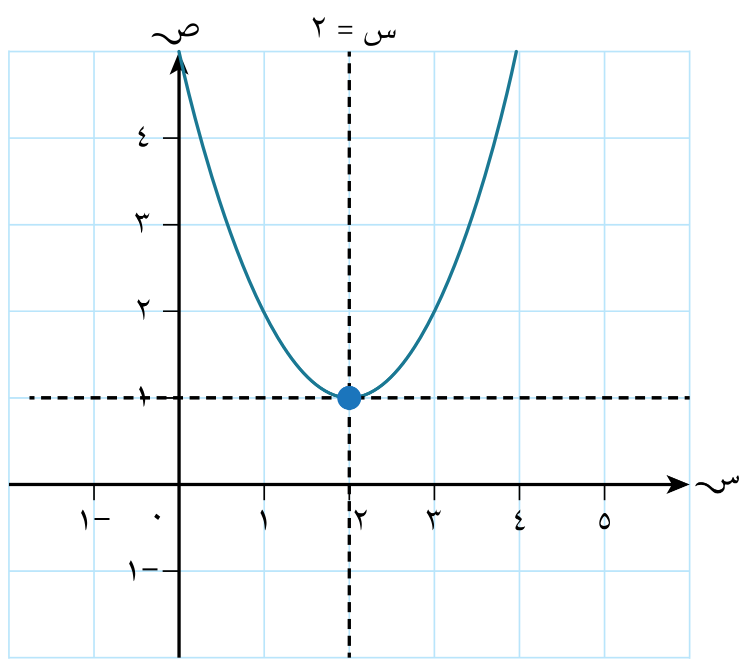
إذا كان أ > ٠ يكون للمنحنى **نقطة صغرى minimum point** وتكون (س، ص) أسفل نقطة في المنحنى وتكون ص القيمة الصغرى.



إذا كان أ < ٠ يكون للمنحنى **نقطة عظمى maximum point** وتكون (س، ص) أعلى نقطة في المنحنى وتكون ص القيمة العظمى.

مُساعَدة

عند رسم منحنى الدالة التربيعية، يجب الأخذ في الاعتبار ما يأتي:
- الشكل العام للمنحنى
- التقاطع مع المحورَين
- إحداثيات نقطة رأس المنحنى.



لاحظ أن معادلة محور التماثل هي س = ٢

مُساعَدة

النقطة التي يكون الميل عندها صفرًا تُسمّى **نقطة الثبات stationary point** أو **نقطة التحوّل turning point**.

مُساعَدة

محور التماثل هو المستقيم الذي يقسم منحنى الدالة التربيعية لقسمين متماثلين.

مثـــال ٧

إذا كانت الدالة د(س) = س^{٢} − ٣س − ٤ حيث س ∈ ع

أ أوجد نقاط تقاطع منحنى الدالة ص = د (س) مع المحورَين السيني والصادي.

ب ارسم منحنى الدالة ص = د (س)، وأوجد إحداثيات نقطة التحول.

الحـــلّ:

أ د (س) = س^{٢} − ٣س − ٤ .... لتجد الجزء المقطوع مع المحور الصادي، ضع س = ٠

عندما س = ٠، فإن ص = (٠)^{٢} − ٣ × ٠ − ٤ = −٤

نقطة تقاطع منحنى الدالة د(س) مع محور الصادات هي (٠، −٤)

عندما ص = ٠، فإن س^{٢} − ٣س − ٤ = ٠ .... لتجد الجزأَين المقطوعَين من المحور السيني، اجعل ص = ٠

(س + ١)(س − ٤) = ٠ .... حلل إلى العوامل.

س = −١ أو س = ٤ .... حل.

∴ (−١، ٠)، (٤، ٠) هي نقاط تقاطع منحنى الدالة مع المحور السيني.

ب يمرّ محور التماثل في نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين س = −١ و س = ٤، وعليه تكون

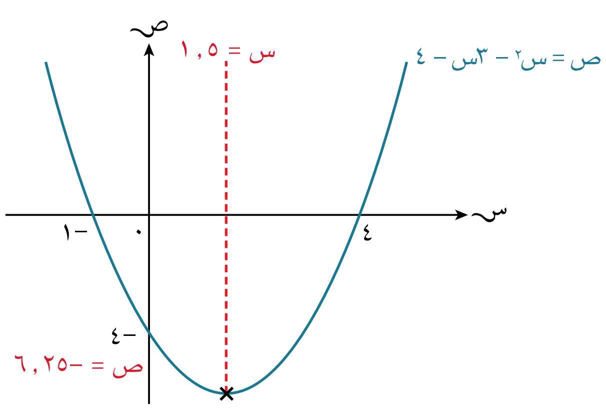
معادلة محور التماثل س = $\frac{-١ + ٤}{٢}$ = ١,٥

عندما س = ١,٥ فإنّ ص = (١,٥)^{٢} − ٣(١,٥) − ٤

ص = −٦,٢٥

وحيث إن أ > ٠ فإنّ شكل المنحنى مفتوح إلى الأعلى (شكل ∪)

∴ نقطة التحول هي (١,٥، −٦,٢٥)



مثــال ٨

أجب عن الأسئلة أدناه للدالة التربيعية ص = ١٠ + ٨س − ٢س^{٢} حيث س ∈ ع

أ أوجِد الجزأَين المقطوعَين من المحورَين السيني والصادي.

ب ارسم منحنى الدالة.

ج أوجد إحداثيات نقطة التحوّل وحدّدها على الرسم.

الحــلّ:

أ ص = ١٠ + ٨س − ٢س^{٢}

لتجد الجزء المقطوع من المحور الصادي، اجعل س = ٠

عندما س = ٠، فإن ص = ١٠ + ٨ × ٠ − ٢ × ٠^{٢} = ١٠

الجزء المقطوع من المحور الصادي = ١٠

عندما ص = ٠، فإن ١٠ + ٨س − ٢س^{٢} = ٠

لتجد الجزء المقطوع من المحور السيني، اجعل ص = ٠

−٢(س^{٢} − ٤س − ٥) = ٠

اقسم على العامل المشترك.

س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

حلّل إلى العوامل.

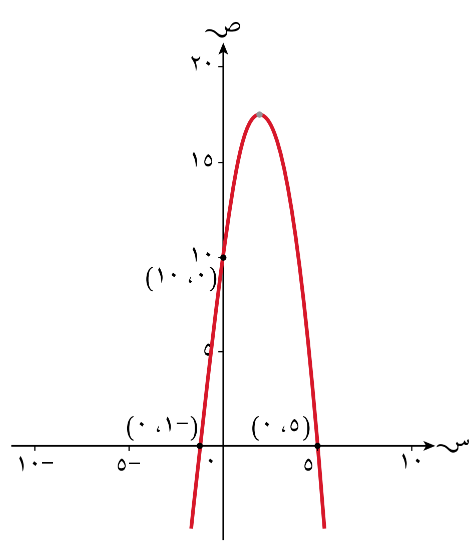
(س − ٥)(س + ١) = ٠

استخدم العوامل لتحل.

س = ٥ أو س = −١

تقطع الدالة محور السينات عند س = ٥، س = −١

ب



بما أن معامل س^{٢} عدد سالب، فإن للمنحنى قيمة عظمى. حدّد بوضوح نقاط التقاطع مع المحورَين اللذَين وجدتهما في الجزئية (أ).

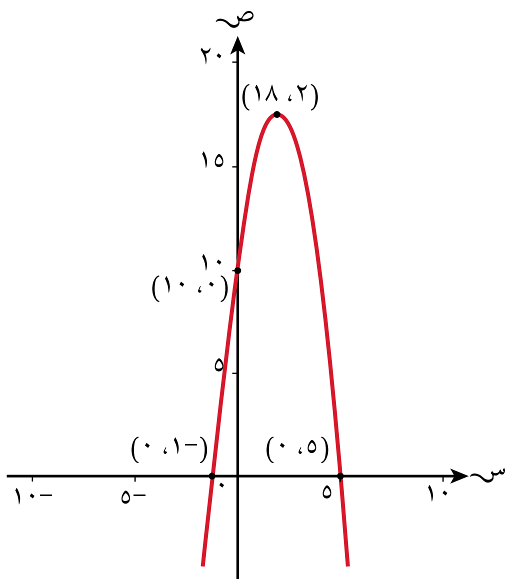
ج $س = \frac{٥ + ١^-}{٢} = ٢$

تقع نقطة المنتصف للمسافة بين نقطتَي الجزء المقطوع من المحور السيني محور التماثل.

عندما س = ٢، فإن ص = ١٠ + ٨ × ٢ − ٢ × ٢^٢ = ١٨

(٢، ١٨) هي نقطة التحوّل، وفي هذه الحال تكون عندها قيمة عظمى.

عوّض عن قيمة س لتجد الإحداثي ص لنقطة التحوّل.



مثـــال ٩

ارسم منحنى الدالة ص = س^٢ − ٦س + ٩

الحــلّ:

ص = س^٢ − ٦س + ٩

لتجد الجزء المقطوع مع المحور الصادي، ضع س = ٠

عندما س = ٠، يكون ص = ٠^٢ − ٦ × ٠ + ٩ = ٩

∴ الجزء المقطوع من المحور الصادي = ٩

عندما ص = ٠، يكون س^٢ − ٦س + ٩ = ٠

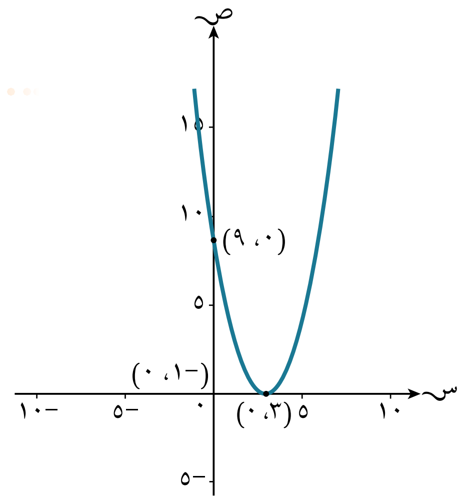
حدّد الجزء المقطوع من المحور السيني بجعل ص = ٠

(س − ٣)(س − ٣) = ٠

حلّل إلى العوامل لحلّ المعادلة.

س = ٣

المعادلة التربيعية لها عامل واحد مكرّر ما يعني أن لها حلًا واحدًا ونقطة تقاطع واحدة مع المحور السيني. وعليه، فإن المنحنى يمسّ المحور السيني عندما س = ٣ ولا يقطعه.



إذًا، الجزء المقطوع من المحور السيني يساوي ٣ وبما أن معامل س^{٢} موجب فإن نقطة التحوّل قيمة صغرى.

معادلة محور التماثل س = ٣ وتقع نقطة التحوّل على المحور السيني.

مثال ١٠

ارتفاع طائرة ع (بآلاف الأقدام) فوق سطح البحر معطى بالمعادلة الآتية:

ع = ٨ + ١٥ن − ٢ن^{٢}

حيث ن الزمن (بالساعة) منذ أقلعت الطائرة.

أوجد الارتفاع الأقصى الذي يمكن للطائرة أن تصل إليه فوق سطح البحر خلال رحلتها.

الحـــلّ:

للمنحنى نقطة عظمى. — لأن إشارة أ سالبة

٠ = (٢ن + ١)(−ن + ٨) — لتجد نقاط التقاطع مع المحور السيني، اجعل ع = ٠ وحلّل إلى العوامل

∴ ن = −٠,٥ أو ن = ٨

نقطة المنتصف بين ن = ٨، ن = −٠,٥ هي ن = ٣,٧٥

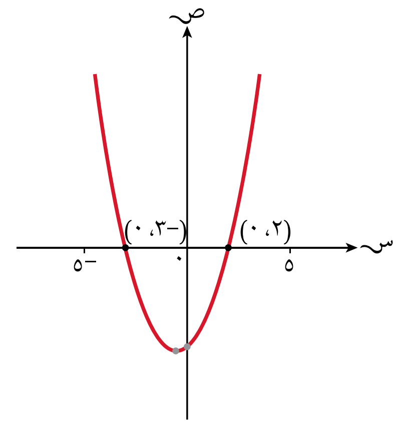
ع = ٨ + ١٥ × ٣,٧٥ − ٢ × (٣,٧٥)^{٢} — عوّض عن قيمة ن وأوجد قيمة ع

وعليه، الارتفاع الأقصى هو ٣٦,١٢٥ ألف قدم أو ٣٦١٢٥ قدمًا.

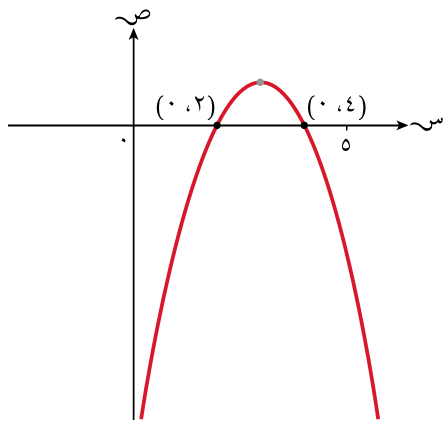
تمارين ١-٢

١) لكل دالة من الدوال التربيعية الآتية، استخدم رسم المنحنى المعطى لتحدّد معادلة محور التماثل، ثم لتحسب إحداثيات نقطة التحوّل.

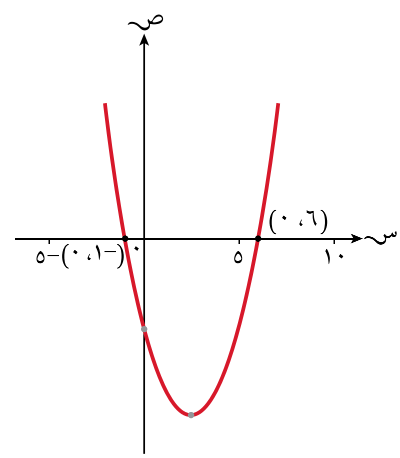
أ ص = س^{٢} + س − ٦



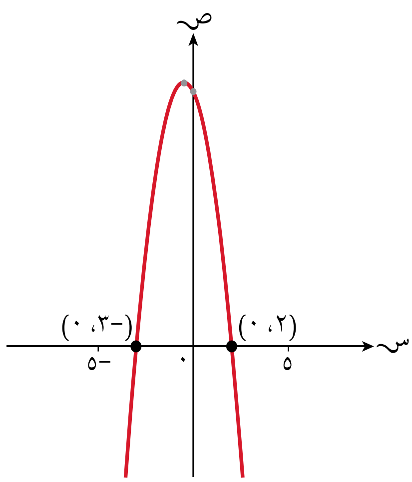
ب ص = − س^{٢} + ٦س − ٨



ج ص = س^{٢} − ٥س − ٦



د ص = ١٢ − ٢س − ٢س^{٢}

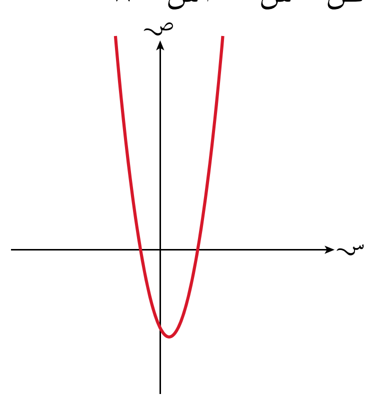


٢) في كل حالة من الحالات الآتية:

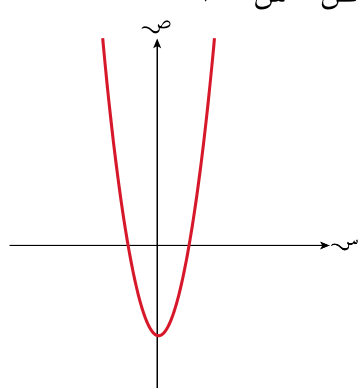
١) احسب الجزأين المقطوعَين من المحورَين.

٢) حدّد معادلة محور التماثل، ثم احسب إحداثيات نقطة التحوّل.

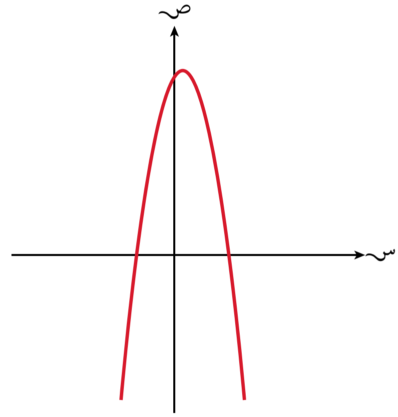
أ ص = س^{٢} − ٢س − ٨



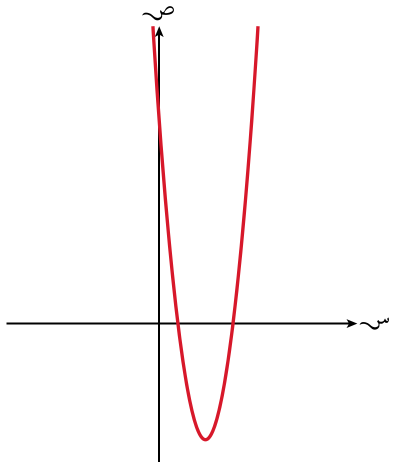
ب ص = س^{٢} − ٩



ج) ص = ١٥ + ٢س − س^{٢}



د) ص = ٢س^{٢} − ١٥س + ١٨



٣) استخدم تماثل كلّ دالة من الدوال التربيعية الآتية لتجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى. ارسم كلّ منحنى مبيّنًا جميع نقاط التقاطع مع المحورَين:

أ) ص = س^{٢} − س − ٢٠

ب) ص = س^{٢} + ٤س − ٢١

ج) ص = س^{٢} + ٣س − ٢٨

٤) تمّ بناء غرفة تتمثّل مساحتها:

م = ٥س − س^{٢}

حيث بُعداها س، (٥ − س) بالأمتار. أوجد أكبر مساحة ممكنة للغرفة، وحدّد بُعدَيها اللَّذين يعطيان أكبر مساحة.

٥) تتمثّل دالة ربح شركة بالصيغة:

ر = س(١٢ − س)

حيث يقاس الربح (ر) بآلاف الريالات العُمانية و (س) عدد الوحدات المبيعة. احسب أكبر ربح يمكن الحصول عليه وعدد الوحدات الواجب بيعها للحصول على أكبر ربح.

١-٣ المتباينات التربيعية

سبق أن درست كيفية حلّ المتباينات الخطّية في الفصل الدراسي الأول من الصف التاسع، الوحدة السادسة. المعروض، أدناه، مثالان على ذلك:

حلّ المتباينة ٢(س − ٥) > ٩ — فُكّ الأقواس.
٢س − ١٠ > ٩ — أضف ١٠ إلى طرفَي المتباينة.
٢س > ١٩ — اقسم الطرفَين على ٢
س > ٩,٥

حلّ المتباينة ٥ − ٣س ≤ ١٧ — اطرح ٥ من الطرفَين
−٣س ≤ ١٢ — اقسم الطرفَين على −٣
س ≥ −٤

مُساعَدة

من المهم جدًا أن تتذكّر أنه عند ضرب طرفَي المتباينة في عدد سالب، أو قسمتهما على عدد سالب، يتوجّب أن تعكس رمز المتباينة. يوضّح المثال كيف تمّت قسمة طرفَي المتباينة على العدد −٣

نتيجة ١

تكتب المتباينات التربيعية في صورة أس^{٢} + ب س + جـ $\square$ ٠، حيث أ ≠ ٠، يمكن استخدام الرموز ≤، ≥، <، > في المربع.

مجموعة حل المتباينة التربيعية هي مجموعة القيم التي تحقّقها.

يمكن حل المتباينات التربيعية من خلال رسم المنحنى والأخذ بالاعتبار ما إذا كان المنحنى فوق المحور السيني أو تحته.

مثــال ١١

حلّ المتباينة س^{٢} − ٣س − ٤ > ٠

الحــلّ:

اجعل ص = س^{٢} − ٣س − ٤ — حدّد الجزأين المقطوعَين من المحور السيني بجعل ص = ٠

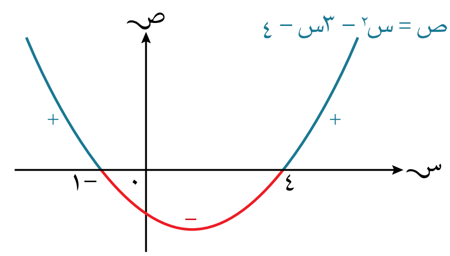
عندما ص = ٠ فإن س^{٢} − ٣س − ٤ = ٠ — حلّ س^{٢} − ٣س − ٤ = ٠، ثم حدّد نقاط التقاطع مع المحور السيني.

(س + ١)(س − ٤) = ٠

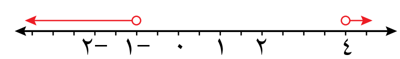
س = −١ أو س = ٤

∴ الإحداثي السيني لنقاط التقاطع مع الجزء المقطوع من المحور السيني هو −١، ٤ — بما أن المتباينة س^{٢} − ٣س − ٤ > ٠ خذ قيم س التي يكون عندها منحنى الدالة التربيعية موجبًا، (فوق المحور السيني).

الحلّ هو س < −١، س > ٤



يمكننا أيضًا تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد



مثــال ١٢

حلّ المتباينة ٢س^{٢} ≥ ١٥ − س

الحـــلّ:

٢س^{٢} + س − ١٥ ≥ ٠

أعد ترتيب الحدود للحصول على العدد صفر في أحد الطرفَين.

ارسم منحنى ٢س^{٢} + س − ١٥ = ٠

عندما ص = ٠، فإن ٢س^{٢} + س − ١٥ = ٠

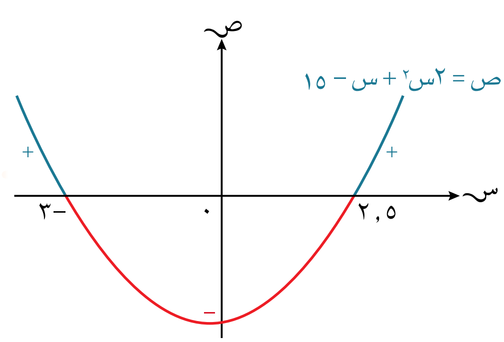
(٢س − ٥)(س + ٣) = ٠

س = ٢,٥ أو س = −٣

∴ نقاط التقاطع مع المحور السيني هي (−٣، ٠)، (٢,٥، ٠)

الحلّ هو −٣ ≤ س ≤ ٢,٥

لإيجاد حل المتباينة ٢س^{٢} + س − ١٥ ≥ ٠ نحتاج إلى إيجاد مجموعة قيم س التي يكون المنحنى فيها إما صفرًا أو سالبًا (أسفل المحور السيني).



ارسم منحنى ص = ٢س^{٢} + س − ١٥ محددًا نقاط التقاطع مع المحور السيني.

مثــال ١٣

تتمثّل دالة الربح (ر) لشركة ما من خلال المعادلة:

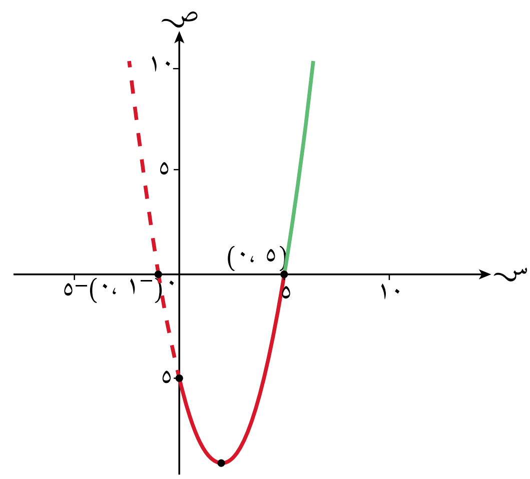
ر = س^{٢} − ٤س − ٥

حيث س هو عدد الوحدات المبيعة بالمئات. احسب عدد الوحدات التي يتعيّن على الشركة بيعها لتحقيق ربح.

الحــلّ:

ر = س^{٢} − ٤ س − ٥ .... حلّل إلى العوامل لحلّ المعادلة.

ر = (س − ٥)(س + ١)



ارسم منحنى الدالة.

يبدأ الربح عندما تبدأ نقاط منحنى الدالة التربيعية ويزيد إحداثيها الصادي عن صفر، أي يبدأ الربح بعد النقطة (٥، ٠)

يتحقق الربح بعد س = ٥

وبما أن س تمثل عدد الوحدات المبيعة بالمئات

إذن ستحقق الشركة ربحًا عندما يتم بيع أكثر من ٥٠٠ منتج (٥ × ١٠٠)

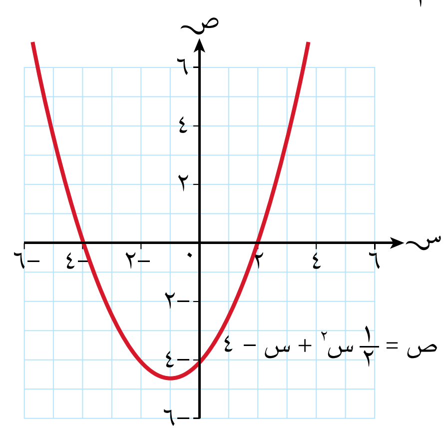
مساعدة

يتحقق الربح بعد أن تبيع الشركة عددا من الوحدات يغطي تكلفة تصنيع كامل الوحدات
أي أن الربح (ر) يبدأ يزيد عن صفر.

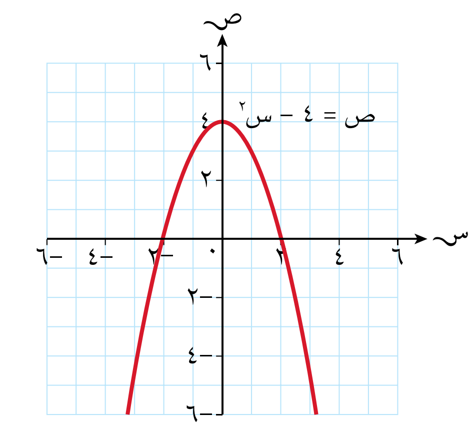
تمارين ١-٣

١) استخدم كل منحنى للدوال التربيعية الآتية لتحدّد المنطقة التي تحقّق المتباينة المعطاة:

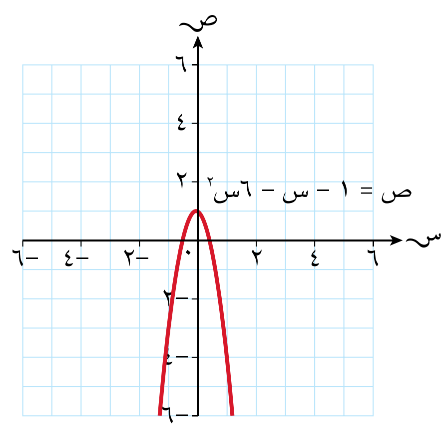
أ $\frac{١}{٢}$س^{٢} + س − ٤ ≤ ٠



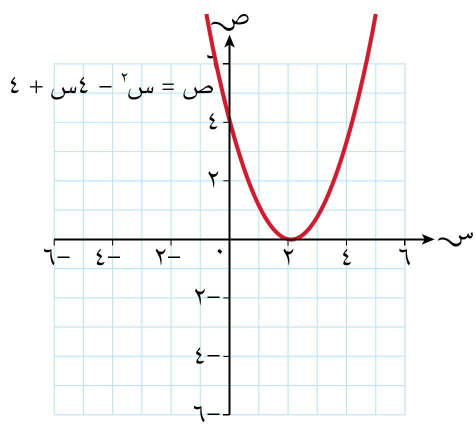
ب ٤ − س^{٢} < ٠



ج ١ − س − ٦س^{٢} ≥ ٠



د س^{٢} − ٤س + ٤ > ٠



٢) حلّ كل متباينة من المتباينات الآتية:

أ (س + ٣)(س − ٤) > ٠
ب (س − ٥)(س − ١) ≥ ٠
ج (س − ٣)(س + ٧) ≤ ٠
د س(س − ٥) < ٠
هـ (٢س + ١)(س − ٤) < ٠
و (٣ − س)(س + ١) ≥ ٠
ز (٢س + ٣)(س − ٥) < ٠
ح (س − ٥)^{٢} ≤ ٠
ط (س − ٣)^{٢} ≥ ٠

٣) حلّ كل متباينة من المتباينات الآتية:

أ س^{٢} + ٥س − ١٤ < ٠
ب −س^{٢} − س + ٦ ≤ ٠
ج س^{٢} − ٩س + ٢٠ ≤ ٠
د س^{٢} + ٢س − ٤٨ > ٠
هـ ٢س^{٢} − س − ١٥ ≥ ٠
و ٥س^{٢} + ٩س + ٤ > ٠

٤) حلّ كل متباينة من المتباينات الآتية:

أ) $س^٢ < ١٨ - ٣س$

ب) $١٢س > س^٢ + ٣٥$

ج) $س(٣ - ٢س) \geq ١$

د) $س^٢ + ٤س < ٣(س + ٢)$

هـ) $(س + ٣)(١ - س) > س - ١$

٥) يتمثل الارتفاع الرأسي (ع) للعبة طائرة عندما تطير بالمعادلة:

$$ع = ٥ن - ن^٢$$

حيث ن الزمن (بالثواني) منذ بداية طيران الطائرة. كم ثانية بقيت الطائرة على ارتفاع أعلى من ٤ م؟

١-٤ جذور المعادلة التربيعية

درست في الفصل الدراسي الثاني من الصف العاشر، الوحدة التاسعة كيفية حلّ المعادلات التربيعية باستخدام الصيغة التربيعية.

الصيغة التربيعية هي $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$، وتسمى النواتج **جذورًا roots** للمعادلة.

$س^٢ + ٢س - ٨ = ٠$	$س^٢ + ٦س + ٩ = ٠$	$س^٢ + ٢س + ٦ = ٠$
$\frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤ \times ١ \times (-٨)}}{٢ \times ١}$	$\frac{-٦ \pm \sqrt{٦^٢ - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١}$	$\frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤ \times ١ \times ٦}}{٢ \times ١}$
$\frac{-٢ \pm \sqrt{٣٦}}{٢}$	$\frac{-٦ \pm \sqrt{٠}}{٢}$	$\frac{-٢ \pm \sqrt{-٢٠}}{٢}$
$س = ٢$ أو $س = -٤$	$س = -٣$ أو $س = -٣$	لا توجد جذر حقيقي
جذران حقيقيان مختلفان	**جذران حقيقيان متساويان**	**لا توجد جذور حقيقية**

يسمّى الجزء تحت الجذر التربيعي في الصيغة التربيعية **المميّز discriminant**.

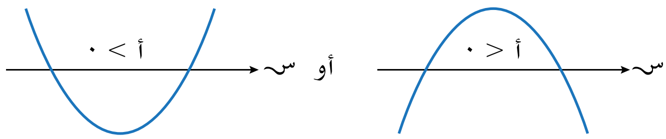
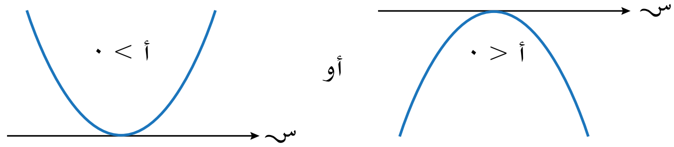
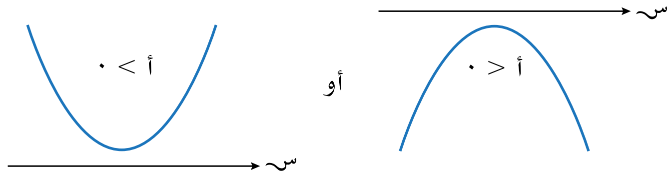
نتيجة ٢

مميّز المعادلة $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ هو $ب^٢ - ٤أجـ$

تدل إشارة المميّز (موجبة كانت أو صفرًا أو سالبة) على عدد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية.

$ب^٢ - ٤أجـ$	نوع الجذور
> ٠	جذران حقيقيان مختلفان
$= ٠$	جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر)
< ٠	لا توجد جذور حقيقية

يوجد رابط بين عدد جذور المعادلة التربيعية $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ ونقاط تقاطع منحنى الدالة $ص = أس^٢ + ب س + جـ$ مع محور السينات.

ب^{٢} − ٤أجـ	نوع جذور المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠	شكل منحنى الدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ
> ٠	جذران حقيقيان مختلفان	 يقطع المنحنى المحور السيني في نقطتَين مختلفتَين
= ٠	جذران حقيقيان متساويان (أو جذر حقيقي واحد مكرّر)	 يمسّ المنحنى محور السينات في نقطة واحدة.
< ٠	لا توجد جذور حقيقية	 يقع المنحنى فوق محور السينات أو تحت محور السينات بشكل كامل.

مثـــال ١٤

استخدم المميّز لتحدّد عدد الجذور الحقيقية لكل معادلة تربيعية من المعادلات الآتية:

أ س^{٢} − ٢س + ٧ = ٠

ب ١٠ + ٣س − س^{٢} = ٠

ج س^{٢} = ٢٥

د س^{٢} − ٥س + ١٥ = ٥س − ١٠

الحــلّ:

أ أ = ١، ب = −٢، جـ = ٧ .... احسب قيمة المميّز.

ب^{٢} − ٤أجـ = (−٢)^{٢} − ٤ × ١ × ٧ = −٢٤ < ٠

∵ ب^{٢} − ٤أجـ < ٠

∴ لا توجد جذور حقيقية.

ب $-$س^٢ + ٣س + ١٠ = ٠ .... من المفيد كتابة المعادلة في صورة أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

أ = $-$١، ب = ٣، جـ = ١٠ .... احسب قيمة المميّز.

ب^٢ $-$ ٤أ جـ = ٣^٢ $-$ ٤ × $-$١ × ١٠ = ٤٩ > ٠

∵ ب^٢ $-$ ٤أ جـ > ٠

∴ يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

ج س^٢ $-$ ٢٥ = ٠ .... أعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

أ = ١، ب = ٠، جـ = $-$٢٥ .... في بعض الأحيان يمكن أن تكون قيم ب أو جـ صفرًا إن لم يوجد الحدّ س أو لم يوجد العدد الثابت. احسب قيمة المميّز.

ب^٢ $-$ ٤أ جـ = ٠^٢ $-$ ٤ × ١ × $-$٢٥ = ١٠٠ > ٠

∵ ب^٢ $-$ ٤أ جـ > ٠

∴ يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

د س^٢ $-$ ١٠س + ٢٥ = ٠ .... أعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

أ = ١، ب = $-$١٠، جـ = ٢٥ .... احسب قيمة المميّز.

ب^٢ $-$ ٤أ جـ = ($-$١٠)^٢ $-$ ٤ × ١ × ٢٥ = ٠

∵ ب^٢ $-$ ٤أ جـ = ٠

∴ يوجد جذران حقيقيان متساويان.

مثــال ١٥

أوجِد قيم ك إذا كان للمعادلة س^٢ $-$ ٣س + ٦ = ك(س $-$ ٢) جذران متساويان.

الحــلّ:

س^٢ $-$ ٣س + ٦ = ك(س $-$ ٢) .... أعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

س^٢ $-$ ٣س + ٦ $-$ ك س + ٢ك = ٠

س^٢ $-$ (٣ + ك)س + ٦ + ٢ك = ٠

∵ الجذران متساويان، لذا فإن ب^٢ $-$ ٤أ جـ = ٠ .... استخدم المميز لتشكّل معادلة مجهولها ك

حيث أن أ = ١، ب = $-$(٣ + ك)، جـ = ٦ + ٢ك

∴ (٣ + ك)^٢ $-$ ٤ × ١ × (٦ + ٢ك) = ٠

ك^٢ + ٦ك + ٩ $-$ ٢٤ $-$ ٨ك = ٠

ك^٢ $-$ ٢ك $-$ ١٥ = ٠ .... حلّ المعادلة لتجد قيم ك التي تحقق المعادلة.

(ك + ٣)(ك $-$ ٥) = ٠

∴ ك = $-$٣ أو ك = ٥

مثـــال ١٦

أوجِد قيم ك إذا كان للمعادلة س^{٢} + (ك − ٢)س + ٤ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

الحـــلّ:

س^{٢} + (ك − ٢)س + ٤ = ٠

∵ الجذران مختلفان، لذلك فإن ب^{٢} − ٤أ جـ > ٠ ...... استخدم المميز لتشكل معادلة مجهولها ك

(ك − ٢)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ > ٠

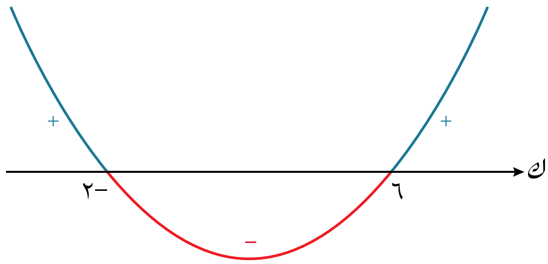
ك^{٢} − ٤ك + ٤ − ١٦ > ٠

ك^{٢} − ٤ك − ١٢ > ٠

(ك + ٢)(ك − ٦) > ٠ ...... بما أنها متباينة، يجب استخدام الطرائق التي استخدمناها في الدرس ١-٣، وذلك لإيجاد قيم س التي تتضمّن رسم المنحنى لتحديد المنطقة حيث المتباينة > ٠

من الرسم نلاحظ أن

ك < −٢ أو ك > ٦



تمارين ١-٤

١) حدّد ما إذا كان لكل معادلة من المعادلات الآتية جذران حقيقيان مختلفان، أو جذران حقيقيان متساويان، أو لا جذور حقيقية لها:

أ س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠

ب س^{٢} + ٤س − ٢١ = ٠

ج س^{٢} + ٩س + ١ = ٠

د س^{٢} − ٣س + ١٥ = ٠

هـ س^{٢} − ٦س + ٢ = ٠

و ٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥ = ٠

ز ٣س^{٢} + ٢س + ٧ = ٠

ح ٥س^{٢} − ٢س − ٩ = ٠

٢) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة س^{٢} + ك س + ٩ = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

٣) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ك س^{٢} − ٤س + ٨ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

٤) أوجِد قيم ك، حيث لا جذور حقيقية للمعادلة ٣س^{٢} + ٢س + ك = ٠

٥) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة (ك + ١)س^{٢} + ك س − ٢ك = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

٦) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ك س^{٢} + ٢(ك + ٣)س + ك = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

٧) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ٣س^{٢} − ٤س + ٥ − ك = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

٨) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ٤س^{٢} − (ك − ٢)س + ٩ = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

٩) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ٤س^{٢} + ٤(ك − ٢)س + ك = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

١٠) بيّن أن جذرَي المعادلة س^{٢} + (ل − ٢)س − ٢ل = ٠ حقيقيان لكل قيم ل الحقيقية.

١١) بيّن أن جذرَي المعادلة ك س^{٢} + ٥س − ٢ك = ٠ حقيقيان ومختلفان لكل قيم ك الحقيقية.

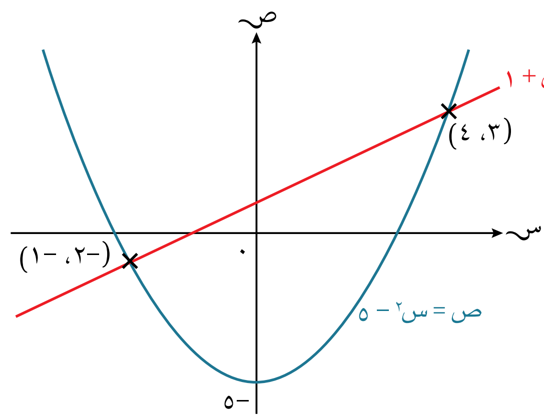
١٢) تمثّل الدالة:

ر = س^{٢} − ٨س + ١٢

إجمالي ربح (ر) شركة (بمئات آلاف الريالات العُمانية)، حيث س عدد الأيام منذ بدء العمل في السنة الأولى.
وضّح متى تبدأ الشركة تحقق ربحًا في السنة الأولى.

١-٥ حلّ المعادلات الآنية (معادلة خطّية ومعادلة تربيعية)

سوف نتعلّم في هذا الدرس كيف نحلّ معادلتَين آنيتَين إحداهما خطيّة والأخرى معادلة تربيعية.



يُبيّن الشكل أعلاه التمثيل البياني للدالتَين ص = س + ١، ص = س^{٢} − ٥

إحداثيات نقطتَي تقاطع الخط المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية هما (−٢، −١)، (٣، ٤)

هذا يعني أن س = −٢، ص = −١ أو س = ٣، ص = ٤ حلول للمعادلتَين الآنيتَين ص = س + ١، ص = س^{٢} − ٥

يُمكن أيضًا إيجاد الحلول جبريًّا:

ص = س^{٢} − ٥ .... (١)

ص = س + ١ .... (٢)

عوّض عن قيمة ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١)

س + ١ = س^{٢} − ٥   أعد ترتيب المعادلة.

س^{٢} − س − ٦ = ٠   حلّل إلى العوامل.

(س + ٢)(س − ٣) = ٠

س = −٢ أو س = ٣

عوّض عن قيمة س = −٢ في المعادلة (٢) للحصول على ص = −٢ + ١ = −١

عوّض عن قيمة س = ٣ في المعادلة (٢) للحصول على ص = ٣ + ١ = ٤

الحلول هي: س = −٢، ص = −١ أو س = ٣، ص = ٤

إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية هي (−٢، −١) و (٣، ٤)

مثـــال ١٧

حل المعادلتَين الآتيتَين آنيًّا:

ص = س + ١٢

ص = س^{٢}

الحـــلّ:

ص = س + ١٢ .... (١)	سمّ المعادلتَين (١)، (٢)
ص = س^{٢} .... (٢)	
س + ١٢ = س^{٢}	عوّض عن ص من المعادلة (١) في المعادلة (٢)
س^{٢} − س − ١٢ = ٠	أعد الترتيب للحصول على صفر في الطرف الأيسر.
(س + ٣)(س − ٤) = ٠	حلّل إلى العوامل.
س = −٣ أو س = ٤	حلّ لتجد قيم س
عندما س = −٣، فإن ص = −٣ + ١٢ = ٩	عوّض عن قيم س في المعادلة (١) لتجد قيم ص

عندما س = ٤، فإن ص = ٤ + ١٢ = ١٦

الحلول هي س = −٣، ص = ٩ و س = ٤، ص = ١٦

يعني ذلك أن منحنيَي ص = س + ١٢ و ص = س^{٢} يتقاطعان عند (−٣، ٩)، (٤، ١٦)

تمارين ١-٥

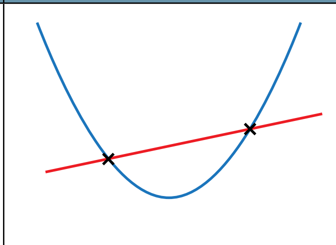
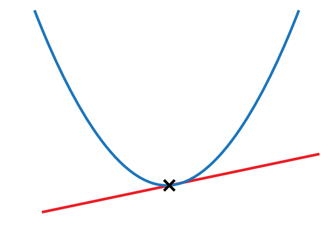
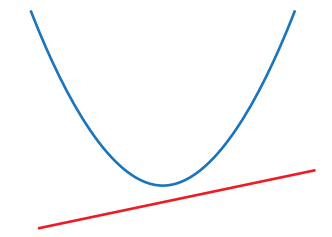
حلَّ كلّ زوج من أزواج المعادلات الآنيّة الآتية:

١) ص = س^{٢}
ص = س + ٦

٢) س + ٣ص = ٠
٢س^{٢} + ٣ص = ١

١-٦ التقاطع بين مستقيم ومنحنى الدالة التربيعية

توجد ثلاث حالات ممكنة عندما يتقاطع خطّ مستقيم مع منحنى الدالة التربيعية.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
توجد نقطتا تقاطع	توجد نقطة تقاطع واحدة	لا توجد نقطة تقاطع
يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين.	يمس المستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ المستقيم **مماسّ tangent** للمنحنى.	لا يقطع المستقيم المنحنى.

لقد درست كيف تجد نقاط تقاطع المستقيم ص = س − ٦ مع منحنى الدالة التربيعية ص = س^{٢} − ٣س − ٢ بحلّ المعادلتَين آنيًّا.

ستحصل على س^{٢} − ٣س − ٢ = س − ٦

س^{٢} − ٤س + ٤ = ٠

يمكن حلّ المعادلة التربيعية الناتجة بالتحليل إلى العوامل لتحديد قيم س لإحداثيات نقاط التقاطع.

(س − ٢)(س − ٢) = ٠ وعليه، يكون س = ٢ ومنه ص = ٢ − ٦ = −٤ حيث يعطي نقطة تقاطع واحدة وهي (٢، −٤)، أي إن المستقيم مماسّ لمنحنى الدالة التربيعية.

يمكن أن نحدّد عدد نقاط التقاطع باستخدام المميّز ومن دون إيجاد جذور معادلة تربيعية أو نقاط التقاطع.

ب^{٢} − ٤ أجـ = (−٤)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ = ٠

يشير ذلك إلى وجود جذرَين حقيقيَّين متساويَّين للمعادلة، أي يوجد حلّ وحيد، ما يعني وجود نقطة تقاطع واحدة فقط؛ وعليه، يكون المستقيم مماسًا لمنحنى الدالة التربيعية.

يعتمد عدد نقاط التقاطع على قيمة ب^{٢} − ٤ أجـ

الحالات المختلفة معطاة في الجدول الآتي:

نتيجة ٣

يساعدنا مميز المعادلة التربيعية الناتجة من مساواة الدالة التربيعية بخط مستقيم على معرفة عدد نقاط تقاطعهما. الحالات الثلاثة الممكنة مبيّنة في الجدول الآتي:

ب^٢ - ٤أجـ	نوع الجذور	عدد نقاط التقاطع
$>$ ٠	جذران حقيقيان مختلفان	نقطتا تقاطع مختلفتان
= ٠	جذران حقيقيان متساويان (جذر مكرّر)	نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ)
$<$ ٠	لا توجد جذور حقيقية	لا توجد نقاط تقاطع

يشترط للحصول على جذرَين حقيقيَّين في المعادلة التربيعية أن يكون ب^٢ − ٤ أ جـ $\geq$ ٠

مثـــال ١٨

بيّن أن المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٣ يقطع المنحنى ص = س^٢ + ٤س − ٣ في نقطتَين مختلفتَين.

الحــلّ:

$\frac{١}{٢}$ س − ٣ = س^٢ + ٤س − ٣ .... ساوِ بين المعادلتَين، وأعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

س − ٦ = ٢س^٢ + ٨س − ٦

٢س^٢ + ٧س= ٠ .... احسب المميّز لتحدّد عدد نقاط التقاطع.

ب^٢ − ٤ أجـ = ٧^٢ − ٤ × ٤ × ٠ = ٤٩ $>$ ٠

∵ المميّز $>$ صفر

∴ يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين.

مثـــال ١٩

أوجد قيمة ك حيث المستقيم ص = ٢س + ك مماس للمنحنى ص = س^٢ − ٤س + ٤

الحــلّ:

س^٢ − ٤س + ٤ = ٢س + ك .... أعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

س^٢ − ٦س + (٤ − ك) = ٠

∵ المستقيم مماس للمنحنى، فإن

ب^٢ − ٤ أجـ = ٠ .... استخدم الشرط على المميّز لتكتب معادلة مجهولها ك، ثم حلّها.

(−٦)^٢ − ٤ × ١ × (٤ − ك) = ٠

٣٦ − ١٦ + ٤ك = ٠

ك = −٥

مثـــال ٢٠

أوجِد مجموعة قيم ك بحيث يقطع المستقيم ص = س − ٥ المنحنى ص = ك س^{٢} − ٦ في نقطتَين مختلفتَين.

الحــلّ:

ك س^{٢} − ٦ = س − ٥

أعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

ك س^{٢} − س − ١ = ٠

∵ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتَين مختلفتَين، فإن

ب^{٢} − ٤ أجـ > ٠

استخدم الشرط على المميّز لتكتب معادلة مجهولها ك، ثم حلّها.

(−١)^{٢} − ٤ × ك × (−١) > ٠

١ + ٤ك > ٠

ك > $-\frac{١}{٤}$

ك > $-\frac{١}{٤}$، ك ≠ ٠

في هذه الحالة، نحتاج إلى عدم أخذ ك = ٠ بعين الاعتبار لأن شكل المعادلة سيكون ص = −٦ وهي معادلة غير تربيعية، أي عدم جواز استخدام المميز.

مثـــال ٢١

أوجِد مجموعة قيم ك بحيث لا يقطع المستقيم ص = ك س − ٣ المنحنى ص = س^{٢} − ٢س + ١

الحــلّ:

س^{٢} − ٢س + ١ = ك س − ٣

أعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

س^{٢} − س(٢ + ك) + ٤ = ٠

∵ المستقيم والمنحنى لا يتقاطعان،

∴ ب^{٢} − ٤ أجـ < ٠

استخدم الشرط على المميّز لتكتب معادلة مجهولها ك، ثم حلّها.

(٢ + ك)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ < ٠

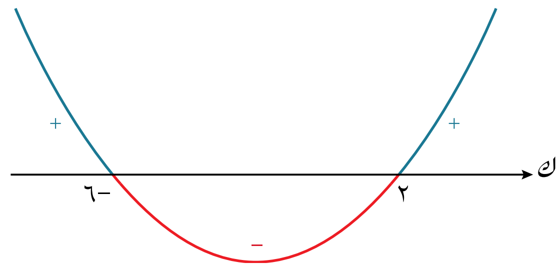
ك^{٢} + ٤ك − ١٢ < ٠

(ك + ٦)(ك − ٢) < ٠

استخدم الطرائق التي استخدمناها في الدرس ١-٣ لحلّ المتباينة التربيعية، وذلك باعتماد على رسم المنحنى لتحديد منطقة قيم ك

من خلال الرسم،

−٦ < ك < ٢



تمارين ١-٦

١) في كل حالة من الحالات الآتية، حدّد عدد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية:

أ ص = ٤س − ٣ ، ص = $س^٢$ − ٥س + ٢

ب ص = ٣ − ٢س ، ص = $٢س^٢$ + ٣س + ٧

ج ص = ٨س + ٣ ، ص = ١ − $٢س^٢$

د س + ص = ٣ ، ص = ٢ − ٣س − $٣س^٢$

٢) أوجِد قيم ك حيث المستقيم ص = ك س + ١ مماس للمنحنى ص = $٢س^٢$ + س + ٣

٣) أوجِد قيمة ك حيث المحور السيني مماس للمنحنى ص = $س^٢$ + (٣ − ك)س − (٤ك + ٣).

٤) أوجِد قيم العدد الثابت جـ حيث المستقيم ص = س + جـ مماس للمنحنى ص = ٣س + $\frac{٢}{س}$

٥) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يقطع المستقيم ص = ٣س + ١ المنحنى ص = $س^٢$ + ك س + ٢ في نقطتَين مختلفتَين.

٦) المستقيم ص = ٢س + ك مماس للمنحنى $س^٢$ + ٢س ص + ٢٠ = ٠

أ أوجِد القيم الممكنة للعدد ك

ب أوجِد لكل قيمة من قيم ك التي وجدتها في الجزئية (أ) إحداثيات نقطة تقاطع المماس مع المنحنى.

٧) أوجِد قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ك س − ١٠ مع المنحنى $س^٢$ + $ص^٢$ = ١٠س

٨) أوجِد مجموعة قيم م حيث لا يقطع المستقيم ص = م س − ٥ المنحنى ص = $س^٢$ − ٥س + ٤

٩) أوجِد قيم م الممكنة حيث يكون المستقيم ص = م س + ٦ مماسًا للمنحنى ص = $س^٢$ − ٤س + ٧

١٠) تمثل الدالة:

ص = $س^٢$ − ٧س + ك

مسار قارب حول جزيرة، حيث تمّ أخذ الإحداثيات بالاعتماد على أن إحداثيات الجزيرة هي نقطة الأصل (٠، ٠). يجتاز القارب حدود المنطقة بعد الجزيرة عند المستقيم ص = س − ٦؛ أوجِد قيم الثابت ك حتى لا يجتاز القارب خطّ الحدود البحرية.

١١) مسار جسم إلى الأعلى باتجاه الجزء الموجب لمحور السينات من نقطة ثابتة يعطى بالدالة:

ص = س(ك − س)

حيث يعطي الإحداثي السيني المسافة الأفقية، ويعطي الإحداثي الصادي المسافة الرأسية من نقطة ثابتة. ما قيم الثابت ك بحيث لا يصطدم الجسم مع السطح المائل الذي يمكن تمثيله بالمستقيم ص = ٩ − ٢س؟

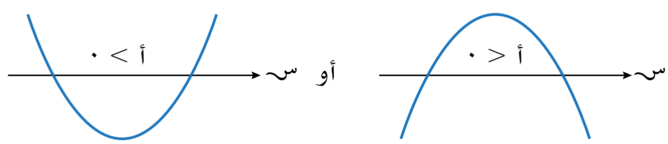
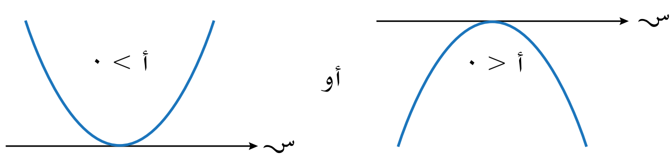
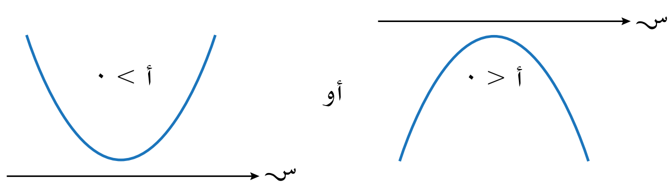
قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

رسم الدوال التربيعية

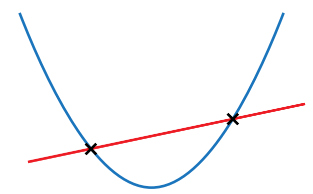
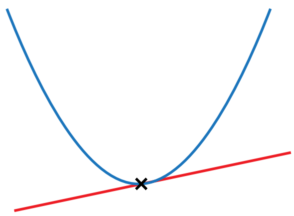
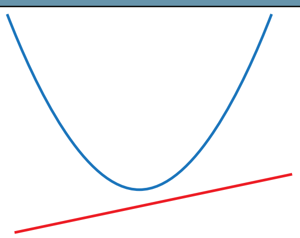
لرسم المنحنى التربيعي، نحدّد الأجزاء المقطوعة من المحورَين وإحداثيات نقطة التحوّل.

- لإيجاد الجزء المقطوع من المحور السيني، اجعل ص = ٠ وحلّ المعادلة الناتجة باستخدام التحليل إلى العوامل.
- لإيجاد الجزء المقطوع من المحور الصادي، اجعل س = ٠ واحسب ص.
- أوجد إحداثيات نقطة التحوّل عبر تحديد معادلة محور التماثل باستخدام الجزء المقطوع من المحور السيني، ثم تحديد نوع المنحنى للأعلى أم للأسفل باستخدام معامل $س^٢$

الدالة التربيعية ($أس^٢$ + ب س + جـ = ٠) والمنحنى المناظر لها (ص = $أس^٢$ + ب س + جـ)

$ب^٢ - ٤أجـ$	نوع جذور المعادلة $أس^٢$ + ب س + جـ = ٠	شكل منحنى الدالة ص = $أس^٢$ + ب س + جـ
> ٠	جذران حقيقيان مختلفان	 يقطع المنحنى المحور السيني في نقطتَين مختلفتَين
= ٠	جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر)	 يمسّ المنحنى محور السينات في نقطة واحدة.
< ٠	لا توجد جذور حقيقية	 يقع المنحنى فوق محور السينات أو تحت محور السينات بشكل كامل.

التمثيل البياني التربيعي والمستقيم

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
توجد نقطتا تقاطع	توجد نقطة تقاطع واحدة	لا توجد نقطة تقاطع
يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين.	يمس المستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ المستقيم مماسّ للمنحنى.	لا يقطع المستقيم المنحنى.

يكون حلّ معادلة تربيعية مع معادلة مستقيم آنيًّا معادلة تربيعية في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

يعطي المميّز ب^{٢} − ٤أجـ معلومات حول عدد جذور المعادلة الناتجة وحول نقاط التقاطع بين منحنى الدالة التربيعية والمستقيم.

يساعدنا مميّز المعادلة الناتجة على معرفة عدد نقاط تقاطعهما. الحالات الثلاث الممكنة مبيّنة في الجدول الآتي:

ب^{٢} − ٤أجـ	نوع الجذور	عدد نقاط التقاطع
> ٠	جذران حقيقيان مختلفان	نقطتا تقاطع مختلفتان
= ٠	جذران حقيقيان متساويان (جذر مكرّر)	نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ)
< ٠	لا توجد جذور حقيقية	لا توجد نقاط تقاطع

شرط حصول المعادلة التربيعية على جذور حقيقية هو ب^{٢} − ٤أ جـ ≥ ٠

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

١) أوجِد مجموعة قيم ك التي لا يتقاطع عندها $ص = ك(٤س - ٣)$ مع المنحنى $ص = ٤س^{٢} + ٨س - ٨$

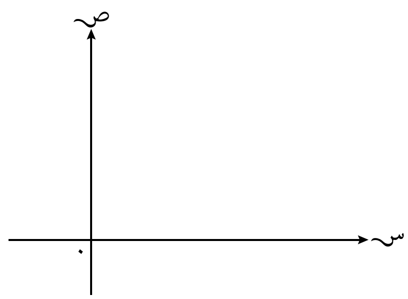
٢) أوجِد مجموعة قيم س حيث $س(س + ٢) < س$

٣) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يقع المنحنى $ص = (ك + ١)س^{٢} - ٣س + (ك + ١)$ تحت المحور السيني.

٤) أوجِد مجموعة قيم س حيث $س^{٢} < ٦ - ٥س$

٥) أوجِد قيم ك حيث يكون المستقيم $ص = ك - ٦س$ مماسًا للمنحنى $ص = س(٢س + ك)$.

٦) المعطى $ص = ١٠ + ٣س - س^{٢}$



أ ارسم على المستوى الإحداثي المجاور المنحنى، محددًا إحداثيات النقاط التي يتقاطع فيها المنحنى مع المحورَين.

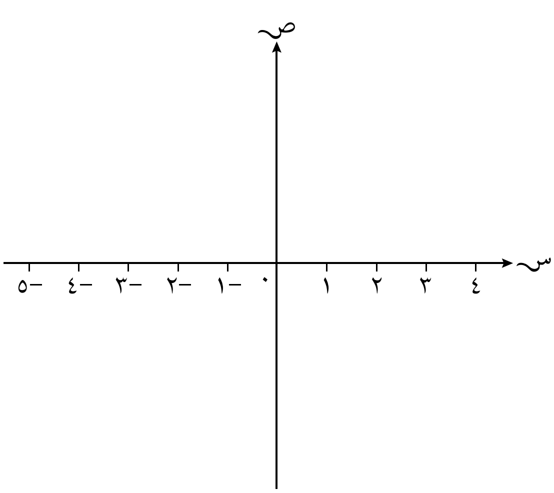
ب احسب إحداثيات نقطة التحوّل.

٧) اكتب ك بدلالة جـ علمًا أن المستقيم $ص = ٣س + جـ$ مماس للمنحنى $ص = س^{٢} + ٩س + ك$

٨) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يتقاطع المستقيم $ص = ٢س - ٥$ مع المنحنى $ص = س^{٢} + ك س + ١١$ في نقطتَين مختلفتَين.

٩) أوجِد مجموعة قيم م حيث يتقاطع المستقيم $ص = م س - ٢$ مع المنحنى $ص = س^{٢} + ٨س + ٧$ في نقطتَين مختلفتَين.

١٠) أ انسخ المستوى الإحداثي المجاور وارسم المنحنى $ص = (س - ٢)(س + ٣)$ حيث $-٥ \leqslant س \leqslant ٤$، ثم أوجِد إحداثيات نقاط التقاطع بين المنحنى والمحورَين.



ب أوجِد إحداثيات نقطة التحوّل، محدّدًا طبيعتها.

ج إذا علمت أن ك عدد ثابت موجب، فأوجِد مجموعة قيم ك حيث للمعادلة $(س - ٢)(س + ٣) = ك$ جذران مختلفان.

١١) أوجِد قيمة ك حيث المنحنى ص = ٢س^{٢} − ٣س + ك:

أ يمرّ في النقطة (٤، −٧).

ب يتقاطع مع المحور السيني في نقطة واحدة فقط.

١٢) أوجِد مجموعة قيم ك حيث للمعادلة ك س^{٢} + ك = ٨س − ٢س ك جذران حقيقيان مختلفان.

١٣) أ أوجِد مجموعة قيم س حيث ٤س^{٢} + ١٩س − ٥ ⩽ ٠

ب ١) ارسم المنحنى ص = ٩ − ٨س − س^{٢}، محددًا إحداثيات كل نقاط التقاطع مع المحورَين ونقطة التحوّل.

٢) اكتب القيمة العظمى لـ ٩ − ٨س − س^{٢}

١٤) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ك س − ٣ مع المنحنى ص = س^{٢} − ٩س في نقطتَين مختلفتَين.

١٥) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ٢س + ك مع المنحنى ص = ١ + ٢ك س − س^{٢} في نقطتَين مختلفتَين.

١٦) أ أوجِد إحداثيات رأس المنحنى ص = ٤س^{٢} − ٨س + ٣

ب أوجِد قيم العدد الثابت ك حيث المستقيم ص = ك س + ٣ مماس للمنحنى ص = ٤س^{٢} − ٨س + ٣

١٧) منحنى معادلته ص = ٥ − ٢س + س^{٢} ومستقيم معادلته ص = ٢س + ك، حيث ك عدد ثابت.

أ بيّن أن الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع بين المنحنى والمستقيم تحقّق المعادلة س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠

ب لقيمة محدّدة للعدد ك، يتقاطع المنحنى مع المستقيم في نقطتَين مختلفتَين أ، ب، حيث إحداثيات أ هي (−٢، ١٣). أوجِد إحداثيات النقطة ب

ج في حال كان المستقيم مماسًا للمنحنى عند النقطة ج، أوجِد قيمة ك وإحداثيات نقطة التماس.

١٨) منحنى معادلته ص = س^{٢} − ٥س + ٧ ومستقيم معادلته ص = ٢س − ٣

أ أوجِد إحداثيات نقاط التقاطع بين المستقيم والمنحنى.

ب أوجِد مجموعة قيم س التي تحقّق المتباينة س^{٢} − ٥س + ٧ < ٢س − ٣

١٩) منحنى معادلته ص = ١٠س − س^{٢}

أ احسب إحداثيات رأس المنحنى.

ب أوجِد مجموعة قيم س حيث ص ⩾ ٩

٢٠) تمّ رمي كرة في الهواء. يمكن تمثيل ارتفاعها عن الأرض ع متر بالمعادلة:

$$ع = ٥ + ٤ن - ن^{٢}،$$

حيث ن الزمن بالدقائق من لحظة رمي الكرة. ما الارتفاع الأقصى الذي تصل إليه الكرة؟

٢١) يُعطى ارتفاع طائر عن سطح البحر ع مقيسة بمئات الأمتار بالمعادلة:

$$ع = ٢٧ + ٣ن - ٢ن^{٢}$$

حيث ن الزمن بالساعة من لحظة تسجيل ارتفاع الطائر. أوجِد أقصى ارتفاع يصل إليه الطائر عن سطح الأرض في رحلته.

٢٢) تمّ بناء غرفة بحيث تعطى مساحتها بالدالة:

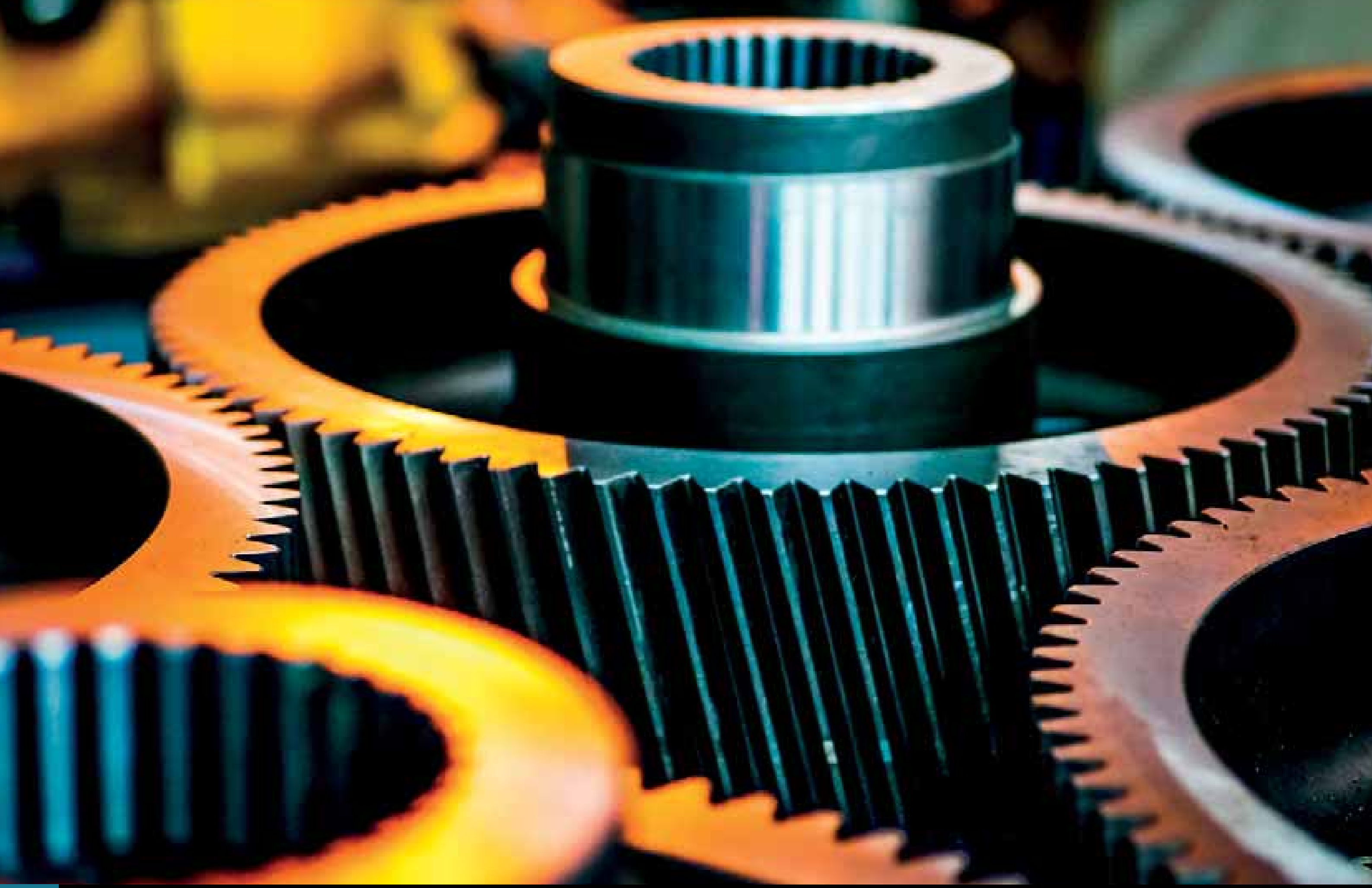
$$م = ١٠س - س^{٢}$$

حيث س، (١٠ − س) بُعدا الغرفة بالمتر. أوجِد أكبر مساحة ممكنة للغرفة واكتب بُعدَيها اللذَين يعطيان هذه المساحة.

٢٣) تمثّل المعادلة:

$$ر = ١٥س - س^{٢}$$

ربح مصنع (بآلاف الريالات العُمانية)، حيث س كمية القطع المنتجة والمبيعة (بالمئات). كم قطعة يجب أن تباع ليكون الربح ٥٦٠٠٠ ريال عُماني؟



الوحدة الثانية

الدوال Functions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٢-١ تفهم المصطلحات: الدالة، المجال، المدى، الدالة واحد إلى واحد، واحد إلى متعدّد، متعدّد إلى واحد، الدالة العكسية، تركيب دالتين.

٢-٢ تستخدم الصيغ د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ، د: س ← أس^{٢}، د$^{-١}$(س) و (هـ ∘ س) (س) = هـ(د(س)).

٢-٣ تحدّد مدى دالة معطاة في حالات بسيطة حيث مجالها محدّدٌ مثل الدوال الخطية والتربيعية والدوال التبادلية البسيطة (التي يكون فيها البسط والمقام دوال خطية).

٢-٤ تشكّل الدوال المركّبة (باستخدام الدوال الخطّية والتربيعية والدوال الجذرية مثل د(س) = $\sqrt{\text{أس + جـ}}$ والدوال النسبية).

٢-٥ تتذكّر وتستخدم وتفسّر وجود الدالة العكسية د$^{-١}$(س) في حالة أنّ الدالة د(س) هي دالة واحد إلى واحد.

٢-٦ تجد الدالة العكسية للدالة واحد إلى واحد (الدوال الخطّية والتربيعية والدوال الجذرية مثل د(س) = $\sqrt{\text{أس + جـ}}$ والدوال النسبية).

٢-٧ تستخدم التمثيلات البيانية لتبين العلاقة بين الدالة ودالتها العكسية.

٢-٨ تطبّق وتفسر الدوال (باستخدام كثيرات الحدود الخطّية والتربيعية، الدوال الجذرية والدوال النسبية) كتمثيلات رياضية في مواقف من الحياة اليومية، مثل التمويل والطقس والأسواق العالمية والتصنيع.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا	اختبر مهاراتك
الصف العاشر الوحدة الثامنة	أن توجِد مخرجات دالة معطاة.	١) إذا علمت أن د(س) = ٣س − ٢، فأوجد د(٤).
الصف العاشر الوحدة الثامنة	أن توجِد دالة مركَبة.	٢) إذا علمت أن د(س) = ٢س + ١، هـ(س) = ١ − س، فأوجد (د ○ هـ)(س).
الصف العاشر الوحدة الثامنة	أن توجِد الدالة العكسية لدالة بسيطة.	٣) إذا كانت د(س) = ٥س + ٤ فأوجد $د^{-1}$(س).

لماذا ندرس الدوال؟

سبق أن تعلّمت في الوحدة الثامنة من الصف العاشر كيفية تفسير العبارات الجبرية في صورة دوال لها مدخلات ومخرجات، وكيفية إيجاد تركيب الدوال البسيطة والدوال العكسية البسيطة.

يوجد الكثير من المواقف اليومية التي يمكن تمثيلها في صورة دوال، مثل:

- العلاقة بين درجة حرارة مشروب ساخن، وتبريده مع مرور الزمن.
- العلاقة بين ارتفاع الماء في البركة والزمن المستغرق منذ تشغيل الصنبور لملء البركة.
- علاقة الربح بعدد القطع المبيعة.

يساعدنا تمثيل هذه المواقف باستخدام الدوال المناسبة على القيام بتوقعات تتعلّق بمواقف من الحياة اليومية، على سبيل المثال: ما عدد القطع المبيعة ليتجاوز الربح مئة ألف ريال عُماني؟

يتطلب تمثيل المواقف الحياتية باستخدام الدوال:

١- تحديد ما يمثّله كل متغيّر، مثل س = عدد السلع المنتجة.

٢- تحديد ما تمثّله الدالة، مثل د(س) = الربح عند إنتاج س سلعة.

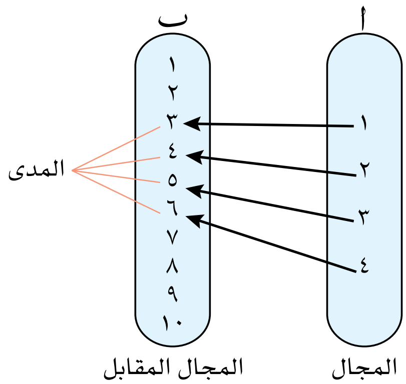
٣- استخدام الدالة وتفسيرها، مثل د(٣) = تكلفة إنتاج ٣ سلع.

في هذه الوَحدة، سوف نبني فهمًا مُعمّقًا للدوال وخواصها.

المفردات

- العلاقة relation
- المجال domain
- المجال المقابل codomain
- المدى range
- الدالة function
- واحد إلى واحد one-one
- متعدّد إلى واحد many-one
- متعدّد إلى متعدّد many-many
- مجال الدالة domain
- مدى الدالة range
- اختبار المستقيم الرأسي vertical line test
- اختبار المستقيم الأفقي horizontal line test
- الدالة المركّبة composite function
- الدالة العكسية inverse function
- الدالة العكسية لنفسها self-inverse function

٢-١ تعريف الدوال ومجالها ومداها



يوضح الرسم المجاور ارتباطًا بين عناصر المجموعة 'أ' بعناصر من المجموعة 'ب'، يمكن أن نطلق على هذا الارتباط مسمى علاقة.

العلاقة relation هي ارتباط بين عناصر مجموعة ما بعناصر مجموعة أخرى.

يطلق على المجموعة 'أ' **المجال domain**، كما يطلق على المجموعة الثانية 'ب' **المجال المقابل codomain**، أما العناصر (القيم) الموجودة في المجال المقابل والتي ارتبطت بعناصر من المجال فيطلق عليها **المدى range**.

الدالة function هي علاقة بين مجموعتين حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

قد تكون الدالة **واحد إلى واحد one-one** أو **متعدّد إلى واحد many-one**.

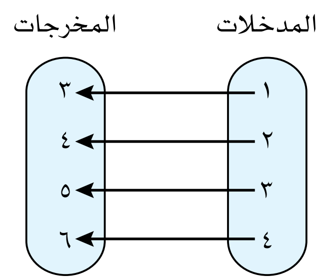
تُعدّ الدالة س ← س + ٢ حيث س ∋ ع مثالًا للدالة واحد إلى واحد.

س ∋ ع هو مجال للدالة.

مُساعَدة

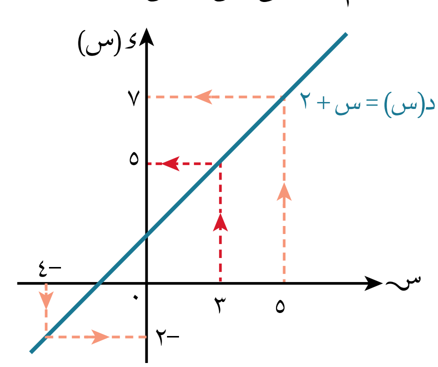
س ∋ ع تعني أن س تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

يمثل مخطّط العلاقة الآتية بعض قيم المدخلات (المجال) والمخرجات (المدى) للعلاقة س ← س + ٢ ونقرأ: العلاقة حيث يرتبط س بـ س + ٢:



العلاقة واحد إلى واحد

عند تمثيل العلاقة بيانيًا باستخدام منحنى ص = س + ٢



يتضح من التمثيل البياني، أن كل نقطة في المجال مرتبطة بنقطة واحدة فقط في المجال المقابل. كما أن كل نقطة في المجال المقابل مرتبطة بنقطة واحدة فقط في المجال.

في هذه العلاقة (واحد إلى واحد)، ينتج من المدخلة -٤ مخرج واحد فقط وهو -٢، أو -٤ مرتبطة بـ -٢؛ وبصورة مماثلة المدخلة ٣ مرتبطة بمخرج واحد فقط وهو ٥ والمدخلة ٥ مرتبطة بمخرج واحد فقط وهو ٧

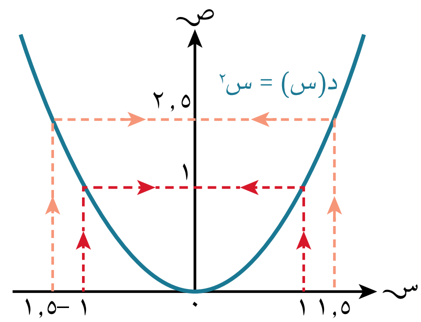
نتيجة ١

العلاقة واحد إلى واحد هي دالة.

يمكن أن نكتب هذه الدالة في صورة د: س ← س + ٢ حيث س ∈ ع أو في صورة
د(س) = س + ٢، حيث س ∈ ع
تقرأ الدالة د: س ← س + ٢: حيث 'تربط الدالة س بـ س + ٢' أو س مرتبطة بـ س + ٢
الدوال الخطية هي أمثلة عن الدوال واحد إلى واحد.

العلاقة متعدّد إلى واحد

العلاقة س ← س^{٢} حيث س ∈ ع هي علاقة متعدّد إلى واحد:



من التمثيل البياني تلاحظ على منحنى الدالة د(س) أن كل نقطة في المجال (س) مرتبطة بنقطة واحدة فقط في المجال المقابل. ولكن كل نقطة في المجال المقابل مرتبطة بأكثر من نقطة في المجال.

هذه العلاقة تسمّى 'متعدّد إلى واحد'، حيث ينتج من المدخلة ١ أو المدخلة −١ المخرجة ١ نفسها، وبصورة مماثلة المدخلتان ١,٥ أو −١,٥ مرتبطتان بالمخرجة ٢,٢٥ نفسها.

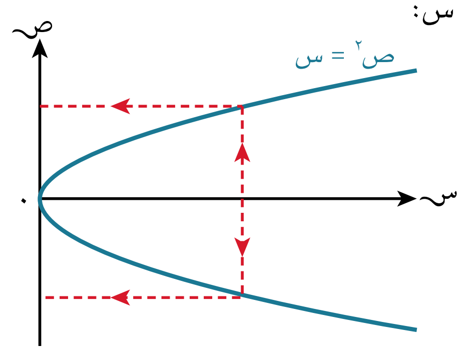
نتيجة ٢

العلاقة متعدّد الى واحد هي دالة.

يمكننا أن نكتب هذه الدالة في صورة د: س ← س^{٢} حيث س ∈ ع أو د(س) = س^{٢} حيث
تُقرأ د: س ← س^{٢} كالتالي 'الدالة د حيث يرتبط س بـ س^{٢}' أو 'الدالة د تربط س بـ س^{٢}'.
تعد الدوال التربيعية أمثلة على الدوال متعدّد إلى واحد.

العلاقة واحد إلى متعدّد

إذا أخذنا المنحنى ص^{٢} = س:



نلاحظ في التمثيل البياني أن بعض النقاط في المجال مرتبطة بأكثر من نقطة واحدة في المجال المقابل.

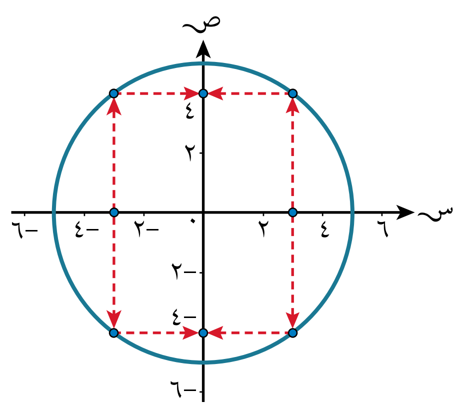
في هذه العلاقة واحد إلى متعدّد، للقيمة المدخلة ٤ قيمتان مخرجتان ٢ و −٢ وبالمثل للقيمة المدخلة ٧ قيمتان مخرجتان هما $\sqrt{٧}$ و $-\sqrt{٧}$.

نتيجة ٣

علاقة واحد إلى متعدد ليست بدالة.

العلاقة متعدّد إلى متعدّد

إذا لاحظنا منحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥



بعض النقاط في المجال مرتبطة بأكثر من نقطة واحدة في المجال المقابل. وأن بعض النقاط في المجال المقابل مرتبطة بأكثر من نقطة واحدة من المجال.

لدينا دائرة، حيث من الممكن أن يكون لقيمة مدخلة ما مخرجتان محتملتان، مثل المدخلة ٣ لديها مخرجتان ٤ و −٤. كما لقيمة بعض المخرجات قيمتان مدخلتان مختلفتان، وللقيمة المخرجة −٤ قيمتان مدخلتان هما ٣ و −٣. هذه علاقة متعدّد إلى متعدّد.

نتيجة ٤

علاقة متعدّد إلى متعدّد ليست بدالة.

نتيجة ٥

تُسمّى مجموعة قيم المدخلات في الدالة مجال الدالة.

عند تعريف الدالة، من المهمّ أن نحدّد مجالها.

تُسمّى مجموعة قيم المخرجات في الدالة المدى للدالة.

١) علاقة واحد إلى واحد هي دالة.

٢) علاقة متعدّد إلى واحد هي دالة.

٣) علاقة واحد إلى متعدّد ليست دالة.

٤) علاقة متعدّد إلى متعدّد ليست دالة.

اختبارات المستقيم الرأسي والأفقي

يستخدم **اختبار المستقيم الرأسي** **vertical line test** لتحديد عدد قيم ص الممكنة لكل قيمة س، وبالتالي يمكن التحقق مما إذا كان التمثيل البياني للعلاقة يمثل دالة أم لا.

العلاقة تمثل دالة إذا تعذّر رسم مستقيم رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

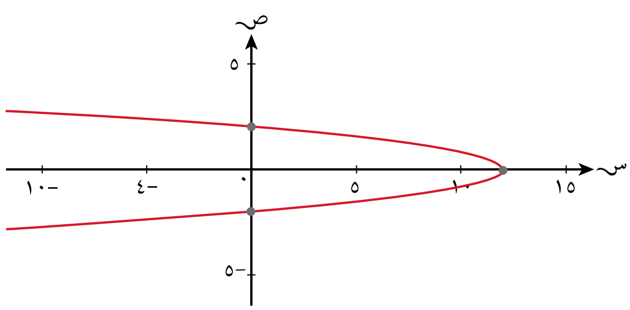
يستخدم **اختبار المستقيم الأفقي** **horizontal line test** لتحديد عدد قيم س الممكنة لكل قيمة ص.

باستخدام الاختبارين الرأسي والأفقي يمكننا تحديد ما إذا كانت العلاقة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد أو واحد إلى متعدّد أو متعدّد إلى متعدّد.

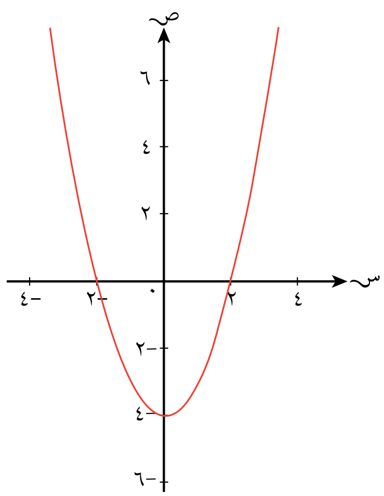
مثـــال ١

استخدم اختبارات المستقيمات الرأسية والأفقية لتحدد نوع العلاقة ونوع الدالة إن وجدت:

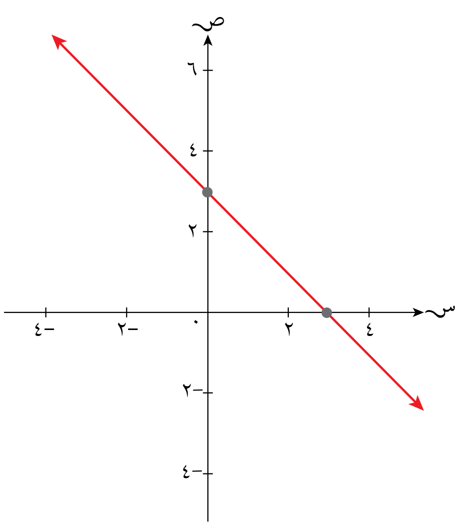
أ $٣ص^٢ + س = ١٢$



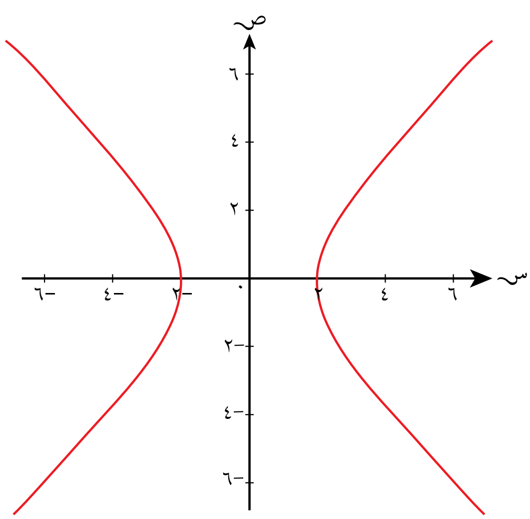
ب $ص = س^٢ - ٤$



ج $س + ص = ٣$

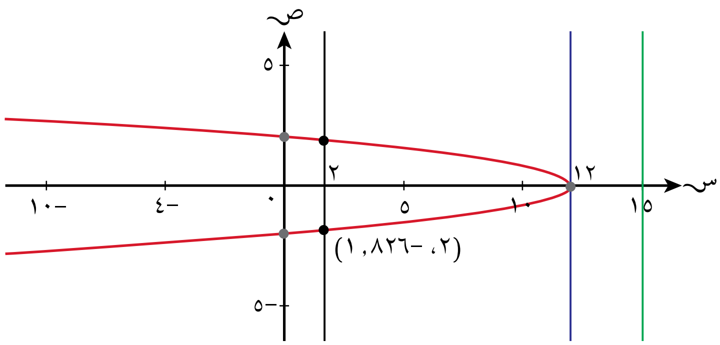


د $س^٢ - ص^٢ = ٤$



الحــلّ:

أ



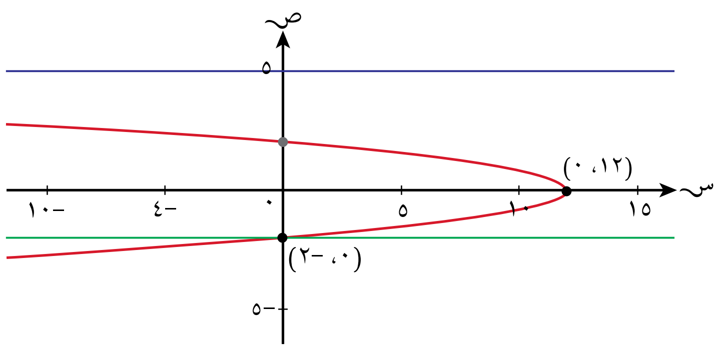
استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحدّد العدد الممكن لقيم ص لكل قيمة لـ س

س = ١٥ ليست في مجال الدالة، فالمستقيم الرأسي المرسوم من خلال س = ١٥ لا يتقاطع مع التمثيل البياني (هذا مستقيم رأسيّ ليس جيدًا للاختبار لأن س = ١٥ ليست في المجال).

س = ١٢ مرتبطة بقيمة واحدة من ص، وهي تتقاطع مع التمثيل البياني عند النقطة (١٢، ٠).

س = ٢ مرتبطة بقيمتين لـ ص، فهي تتقاطع مع التمثيل البياني بالنقطتَين (٢، ١,٨٢٦)، (٢، -١,٨٢٦) وهذا يعني أن هذه العلاقة ليست دالة لأنه يوجد قيم لـ س مرتبطة بأكثر من قيمة لـ ص

العلاقة ليست دالة.



استخدم اختبار المستقيم الأفقي لتحدّد العدد الموجود الممكن لقيم س لكل قيمة لـ ص

لكل قيمة لـ ص قيمة واحدة فقط لـ س

وعندما ص = -٢ مرتبطة بقيمة واحدة من س، عندئذ يتقاطع مع التمثيل البياني عند النقطة (٠، -٢).

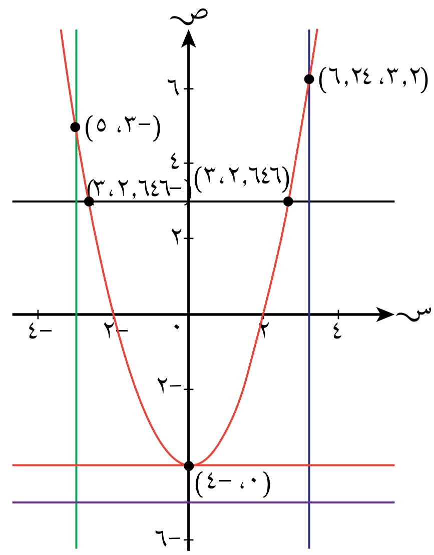
ص = ٠ مرتبط بقيمة واحدة من س، إذ يتقاطع مع التمثيل البياني عند النقطة (١٢، ٠)

ص = ٢ مرتبطة بقيمة واحدة لـ س، إذ يتقاطع مع التمثيل البياني عند (٠، ٢).

ص = ٥ مستقيم ليس مناسبًا للاختبار.

وعليه، كل قيمة لـ ص ارتبطت بقيمة واحدة لـ س من اختبار المستقيمَين الرأسي والأفقي نجد أن العلاقة واحد إلى متعدّد.

ب

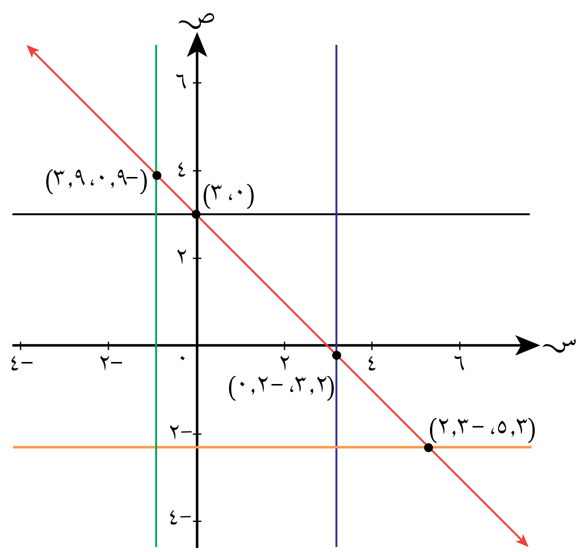


باستخدام اختبار المستقيم الرأسي نجد أنه يقطع المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر.

∴ المعادلة تمثل دالة باستخدام اختبار المستقيم الرأسي واختبار المستقيم الأفقي، يمكن أن نلاحظ أنه من الممكن أن ترتبط كل قيمة لـ ص بأكثر من قيمة واحدة لـ س، ولكن كل قيمة لـ س ترتبط فقط بقيمة واحدة لـ ص

∴ العلاقة متعدّد إلى واحد، فهي تمثل دالة.

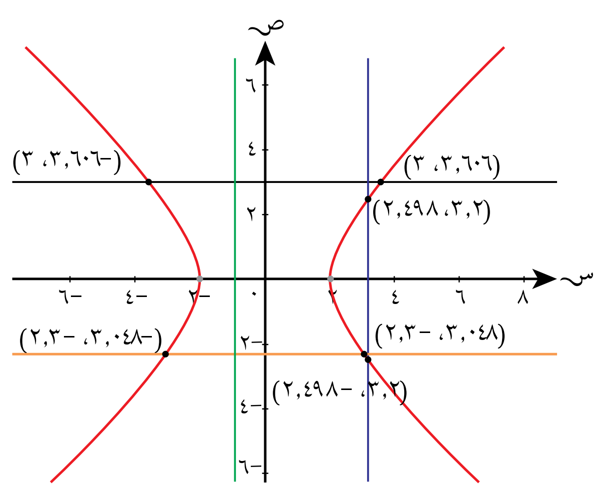
ج



باستخدام اختبار المستقيم الرأسي واختبار المستقيم الأفقي، نلاحظ أن المستقيم الأفقي أو المستقيم الرأسي يتقاطع مع المنحنى س + ص = ٣ مرة واحدة فقط، أي أنه توجد قيمة واحدة فقط لـ س لكل قيمة لـ ص وقيمة واحدة لـ ص لكل قيمة لـ س

∴ العلاقة واحد إلى واحد، فهي تمثل دالة.

د

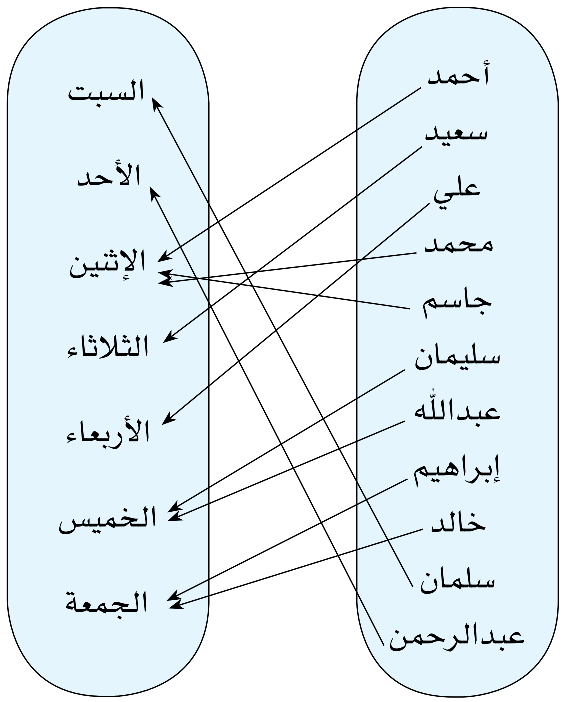


باستخدام اختبار المستقيم الرأسي واختبار المستقيم الأفقي، يمكن أن نلاحظ أن بعض قيم س ترتبط بأكثر من قيمة واحدة لـ ص. ومن جهة ثانية من الممكن أن ترتبط كل قيمة لـ ص بقيمتَين لـ س

∴ العلاقة متعدّد إلى متعدّد، فهي لا تمثّل دالة.

مثـــال ٢

تبيّن العلاقة، أدناه، عددًا من طلبة أحد الصفوف، واليوم الذي ولد فيه كل طالب.



إذا علمت أن العلاقة تمثل دالة:

أ أوجِد مجال الدالة ومداها.

ب ما نوع هذه الدالة؟

الحـــلّ:

أ مجال الدالة هو أسماء الطلبة.

المدى للدالة هو أيام ميلاد الطلبة.

بالنظر إلى المخطط، مجال الدالة هو مجموعة العناصر التي بدأت بها، ومداها هو مجموعة العناصر المرتبطة بها.

ب تربط الدالة أكثر من طالب بيوم محدد، لذا فإن الدالة متعدّد إلى واحد

بما أنه من الممكن أن يكون طالبان أو أكثر قد ولدوا في اليوم نفسه، فهناك العديد من العناصر المرتبطة بعنصر واحد.

مثــال ٣

إذا كانت د(س) = ٥ − ٢س حيث س ∈ ع، −٤ ⩽ س ⩽ ٥

أ اكتب مجال الدالة.

ب أوجد المدى للمجال المحدّد.

الحــلّ:

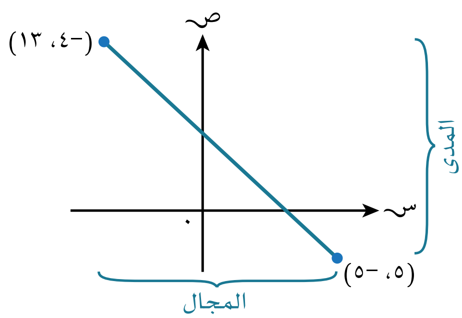
أ المجال هو −٤ ⩽ س ⩽ ٥

ب منحنى ص = ٥ − ٢س هو مستقيم

أوجد نقطتين لرسم المستقيم، في هذه الحالة نقطتا النهاية عندما س = −٤، س = ٥

عندما س = −٤، ص = ٥ − ٢(−٤) = ١٣ (القيمة العظمى)

عندما س = ٥، ص = ٥ − ٢(٥) = −٥ (القيمة الصغرى)



المدى هو −٥ ⩽ د(س) ⩽ ١٣

مثــال ٤

إذا كانت الدالة د(س) = س^{٢} − ٦س + ٨ حيث −١ ⩽ س ⩽ ٦

فأوجد مدى الدالة في المجال المحدد.

الحــلّ:

عليك الأخذ في الاعتبار أن مدى الدالة في المجال −١ ⩽ س ⩽ ٦

عندما س = −١، فإن د(−١) = (−١)^{٢} − ٦ × (−١) + ٨ = ١٥

عندما س = ٦، فإن د(٦) = ٦^{٢} − ٦ × ٦ + ٨ = ٨

ولكن الدالة د(س) = س^{٢} − ٦س + ٨ ليست خطية،

في الوحدة ١، تعلمنا عن هذا الشكل ونعلم أيضًا أن هذا المنحنى له قيمة صغرى.

إنها منحنى دالّة تربيعية.

لإيجاد القيمة الصغرى، اجعل د(س) = ٠ أولًا.

س^{٢} − ٦س + ٨ = ٠

حلّل إلى العوامل لتحل.

(س − ٤)(س − ٢) = ٠

س = ٤ أو س = ٢

منتصف المسافة بين س = ٢، س = ٤ هي س = ٣

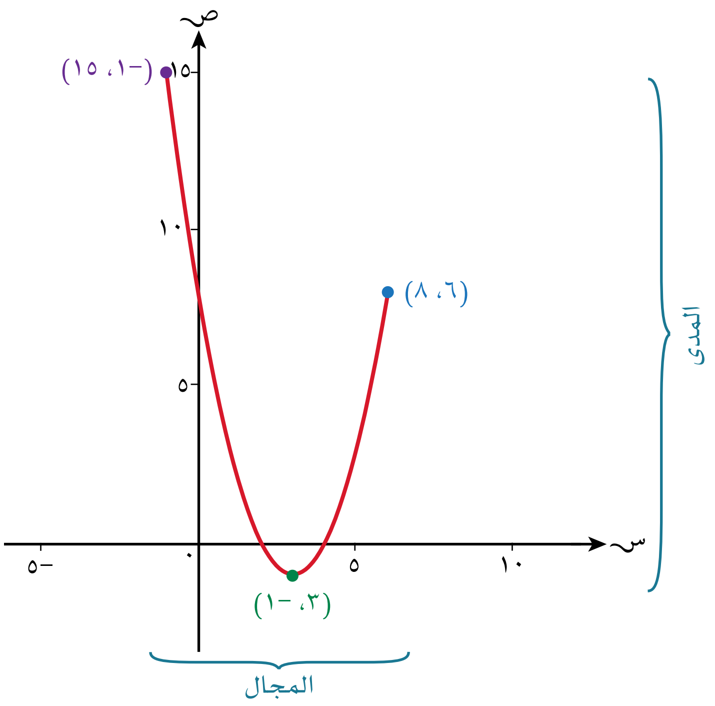
قيمة س التي تقع في منتصف المسافة بين الجذرَين، أي محور التماثل.

عندما س = ٣، د(٣) = ٣^{٢} − ٦ × ٣ + ٨ = −١

القيمة الصغرى.

وعليه، القيمة الصغرى لـ د(س) = −١

يمكنك الآن رسم منحنى الدالة التربيعية.



القيمة العظمى لـ د(س) = ١٥

وعليه، فإن المدى −١ ⩽ د(س) ⩽ ١٥

مثــال ٥

وقّعت شركة ما على رسوم صيانة شهرية مع أحدى الشركات المتخصصة برسوم ثابتة شهريًّا مقدارها ٢٥٠٠ ريال عماني يضاف إليها رسوم تصليح الأعطال الكبيرة قدرها ٥٠٠ ريال عن كل عطل.

يتم احتساب فاتورة الشركة من خلال الدالة:

ك(م) =٢٥٠٠ + ٥٠٠ م

إذا كانت الشركة تتعرض شهريًّا إلى ما بين اثنين إلى ثمانية أعطال كبيرة، فأوجد:

أ مجال الدالة ك(م).

ب ما مدى الدالة؟

ج ماذا يمثّل المدى في سياق المسألة؟

الحــلّ:

أ ٢ ⩽ م ⩽ ٨

مجال الدالة هو عدد الآلات التي تعمل في اليوم.
تشغّل الشركة يوميًّا ما بين آلتَين و٨ آلات.

ب ك(م) = ٢٥٠٠ + ٥٠٠ م

هي دالّة خطيّة. تتحقق القيمة الصغرى عندما م = ٢

ك(٢) = ٢٥٠٠ + ٥٠٠ × ٢ = ٣٥٠٠

وتتحقق القيمة العظمى عندما م = ٨

ك(٨) = ٢٥٠٠ + ٥٠٠ × ٨ = ٦٥٠٠

المدى هو ٣٥٠٠ ⩽ ك(م) ⩽ ٦٥٠٠

ج يمثل المدى قيمة فاتورة الكهرباء التي تتراوح بين ٣٥٠٠ و٦٥٠٠ ريال عُماني.

تمارين ٢-١

١) أيّة معادلة من المعادلات الآتية تمثّل دالة؟ حدّد ما إذا كانت واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد:

أ) ص = ٢س − ٣ ، س ∈ ح

ب) ص = س^{٢} − ٣ ، س ∈ ح

ج) ص = ٣س^{٢} + ٤ ، س ∈ ح، س ⩾ ٠

٢) استخدم برمجيات الرسم لتحدّد أيّة معادلة من المعادلات الآتية تمثل دالة.
اذكر ما إذا كانت الدالة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد:

أ) ص = ٢س^{٣} − ١ ، س ∈ ح

ب) ص = ٢^{س} ، س ∈ ح

ج) ص = $\frac{١٠}{س}$ ، س ∈ ح، س > ٠

د) ص = $\sqrt{س}$ ، س ∈ ح، س ⩾ ٠

هـ) ص^{٢} = ٤س ، س ∈ ح

٣) في كل موقف من المواقف الآتية، صف نوع الدالة التي تربط المجال بالمدى:

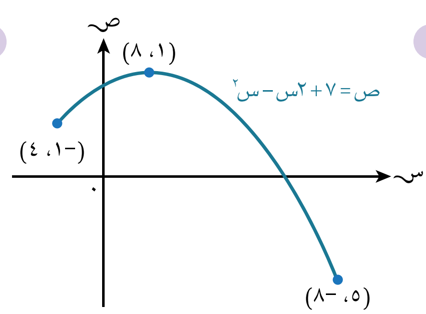
أ) المجال: المسافرون في المطار — المدى: وجهة السفر.

ب) المجال: المرضى في عيادة الطبيب — المدى: المواعيد لدى الطبيب.

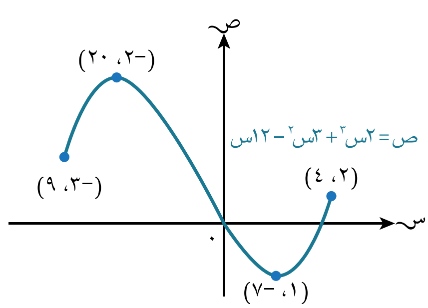
ج) المجال: المسافرون في الطائرة — المدى: المقاعد داخل الطائرة.

٤) حدّد المجال والمدى لكل دالة من الدالتَين الممثّلتَين بالمُنحنيَين الآتيَين:

أ)



ب)



٥) حدّد مدى كلّ دالة من الدوال الآتية:

أ) د(س) = س + ٤ حيث س > ٨

ب) د(س) = ٢س − ٧ حيث −٣ ⩽ س ⩽ ٢

ج) د(س) = ٧ − ٢س حيث −١ ⩽ س ⩽ ٤

د) د: س ← ٢س^{٢} حيث ١ ⩽ س ⩽ ٤

هـ) د(س) = س^{٢} − ٢ حيث س ∈ ح

مُساعَدة
لتحديد مدى هذه الدوال ارسمها في مجالها المحدد.

٦) ارسم منحنى كل دالة تربيعية من الدوال الآتية، ثم حدّد مدى كل منها:

أ ص = س^{٢} + ٤س − ١٢، حيث س ∈ ع

ب ص = ١٦ − س^{٢}، حيث س ∈ ع، س ⩾ −١

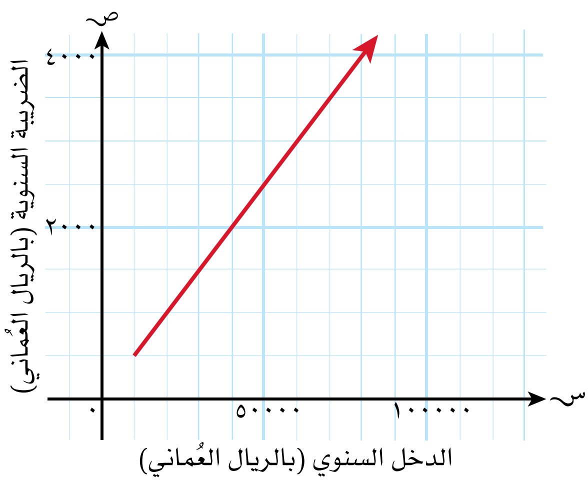
ج ص = ٢س^{٢} + ٩س + ٧، حيث −٤ ⩽ س < ٠

د ص = ١٠ − ٣س − س^{٢}، حيث س ⩾ ٠

٧) د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ حيث س ∈ ع، أ ⩽ س ⩽ ب

أوجد قيمة كل من أ، ب إذا كان مدى الدالة هو −٤ ⩽ د(س) ⩽ ٥

٨) يمثّل التمثيل البياني أدناه ما يدفعه أحمد كضريبة جديدة على الدخل.



أ ما مجال الدالة ومداها؟

ب فسّر المجال ضمن سياق المسألة.

٩) يعتمد إيجار سيارة الأجرة (ك) على رسم ثابت قيمته ٢ ريال عُماني إضافة إلى ٠,٢٨ ريال عُماني لكل كيلومتر تجتازه السيارة.

أ اكتب دالة الكلفة ك لإيجار السيارة عندما تجتاز السيارة س كيلومترات.

ب أوجِد مجال الدالة ك ومداها.

٢-٢ الدوال المركّبة

يمكن وصف معظم الدوال التي تطالعنا في صورة تركيب من دالتَين أو أكثر.

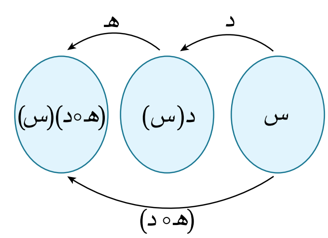
فمثلًا الدالة س ← ٣س − ٧ هي الدالة ’اضرب في ٣، ثم اطرح ٧‘.

إنها تركيب من الدالتَين د، هـ حيث:

د: س ← ٣س (الدالة ’اضرب في ٣‘)

هـ: س ← س − ٧ (الدالة ’اطرح ٧‘)

وعليه، يمكن وصف س ← ٣س − ٧ في صورة دالة ’طبّق د أولًا، ثم طبّق هـ‘ على الناتج.



لو طبقنا ذلك بالترتيب المعاكس، أي لو نفذنا الدالة د، ثم الدالة هـ على الناتج، فسوف نحصل (في هذه الحالة) على ناتج مختلف، وهو ٣ ← ٣(س − ٧)

عندما تُتبع دالة بدالة أخرى، يُسمى الناتج **بالدالة المركّبة composite function**.

من المهم أن تنتبه إلى أنه في بعض الحالات من المستحيل تنفيذ كل الدوال على أيّة قيمة.

على سبيل المثال، لا يمكن إيجاد تركيب الدوال مع الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ عندما س = ٠،

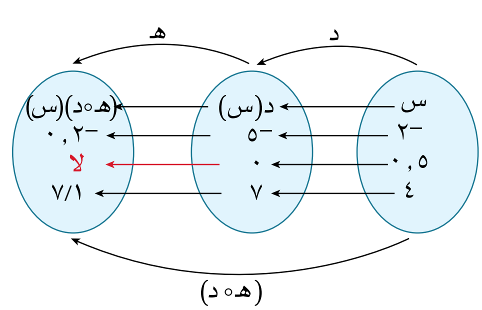
إلّا أنه يمكن تركيب هذه الدالة مع دالة أخرى عندما يتم تحديد المجال، كما في هذه الحالة س ∈ ع، حيث س ≠ ٠

عند تركيب الدوال، يجب أن نتأكد من أن كل القيم الموجودة في مدى الدالة الأولى يمكن استخدامها في صورة مجال في الدالة الثانية.

على سبيل المثال، إذا كانت الدالة د(س) = ٢س − ١، س ∈ ع والدالة هـ(س) = $\frac{١}{س}$ عندما س ∈ ع، حيث س ≠ ٠

لا يشكل تنفيذ الدالة هـ، ثم الدالة د أيّة مشكلة، لأن كل قيمة في مدى الدالة هـ موجودة في مجال الدالة د

بينما إذا تمّ تنفيذ الدالّتَين في الترتيب المعاكس، الدالة د ثم الدالة هـ، فستواجه مشكلة عندما س = ٠,٥، حيث إن د(٠,٥) = ٠ ولا يمكننا استخدام ذلك كجزء من مجال الدالة هـ



نتيجة ٦

(هـ ○ د)(س) تعني تطبيق الدالة د على س أولًا، ثم تطبيق الدالة هـ على الناتج.

عند تركيب الدوال من المهم أن تتذكر الآتي:

نتيجة ٧

- تتحقق (هـ ○ د) فقط إذا كان مدى الدالة د مجموعة جزئية من مجال الدالة هـ.
- بصورة عامة، (د ○ هـ) (س) $\neq$ (هـ ○ د) (س). إلّا في حالات خاصة وهي الدالة العكسية.

مثـــال ٦

إذا علمت أن د(س) = ٢س + ٣ حيث س $\in$ ع ، هـ(س) = س^{٢} − ١ حيث س $\in$ ع

فأوجد:

أ (د ○ هـ)(س) ب (هـ ○ د)(س) ج (د ○ د)(س)

الحـــلّ:

أ (د ○ هـ)(س) = د(هـ(س)) = د(س^{٢} − ١) ← طبّق الدالة هـ بدل س في د(س)، حيث هـ (س) = س^{٢} − ١

= ٢(س^{٢} − ١) + ٣ ← د هي الدالة 'اضرب في ٢، ثم زد ٣'

= ٢س^{٢} + ١

ب (هـ ○ د)(س) = هـ(٢س + ٣) ← طبّق الدالة د بدل س في هـ (س)، حيث د(س) = ٢س + ٣

= (٢س + ٣)^{٢} − ١ ← هـ هي الدالة 'ربّع ثم اطرح ١'

= ٤س^{٢} + ١٢س + ٩ − ١

= ٤س^{٢} + ١٢س + ٨

ج (د ○ د)(س) = د(٢س + ٣) ← طبّق الدالة د بدل س في د(س)، حيث د(س) = ٢س + ٣

= ٢(٢س + ٣) + ٣

= ٤س + ٩

استكشف ١

طُلب إلى ثلاثة طلبة أن يجدوا الدالة المركبة (هـ ∘ د)(س) حيث:

د(س) = ٢س − ٥ حيث س ∈ ع

هـ(س) = ٣س − ١ حيث س ∈ ع

إليك الحلول التي قدّموها:

الطالب (أ)	الطالب (ب)	الطالب (ج)
(هـ ∘ د)(س) = (٣س − ١)(٢س − ٥) = ٦س^{٢} − ١٧س + ٥	(هـ ∘ د)(س) = ٢(٣س − ١) − ٥ = ٦س − ٧	(هـ ∘ د)(س) = ٣(٢س − ٥) − ١ = ٦س − ١٦

ناقش الحلول مع أقرانك في الصف.

أيّ الطلبة قدّم الحلّ الصحيح؟ ما الخطأ الذي ارتكبه كل من الطالبَين الآخرَين؟

مثــال ٧

إذا علمت أن د(س) = (س − ٤)^{٢} − ١، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٢س + ٣}{س − ٢}$، حيث س ∈ ع، س > ٢

فأوجد (د ∘ هـ)(٤).

الحــلّ:

هـ(٤) = $\frac{٢(٤) + ٣}{٤ − ٢}$ = $\frac{١١}{٢}$ .... طبق ناتج الدالة هـ عندما س = ٤ في الدالة د

(د ∘ هـ)(٤) = د$\left(\frac{١١}{٢}\right)$ .... عوّض عن $\frac{١١}{٢}$ في الدالة د، اطرح ٤، ربّع ثم اطرح ١

= $\left(\frac{١١}{٢} − ٤\right)^{٢}$ − ١

= $١\frac{١}{٤}$

مثال ٨

إذا كانت د : س ← $\frac{٥}{س - ٤}$، حيث س ∈ ع، س ≠ ٤ وس ≠ $\frac{٢١}{٤}$ ، هـ(س) = ٣ − س^{٢}، حيث س ∈ ع

فأوجد : **أ** (د ∘ هـ)(س). **ب** (د ∘ د)(س).

الحــلّ:

أ (د ∘ هـ)(س) = د(٣ − س^{٢}) — طبّق الدالة هـ بدل س في الدالة د

$= \frac{٥}{(٣ - س^{٢}) - ٤}$ — د هي الدالة 'اطرح ٤، ثم أوجد ناتج قسمة الناتج على ٥'

$= \frac{٥}{-١ - س^{٢}}$

$= \frac{-٥}{س^{٢} + ١}$

ب (د ∘ د)(س) = د$\left(\frac{٥}{س - ٤}\right)$ — طبّق الدالة د بدل س في الدالة د

$= \frac{٥}{\frac{٥}{س - ٤} - ٤}$ — اضرب البسط والمقام في (س − ٤).

$= \frac{٥(س - ٤)}{\frac{٥(س - ٤)}{س - ٤} - ٤(س - ٤)}$

$= \frac{٥(س - ٤)}{٥ - ٤(س - ٤)}$

$= \frac{٥س - ٢٠}{٢١ - ٤س}$

مثال ٩

تمثل التكلفة ك(ن) لإنتاج ن منتج بالدالة:

ك(ن) = ١,٨ + ٢ن

ولكل ل (ريالًا عُمانيًّا) يتم إنفاقه، تحسب الدالة الآتية الربح:

ع(ل) = ٠,٤ل

أوجِد الربح من إنتاج ن منتج.

الحــلّ:

ك(ن) = ١,٨ + ٢ن — سيتم دمج الدالّتَين باستخدام الدوال المركبة.

ع(ل) = ٠,٤ ل

(ع ∘ ك)(ن) = ع(ك(ن)) — (ع ∘ ك)(ن) تعني تنفيذ تعويض الدالة ك(ن) في الدالة ع(ل).

ع(ك(ن)) = ٠,٤(١,٨ + ٢ن)

(ع ∘ ك)(ن) = ٠,٤(١,٨ + ٢ن)

(ع ∘ ك)(ن) = ٠,٧٢ + ٠,٨ن — يمكنك كتابة ع(ك(ن)) في صورة (ع ∘ ك)(ن).

∴ الربح من إنتاج ن منتج يساوي ٠,٧٢ + ٠,٨ن

تمارين ٢-٢

١) إذا علمت أن د : س ← ٢س + ٣، حيث س ∈ ع

هـ : س ← $س^٢$ − ١، حيث س ∈ ع

أ أوجِد (د ∘ هـ)(٢).

ب أوجِد (هـ ∘ د)(٥).

٢) إذا كانت د(س) = $(س + ٢)^٢$ − ١، حيث س ∈ ع

فأوجِد (د ∘ د)(٣).

٣) إذا كانت د(س) = $س^٢$ + ٦، حيث س ∈ ع

هـ(س) = $\sqrt{س + ٣}$ − ٢، حيث س ∈ ع، س ⩾ −٣

فأوجِد:

أ (د ∘ هـ)(٦).

ب (هـ ∘ د)(٤).

ج (د ∘ د)(−٣).

٤) إذا كانت ع : س ← س + ٥ حيث س ∈ ع، س > ٠

ل : س ← $\sqrt{س}$ حيث س ∈ ع، س > ٠

فاكتب كل دالة من الدوال الآتية في صورة دالة مركبة، مستخدمًا الدالة ع أو الدالة ل أو كلتيهما:

أ س ← $\sqrt{س}$ + ٥

ب س ← $\sqrt{س + ٥}$

ج س ← س + ١٠

٥) إذا علمت أن د : س ← ٢س + ٣ حيث س ∈ ع، س ≠ −١

هـ : س ← $\frac{١٢}{س - ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ١

أ أوجد (هـ ∘ د)(س) إن أمكن ذلك.

ب حلّ المعادلة (هـ ∘ د)(س) = ٢

٦) إذا علمت أن هـ(س) = س^{٢} − ٢ حيث س ∈ ع

ل(س) = ٢س + ٥ حيث س ∈ ع

أ أوجد (هـ ∘ ل)(س) إن أمكن ذلك.

ب حلّ المعادلة (هـ ∘ ل)(س) = ١٤

٧) إذا كانت د : س ← س^{٢} حيث س ∈ ع

هـ : س ← س + ١ حيث س ∈ ع

فاكتب كلّ دالة من الدوال الآتية في صورة دالة مركبة، مستخدمًا الدالة د أو الدالة هـ أو كلتيهما:

أ س ← (س + ١)^{٢}

ب س ← س^{٢} + ١

ج س ← س + ٢

د س ← س^{٤}

٨) إذا علمت أن د(س) : س^{٢} − ٥س حيث س ∈ ع

هـ(س) = ٢س + ٣ حيث س ∈ ع

أ أوجد (د ∘ هـ)(س).

ب أوجد مدى الدالة (د ∘ هـ)(س).

٩) تمثّل الدالة أدناه دالة الكلفة ك(ن) لإنتاج ن قطعة من سلعة ما:

ك(ن) = ٢ + ٤ن

ولكل س ريال عُماني تمّ صرفه، يتمّ احتساب الربح باستخدام الدالة:

ر(س) = ٠,٢ س

أوجِد (ر ∘ ك)(ن).

١٠) تمثّل الدالة المعطاة الارتفاع فوق مستوى سطح البحر ع (بالأمتار) لمتسلق جبال حيث كان يتسلق لمدة ن ساعة:

ع(ن) = ٣٠ن + ٤٩٠

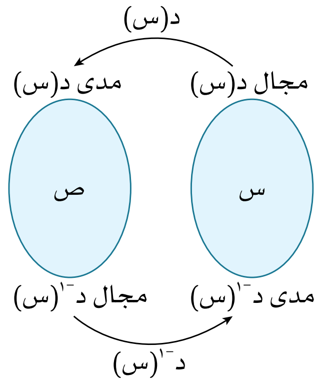
كما أن درجة الحرارة د (بالدرجة السيليزية) لكل س متر فوق سطح البحر تتمثّل بالدالة:

$$د(س) = ٢٠ - \frac{٢س}{٣٠٠}$$

أوجِد (د ∘ ع)(ن).

٢-٣ الدوال العكسية

إذا كانت الدالة د(س) واحد إلى واحد، ووجدت دالّة أخرى تعكس ما تقوم به الدالة د(س)، فإن هذه الدالة تسمّى **الدالة العكسية inverse function** للدالة د(س) وتكتب في صورة د$^{-1}$(س).



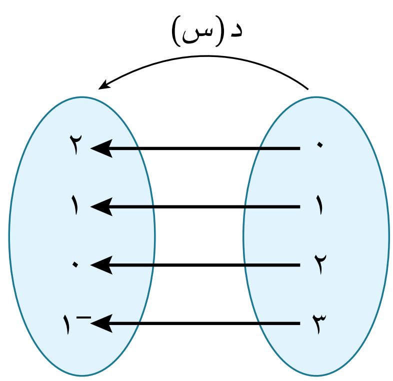
نتيجة ٨

مجال الدالة د$^{-1}$(س) هو مدى الدالة د(س).

مدى الدالة د$^{-1}$(س) هو مجال الدالة د(س).

على سبيل المثال:

الدالة الآتية د(س) واحد إلى واحد



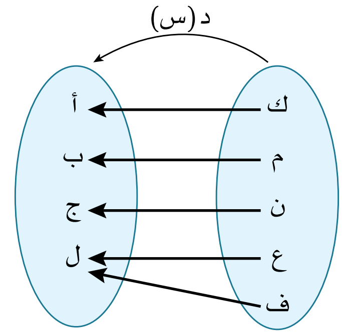
د$^{-1}$(٠) = ٢ وهكذا.

مجال الدالة د$^{-1}$(س) هو مدى الدالة د(س)، أي يساوي ٢، ١، ٠، ١-

مدى الدالة د$^{-1}$(س) هو مجال الدالة د(س)، أي يساوي ٠، ١، ٢، ٣

من المهم أن تتذكر أنه لا توجد لكل الدوال دوال عكسية.

فمثلًا، لا توجد دالة عكسية للدالة الآتية لأن $\text{د}^{-1}(\text{ل})$ غير موجودة.



إذا كانت الدالة $\text{د(س)} = ٥\text{س} - ٨$ والدالة $\text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{٨ + \text{س}}{٥}$، فإن

$$\text{د}(\text{د}^{-1}(\text{س})) = \text{د}\left(\frac{٨ + \text{س}}{٥}\right)$$

$$\text{د}(\text{د}^{-1}(\text{س})) = ٥\left(\frac{٨ + \text{س}}{٥}\right) - ٨$$

$$\text{د}(\text{د}^{-1}(\text{س})) = \text{س}$$

كما أن:

$$\text{د}^{-1}(\text{د(س)}) = \text{د}^{-1}(٥\text{س} - ٨)$$

$$\text{د}^{-1}(\text{د(س)}) = \frac{٨ + (٥\text{س} - ٨)}{٥}$$

$$\text{د}^{-1}(\text{د(س)}) = \text{س}$$

وعليه، فإن الدالّتَين $\text{د}(\text{د}^{-1}(\text{س})) = \text{س}$، $\text{د}^{-1}(\text{د(س)}) = \text{س}$، أي أن كلًا منهما هي دالّة عكسية للأخرى.

مُساعَدة

جميع الدوال الخطية هي واحد إلى واحد وتكون لها دالة عكسية.

نتيجة ٩

$\text{د}(\text{د}^{-1}(\text{س})) = \text{س}$ و $\text{د}^{-1}(\text{د(س)}) = \text{س}$

لتجد الدالة العكسية للدالة $\text{هـ(س)} = \frac{١}{٤\text{س} + ٢}$

الخطوة ١: اكتب ص = هـ(س) ← $\text{ص} = \frac{١}{٤\text{س} + ٢}$

الخطوة ٢: بادل بين س، ص ← $\text{س} = \frac{١}{٤\text{ص} + ٢}$

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتجد ص بدلالة س ← $\text{س}(٤\text{ص} + ٢) = ١$

$$٤\text{ص} + ٢ = \frac{١}{\text{س}}$$

$$٤\text{ص} = \frac{١}{\text{س}} - ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\frac{١}{\text{س}} - ٢}{٤}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٤\text{س}} - \frac{١}{٢}$$

وعليه، فإن $\text{هـ}^{-1}(\text{س}) = \frac{١}{٤\text{س}} - \frac{١}{٢}$

نتيجة ١٠

إذا كانت الدالة د والدالة العكسية لها متساويتَين، فتُسمى الدالة د **بالدالة العكسية لنفسها** **self-inverse function**.

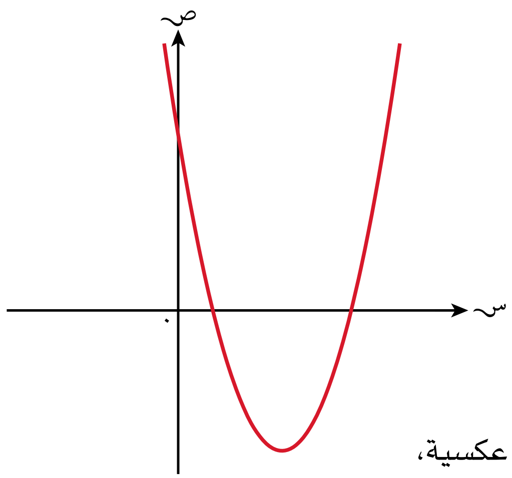
فمثلًا إذا كان د(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠، فإن $د^{-١}$(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠

وعليه، تكون د(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠ دالّة عكسية لنفسها.

استكشف ٢

يبيّن الشكل المجاور الدالة د(س) = $س^{٢}$ − ٦س + ٥ حيث س ∈ ع

ناقش الأسئلة الآتية مع أقرانك في الصف:



١) ما نوع هذه الدالة؟

٢) ما إحداثيات نقطة رأس المنحنى؟

٣) ما مجال الدالة؟

٤) ما مدى الدالة؟

٥) هل يوجد دالة عكسية لهذه الدالة؟

٦) إذا كان للدالة د دالة عكسية، فما معادلتها؟ وإن لم يوجد لها دالة عكسية، فكيف يمكن أن تغيّر مجالها ليصبح لها دالة عكسية؟

مثـــال ١٠

إذا كانت د(س) = ٥س − ٣ حيث س ∈ ع، س ⩾ ٠

فأوجد $د^{-١}$(س)

الحــلّ:

د(س) = ٥س − ٣

الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص = ← ص = ٥س − ٣

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = ٥ص − ٣

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← س + ٣ = ٥ص

$\frac{س + ٣}{٥}$ = ص

∴ $د^{-١}$(س) = $\frac{س + ٣}{٥}$

مثــال ١١

تسافر منى بالسيارة بمعدل ثابت. تمثل الدالة الآتية المسافة م (بالكيلومترات) من منزل منى بعد ن (٠ ⩽ ن ⩽ ٣) (ساعات):

م(ن) = ١٢٠ − ٤٠ن

أ أوجد م$^{-1}$

ب فسّر ما تعنيه الدالة م$^{-1}$ في سياق المسألة.

ج أوجد الزمن الذي تستغرقه منى لتكون على بعد ٤٠ كيلومترًا من منزلها مباشرة.

الحــلّ:

أ م(ن) = ١٢٠ − ٤٠ن .... اكتب م(ن) = ص

ص = ١٢٠ − ٤٠ن .... بادل بين ن، ص

ن = ١٢٠ − ٤٠ص .... أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة ن

ن + ٤٠ص = ١٢٠

٤٠ص = ١٢٠ − ن

ص = $\frac{(١٢٠ - ن)}{٤٠}$

∴ م$^{-1}$(ن) = $\frac{(١٢٠ - ن)}{٤٠}$

ب تدلنا م$^{-1}$ على الزمن الذي استغرقته منى عند قطع مسافة ن كيلومترات من منزلها.

ج م$^{-1}$(٤٠) = $\frac{(١٢٠ - ٤٠)}{٤٠}$

= ٢ ساعة (استغرقت منى ساعتين)

تمارين ٢-٣

١) أوجد د$^{-١}$(س) لكلّ دالة من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٥س − ٨ حيث س ∈ ع

ب د(س) = س^٢ + ٣ حيث س ∈ ع، س ⩾ ٠

ج د(س) = (س − ٥)^٢ + ٣حيث س ∈ ع، س ⩾ ٥

د د(س) = $\frac{٨}{\text{س} - ٣}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٣

٢) إذا كانت د : س ← س^٢ + ٤س حيث س ∈ ع، س ⩾ −٢

أ أوجد مدى د(س)، أي مجال د$^{-١}$(س)

ب أوجد مدى د$^{-١}$(س)

مُساعَدة

كي تحسب المدى، ارسم منحنى الدالة التربيعية لتحدد نقطة التحول (القيمة الصغرى).

٣) إذا كانت د : س ← $\frac{٥}{٢\text{س} + ١}$ حيث س ∈ ع، س ⩾ ٢

أ أوجد مدى د(س)، أي مجال د$^{-١}$(س).

ب أوجد د$^{-١}$(س).

مُساعَدة

مجال الدالة د$^{-١}$(س) هو مدى الدالة د(س).
مدى الدالة د$^{-١}$(س) هو مجال د(س).

٤) إذا كانت د : س ← س^٢ − ٦س حيث س ∈ ع

فأوجد مدى الدالة د

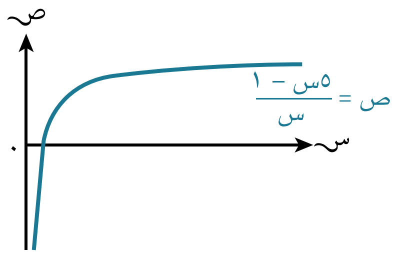
٥) إذا كانت د(س) = ٣س − ٢٤ حيث س ⩾ ٠، اكتب مدى د$^{-١}$

٦) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالة

ص = د$^{-١}$(س)، حيث د$^{-١}$(س) = $\frac{٥\text{س} - ١}{\text{س}}$

لكل س ∈ ع، ٠ < س ⩽ ٣

أوجد د(س).



٧) تتمثل الكلفة ك (بمئات الريالات العُمانية) لإنتاج س سلعة بالدالة

ك(س) = ١ + ٠,٢ س

تشير الدالة العكسية ك$^{-١}$(س) إلى عدد السلع التي يمكن إنتاجها لكمية محددة من الأموال. أوجد هذه الدالة.

٨) يُملأ خزان مياه حتى ارتفاع ع سم من صنبور ماء جارٍ بكمّية ضخّ ثابتة. تمثل الدالة أدناه ارتفاع الماء في الخزان في الزمن ن (ثانية) منذ تشغيل الصنبور:

$$ع(ن) = ٠,٢ ن$$

أ أوجد $ع^{-١}(ن)$.

ب فسّر المقصود من الدالة $ع^{-١}$ في سياق المسألة، واذكر الصيغة المناسبة لها.

٢-٤ منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية

لتكن الدالة د(س) = ٢س + ١، حيث س ∈ ع، −٤ ⩽ س ⩽ ٢

د(−٤) = −٧، د(٢) = ٥

مجال الدالة د هو −٤ ⩽ س ⩽ ٢، ومداها هو −٧ ⩽ د(س) ⩽ ٥

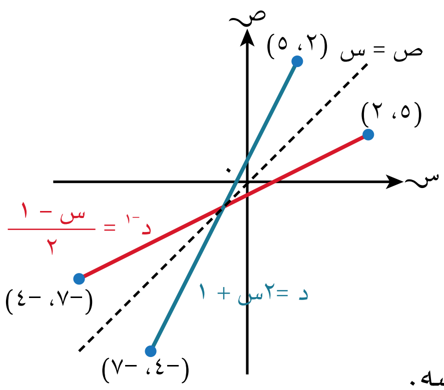
الدالة العكسية للدالة د هي $د^{-1}$(س) = $\frac{\text{س} - ١}{٢}$

مجال الدالة $د^{-1}$ هو: مدى الدالة د

أي أن مجال $د^{-1}$ هو: −٧ ⩽ س ⩽ ٥

مدى الدالة $د^{-1}$ هو: مجال الدالة د

أي أن مدى الدالة: $د^{-1}$ هو −٤ ⩽ $د^{-1}$(س) ⩽ ٢



يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للدالتَين د، $د^{-1}$ على المستوى الإحداثي نفسه.

من المهمّ أن تلاحظ أن أحد منحنيَي د، $د^{-1}$ انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س، ويُعدّ ذلك صحيحًا لجميع دوال الواحد إلى واحد ودوالها العكسية.

نتيجة ١١

منحنى الدالتَين د، $د^{-1}$ أحدهما انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س

يحصل ذلك لأن (د ∘ $د^{-1}$)(س) = س = ($د^{-1}$ ∘ د)(س).

نتيجة ١٢

عندما تكون الدالة د عكسية لنفسها، يكون منحنى الدالة د متماثلًا حول المستقيم ص = س

مثال ١٢

إذا كانت د(س) = $\text{س}^{٢}$ − ٨س + ١٢ حيث س ∈ ع، ٤ ⩽ س ⩽ ٨

ارسم منحنى الدالة د ومنحنى الدالة $د^{-1}$ على المستوى الإحداثي نفسه.

الحـــل:

ص = $\text{س}^{٢}$ − ٨س + ١٢ .... ابدأ برسم المنحنى التربيعي حيث س ∈ ع

عندما س = ٠، ص = $٠^{٢}$ − ٨ × ٠ + ١٢ = ١٢ .... المقطع الصادي.

عندما ص = ٠، $\text{س}^{٢}$ − ٨س + ١٢ = ٠ .... حلّل إلى العوامل لتحسب المقطعَين السينيَّين.

(س − ٦)(س − ٢) = ٠

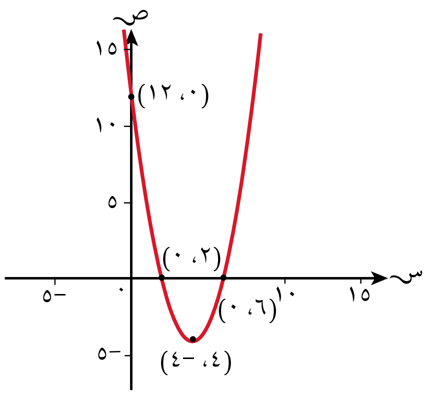
س = ٢ أو س = ٦

∴ نقاط التقاطع هي (٠، ١٢)، (٢، ٠)، (٦، ٠).

س = ٤ .... محور التماثل لتوجد نقطة التحول.

ص = ٤^{٢} − ٨ × ٤ + ١٢ = −٤

∴ نقطة التحول هي (٤، −٤).



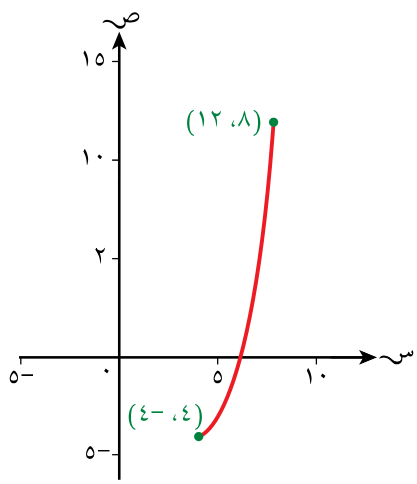
ص = س^{٢} − ٨س + ١٢ حيث س ∈ ع، ٤ ⩽ س ⩽ ٨

استخدم رسم الدالة ص = د(س) في المجال المحدد.

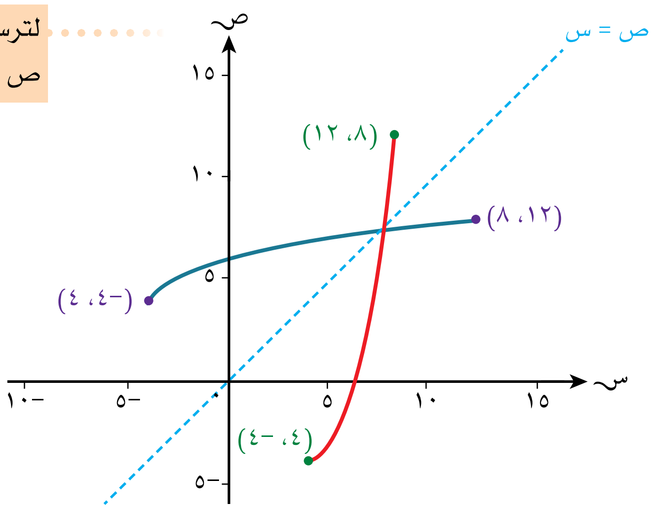
عندما س = ٤ ، ص = −٤

عندما س = ٨، ص = ٨^{٢} − ٨ × ٨ + ١٢ = ١٢

قيمة طرفَي المنحنى.



عند استخدام اختبارَي المستقيم الرأسي والأفقي، نستنتج أن الدالة واحد إلى واحد عند المجال المحدد، ما يدل على أن الدالة العكسية موجودة. يمكننا باستخدام النتيجة أن نرسم الدالة العكسية بانعكاس للدالة حول المستقيم ص = س لنرسم د$^{-١}$



لترسم د$^{-١}$(س)، اعكس منحنى الدالة د حول المستقيم ص = س

مثـــال ١٣

إذا كانت د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

أ أوجد د$^{-١}$(س).

ب ماذا نستنتج من الجزئية (أ) عن تماثل المنحنى حول المستقيم ص = س؟

الحـــلّ:

أ د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص = ← ص = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = $\frac{٢ص + ٧}{ص - ٢}$

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← س ص − ٢س = ٢ص + ٧

س ص − ٢ص = ٢س + ٧

ص(س − ٢) = ٢س + ٧

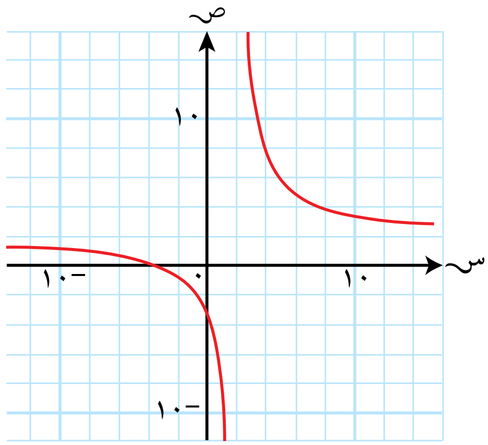
ص = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

∴ د$^{-١}$(س) = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

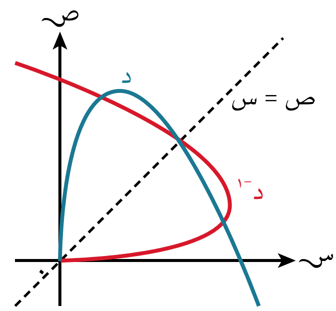
ب ∵ د$^{-١}$(س) = د(س)، فإن الدالة عكسية لنفسها.

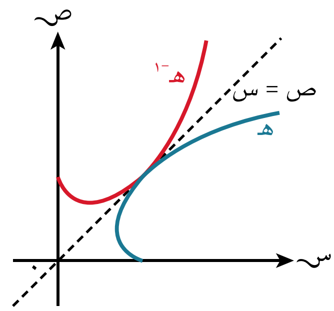
∴ منحنى الدالة ص = د(س) متماثل حول المستقيم

ص = س



استكشف ٣





تقول شهد ما يأتي:

يبيّن الشكلان الدالتَين د، هـ معًا مع الدالة العكسية لكل منهما د⁻¹، هـ⁻¹

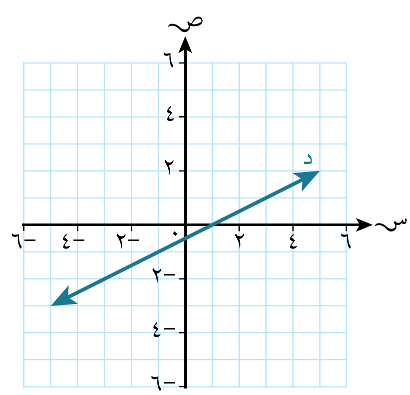
هل ما تقوله شهد صحيح؟

اشرح إجابتك.

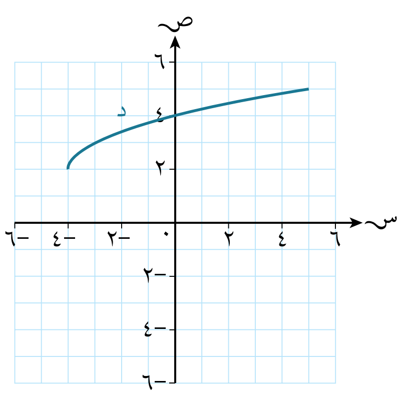
تمارين ٢-٤

١) في كل حالة من الحالات الآتية، ارسم منحنى د⁻¹(س) على المستوى الإحداثي نفسه إن وجد:

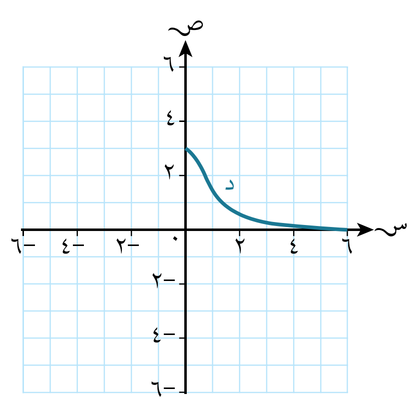
أ



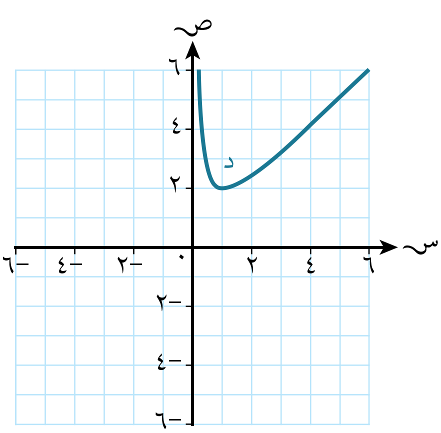
ب



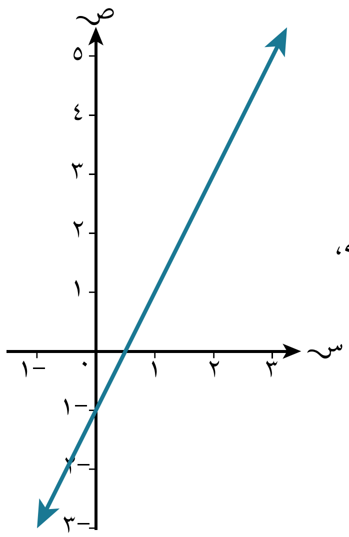
ج



د



٢) إذا كانت د : س ← ٢س − ١ حيث س ∈ ع، −١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٣



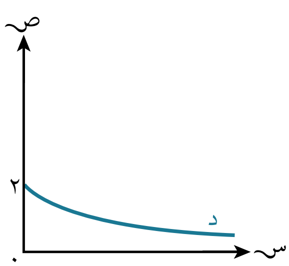
أ أوجد د$^{-1}$(س).

ب حدّد مدى د(س)، أي مجال د$^{-1}$(س).

ج أوجد مدى د$^{-1}$(س).

د انسخ الشكل وارسم منحنى ص = د$^{-1}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيَين.

٣) يبيّن الشكل المجاور منحنى ص = د(س) عندما د(س) = $\frac{\text{٤}}{\text{س + ٢}}$ حيث س ∈ ع، س $\geqslant$ ٠



أ حدد مدى د(س)، أي مجال الدالة د$^{-1}$(س).

ب أوجد د$^{-1}$(س).

ج أوجد مدى د$^{-1}$(س).

د انسخ الشكل وارسم منحنى ص = د$^{-1}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيَين.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

الدوال

- الدالة هي علاقة بين مجموعتين حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.
- قد تكون الدالة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد.
- تُسمّى مجموعة المدخلات مجال الدالة.
- تُسمّى مجموعة المخرجات مدى الدالة.

تركيب الدوال

- (د ○ هـ)(س) تعني إجراء الدالة هـ بدل س في د، ثم إجراء د على الناتج.
- تكون (د ○ هـ)(س) موجودة (فقط) عندما يكون مدى هـ متضمَّنًا في مجال د
- بصورة عامة، (د ○ هـ)(س) $\neq$ (هـ ○ د)(س).

الدوال العكسية

- الدالة العكسية للدالة د(س) هي دالة تعكس ما تقوم به الدالة د(س).

(د ○ د$^{-١}$)(س) = (د$^{-١}$ ○ د)(س) = س أو إذا ص = د(س) فإن س = د$^{-١}$(ص).

- تكتب الدالة العكسية للدالة د(س) في صورة د$^{-١}$(س).
- خطوات إيجاد الدالة العكسية هي:

الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص =

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص

الخطوة ٣: أوجد ص بدلالة س

- مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س).
- مدى د$^{-١}$(س) هو مجال د(س).
- يمكن إيجاد الدالة العكسية د$^{-١}$(س) إذا كانت د(س) دالة واحد إلى واحد فقط.
- منحنى د$^{-١}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم ص = س
- إذا كان د(س) = د$^{-١}$(س) فتسمّى الدالة د عكسية لنفسها.
- إذا كانت الدالة د عكسية لنفسها، فإن (د ○ د)(س) = س
- يكون منحنى الدالة العكسية لنفسها متماثلًا حول المستقيم ص = س

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثانية

١) إذا كانت د دالة معرفة كالآتي: د(س) = $س^{٢}$ − ١ حيث −١٠ ⩽ س ⩽ ٨

أ أوجِد مدى د

ب اكتب مجالًا مناسبًا للدالة د حيث تكون الدالة $د^{-١}$ موجودة.

٢) إذا كانت الدالتان د، هـ معرفتَين لكل قيم س الحقيقية كالآتي:

$$د(س) = \sqrt{س - ١} - ٣ \quad حيث\ س > ١$$

$$هـ(س) = \frac{س - ٢}{٢س - ٣} \quad حيث\ س > ٢$$

أ أوجِد (هـ ∘ د)(٣٧).

ب أوجِد $د^{-١}$(س).

ج أوجِد $هـ^{-١}$(س).

٣) إذا كانت الدالة هـ معرفة كالآتي: هـ(س) = $\frac{١}{٢س - ١}$ حيث ١ ⩽ س ⩽ ٣

أ أوجِد مدى الدالة هـ

ب أوجِد $هـ^{-١}$(س).

ج اكتب مجال $هـ^{-١}$(س).

٤) أ إذا كانت الدالتان د، هـ معرفتَين حيث س ∈ ع كالآتي:

د: س ← ٢س + ٣

هـ: س ← $س^{٢}$ − ١

فأوجِد (د ∘ هـ)(٤).

ب إذا كانت الدالتان ع، ل معرفتَين حيث س > ٠ كالآتي:

ع: س ← س + ٤

ل: س ← $\sqrt{س}$

فاكتب كل دالة من الدوال الآتية بدلالة دوال مركبة من الدالتَين ع، ل:

١) س ← $\sqrt{س + ٤}$

٢) س ← س + ٨

٥) إذا كانت الدالة د معرفة كالآتي: د(س) = ٢ − $\sqrt{\text{س} + ٥}$ حيث −٥ ⩽ س ⩽ ٠

أ) اكتب مدى الدالة د

ب) أوجِد د$^{-١}$(س) ومجالها ومداها.

ج) الدالة هـ معرفة كالآتي: هـ(س) = $\frac{٤}{\text{س}}$ حيث −٥ ⩽ س ⩽ −١

حلّ المعادلة (د ∘ هـ)(س) = ٠

٦) إذا كانت الدالتان د، هـ معرفتَين على س ∈ ح كما يأتي:

د: س ← ٣س − ١

هـ: س ← ٥س − س^{٢}

فاكتب (هـ ∘ د)(س) في صورة أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ، ب، جـ ثوابت.

٧) إذا كانت الدالة د: س ← س^{٢} − ٤ معرّفة على المجال س ⩾ ٠

أ) أوجد د$^{-١}$(س) وحدّد مجال الدالة د$^{-١}$

ب) ارسم منحنى د ومنحنى د$^{-١}$ على المستوى الإحداثي نفسه.

٨) يتمثل ارتفاع كرة ع (متر) فوق سطح الأرض عندما تسقط على الأرض في الزمن ن (ثانية) بالدالة:

ع(ن) = ٢٠ − ٥ن^{٢}

ما مجال الدالة ع ومداها في سياق المسألة؟

٩) أجرة سيارة الأجرة معطى بالدالة:

ك(م) = ١,٥ + ٠,٢م

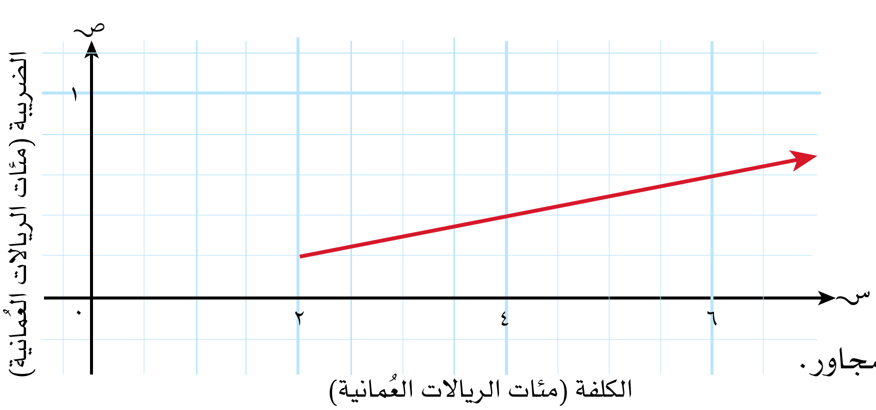
حيث م عدد الكيلومترات التي تمّ اجتيازها.

أ) أوجد عبارة ك$^{-١}$(م).

ب) فسّر المقصود من الدالة ع$^{-١}$ في سياق المسألة. أعد كتابة ك$^{-١}$ مستخدمًا متغيرات مناسبة تصلح في سياق المسألة.

١٠) يمثل التمثيل المقابل الضريبة ض (مئات الريالات العُمانية) التي تطبّق عند شحن منتج يعتمد على كلفة ك (مئات الريالات العُمانية) المنتج.

اكتب مجال دالة الضريبة ومداها كما هو ممثّل في التمثيل البياني المجاور.



الوحدة الثالثة

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and series

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٣-١ تحدّد المتتاليات والمتسلسلات الحسابية وتتعرّف على الفرق بينهما.

٣-٢ تجد الحدّ الأول والأساس في المتتالية الحسابية.

٣-٣ تجد الحدّ النوني (الحد العام) ومجموع الحدود حتى الحدّ النوني في المتتالية الحسابية.

٣-٤ تستخدم صيغ الحدّ النوني (الحد العام) وصيغة مجموع الحدود من الحدّ الأول حتى الحدّ النوني لتحلّ مسائل تتضمّن متتاليات حسابية.

٣-٥ تحدّد المتتاليات والمتسلسلات الهندسية وتتعرّف على الفرق بينهما.

٣-٦ تجد الحدّ الأول والأساس في المتتالية الهندسية.

٣-٧ تجد الحدّ النوني (الحد العام) ومجموع الحدود حتى الحدّ النوني في المتتالية الهندسية.

٣-٨ تستخدم صيغ الحدّ النوني (الحد العام) وصيغة مجموع الحدود من الحدّ الأول حتى الحدّ النوني لتحلّ مسائل تتضمّن متتاليات هندسية.

٣-٩ تتذكّر وتستخدم شرط التقارب في المتتالية الهندسية غير المنتهية لتحدّد المتتاليات المتقاربة.

٣-١٠ تستخدم صيغة المجموع حتى اللانهاية في متتالية هندسية متقاربة.

٣-١١ تطبق وتفسر المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية كتمثيلات رياضية في مواقف من الحياة اليومية، مثل التمويل والنموّ السكّاني، والفنون والتصميم، والسياقات العلمية (الأحياء).

معرفة قبلية

المصدر	تعلّمت سابقًا أن	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة السادسة	تفكّ الأقواس.	١) فكّ الأقواس: أ $(٢س + ٣)^٢$ ب $(١ - ٣س)(١ + ٢س - ٣س^٢)$
الصف التاسع الوحدة الثالثة	تبسّط الأسس.	٢) بسّط: أ $(٥س^٢)^٣$ ب $(-٢س^٣)^٥$
الصف التاسع الوحدة التاسعة	توجد الحدّ العام (الحدّ النوني) في متتالية خطيّة.	٣) أوجِد الحدّ العام لكل متتالية من المتتاليتين الخطيتين الآتيتين: أ ٥، ٧، ٩، ١١، ١٣، ... ب ٨، ٥، ٢، -١، -٤، ...

المفردات

متتالية sequence

متتالية حسابية arithmetic sequence

أساس common difference

المتسلسلة series

متتالية هندسية geometric sequence

متقاربة convergent

لماذا ندرس المتتاليات والمتسلسلات؟

سوف تتعلم في هذه الوحدة المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية، وكيف تمثلها جبريًا، وكيف تجد مجموع حدودها، كما ستتعلم ربطها بمواقف من الحياة اليومية المليئة بالأنماط والمتتاليات الحسابية والهندسية، إذ قد تحسب عدد مقاعد مسرح حيث يزداد عدد الصفوف، أو مجموع النقود التي تدّخرها خلال فترة زمنية معينة، أو مجموع المسافات الرأسية التي تقطها كرة بعد ارتطامها بالأرض، جميع هذه النشاطات تتضمن متتاليات من نوع ما.

٣-١ المتتاليات الحسابية

تعلمت في الصف التاسع الوحدة التاسعة أن المتتالية العددية هي مجموعة من الأعداد المرتبة التي تحقّق قاعدة ما، وتسمّى الأعداد في المتتالية حدود المتتالية.

انظر إلى **المتتاليات الحسابية** **arithmetic sequence** الآتية:

٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧

١٠ ، ٧ ، ٤ ، ١ ، −٢ ، ...

٣٨ ، ٣٢ ، ٢٦ ، ٢٠ ، ...

المتتالية ٥، ٨، ١١، ١٤، ١٧، ... يكون الفرق فيها بين كل حدّ والحد الذي يسبقه مباشرة مقدار ثابت يساوي ٣

يسمّى هذا الفرق الثابت **أساس** المتتالية **common difference**.

الرموز المستخدمة في المتتالية الحسابية هي:

أ= الحدّ الأول ، د = الأساس ، ل = الحدّ الأخير ، ن = رتبة الحدّ

في المتتالية ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧

أ = ٥ ، د = ٣ ، ل = ١٧

الحد الرابع هو ١٤ ورتبته ن = ٤

الحدود الخمسة الأولى في أيّة متتالية حسابية حدّها الأول (أ) وأساسها (الفرق المشترك) (د) هي:

أ	أ + د	أ + ٢د	أ + ٣د	أ + ٤د	...	أ + (ن − ١) د
$ح_{١}$	$ح_{٢}$	$ح_{٣}$	$ح_{٤}$	$ح_{٥}$		$ح_{ن}$

يقود ذلك إلى صيغة ($ح_{ن}$) في المتتالية الحسابية:

نتيجة ١

الحدّ العام (الحدّ النوني) للمتتالية الحسابية التي حدها الأول أ ، وأساسها د هو
$ح_{ن}$ = أ + (ن − ١)د، حيث ن عدد صحيح موجب.

الحدّ الأخير في متتالية حسابية عدد حدودها (ن) هو

ل = أ + (ن − ١) د

إذا علمت الحدّ الأول والحدّ الأخير في متتالية حسابية يمكنك أن تعيد ترتيب هذه الصيغة لتحصل على: $ن = \frac{ل - أ}{د} + ١$

لتجد عدد حدود المتتالية.

مثال ١

الحد النوني في متتالية حسابية هو $ح_ن = (١١ - ٣ن)$؛ أوجِد الحدّ الأول والأساس.

الحـلّ:

رتبة الحد الأول هي ن = ١ .... عوّض عن ن = ١ في الحدّ العام = ١١ - ٣ن

$ح_١ = ١١ - ٣(١) = ٨$

لحساب الأساس نوجد الحد الثاني

رتبة الحد الثاني هي ن = ٢ .... عوّض عن ن = ٢ في الحدّ العام = ١١ - ٣ن

$ح_٢ = ١١ - ٣(٢) = ٥$

الأساس = الحدّ الثاني - الحدّ الأول = -٣

مُساعَدة

أن الحد النوني هو نتاج إعادة ترتيب الحد العام

مثال ٢

أوجِد عدد حدود المتتالية الحسابية -١٧، -١٤، -١١، -٨، ...، ٥٨

الحـلّ:

د = -١٤ - (-١٧) = ٣

$ح_ن = أ + (ن - ١)د$ .... استخدم أ = -١٧، د = ٣، $ح_ن = ٥٨$

٥٨ = -١٧ + ٣(ن - ١) .... حلّ المعادلة.

ن - ١ = ٢٥

ن = ٢٦

حل آخر هو استخدام الصيغة

$$ن = \frac{ل - أ}{د} + ١$$

لذا

$$ن = \frac{٥٨ - (-١٧)}{٣} + ١$$

ن = ٢٦

مُساعَدة

تمّت مساواة الحد العام بالحد الأخير لأن رتبة الحد الأخير هي ن = ن

مثــال ٣

الحدّ الخامس في متتالية حسابية ٤,٤ والحدّ التاسع ٧,٦؛ أوجِد الحدّ الأول والأساس.

الحــلّ:

ح٥ = ٤,٤ ⟸ أ + ٤د = ٤,٤ .... (١)

ح٩ = ٧,٦ ⟸ أ + ٨د = ٧,٦ .... (٢)

تعويض القيم المعطاة يعطينا زوجًا من المعادلات الخطيّة.

طرح (١) من (٢) يعطي ٤د = ٣,٢

د = ٠,٨

حلّ المعادلتَين.

أ + ٣,٢ = ٤,٤

أ = ١,٢

التعويض في المعادلة (١)

الحدّ الأول = ١,٢، الأساس = ٠,٨

حل آخر لحل هذه المسألة هو

خذ بالاعتبار فرق الرتبة بين الحدّين والفرق بين الحدّين.

$$\text{الأساس} = \frac{\text{الفرق بين القيمتين}}{\text{الفرق بين الرتبتين}} = \frac{٧,٦ - ٤,٤}{٩ - ٥}$$

$$= \frac{٣,٢}{٤} = ٠,٨$$

مجموع المتتالية الحسابية (المتسلسلة)

تكتب المتسلسلة **series** في صورة مجموع حدود المتتالية.

استكشف ١

يقال إن عالِم الرياضيات كارل جاوس Carl Gauss وهو في الثامنة من عمره قد سُئل عن إيجاد مجموع الأعداد من ١ إلى ١٠٠؛ ظنّ معلّمه أن هذه المهمّة ستشغله لبعض الوقت، لكنه فوجئ بأن كتب الإجابة الصحيحة بعد عدة ثوان. كانت طريقته أن جمع الأعداد أزواجًا: ١ + ١٠٠ =١٠١، ٢ + ٩٩ = ١٠١، ٣ + ٩٨ = ١٠١، ...

١) هل يمكنك أن تكمل طريقة جاوس لتجد الإجابة؟

٢) استخدم طريقة جاوس لتجد مجموع:

أ ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + ٣٩٤ + ٣٩٦ + ٣٩٨ + ٤٠٠

ب ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ... + ٤٤١ + ٤٤٤ + ٤٤٧ + ٤٥٠

ج ١٧ + ٢٤ + ٣١ + ٣٨ + ... + ٣٣٩ + ٣٤٦ + ٣٥٣ + ٣٦٠

٣) استخدم طريقة جاوس لتجد عبارة للمجموع بدلالة ن:

١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + (ن − ٣) + (ن − ٢) + (ن − ١) + ن

نتيجة ٢

مجموع متتالية حسابية $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ أو $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$

حيث ن عدد الحدود ل الحد الأخير د أساس المتتالية

البرهان: $جـ_{ن} = أ + (أ + د) + (أ + ٢د) + ... + (ل - ٢د) + (ل - د) + ل$

اكتب المجموع بصورة عكسية $جـ_{ن} = ل + (ل - د) + (ل - ٢د) + ... + (أ + ٢د) + (أ + د) + أ$

اجمع $٢جـ_{ن} = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل)$

$٢جـ_{ن} = ن(أ + ل)$

وعليه، يكون $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

استخدم $ل = أ + (ن - ١)د$ لتحصل على $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$

من المفيد أن تتذكّر القاعدة الآتية التي تطبق على جميع المتتاليات الحسابية $ح_{ن} = جـ_{ن} - جـ_{ن-١}$

مثـــال ٤

متتالية حسابية مجموع أول ن حدًّا يساوي $جـ_{ن} = ٥ن^{٢} - ٣ن$، أوجد كلًّا مما يأتي:

أ الحدّ الأول والأساس.

ب الحدّ العام.

الحـــلّ:

أ $جـ_{١} = ٥(١)^{٢} - ٣(١) = ٢$ ⇐ الحدّ الأول = ٢

$جـ_{٢} = ٥(٢)^{٢} - ٣(٢) = ١٤$ ⇐ الحدّ الأول + الحدّ الثاني = ١٤

الحدّ الثاني = ١٤ - ٢ = ١٢

الأساس = الحد الثاني - الحد الأول = ١٢ - ٢ = ١٠، الأساس = ١٠

ب $ح_{ن} = أ + (ن - ١)د$ استخدم أ = ٢، د = ١٠

$= ٢ + ١٠(ن - ١)$

$= ١٠ن - ٨$

حل آخر:

$ح_{ن} = جـ_{ن} - جـ_{ن-١} = ٥ن^{٢} - ٣ن - [٥(ن - ١)^{٢} - ٣(ن - ١)]$

$= ٥ن^{٢} - ٣ن - (٥ن^{٢} - ١٠ن + ٥ - ٣ن + ٣)$

$= ١٠ن - ٨$

مثـــال ٥

متتالية حسابية حدها الأول ٢٥ وحدها التاسع عشر ‎−٣٨ وحدها الأخير ‎−٨٧، أوجد مجموع حدودها.

الحـــلّ:

$ح_ن = أ + (ن - ١)د$ .... استخدم $ح_ن$ = ‎−٣٨ عندما ن = ١٩، أ = ٢٥

$-٣٨ = ٢٥ + ١٨د$ .... حلّ.

$د = -٣,٥$

لإيجاد عدد الحدود في المتتالية

$ح_ن = أ + (ن - ١)د$ .... استخدم الحد الأخير $ح_ن$ = ‎−٨٧ عندما أ = ٢٥، د = ‎−٣.٥

$-٨٧ = ٢٥ - ٣,٥(ن - ١)$ .... حلّ.

$ن - ١ = ٣٢$

$ن = ٣٣$

لإيجاد مجموع جميع الحدود

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ .... ضع أ = ٢٥، ل = ‎−٨٧، ن = ٣٣

$جـ_{٣٣} = \frac{٣٣}{٢}(٢٥ - ٨٧)$

$= -١٠٢٣$

مثـــال ٦

في متتالية حسابية، إذا كان الحد الثاني عشر ٨ ومجموع ١٢ حدًّا الأولى منها هو ٧٨
أوجد الحد الأول في المتتالية وأساسها.

الحـــلّ:

$ح_ن = أ + (ن - ١)د$ .... $ح_{١٢}$ = ٨ عندما ن = ١٢

$ح_{١٢} = أ + ١١ د$

$٨ = أ + ١١د$ .... (١)

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$ .... استخدم ن = ١٢، $جـ_{١٢}$ = ٧٨

$جـ_{١٢} = (\frac{١٢}{٢})(٢أ + (١٣ - ١) د)$

$٧٨ = \frac{١٢}{٢}(٢أ + ١٢د)$ .... بسّط.

$٦ = أ + ٦د$ .... (٢)

اطرح (١) − (٢) لتعطي ٥د = ٢

$د = ٠,٤$

عوّض د = ٠,٤ في المعادلة (١) لتحصل على أ = ٣,٦

الحدّ الأول = ٣,٦، والأساس = ٠,٤

مثـــال ٧

يخطط مبارك لزراعة ورد في جزء من حديقة منزله على شكل شبه منحرف. يريد زراعة ٩٧ شتلة ورد على طول الضلع الأكبر. وينقص عدد شتلات الورد بمقدار شتلتَين من كل طرف لكل صف لاحق، إلى أن يكمل زراعة ٢٠ صفًّا. كم شتلة سيشتري مبارك؟

الحـــلّ:

٩٧ ، ٩٣ ، ٨٩ ، ... المتتالية بمعرفة عدد الشتلات في كل صف.

أ = ٩٧

د = −٤

ن = ٢٠ هذه متتالية حسابية أساسها −٤، وحدّها الأول ٩٧، وعدد الحدود ٢٠ حدًّا.

$\frac{٢٠}{٢}[٢ \times ٩٧ + (٢٠ - ١) \times (-٤)] = ١١٨٠$ استخدم الصيغة $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$

سيشتري ١١٨٠ شتلة ورد.

تمارين ٣-١

١) متتالية حسابية حدها الأول أ وأساسها د عبر عن الحد الخامس والحد الرابع عشر بدلالة أ، د.

٢) أوجِد مجموع كلّ متسلسلة من المتسلسلات الحسابية الآتية:

أ ٢ + ٩ + ١٦ + ... (١٥ حدًّا)

ب ٢٠ + ١١ + ٢ + ... (٢٠ حدًّا)

ج ٨,٥ + ١٠ + ١١,٥ + ... (٣٠ حدًّا)

٣) أوجِد عدد حدود ومجموع كلّ من المتسلسلتَين الآتيتَين:

أ ٢٣ + ٢٧ + ٣١ + ... + ١٥٩

ب ٢٨ + ١١ − ٦ − ... − ٢١٠

٤) متتالية حسابية حدّها الأول ٢، ومجموع ١٢ حدًّا الأولى هو ٦١٨؛ أوجد أساسها.

٥) متتالية حسابية حدّها الأول −١٣ وحدّها العشرين ٨٢ والحدّ الأخير ١١٢

أ أوجِد الأساس وعدد حدود المتتالية.

ب أوجِد مجموع حدود المتتالية.

٦) متتالية حسابية حدّاها الأول والثاني ٧٥، ٤٦ على الترتيب، والحدّ الأخير −٢١٥؛ أوجِد مجموع حدود المتتالية.

٧) متتالية حسابية حدها الأول ٨ وحدها الأخير ٣٤، ومجموع الحدود الستة الأولى ٥٨؛ أوجِد عدد حدود المتتالية.

٨) متتالية حسابية حدّها الأول ٧ وحدّها الحادي عشر هو ٣٢، ومجموع حدودها ٢٧٩٠؛ أوجِد عدد حدود المتتالية.

٩) متتالية حسابية حدّها الثامن −١٠ ومجموع أول ٢٠ حدًّا −٣٥٠

أ) أوجِد الحدّ الأول وأساس المتتالية.

ب) إذا علمت أن الحدّ العام (الحد النوني) −٩٧، فأوجِد قيمة ن

١٠) متتالية حسابية مجموع حدود الـ ن الأولى يعطى على الشكل الآتي جـ$_{ن}$ = ٤ن^{٢} + ٢ن. أوجِد الحدّ الأول وأساس المتتالية.

١١) متتالية حسابية مجموع أول ن حدًّا فيها جـ$_{ن}$ = −٣ن^{٢} − ٢ن؛ أوجِد الحدّ الأول وأساس المتتالية.

١٢) متتالية حسابية مجموع أول ن حدًّا فيها جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{١٢}$(٤ن + ٥). أوجِد عبارة جبرية للحدّ العام في المتتالية.

١٣) قسّمت دائرة إلى ١٢ قطاعًا دائريًا. قياسات زوايا القطاعات تشكل متتالية حسابية، حيث قياس زاوية القطاع الأكبر يعادل ٦,٥ أمثال قياس زاوية القطاع الأصغر. أوجِد قياس زاوية القطاع الأصغر.

١٤) متتالية حسابية حدها الأول (أ) وأساسها (د)، مجموع أول ٢٥ حدًّا فيها يساوي ٧ أمثال مجموع الأربعة حدود الأولى منها:

أ) أوجِد قيمة (أ) بدلالة (د).

ب) أوجِد الحدّ ٥٥ بدلالة (د).

١٥) متتالية حسابية حدّها الثامن ثلاثة أمثال الحد الثالث. بيّن أن مجموع أول ثمانية حدود في المتتالية يعادل أربعة أمثال مجموع أول أربعة حدود فيها.

١٦) مقدار ما ادّخره مروان ١٥٥٠٠ ريال عُماني. وينفق منه مبالغ شهرية تشكل متتالية حسابية. أنفق في الشهر الأول ١٤٠ ريالًا، ثم أنفق جميع ما ادّخره بعد ٣١ شهرًا. كم بقي ممّا ادّخره بعد مرور عشرة أشهر؟

١٧) اشترى عبد الرحيم سيارة بمبلغ ٨٠٠٠ ريال عُماني. دفع ثمن السيارة على دفعات شهرية تشكل متتالية حسابية. الدفعة الأولى كانت ٢٠٠ ريال عُماني، وسدّد الثمن كاملًا بعد ١٦ دفعة. أوجِد قيمة الدفعة الخامسة.

١٨) عائلة هدفها توفير ٤٠٠٠ ريال عُماني. قررت توفير ٤٠٠ ريال عُماني كل شهر. وبما أن تكاليف المعيشة في ازدياد فستخفض مقدار التوفير ٢٥ ريالًا عُمانيًا كل شهر. هل ستحقق العائلة هدفها بعد مرور سنة كاملة؟

١٩) ترغب حليمة في شراء سيارة ثمنها ١٥٧٥٠ ريالًا عُمانيًا، وستسدّد الثمن على أقساط شهرية تشكّل متتالية حسابية. إذا كان القسط الأول ٢٥٠ ريالًا عُمانيًا والقسط الثاني ٣٠٠ ريال عُماني، فأوجِد:

أ) بعد كم شهرًا تسدّد حليمة كامل المبلغ؟

ب) كم سيكون مقدار القسط الأخير؟

٣-٢ المتتاليات الهندسية

إذا نظرت إلى كل المتتاليات العددية أدناه، فسوف تجد أن لكل منها خصائص مختلفة:

٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ٢٣، ...

٣٨، ٣٢، ٢٦، ٢٠، ...

٢، ٦، ١٨، ٥٤، ١٦٢، ...

١٢٨، ٦٤، ٣٢، ١٦، ...

تعلمت في الدرس السابق عن المتتاليات الحسابية كالمتتاليتَين ٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ٢٣، ...، و ٣٨، ٣٢، ٢٦، ٢٠، ... بينما المتتالية ٢، ٦، ١٨، ٥٤، ١٦٢، ... كل حدّ فيها يساوي ثلاثة أمثال الحدّ السابق له، فيكون الأساس ر = ٣. وفي المتتالية ١٢٨، ٦٤، ٣٢، ١٦، ... كل حدّ يساوي نصف الحدّ السابق له، فيكون الأساس ر = $\frac{١}{٢}$

هذه المتتاليات تسمى **متتاليات هندسية geometric progression**

ويحسب الأساس (ر) بقسمة كل حدّ على الحد الذي يسبقه مباشرة (مقدار ثابت).

أمثلة أخرى للمتتالية الهندسية:

المتتالية	الأساس
١، −٢، ٤، −٨، ١٦، −٣٢، ...	−٢
٨١، ٥٤، ٣٦، ٢٤، ١٦، $١٠\frac{٢}{٣}$	$\frac{٢}{٣}$
−٨، ٤، −٢، ١، $-\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، ...	$-\frac{١}{٢}$

الرموز التي تستخدم في المتتالية الهندسية هي:

أ = الحدّ الأول ر = الأساس $ح_{ن}$ = الحد العام ن = رتبة الحد

الحدود الخمسة الأولى في متتالية هندسية حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) هي:

أ	أر	$أر^{٢}$	$أر^{٣}$	$أر^{٤}$
$ح_{١}$	$ح_{٢}$	$ح_{٣}$	$ح_{٤}$	$ح_{٥}$

يقود ذلك إلى صيغة ($ح_{ن}$) في المتتالية الهندسية:

نتيجة ٣

الحد العام (الحد النوني) $ح_{ن} = أر^{ن-١}$،

حيث ن عدد صحيح موجب ر = الأساس أ = الحد الأول

مثــال ٨

الحد النوني في متتالية هندسية هو $ح_ن = ٣٠\left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن}$. أوجِد الحدّ الأول وأساس المتتالية.

الحــلّ:

$ح_١ = ٣٠\left(-\frac{١}{٢}\right)^{١} = -١٥$

$ح_٢ = ٣٠\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٢} = ٧{,}٥$

$ر = \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٧{,}٥}{-١٥} = -\frac{١}{٢}$

∴ أ = −١٥، الأساس $ر = -\frac{١}{٢}$

مثــال ٩

متتالية هندسية حدها الثالث ١٤٤ وأساسها يساوي $\frac{٣}{٢}$.

أ أوجد الحد السابع.

ب اكتب عبارة جبرية للحدّ العام.

الحــلّ:

أ $ح_ن = أر^{ن-١}$ استخدم $ح_٣ = ١٤٤$ عندما ن = ٣، $ر = \frac{٣}{٢}$

$ح_٣ = أر^{٢}$

$١٤٤ = أ\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$

أ = ٦٤

$ح_٧ = ٦٤\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٦} = ٧٢٩$

حل آخر:

$ح_٧ = ح_٣ \times ر^{٤} = ١٤٤ \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٤} = ٧٢٩$

ب الحدّ العام $ح_ن = أر^{ن-١} = ٦٤\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن-١}$

مثــال ١٠

متتالية هندسية جميع حدودها موجبة، حدها الثاني ١٠٨ وحدها الرابع ٤٨، أوجد الحدّ الأول وأساس المتتالية (النسبة الثابتة)، ثم اكتب عبارة جبرية للحدّ العام.

الحــلّ:

$ح_٢ = ١٠٨$	$ح_٤ = ٤٨$
$١٠٨ = أر$ .... (١)	$٤٨ = أر^٣$ .... (٢)

بقسمة (٢) على (١) $\frac{أر^٣}{أر} = \frac{٤٨}{١٠٨}$

$ر^٢ = \frac{٤}{٩}$

$ر = \pm \frac{٢}{٣}$ وحيث إن جميع الحدود موجبة $\Leftarrow ر > ٠$

$ر = \frac{٢}{٣}$

عوّض عن $ر = \frac{٢}{٣}$ في المعادلة (١) يعطي $١٠٨ = أ \times \frac{٢}{٣}$

$أ = \frac{(١٠٨ \times ٣)}{٢}$

$\therefore أ = ١٦٢$

$ح_١ = ١٦٢$، الأساس $= \frac{٢}{٣}$، $ح_ن = ١٦٢ \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن - ١}$

مجموع المتتالية الهندسية (المتسلسلة)

تكتب **المتسلسلة** series في صورة مجموع حدود المتتالية.

استكشف ٢

لا يسمح في هذه المناقشة استخدام الآلة الحاسبة.

١) اعتمد مجموع أول عشرة حدود $جـ_{١٠}$ في متتالية هندسية حيث $أ = ١$، $ر = ٥$

$جـ_{١٠} = ١ + ٥ + ٥^٢ + ٥^٣ + ... + ٥^٧ + ٥^٨ + ٥^٩$

أ اضرب طرفَي المعادلة أعلاه في الأساس ٥، وأكمل العبارة الآتية:

$٥جـ_{١٠} = ٥ + ٥^٢ + ٥^{\cdots} + ٥^{\cdots} + ... + ٥^{\cdots} + ٥^{\cdots} + ٥^{\cdots}$

ب ماذا يحصل عندما تطرح المعادلة $جـ_{١٠}$ من المعادلة $٥جـ_{١٠}$؟

ج هل يمكنك أن تجد طريقة أخرى للعبارة عن $جـ_{١٠}$؟

٢) استخدم الطريقة المعتمدة في (١) لتجد طريقة بديلة للتعبير عن كلّ مجموع من المجاميع الآتية:

أ $٣ + ٣ \times ٢ + ٣ \times ٢^٢ + ٣ \times ٢^٣ + ...$ (١٢ حدًّا)

ب $٣٢ + ٣٢ \times \frac{١}{٢} + ٣٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ + ٣٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٣ + ...$ (١٥ حدًّا)

ج $٢٧ - ١٨ + ١٢ - ٨ + ...$ (٢٠ حدًّا)

نستنتج من فقرة استكشف ٤ أن مجموع ن حدًّا من المتتالية الهندسية $جـ_ن$ يمكن كتابته على النحو:

مُساعَدة

حالة خاصة عندما ر = ١، فإن $جـ_ن = أ \times ن$

نتيجة ٤

$$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} \quad أو \quad جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} \quad ، \quad ر \neq ١$$

إليك برهان الصيغتَين في النتيجة ٤:

$$جـ_ن = أ + أر + أر^٢ + \dots + أر^{ن-٣} + أر^{ن-٢} + أر^{ن-١} \quad \dots\dots\dots (١)$$

اضرب المعادلة (١) في ر

$$ر جـ_ن = أر + أر^٢ + أر^٣ \dots + أر^{ن-٢} + أر^{ن-١} + أر^ن \quad \dots\dots\dots (٢)$$

اطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢)

$$ر جـ_ن - جـ_ن = أر + أر^٢ + أر^٣ \dots + أر^{ن-٢} + أر^{ن-١} + أر^ن - (أ + أر + أر^٢ + أر^٣ + \dots + أر^{ن-٢} + أر^{ن-١})$$

$$ر جـ_ن - جـ_ن = \cancel{أر} + \cancel{أر^٢} + \cancel{أر^٣} \dots \cancel{أر^{ن-٢}} + \cancel{أر^{ن-١}} + أر^ن - (أ + \cancel{أر} + \cancel{أر^٢} + \dots \cancel{أر^{ن-٣}} + \cancel{أر^{ن-٢}} + \cancel{أر^{ن-١}})$$

$$ر جـ_ن - جـ_ن = أر^ن - أ \quad \dots\dots\dots (٣)$$

حلّل إلى العوامل طرفَي المعادلة (٣)

$$جـ_ن(ر - ١) = أ(ر^ن - أ)$$

أعد ترتيب المعادلة لتصبح $جـ_ن$ موضوع القانون. $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

اضرب البسط والمقام في ‎-١ لتحصل على الصيغة البديلة للمجموع $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

مثال ١١

في المتسلسلة الهندسية ٢ + ٦ + ١٨ + ٥٤ + ...، أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى.

الحـلّ:

$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ .... استخدم أ = ٢، ر = ٣، ن = ١٠

$جـ_{١٠} = \frac{٢(٣^{١٠} - ١)}{٣ - ١}$ .... بسّط.

$= ٥٩٠٤٨$

مثال ١٢

الحدّ الثاني في متتالية هندسية يقلّ عن الحدّ الأول بمقدار ٩ ومجموع الحدَّين الثاني والثالث ٣٠؛ إذا علمت أن جميع حدود المتتالية موجبة فأوجِد الحدّ الأول.

الحــلّ:

ح$_٢$ = ح$_١$ − ٩

أر = أ − ٩ ← أعد ترتيب المعادلة واكتب أ بدلالة ر

أ − أر = ٩

أ(١ − ر) = ٩ .... (١)

ح$_٢$ + ح$_٣$ = ٣٠

أر + أر^٢ = ٣٠ ← بأخذ العامل المشترك.

أر(١ + ر) = ٣٠ .... (٢)

بالقسمة (٢) ÷ (١) يعطي: $\frac{\text{أر(١ + ر)}}{\text{أ(١ − ر)}}$ ← بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١)، بسّط.

$\frac{\text{ر + ر}^٢}{\text{١ − ر}} = \frac{٣٠}{٩}$ ← بسّط.

٩ر + ٩ر^٢ = ٣٠ − ٣٠ر

٣ر^٢ + ١٣ر − ١٠ = ٠ ← حلّ إلى العوامل وحلّ المعادلة.

(٣ر − ٢)(ر + ٥) = ٠

ر = $\frac{٢}{٣}$ أو ر = −٥ ← جميع الحدود موجبة ⇐ ر > ٠

ر = $\frac{٢}{٣}$ ← عوّض عن ر = $\frac{٢}{٣}$ في المعادلة (١)

أ = ٩ ÷ (١ − $\frac{٢}{٣}$)

= ٩ ÷ $\frac{١}{٣}$

= ٢٧

نجد أ = ٢٧

∴ ح$_١$ = ٢٧

مثــال ١٣

تخطط شركة ما لزيادة دعمها المجتمعي بنسبة ٢٪ كل سنة لمدة ٥ سنوات. كانت قيمة التبرع سنة ٢٠٢٢م تبلغ ١٣٠٠٠٠ ريال عماني. أوجد

أ قيمة ما ستتبرع به الشركة للمجتمع سنة ٢٠٢٧م

ب مقدار الدعم الإضافي الكلي على مدار الخمس سنوات.

الحــلّ:

أ كل سنة ستضرب القيمة في ١,٠٢ — الزيادة ٢٪ كل سنة تقابل معامل ضرب مقداره ١,٠٢ كل سنة.

أ = ١٣٠٠٠٠

ر = ١,٠٢ — هذه متتالية هندسية.

٢٠٢٢	٢٠٢٣	٢٠٢٤	٢٠٢٥	٢٠٢٦	٢٠٢٧
١٣٠٠٠٠	١٣٠٠٠٠ × ١,٠٢	١٣٠٠٠٠ × $١,٠٢^{٢}$	١٣٠٠٠٠ × $١,٠٢^{٣}$	١٣٠٠٠٠ × $١,٠٢^{٤}$	١٣٠٠٠٠ × $١,٠٢^{٥}$

المطلوب معرفة $ح_٦$

$أر^{ن-١}$ = ١٣٠٠٠٠ × $١,٠٢^{٥}$ = ... ١٤٣٥٣٠,٥٠٤٤

١٤٣٥٣٠,٥٠٤٤ ريالًا عُمانيًّا — علّل الإجابة لتتفق وسياق المسألة.

ب $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر} = \frac{١٣٠٠٠٠(١ - ١,٠٢^{٦})}{١ - ١,٠٢} = ٨٢٠٠٥٥,٧٢٥٢$ — مجموع المتتالية الهندسية.

٦ × ١٣٠٠٠٠ = ٧٨٠٠٠٠ — مجموع ما تتبرع به الشركة إذا لم يكن هناك زيادة.

٨٢٠٠٥٥,٧٢٥٢ − ٧٨٠٠٠٠ = ... ٤٠٠٥٥,٧٢٥٢ — الفرق بين القيمتَين.

٤٠٠٥٥,٧٣ ريالًا عُمانيًّا لأقرب منزلتين عشريتين. — الدعم الإضافي الكلي.

تمارين ٣-٢

١) حدّد ما إذا كانت كل متتالية من المتتاليات الآتية هندسية. إذا كانت هندسية، فاكتب الأساس والحدّ الثامن:

أ ١، ٢، ٤، ٦، ...

ب −١، ٤، −١٦، ٦٤، ...

ج ٨١، ٢٧، ٩، ٣، ...

د $\frac{٢}{١١}$، $\frac{٣}{١١}$، $\frac{٥}{١١}$، $\frac{٨}{١١}$، ...

هـ ٢، ٠٫٤، ٠٫٠٨، ٠٫٠١٦، ...

و −٥، ٥، −٥، ٥، ...

٢) متتالية هندسية حدّها الأول (أ) وأساسها (ر)، اكتب الحد التاسع والحد العشرين بدلالة أ، ر

٣) متتالية هندسية حدّها الثالث ١٠٨ وحدها السادس −٣٢؛ أوجِد أساس المتتالية والحدّ الأول.

٤) متتالية هندسية حدّها الأول ٧٥ وحدّها الثالث ٢٧، أوجِد القيمتَين الممكنتَين للحدّ الرابع.

٥) متتالية هندسية فيها $ح_٢$ = ١٢، $ح_٤$ = ٢٧، إذا علمت أن جميع الحدود موجبة فأوجِد أساس المتتالية وحدّها الأول.

٦) متتالية هندسية فيها $ح_٦$ = $\frac{٥}{٢}$، $ح_{١٣}$ = ٣٢٠، أوجِد أساس المتتالية وحدَّيها الأول والعاشر.

٧) متتالية هندسية مجموع حدّيها الثاني والثالث هو ٣٠، ويقلّ الحدّ الثاني عن الحد الأول بمقدار ٩. إذا علمت أن جميع الحدود موجبة فأوجِد الحدّ الأول.

٨) إذا كانت (س)، (س + ٦)، (س + ٩) ثلاثة حدود في متتالية هندسية على الترتيب، فأوجِد قيمة س

٩) أوجِد مجموع أول ثمانية حدود في كل متسلسلة من المتسلسلات الهندسية الآتية:

أ ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ...

ب ٧٢٩ + ٢٤٣ + ٨١ + ٢٧ + ...

ج ٢ − ٦ + ١٨ − ٥٤ + ...

د −٥٠٠٠ + ١٠٠٠ − ٢٠٠ + ٤٠ − ...

١٠) تقدّم شركة تبرّعًا سنويًا لجمعية خيرية. تتزايد قيمة التبرّع بمقدار ١٠٪ سنويًا. فإذا كانت قيمة التبرّع ١٠٠٠٠ ريال عُماني في سنة ٢٠١٥م:

أ أوجِد قيمة التبرّع سنة ٢٠٢١م

ب أوجِد مجموع التبرّعات من سنة ٢٠١٥م حتى نهاية ٢٠٢١م

١١) متتالية هندسية حدّها الثالث يساوي تسعة أمثال حدّها الأول، ومجموع أول أربعة حدود يساوي ك أمثال الحدّ الأول. أوجِد قيم ك الممكنة.

٣-٣ المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

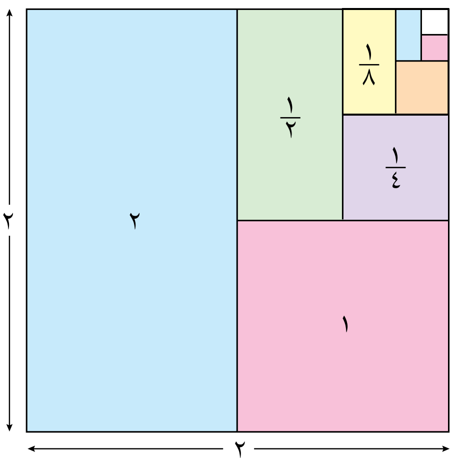
المتتالية غير المنتهية هي متتالية تستمرّ حدودها من دون توقف.

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية حيث أ = ٢، ر = $\frac{١}{٢}$ هي

$٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \dots$ في هذه المتسلسلة، يمكن تبيان أن

$جـ_١ = ٢$، $جـ_٢ = ٣$، $جـ_٣ = ٣\frac{١}{٢}$، $جـ_٤ = ٣\frac{٣}{٤}$، $جـ_٥ = ٣\frac{٧}{٨}$، ...

هذه المجاميع تقترب أكثر فأكثر من العدد ٤



الشكل المجاور مربع بُعداه ٢ في ٢، وهو تمثيل بصري لهذه المتتالية.

إذا استمرّ نمط أشكال المستطيلات داخل المربّع، فإن مجموع مساحات المستطيلات ستقترب من مساحة المربّع الذي يضمها وهي ٤

لذا نقول إن مجموع المتسلسلة غير المنتهية $٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \dots$ هو ٤

هذا مثال للمتسلسلات **المتقاربة** **convergent**، وتكون فيها:

أ) $-١ < ر < ١$

ب) المجموع إلى مالانهاية يتقارب من عدد ما.

استكشف ٣

١) استقصِ ما إذا كانت كل متسلسلة من المتسلسلات الهندسية غير المنتهية متقاربةً أم لا. يمكنك أن تستخدم جدول بيانات لتساعدك على إجراء الحسابات. إذا كانت المتسلسلة متقاربة، فأوجِد مجموعها إلى مالانهاية:

- **أ** أ = $\frac{٢}{٥}$، ر = ٢
- **ب** أ = -٣، ر = $-\frac{١}{٢}$
- **ج** أ = ٥، ر = $\frac{٢}{٣}$
- **د** أ = $\frac{١}{٢}$، ر = -٥

٢) اكتب متسلسلات هندسية متقاربة أخرى، وأوجِد مجموعها في كل حالة إلى مالانهاية.

٣) هل يمكنك أن توجد شرطًا على ر لتكون المتسلسلة الهندسية متقاربة؟

افترض أن المتسلسلة الهندسية $أ + أر + أر^٢ + أر^٣ + \dots + أر^{ن-١}$.

يُعطى المجموع $جـ_ن$ بالصيغة $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

إذا كان $-١ < ر < ١$، فكلما زاد عدد الحدود ن فإن $ر^ن$ تقترب أكثر فأكثر من الصفر.

نقول عندما تقترب ن من مالانهاية فإن $ر^ن$ تقترب من الصفر، ونكتب ′ن ← ∞، $ر^ن \leftarrow ٠$′

وعليه، عندما ن ← ∞، فإن $\frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} \leftarrow \frac{أ(١ - ٠)}{١ - ر} = \frac{أ}{١ - ر}$

وهذا يؤدي إلى النتيجة:

نتيجة ٥

مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية (متقاربة) $جـ_\infty$ يعطى بالصيغة

$جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$، حيث $-١ < ر < ١$

مُساعَدة

يُستخدم الرمز ($جـ_\infty$) لتمثيل مجموع حدود متسلسلة غير منتهية.

مثــال ١٤

أول ثلاثة حدود من متتالية هندسية غير منتهية هي ٢٥، ١٥، ٩، ...

أ اكتب أساس المتتالية.

ب أوجِد مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة.

الحــلّ:

أ الأساس = $\frac{\text{الحدّ الثاني}}{\text{الحدّ الأول}} = \frac{١٥}{٢٥} = \frac{٣}{٥}$

ب $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$ ← استخدم أ = ٢٥، ر = $\frac{٣}{٥}$

$= \frac{٢٥}{١ - \frac{٣}{٥}}$

$= ٦٢,٥$

مثــال ١٥

متتالية هندسية أساسها $-\frac{٤}{٥}$ ومجموع أول أربعة حدود فيها ١٦٤، أوجد كلًّا مما يأتي:

أ الحدّ الأول في المتتالية.

ب المجموع إلى مالانهاية.

الحــلّ:

أ $جـ_٤ = \frac{أ(١ - ر^٤)}{١ - ر}$ ← استخدم $جـ_٤$ = ١٦٤، ر = $-\frac{٤}{٥}$

$١٦٤ = \frac{أ\left(١ - \left(-\frac{٤}{٥}\right)^٤\right)}{١ - \left(-\frac{٤}{٥}\right)}$ ← بسّط.

$١٦٤ = \frac{٤١}{١٢٥}أ$ ← حلّ.

أ = ٥٠٠

ب $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$ ← استخدم أ = ٥٠٠، ر = $-\frac{٤}{٥}$

$= \frac{٥٠٠}{١ - \left(-\frac{٤}{٥}\right)}$

$= ٢٧٧\frac{٧}{٩}$

مثال ١٦

سقطت كرة من ارتفاع ١٥ م. بعد كل ارتطام ترتفع الكرة ٨٠ ٪ من الارتفاع السابق. أوجد طول مسار الكرة الكلي.

الحلّ:

$١٥ \times ٠{,}٨ + ١٥ \times ٠{,}٨^{٢} + ١٥ \times ٠{,}٨^{٣} ...$ بعد الارتطام الأول ستكون الارتفاعات متتالية هندسية.

سقطت الكرة مسافة ١٥ م في البداية، ثم ستقطع ضعف المسافة صعودًا وهبوطًا.

$١٥ + ٢ \times (١٥ \times ٠{,}٨ + ١٥ \times ٠{,}٨^{٢} + ١٥ \times ٠{,}٨^{٣} ...)$ نجمع مسافات الصعود أو الهبوط، ثم نضربها في ٢ لكي نحصل على مجموع المسافات التي قطعتها الكرة صعودًا وهبوطًا، ثم نضيف إليها المسافة التي سقطتها الكرة في البداية.

أ $= ١٥ \times ٠{,}٨$ ، ر $= ٠{,}٨$

$١ > ر > -١$

$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١٥ \times ٠{,}٨}{١ - ٠{,}٨} = ٦٠$ مجموع المسافات الرأسية إلى مالانهاية التي تقطعها الكرة بعد الارتطام الأول.

$٢ \times ٦٠ = ١٢٠$ الكرة تصعد وتهبط بعد كل ارتطام، وهذا يعني أنها قطعت ضعف المجموع إلى مالانهاية.

$١٢٠ + ١٥ = ١٣٥$ م يضاف الارتفاع الذي سقطت منه الكرة إلى مجموع المسافات الرأسية.

مثال ١٧

حوّل الكسر العشري الدوري ... ٠,٣٤٥٣٤٥٣٤٥ إلى كسر عادي في صورة متتالية هندسية:

الحلّ:

$٠{,}٣٤٥٣٤٥٣٤٥ ... = \frac{٣٤٥}{١٠٠٠} + \frac{٣٤٥}{١٠٠٠٠٠٠} + \frac{٣٤٥}{١٠٠٠٠٠٠٠٠٠} + ...$ الكسر الدوري يكتب في صورة مجموع كسور عادية لها البسط نفسه.

أ $= \frac{٣٤٥}{١٠٠٠}$، ر $= \frac{١}{١٠٠٠}$ تحديد الحدّ الأول والأساس.

$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{٣٤٥}{١٠٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠٠}} = \frac{٣٤٥}{١٠٠٠ - ١} = \frac{٣٤٥}{٩٩٩}$ استخدم صيغة مجموع المتتالية الهندسية إلى مالانهاية، وقيمتَي الحدّ الأول أ، والأساس ر.

$جـ_{\infty} = \frac{٣٤٥}{٩٩٩} = \frac{١١٥}{٣٣٣}$ الناتج بعد التبسيط.

تمارين ٣-٣

١) حوّل الكسر العشري الدوري ... ٠,٣٧٣٧٣٧ إلى كسر عادي في صورة متتالية هندسية.

٢) أوجِد مجموع كلّ متسلسلة من المتسلسلات الهندسية الآتية إلى مالانهاية:

أ $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \dots$

ب $١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} - \dots$

ج $٨ + \frac{٨}{٥} + \frac{٨}{٢٥} + \frac{٨}{١٢٥} + \dots$

د $-١٦٢ + ١٠٨ - ٧٢ + ٤٨ - \dots$

٣) متتالية هندسية حدّها الأول ١٠ وحدّها الثاني ٨؛ أوجِد $جـ_{\infty}$ مجموع المتتالية إلى مالانهاية.

٤) متتالية هندسية حدّها الأول ٣٠٠ وحدّها الرابع $-٢\frac{٢}{٥}$، أوجِد أساس المتتالية ومجموعها إلى مالانهاية ($جـ_{\infty}$).

٥) متتالية هندسية حدودها الأربع الأولى هي ١، $(٠,٨)^{٢}$، $(٠,٨)^{٤}$، $(٠,٨)^{٦}$ على الترتيب. أوجِد مجموع المتتالية إلى مالانهاية.

٦) أ اكتب الكسر العشري الدوري $٠,\dot{٤}\dot{٢}$ في صورة مجموع متتالية هندسية.

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتبيّن أنه يمكن كتابة ٠,٤٢ في صورة $\frac{١٤}{٣٣}$

مُساعَدة

العدد الكسري العشري الدوري يكتب على الشكل ($٠,\dot{٤}\dot{٢}$) حيث يتكرر العدد ٤٢ بشكل لا نهائي.

٧) متتالية هندسية حدّها الأول −١٢٠ مجموعها إلى مالانهاية −٧٢؛ أوجِد أساس المتتالية ومجموع أول ثلاثة حدود فيها.

٨) متتالية هندسية حدّها الثاني −٩٦ وحدّها الخامس هو $٤٠\frac{١}{٢}$. أوجد كلًّا مما يلي:

أ أساس المتتالية وحدّها الأول.

ب مجموع حدود المتتالية إلى مالانهاية.

٩) متتالية هندسية حدّها الثاني ١٨ وحدها الرابع ١,٦٢ إذا علمت أن أساس المتتالية موجب، فأوجِد:

أ الأساس والحدّ الأول.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

١٠) متتالية هندسية حدها الأول (ك + ١٥)، الحد الثاني ك والحد الثالث (ك − ١٢). أوجِد:

أ قيمة ك

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

١١) متتالية هندسية حدها الرابع ٤٨ ومجموع حدودها إلى مالانهاية يساوي ثلاثة أمثال الحدّ الأول. أوجِد الحدّ الأول.

١٢) متتالية هندسية حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) ومجموع أول ثلاثة حدود فيها ٦٢ ومجموع الحدود إلى مالانهاية يساوي ٦٢٫٥. أوجِد قيمة (أ) وقيمة (ر).

١٣) سقطت كرة من ارتفاع ١٢ م، ثم ارتطمت بالأرض وارتدّت. بعد كلّ ارتطام تعود وترتفع $\frac{٣}{٤}$ الارتفاع السابق لهذا الارتداد. أوجِد مجموع المسافة الرأسية التي تخطّتها الكرة.

١٤) سقطت كرة من ارتفاع ٥ م. مجموع المسافة الرأسية التي قطعتها الكرة ٣٠ مترًا بعد أن توقفت عن الارتطام. ما الارتفاع الذي تصل إليه الكرة بعد الارتداد الأول؟

١٥) سقطت كرة من ارتفاع س متر. مجموع المسافة الرأسية التي قطعتها الكرة ٢٠ مترًا. بعد كل ارتطام ينقص الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة $\frac{١}{٥}$ الارتفاع السابق. أوجِد الارتفاع الذي سقطت منه الكرة.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

المتتاليات الحسابية

في المتتالية الحسابية التي حدّها الأول (أ) وأساسها (د) وعدد حدودها (ن):

- الحدّ رقم ك هو $ح_{ك}$ = أ + (ك − ١)د
- الحدّ الأخير (الحدّ النوني) = ل = أ + (ن − ١)د
- مجموع الحدود = $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(أ + ل) = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن − ١)د]$

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

في المتتالية الهندسية التي حدّها الأول أ وأساسها ر وعدد حدودها ن:

- الحدّ رقم ك هو $ح_{ك} = أر^{ك - ١}$
- الحدّ الأخير (الحدّ النوني) = $أر^{ن - ١}$
- مجموع الحدود = $جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

تكون المتتالية الهندسية متقاربة عندما $^{-}١ < ر < ١$

عندما تكون المتتالية الهندسية متقاربة، فإن $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثالثة

١) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٣٥ والحدّ الثاني ⁻١٤؛ فأوجِد:

أ الحدّ الرابع في المتتالية.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

٢) متتالية هندسية أول ثلاثة حدود فيها هي (٢ك + ٦)، (ك + ١٢)، (ك) على الترتيب. جميع حدود المتتالية موجبة. أوجِد:

أ قيمة ك

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

٣) متتالية هندسية الحدّ الأول فيها (أ) والأساس (د). إذا علمت أن مجموع أول ١٠٠ حدّ يساوي ٢٥ مرة مجموع أول ٢٠ حدًّا.

أ أوجِد (د) بدلالة (أ)

ب اكتب عبارة بدلالة (أ) للحدّ الخمسين.

٤) إذا كان الحدّ الخامس عشر في متتالية حسابية ٣ ومجموع أول ثمانية حدود ١٩٤

أ أوجِد الحدّ الأول في المتتالية وأساسها.

ب إذا علمت أن الحدّ النوني −٢٢، فأوجِد قيمة ن

٥) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية −٥٧٦ والحدّ الخامس ٢٤٣؛ فأوجِد:

أ أساس المتتالية.

ب الحدّ الأول في المتتالية.

ج مجموع حدود المتتالية إلى مالانهاية.

٦) أ إذا كان الحدّ السادس في متتالية حسابية ٣٥ ومجموع أول عشرة حدود ٣٣٥؛ فأوجِد الحدّ الثامن.

ب الحدّ الأول في متتالية هندسية ٨ وأساسها (ر)، والحدّ الأول في متتالية هندسية أخرى ١٠ وأساسها $\frac{١}{٤}$ر. مجموع المتتاليتَين إلى مالانهاية متساويان ويساوي كل منهما (ج)؛ أوجِد قيمة ر وقيمة ج

٧) أ إذا كان الحدّ العاشر في متتالية حسابية ٤ ومجموع أول سبعة حدود ⁻٢٨؛ فأوجِد الحدّ الأول وأساس المتتالية.

ب إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٤٠ والحدّ الرابع ٥؛ فأوجِد مجموع حدود المتتالية إلى مالانهاية.

٨) **أ** إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية (أ) وأساسها (ر) ومجموع حدودها إلى مالانهاية (ج)؛ والحدّ الأول في متتالية هندسية ثانية (٣أ) وأساسها (٢ر) ومجموع حدودها إلى مالانهاية (٤ج) فأوجِد قيمة ر

ب الحدّ الأول في متتالية حسابية −٢٤ والحدّ النوني −١٣,٨ والحدّ رقم (٢ن) هو −٣؛ أوجِد قيمة ن

٩) تمّ رمي كرة رأسيًّا إلى الأعلى من على سطح الأرض. ارتفعت الكرة ١٠ م، ثم سقطت لترتطم بالأرض. بعد كلّ ارتطام ترتدّ الكرة إلى ارتفاع يعادل $\frac{٤}{٥}$ ارتفاع الارتداد السابق.

أ اكتب عبارة بدلالة ن يدلّ على ارتفاع الكرة بعد الارتطام النوني في الأرض.

ب أوجِد المسافة الكلية التي تخطّتها الكرة من بداية الرمية الأولى إلى الارتطام الخامس في الأرض.

١٠) ينافس عبد المجيد في سباق الـ ١٠ كم. أكمل أول كيلومتر في ٤ دقائق. أنقص سرعته بحيث يجتاز كلّ كيلومتر من السباق بزمن يعادل ١,٠٥ من الزمن الذي يستغرقه لاجتياز الكيلومتر السابق مباشرة. أوجِد الزمن الكلّي بالدقائق والثواني الذي يستغرقه عبد المجيد لاجتياز مسافة سباق الـ ١٠ كم. أعط الناتج مقرّبًا إلى أقرب ثانية.

١١) متتالية حسابية حدّها الأول في ١,٧٥ وحدّها الثاني ١,٥، ومجموع أول ن حدًّا فيها يساوي −ن؛ أوجِد قيمة ن

١٢) متتالية هندسية حدّها الثاني −١٤٥٨ وحدّها الخامس ٤٣٢؛ أوجِد:

أ أساس المتتالية.

ب الحدّ الأول في المتتالية.

ج مجموع حدود المتتالية إلى مالانهاية.

١٣) متتالية حسابية حدّها الأول (أ) وأساسها (د)، ومجموع أول مئة حدّ فيها يساوي ٢٥ ضعف مجموع أول عشرين حدًّا.

أ أوجِد قيمة د بدلالة أ

ب اكتب عبارة بدلالة أ يدلّ على الحدّ الخمسين.

١٤) متتالية حدّها الأول (٤س) وحدّها الثاني (س^{٢}):

أ في حال كانت المتتالية حسابية وأساسها ١٢، فأوجِد القيم الممكنة للعدد س والقيم المناظرة للحدّ الثالث.

ب في حال كانت المتتالية هندسية ومجموع حدودها إلى مالانهاية ٨، فأوجِد الحدّ الثالث.

١٥) سقطت كرة من ارتفاع ٤ أمتار. مجموع المسافة الرأسية التي تخطّتها الكرة ٢٤ مترًا. احسب النقص في ارتفاع الكرة الرأسي بعد كل ارتداد.

١٦) توفّر مريم مبلغًا من المال كل شهر. إذا بدأت بمبلغ ١٠٠٠ ريال عُماني وزادت هذه الكميّة شهريًّا ٥٠ ريالًا عُمانيًّا. كم يلزمها من الوقت ليكون مجموع ما تدّخره ١٦٩٠٠ ريال عُماني؟

الوحدة الرابعة

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٤-١ تحسب مقاييس النزعة المركزية: الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال لبيانات أولية غير مجمّعة وكذلك البيانات الممثلة في الرسوم البيانية والمخططات مثل جداول التكرار ومخططات الساق والورقة والأعمدة البيانية.

٤-٢ تحسب تقديرات مقاييس النزعة المركزية: الوسط الحسابي والفئة التي تحتوي على الوسيط والفئة المنوالية، للبيانات الممثلة في الرسوم البيانية والمخططات مثل جداول التكرار، وجداول التكرار التراكمية، ومخططات التكرار.

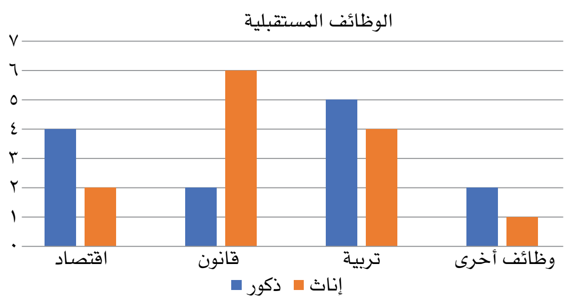
٤-٣ تحسب تقديرات مقاييس النزعة المركزية في البيانات المجمعة: الوسيط للبيانات الممثلة في مخططات التكرار التراكمية.

٤-٤ تفهم ميزات كلّ مقياس من مقاييس النزعة المركزية وتحدّد المقياس المناسب في السياق.

٤-٥ تحسب وتفسّر مقاييس النزعة المركزية في سياقات من الحياة الواقعية.

معرفة قبلية

<table>
<tr><th>المصدر</th><th>تعلمت سابقًا أن</th><th>اختبر مهاراتك</th></tr>
<tr><td>الصف التاسع
الوحدة الأولى</td><td>تجري العمليات الحسابية باستخدام طرائق الحساب الذهني والآلة الحاسبة</td><td>١) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة $\frac{٦ \times ١,٧ + ٨ \times ١,٩ + ١١ \times ٢,١}{٦ + ٨ + ١١}$، ثم تحقّق من أن الناتج منطقي.</td></tr>
<tr><td>الصف العاشر
الوحدة الخامسة</td><td>تحسب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبيانات أولية.</td><td>٢) أوجِد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للقيم التالية ٢، ٢، ٠، ١، ٠، ٤، ٢، ٥، ٧، ٠</td></tr>
<tr><td>الصف العاشر
الوحدة الخامسة</td><td>تقدّر الوسط الحسابي من بيانات مجمّعة.</td><td>٣) تم تسجيل أطوال مجموعة من طلبة صف ما في الجدول التكراري الآتي. قدّر الوسط الحسابي لأطوال طلبة الصف:
<table>
<tr><th>الطول (سم)</th><th>التكرار</th></tr>
<tr><td>١٤٠ ≤ ع ≤ ١٥٠</td><td>٣</td></tr>
<tr><td>١٥٠ < ع ≤ ١٦٠</td><td>١٠</td></tr>
<tr><td>١٦٠ < ع ≤ ١٨٠</td><td>٧</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>الصف العاشر
الوحدة السابعة</td><td>تنشئ الأعمدة البيانية، ومخطّط الساق والورقة، والجداول التكرارية التراكمية والمدرجات التكرارية، وتفسّرها.</td><td>٤) تبيّن البيانات الآتية كتل ١٥ طفلًا حديثي الولادة بالكيلوغرام (كغم). أنشئ مخطّط الساق والورقة لعرض البيانات:
٢,٣ ، ٣,٠ ، ٢,٩ ، ٣,١ ، ٣,٠ ، ١,٥ ، ٢,٢ ، ٣,٨ ، ٣,٤ ، ٣,٥ ، ٤,٠ ، ٤,٥ ، ٣,٨ ، ٣,٩ ، ٤,١

٥) سُئِل مجموعة من الطلبة لاختيار وظائفهم المستقبلية المفضلة. نتائج الاستطلاع مبيّنة في الأعمدة البيانية المزدوجة الآتية:


أ كم طالبًا اختار وظائف اقتصادية؟
ب كم عدد الطلبة الذكور الذين تمّ سؤالهم؟</td></tr>
</table>

المفردات

المنوال mode

الوسط الحسابي mean

الوسيط median

القيم المتطرفة biased values

التكرارات التراكمية cumulative frequencies

مركز الفئة mid-value

أطوال الفئات class widths

الفئة المنوالية modal class

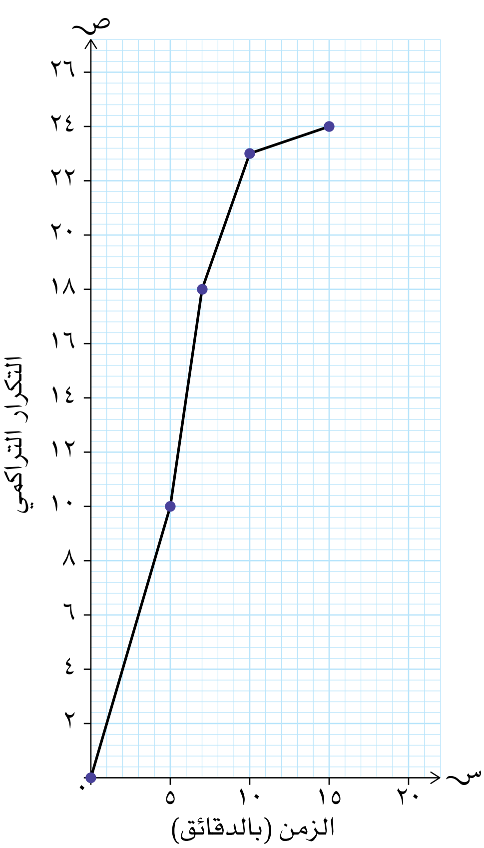
الفئة ذات الكثافة الأكثر class density

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
٦) يبيّن الجدول الآتي سرعة ٢٠ مركبة على إحدى الطرق:

<table>
<tr><th>السرعة (كم/ ساعة)</th><th>التكرار</th></tr>
<tr><td>٤٠ ≤ س < ٦٠</td><td>٢</td></tr>
<tr><td>٦٠ ≤ س < ٧٥</td><td>٦</td></tr>
<tr><td>٧٥ ≤ س < ٨٥</td><td>٩</td></tr>
<tr><td>٨٥ ≤ س < ١٠٠</td><td>٣</td></tr>
</table>

أ ارسم جدولًا تكراريًّا تراكميًّا لتعرض هذه المعلومات.

ب ارسم مدرّجًا تكراريًّا لتعرض هذه المعلومات.
</td>
</tr>
<tr>
<td>الصف العاشر الوحدة السابعة</td>
<td>تقدّر الوسيط من منحنى تكراري تراكمي.</td>
<td>
٧) يبيّن المخطّط التكراري التراكمي زمن انتظار المرضى بالدقائق في عيادة طبيب جرّاح. قدّر وسيط الزمن لانتظار المرضى.



</td>
</tr>
</table>

مُساعَدة

البيانات الأولية غير المجمعة: هي بيانات منفصلة وهي البيانات الناتجة عن العد مثل عدد طلبة الصف، عدد أفراد العائلة، عدد السيارات، ...
البيانات المجمعة: هي البيانات المتصلة الناتجة من قياسات مثل الأطوال، والكتلة، والعمر حيث تُمثّل بالفئات، ...

لماذا ندرس مقاييس النزعة المركزية؟

تستخدم مقاييس النزعة المركزية لحساب القيمة التي تتمركز حولها قيم مجموعة من البيانات، أي القيمة التي تمثل معظم البيانات. أكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعًا هي المنوال، والوسط الحسابي، والوسيط. ونشير إلى هذه المقاييس كمعدل للقيم.

تعلمت كيف تحسب الوسط الحسابي، والوسيط والمنوال في الصف العاشر. على سبيل المثال: القيم ٣، ٣، ٤، ٦، ٦، ٦، ٩

المنوال mode هو القيمة الأكثر تكرارًا، وهو في هذه القيم ٦

الوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع القيم على عددها:

$$\frac{٣ + ٣ + ٤ + ٦ + ٦ + ٦ + ٩}{٧} = \frac{٣٧}{٧} = ٥,٢٨٥٧ \ldots$$

الوسط الحسابي = ٥,٢٩ مقرّبًا إلى أقرب عدد من رقمين معنويين، لا نقرّب الوسط الحسابي إلى أقرب عدد صحيح، حتى لو كانت القيم الأولية أعدادًا صحيحة.

الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة من القيم المرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا. وحيث إن القيم السابقة مرتبة تصاعديًّا فستلاحظ أن القيمة الوسطية هي ٦

~~٣~~، ~~٣~~، ~~٤~~، ٦، ~~٦~~، ~~٦~~، ~~٩~~

إذا قمنا بجمع بيانات عن العمر ومقاس الأحذية في مجتمع. فإن الوسط الحسابي هو المقياس الأنسب لمعرفة معدل العمر، بينما المنوال هو المقياس الأفضل لمعرفة مقاس الحذاء الأكثر استخدامًا.

كما أنّ المزارع قد يجد أن وسيط كمية التمور الذي ينتجه من أحد أصناف النخيل هو أكثر فائدة، فيستخدمه ليحدد صنف النخيل الأكثر ربحًا.

وقد تأتي البيانات ممثّلة في قائمة أو في جدول أو في تمثيل بياني. لذلك ثمّة حاجة إلى اعتماد طرائق مختلفة لإيجاد أي مقياس من مقاييس النزعة المركزية.

٤-١ مقاييس النزعة المركزية

٤-١أ الوسط الحسابي

تعلمنا في الصف العاشر أن **الوسط الحسابي mean** لمجموعة ن من القيم يحسب من خلال قسمة مجموع القيم على عددها.

الوسط الحسابي هو $\overline{\text{س}}$ ومجموع القيم هو $\sum$س، إذًا $\overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$

على سبيل المثال، مجموع القيم ٣٤، ٦٧، ٤٣، ٧١، ٩٢، ٦٧، ٣٩، ١٣ هو ٤٢٦، إذًا

الوسط الحسابي هو $\overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٤٢٦}{٨} = ٥٣,٢٥$

في هذا المثال ٨ قيم فقط، لذا أمكننا إيجاد مجموعها بسرعة، إلّا أن عدد القيم يمكن أن يكون أكبر بكثير، وعليه فلن يكون من المناسب أن نكتب كل الأعداد في قائمة، بل يكون من الأكثر ملاءمة أن نقدم هذه الأعداد في شكل توزيع تكراري، أو أن نبيّنها في مخطط الساق والورقة أو المدرج التكراري. فإذا قمنا بذلك، نحتاج عندئذ إلى تبنّي طرائق جديدة لتحصيل مجموع القيم وعددها من أجل حساب الوسط الحسابي.

نتيجة ١

الوسط الحسابي لمجموعة قيم عددها ن للمتغيّر س هو $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$

الوسط الحسابي للتوزيع التكراري

يوضّح التوزيع التكراري القيم وتكراراتها، ويمكن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع تكراري بقسمة مجموع القيم (من خلال جمع كل قيمة ضربت في تكراراها)، مقسوم على عدد القيم (مجموع التكرارات).

نتيجة ٢

الوسط الحسابي للمتغيّر س تكرارات قيمه ت هو $\overline{س} = \frac{\sum ت\, س}{\sum ت}$

مثــال ١

يبيّن الجدول الآتي التوزيع التكراري لـ ٢٥ قيمة للمتغير س؛ احسب الوسط الحسابي للمتغير س:

المتغيّر (س)	التكرار (ت)
٢٠	٢
٢١	٣
٢٢	٥
٢٣	٦
٢٤	٩

الحــلّ:

المتغيّر (س)	التكرار (ت)	ت × س
٢٠	٢	٢ × ٢٠ = ٤٠
٢١	٣	٣ × ٢١ = ٦٣
٢٢	٥	٥ × ٢٢ = ١١٠
٢٣	٦	٦ × ٢٣ = ١٣٨
٢٤	٩	٩ × ٢٤ = ٢١٦
	$\sum$ ت = ٢٥	$\sum$ ت س = ٥٦٧

أضيف عمود إلى الجدول لإيجاد مجموع الـ ٢٥ قيمة وعنوانه 'ت × س'.
مثال: توجد قيمتان كل منهما ٢٠، ما يعني أن مجموعهما ٢٠ + ٢٠ = ٤٠ (٢ × ٢٠ = ٤٠)
كذلك توجد ٣ قيم كل منها ٢١ أي ٣ × ٢١ = ٦٣
كما أن هناك ٥ قيم كل منها ٢٢ (٥ × ٢٢ = ١١٠)، ٦ قيم من ٢٣ (٦ × ٢٣ = ١٣٨) و ٩ قيم كل منها ٢٤ (٩ × ٢٤ = ٢١٦)

مجموع الـ ٢٥ قيمة للمتغيّر س يساوي ٥٦٧، فيكون الوسط الحسابي = $\overline{س} = \frac{\sum س\, ت}{\sum ت} = \frac{٥٦٧}{٢٥} = ٢٢{,}٦٨$

الوسط الحسابي للبيانات الممثلة في مخططات

١- مخططات الساق والورقة

تعلّمت سابقًا كيفية استخدام مخطّط الساق والورقة، حيث يعد نوعًا من المخطّطات التي تُستعمل لترتيب قيم البيانات. ويمكن إيجاد الوسط الحسابي للقيم في مخطّط الساق والورقة، بقسمة مجموع القيم (جميع القيم الموضحة على مفتاح المخطط) على عددها.

تظهر القيمة ١٥٩ بوضع ١٥ في الساق و ٩ كورقة على الشكل ٩ | ١٥

تظهر القيمة ١٨٥ بوضع ١٨ في الساق و ٥ كورقة على الشكل ٥ | ١٨

لإيجاد الوسط الحسابي للقيم في مخطط الساق والورقة، نجمع القيم كلها كما أوضحها المفتاح ونقسم مجموعها على عددها.

مثــال ٢

يبيّن مخطط الساق والورقة عدد الأهداف لكل من أحد عشر لاعب كرة قدم في الموسم الماضي. أوجِد الوسط الحسابي للأهداف.

٠	٥ ٨ ٨ ٩
١	٣ ٤ ٦ ٧ ٩ ٩
٢	٢

المفتاح: ١ | ٣
يمثّل ١٣ هدفًا

الحــلّ:

مجموع الأعداد الأربعة في الصف الأول هو ٥ + ٨ + ٨ + ٩ = ٣٠

مجموع الأعداد الستة في الصف الثاني هو ١٣ + ١٤ + ١٦ + ١٧ + ١٩ + ١٩ = ٩٨

مجموع العدد الواحد في الصف الثالث هو ٢٢

الوسط الحسابي لعدد الأهداف هو $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٣٠ + ٩٨ + ٢٢}{١١} = \frac{١٥٠}{١١} = ١٣,٦$

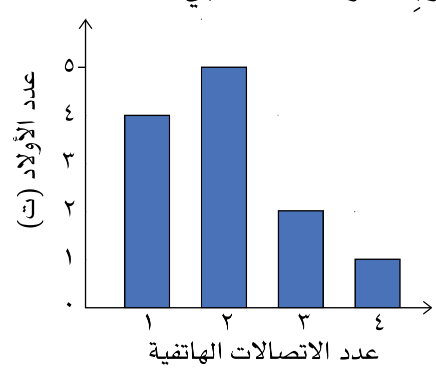
٢- الأعمدة البيانية

في الأعمدة البيانية، يتمّ رسم عمود لتمثيل كل قيمة ويبيّن تكرارها من خلال ارتفاع العمود.

لإيجاد الوسط الحسابي للأعمدة البيانية، نوجد مجموع القيم من خلال ضرب كل قيمة في تكرارها (ارتفاع عمودها) ونقسمها على مجموع عدد القيم (مجموع كل ارتفاعات الأعمدة).

مثـــال ٣

يبيّن مخطط الأعمدة عدد الاتصالات الهاتفية التي يتلقاها عدد من الأولاد في عطلة نهاية الأسبوع.
أوجِد الوسط الحسابي لعددالاتصالات الهاتفية؟



الحـــلّ:

يبيّن مخطط الأعمدة معلومات حول ٤ + ٥ + ٢ + ١ = ١٢ ولدًا.

يمثل العمود الأول ١ × ٤ = ٤ اتصالات

يمثل العمود الثاني ٢ × ٥ = ١٠ اتصالات

يمثل العمود الثالث ٣ × ٢ = ٦ اتصالات

يمثل العمود الرابع ٤ × ١ = ٤ اتصالات

الوسط الحسابي لعدد الاتصالات الهاتفية هو $\overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{س ت}}{\sum \text{ت}} = \frac{٤ + ١٠ + ٦ + ٤}{١٢} = \frac{٢٤}{١٢} = ٢$

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم

قد يتوافر لدينا أحيانًا ملخص المقاييس الإحصائية لمجموعتَي بيانات أو أكثر، فمثلًا، قد نحتاج إلى اختبار تأثير عدد من السياسات البيئية على تقليل انبعاث غاز الكربون من السيارات، معتمدين على عدد السيارات لكل أسرة. فقد نعرف الوسط الحسابي لعدد السيارات لكل أسرة في مدينة مسقط وفي مدينة إبراء، ولكننا لا نستطيع دمج الوسط الحسابي للمدينتين بأن نجمع الوسطين ونقسم الناتج على اثنين، لأن عدد الأسر في كل من المدينتين مختلف؛ لذا نستخدم الوسط الحسابي الموزون في هذه الحالات كالآتي:

ا ، ب مجموعتا أعداد:

مجموع قيم المجموعة ا الـ ٢٠ يساوي ٥٠٠

مجموع قيم المجموعة ب الـ ٣٠ يساوي ٨٤٠

عدد القيم في المجموعتَين هو ٢٠ + ٣٠ = ٥٠ قيمة، مجموعها = ٥٠٠ + ٨٤٠ = ١٣٤٠

الوسط الحسابي للمجموعتَين = $\frac{٥٠٠ + ٨٤٠}{٢٠ + ٣٠} = \frac{١٣٤٠}{٥٠} = ٢٦{,}٨$

الوسط الحسابي للمجموعة ا = $\frac{٥٠٠}{٢٠}$ = ٢٥

الوسط الحسابي للمجموعة ب = $\frac{٨٤٠}{٣٠}$ = ٢٨

لاحظ أن الوسط الحسابي للمجموعتَين لا يساوي ٢٦,٨ حيث $\frac{٢٥ + ٢٨}{٢}$ = ٢٦,٥

نتيجة ٣

الوسط الحسابي لمجموعتَي بيانات أو أكثر يحسب بمعرفة مجموع القيم مجتمعة والعدد الكلي لقيم المجموعتَين.

مثـــال ٤

تحتوي علبة حلوى كبيرة كتلتها الكلية ٨٥٢,٤ غم على ٧٢ قطعة، وتحتوي علبة حلوى صغيرة كتلتها الكلية ٢٨٢,٨ غم على ٢٤ قطعة. ما الوسط الحسابي لكتل الحلوى جميعها؟

الحـــلّ:

مجموع قطع الحلوى = ٧٢ + ٢٤ = ٩٦

نوجِد مجموع عدد قطع الحلوى ومجموع كتلها.

المجموع الكلي لكتل قطع الحلوى = ٨٥٢,٤ + ٢٨٢,٨ = ١١٣٥,٢ غم

الوسط الحسابي للكتل = $\frac{١١٣٥,٢}{٩٦}$ = ١١,٨٢٥ غم

مُساعَدة

نفترض أن الكتل المعطاة في السؤال هي مجاميع كتل قطع الحلوى فقط وأن كتل العلب التي تحويها غير مضمنه فيها.

استكشف ١

في المثال (٤)، الوسط الحسابي للكتل ١١,٨٢٥ ليس الوسط الحسابي للوسطَين الحسابيَّين.

الوسط الحسابي لكتلة قطع الحلوى في العلبة الكبيرة يساوي $\frac{٨٥٢,٤}{٧٢}$ = ١١,٨٣٨ غم،

والوسط الحسابي لكتلة قطع الحلوى في العلبة الصغيرة يساوي $\frac{٢٨٢,٨}{٢٤}$ = ١١,٧٨٣ غم،

الوسط الحسابي لكتلة جميع قطع الحلوى ≠ $\frac{١١,٨٣٨ + ١١,٧٨٣}{٢}$

الوسط الحسابي لـ (أ)، (ب) ≠ $\frac{\text{الوسط الحسابي (أ) + الوسط الحسابي (ب)}}{٢}$ ولكن ذلك لا يحدث دائمًا.

افترض مجموعتَي بيانات، (أ)، (ب) عدد قيم كل منهما م، ن والوسط الحسابي لهما $\frac{\sum أ}{م}$، $\frac{\sum ب}{ن}$ على الترتيب.

ما الموقف الذي يكون فيه الوسط الحسابي لـ (أ)، (ب) معًا يساوي

$\frac{\text{الوسط الحسابي (أ) + الوسط الحسابي (ب)}}{٢}$؟

مُساعَدة

الرمز ≠ يعني ’لا يساوي‘.

مثـــال ٥

عدد الطلبة في رحلة مدرسية ٣٠ طالبًا، منهم ١٢ طالبًا من الصف (أ)، والباقون من الصف (ب). إذا كان الوسط الحسابي لأطوال جميع الطلبة ١,٦٢ م، والوسط الحسابي لأطوال طلبة الصف (أ) هو ١,٥٨ م. فما الوسط الحسابي لأطوال طلبة الصف (ب)؟

الحــلّ:

١) ٣٠ − ١٢ = ١٨

يتم تنظيم البيانات في جدول، ثم إيجاد القيم المفقودة واحدة تلو الأخرى.

	الصف (أ)	الصف (ب)	المجموع الكلّي
عدد الطلبة	١٢	١٨	٣٠
مجموع الأطوال	١٨,٩٦ م	٢٩,٦٤ م	٤٨,٦ م
الوسط الحسابي	١,٥٨ م	١,٦٥ م	١,٦٢ م

٢) $\frac{\text{مجموع الأطوال}}{\text{عدد الطلبة}}$ = الوسط الحسابي

$\frac{\text{مجـ س}}{١٢}$ = ١,٥٨، أي مجـ س = ١,٥٨ × ١٢

٣) $\frac{\text{مجـ س}}{٣٠}$ = ١,٦٢، أي مجـ س = ١,٦٢ × ٣٠

٤) ٤٨,٦ − ١٨,٩٦

٥) الوسط الحسابي = $\frac{٢٩,٦٤}{١٨}$ = ١,٦٤٦٦٦٦٦٦٦٦ ...

قرّب الإجابة إلى أقرب عدد مكوّن من ثلاثة أرقام معنوية لتحقّق دقة للأوساط الحسابية الأخرى.

مُساعَدة

الأرقام في الدوائر توضّح خطوات ترتيب الحل.

٤-١ب المنوال

درست في الصف العاشر أن المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا، على سبيل المثال في التوزيع ٣، ٤، ٣، ٤، ٦، ٤، ٨، ٥، ٢ يتكرر العدد ٤ أكثر من الأعداد الأخرى، لذا المنوال هو ٤

في التوزيع ١٧، ١٩، ١٤، ١٧، ١٥، ١٤، ٢٠ يتكرر العددان ١٤، ١٧ أكثر من الأعداد الأخرى، لذا هناك منوالان هما ١٤، ١٧

يبيّن الجدول الآتي توزيع التكرار للمتغير ص:

المتغير (ص)	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤
التكرار (ت)	٩	٦	٥	٣	٢

نلاحظ من الجدول أن ص = ٤٠ تتكرر أكثر من القيم الأخرى، وقد تكررت ٩ مرات. لذا المنوال هو ٤٠

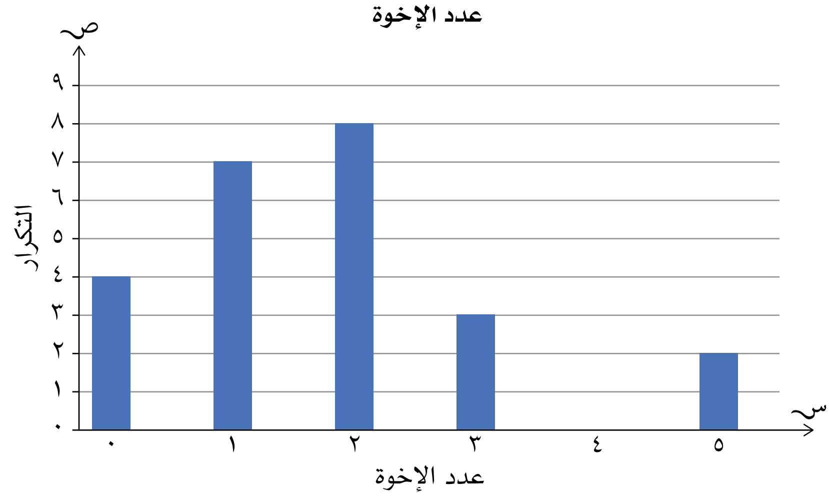
نتيجة ٤

المنوال أو القيمة المنوالية هو القيمة الأكثر تكرارًا في التوزيع. قد نجد أكثر من منوال واحد في التوزيع.

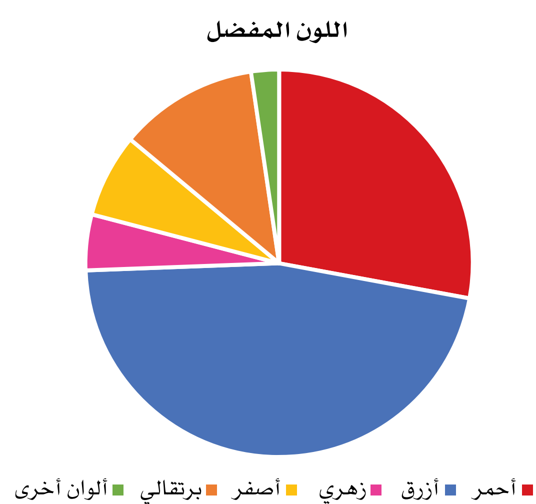
مثـــال ٦

احسب المنوال لكلّ توزيع من التوزيعات الآتية:

أ تبيّن الأعمدة البيانية الآتية عدد الإخوة لمجموعة من الطلبة:



ب تبيّن القطاعات الدائرية الآتية اللون المفضل لمجموعة من الطلبة:



ج يبيّن مخطّط الساق والورقة الآتي معدل نبضات قلب ٢٩ شخصًا.

٦	٥ ٧
٧	١ ١ ٢ ٣ ٨ ٩
٨	٠ ٠ ١ ٣ ٦ ٨
٩	١ ٣ ٣ ٣ ٣ ٤ ٧ ٧ ٩
١٠	٠ ٣ ٥ ٧ ٧
١١	٨

المفتاح: ٧ | ١
٧١ نبضة في الدقيقة

الحــلّ:

أ المنوال = ٢ (أخوان)

في لوحة الأعمدة أطول عمود هو المنوال.

ب المنوال = اللون الأزرق

القطاع الأكبر من مخطط الدائرة هو المنوال. في هذه الدائرة القطاع الأزرق هو الذي يمثل النسبة الأكبر من الطلبة الذين يفضلون اللون الأزرق.

ج المنوال = ٩٣ نبضة في الدقيقة

العدد الذي يظهر أكثر من غيره هو ٩٣ بتكرار الرقم ٣ في الصف الرابع.

٦	٥ ٧
٧	١ ١ ٢ ٣ ٨ ٩
٨	٠ ٠ ١ ٣ ٦ ٨
٩	١ ٣ ٣ ٣ ٣ ٤ ٧ ٧ ٩
١٠	٠ ٣ ٥ ٧ ٧
١١	٨

٤-١ج الوسيط

وسيط التوزيعات التكرارية

الوسيط median هو القيمة التي تتوسط القيم عندما ترتّب قيم التوزيع من الأصغر إلى الأكبر (تصاعديًّا)، أو من الأكبر إلى الأصغر (تنازليًّا).

قيم التوزيع ٥، ٩، ١٣، ١٨، ١٩، ٢٤، ٣٠ مرتبة تصاعديًّا.

يوجد ٧ قيم فتكون رتبة الوسيط $\left(\frac{٧ + ١}{٢}\right)$ = ٤، إذًا الوسيط هو العدد ١٨

أمّا قيم التوزيع ٥٦، ٣٧، ٥٥، ٧٤، ٤٦، ٣٨ فيجب ترتيبها أولًا.

الترتيب التصاعدي ٣٧، ٣٨، ٤٦، ٥٥، ٥٦، ٧٤

يوجد ٦ قيم، تكون رتبة الوسيط $\left(\frac{٦ + ١}{٢}\right)$ = $٣\frac{١}{٢}$، أي أن الوسيط يقع بين القيمة الثالثة والقيمة الرابعة.

مُساعَدة

تأكد من ترتيب القيم قبل تحديد قيمة الوسيط.

القيمة الثالثة هي ٤٦، والقيمة الرابعة هي ٥٥

الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتَين الوسيطيّتَين $\frac{٤٦ + ٥٥}{٢}$ = ٥٠,٥

نتيجة ٥

يقع الوسيط لمجموعة قيم عددها ن في منتصف المسافة بين القيمة الأولى والقيمة رقم ن. الوسيط هو القيمة ذات الرتبة $\left(\frac{ن + ١}{٢}\right)$.

يبيّن الجدول الآتي توزيع ٢٥ قيمة للمتغيّر س، تظهر **التكرارات التراكمية cumulative frequencies** ومواقع القيم بترتيب تصاعدي في العمودين الثالث والرابع.

المتغيّر (س)	التكرار (ت)	التكرار التراكمي	الموقع
٣٠	٩	٩	من الأول إلى التاسع
٣١	٦	١٥	من العاشر إلى الخامس عشر
٣٢	٥	٢٠	من السادس عشر إلى العشرين
٣٣	٣	٢٣	من الواحد والعشرين إلى الثالث والعشرين
٣٤	٢	٢٥	الرابع والعشرون والخامس والعشرون
	مجـ ت = ٢٥		

رتبة الوسيط هي $\left(\frac{٢٥ + ١}{٢}\right)$ = ١٣ وقيمة الوسيط هي ٣١

نتيجة ٦

للمتغير س حيث مجموع التكرارات هو مجـ ت: الوسيط هو القيمة ذات الرتبة $\left(\frac{[\text{مجـ ت}] + ١}{٢}\right)$.

مثـــال ٧

يبيّن الجدول الآتي ٦٥ قراءة غير مجمّعة للمتغيّر س؛ كما يبيّن الجدول التكرارات التراكميّة ومواقع القراءة. احسب قيمة وسيط المتغير س:

س	ت	التكرار التراكمي	الموقع
٤٠	١١	١١	من الأول إلى الحادي عشر
٤١	٢٣	٣٤	من الثاني عشر إلى الرابع والثلاثين
٤٢	١٩	٥٣	من الخامس والثلاثين إلى الثالث والخمسين
٤٣	٨	٦١	من الرابع والخمسين إلى الواحد والستين
٤٤	٤	٦٥	من الثاني والستين إلى الخامس والستين

الحــلّ:

مجموع تكرارات القراءات ٦٥،

رتبة الوسيط = $\frac{ن + ١}{٢}$ = $\frac{٦٥ + ١}{٢}$ = ٣٣، نلاحظ أن القراءة التي رتبتها ٣٣ تقع ضمن القيم التي موقعها من رقم ١٢ إلى رقم ٣٤ وجميعها ٤١

قيمة الوسيط للمتغير س هي ٤١

مُساعَدة

يجب أن تؤخذ التكرارات بالحسبان هنا. فعلى الرغم من أن ٤١ ليست في الصف الأوسط من الجدول إلّا أنها في منتصف القيم الـ ٦٥

استكشف ٢

توجد عدة مصادر تبيّن المعدلات التالية للشخص (الطبيعي) البالغ:

- يضحك ١٠ مرات في اليوم.
- يغطّ في النوم بعد ٧ دقائق.
- يخسر ٠,٧ كغم من الجلد سنويًا.
- ينمو عنده ٩٤٤ كم من الشعر مدى حياته.
- سرعة العطسات التي ينتجها ١٦٠ كم/ساعة.
- أطوال الشرايين والأوردة في جسمه ٩٧٠٠٠ كم.
- عدد المفردات التي يعرفها بين ٥٠٠٠ و ٦٠٠٠ مفردة.
- معدل طول البالغين من الذكور ١٧٢,٥ سم ومعدل كتلتهم ٨٠ كغم.
- معدل طول البالغات من الإناث ١٥٩ سم ومعدل كتلتهن ٦٨ كغم.

ماذا تعني كل عبارة من هذه العبارات؟ وكيف حددت؟

هل سبق لك أن واجهت شخصًا يتمتع بهذه المعدّلات؟ كيف يمكن أن نستفيد منها؟

ستجد أرقامًا متنوعة ومستمرة وحديثة تعطي معدلات تثير الاهتمام في الموقع الإلكتروني http://www.worldometers.info/.

وسيط البيانات الممثلة في مخططات

١- مخططات الساق والورقة

القيم الموجودة في مخطط الساق والورقة مرتبة، وغالبًا ما تكون في ترتيب تصاعدي من الأعلى إلى الأسفل ومن اليمين إلى اليسار.

إذا كان هناك ن قيم يكون الوسيط هو القيمة في المكان $\frac{ن + ١}{٢}$، ولإيجاد القيمة في هذا المكان يمكننا إما أن نبدأ العدّ من القيمة الصغرى أو أن نبدأ من القيمة الكبرى.

مثـــال ٨

يبيّن مخطط الساق والورقة عدد الأهداف المسددة لكل من أحد عشر لاعب كرة قدم في الموسم الماضي.

أوجِد وسيط الأهداف المسددة.

٠	٥ ٨ ٨ ٩
١	٣ ٤ ٦ ٧ ٩ ٩
٢	٢

المفتاح: ١ | ٣ يمثّل ١٣ هدفًا

الحـــلّ:

القيمة الوسطى هي في المكان $\frac{١١ + ١}{٢} = ٦$

عند العد من القيمة الصغرى ٥، تكون القيمة رقم ٦ هي ١٤ وتكون هي الوسيط.

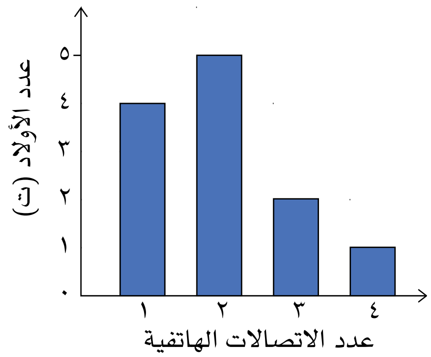
كذلك عند العد من القيمة الكبرى ٢٢، تكون القيمة رقم ٦ هي ١٤ أيضًا.

٢- الأعمدة البيانية

في الأعمدة البيانية (مخطّط الأعمدة)، نحتاج إلى إيجاد العدد الكلي للقيم حتى نستطيع استنتاج مكان القيمة الوسطى. نقوم بهذا الأمر من خلال إيجاد مجموع التكرارات، والتي تعطينا إياها ارتفاعات الأعمدة.

مثـــال ٩

يبيّن مخطط الأعمدة عدد الاتصالات الهاتفية التي يتلقاها عدد من الأولاد في عطلة نهاية الأسبوع.



أوجد الوسيط لعدد الاتصالات.

الحـــلّ:

يبيّن مخطط الأعمدة معلومات حول عدد الاتصالات التي تلقاها ٤ + ٥ + ٢ + ١ = ١٢ ولدًا.

عندما ن = ١٢، يكون الوسيط هو القيمة في المكان $\frac{ن + ١}{٢} = \frac{١٢ + ١}{٢}$ = ٦,٥، أي بين المكانَين ٦ و ٧.

القيم الأربع الأولى (الأولى إلى الرابعة) كلها تمثّل عدد اتصال واحد (١).

القيم الخمس التي تلي (الخامسة إلى التاسعة) كلها تمثّل اتصالين (٢).

القيمتان السادسة والسابعة كلتاهما تقعان عند القيمة ٢، إذًا الوسيط هو ٢ (اتصالان).

تمارين ٤-١

١) أوجِد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكلّ توزيع من التوزيعات الآتية:

أ) ١٢، ١٧، ١٧، ٣٩، ٤١، ٤٤، ٥٤، ٦٧، ٨٧

ب) ١٢٣، ١١٥، ٩٨، ١٠٧، ١١٥، ١٠٩، ١١٣، ٩٨

ج) ٣,٥ ، ١,٠ ، ١٧,٩، ٣٨,٣ ، ١,٠ ، −٣٤,٢ ، ٢٧,٨ ، ٤٨,٨ ، −١١,٤

د) $-١\frac{١}{٤}$، $١\frac{١}{٢}$، $-١\frac{٣}{٤}$، $١\frac{١}{٤}$، $١\frac{٣}{٤}$، $-١\frac{١}{٢}$

هـ) التوزيع التكراري للمتغير س

س	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
التكرار (ت)	٩	٦	٤	٣	٢	١

و) التوزيع التكراري للمتغير ص

ص	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩
التكرار (ت)	٩٩	٩٩	٩٩	٩٩	٩٩

ز) التوزيع التكراري للمتغير هـ

هـ	التكرار (ت)
٣٦	٨
٣٧	١١
٣٨	١٣
٣٩	١٦
٤٠	٣٧

ح) التوزيع التكراري للمتغير ك

ك	التكرار (ت)
٥,٦	٨
٥,٧	٨٧
٥,٨	٤٠
٥,٩	٣٥
٦,٠	٢١

٢) الوسط الحسابي لكتل ٢٠ حبة تفاح ١٥٠ غم، والوسط الحسابي لكتل ٣٠ حبة موز ١٧٠ غم. أوجِد:

أ) مجموع كتل حبات التفاح الـ٢٠

ب) مجموع كتل حبات الموز الـ ٣٠

ج) مجموع كتل حبات الفاكهة الـ ٥٠

د) الوسط الحسابي لكتل حبات الفاكهة الـ ٥٠

٣) الوسط الحسابي لأطوال ١٠ أقلام رصاص ١١,٤ سم. والوسط الحسابي لأطوال هذه الأقلام وأطوال ١٥ قلم تلوين معًا يساوي ٩,٣ سم. أوجِد:

أ) مجموع أطوال الـ ٢٥ وحدة جميعها.

ب) مجموع أطوال الـ ١٥ قلم تلوين.

ج) الوسط الحسابي لأطوال أقلام التلوين.

٤) في اختبار من مئة درجة لمادة العلوم، كان الوسط الحسابي لدرجات ١٥ طالبًا من الذكور ٦٢، والوسط الحسابي لدرجات ١٧ طالبة من الإناث ٧٠. احسب:

أ مجموع درجات ٣٢ طالبًا ذكورًا وإناثًا.

ب الوسط الحسابي لدرجات الطلبة الـ ٣٢ جميعهم.

٥) سجلت المعلمة مريم جميع درجات اختبارات الرياضيّات (من ١٠) التي حصل عليها الطلبة في المدرسة، كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

الدرجة (س)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار (ت)	٣	٣	٥	٧	١٢	٢٥	٤٠	٤٧	٣١	٢٥	٢

أ اكتب الدرجة المنوالية.

ب كم اختبار رياضيّات سجلت مريم درجاته؟

ج أوجِد الدرجة الوسيطية لهذه الاختبارات.

د احسب:

١) مجموع الدرجات الكلّي التي دونتها مريم.

٢) الوسط الحسابي لدرجات الاختبارات.

٦) قائمة تتضمّن ن عددًا، مجموعها ٣١٢ ووسطها الحسابي ٢٠,٨، أوجِد قيمة ن

٧) الوسط الحسابي لـ ٤٢ عددًا هو ٣,٢٥؛ أوجِد مجموع الأعداد.

٨) الوسط الحسابي للأعداد ١٣، ١٩، ٢٧، ٤٢، ك هو ٣٠؛ أوجِد قيمة ك.

٩) الوسط الحسابي لـ ٧ دعامات ٢,٣١ م، والوسط الحسابي لأطوال أقصر ٦ دعامات منها ٢,٢٥ م؛ أوجِد طول أطول دعامة.

١٠) كتل ثلاثة رجال هي ٧٤,٩ كغم، ٨٠,٥ كغم ، ٨٨,٢ كغم. زاد الوسط الحسابي للكتل عندما انضم إليهم رجل رابع بمقدار ٣,٦ كغم. أوجِد كتلة الرجل الرابع.

١١) الوسط الحسابي لزمن خمسة أفلام ١ ساعة و٤٢ دقيقة، والوسط الحسابي لزمن أطول ثلاثة أفلام منها ١ ساعة و٥٤ دقيقة. أوجِد زمن أقصر فيلمَين إذاعلمت أن أحدهما أطول من الآخر بـ ١٠ دقائق.

١٢) خلال ساعة الذروة قام بلعرب بعدّ الركاب في جميع المركبات التي عبرت إشارات المرور الضوئية. نتائجه مبيّنة في الجدول الآتي:

عدد الركاب	١	٢	٣	٤	٥
عدد المركبات (ت)	٤٣	٣٨	س	١٢	٣

إذا علمت أن الوسط الحسابي للركاب في المركبة الواحدة ٢,١٥٢، فأوجد قيمة س

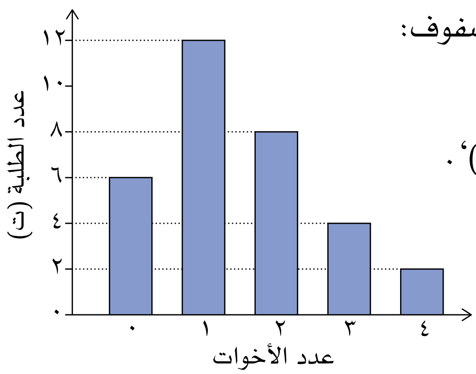
١٣) متغيّر له القيم التسع الآتية: ٤، ١١، ٢٥، ٣٧، ١١، ٢٦، ٣٥، ١١، ك

أ ١) أيّ مقياس نزعة مركزية يمكن إيجاده من دون معرفة قيمة ك؟
٢) اكتب قيمة هذا المقياس.

ب إذا علمت أن ك أكبر من ٣٠
١) أيّ مقياس نزعة مركزية آخر يمكن إيجاده؟
٢) اكتب قيمة هذا المقياس.

ج إذا كانت قيمة مقياس النزعة المركزية المتبقّي ٢٢، فأوجد قيمة ك

١٤) تبيّن الأعمدة البيانية المجاورة عدد أخوات كل طالب في أحد الصفوف:



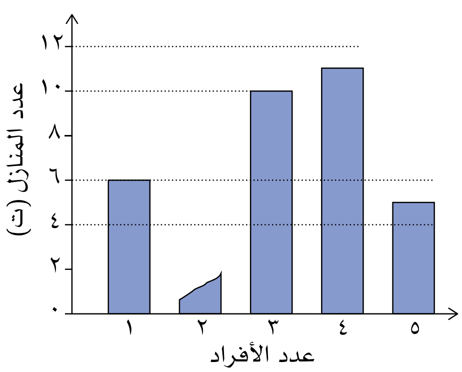
أ ضع البيانات المبيّنة في الأعمدة البيانية في جدول، مستخدمًا العنوانَين: ʼعدد الأخوات (س)ʻ، ʼعدد الطلبة (ت)ʻ.

ب اكتب المنوال لعدد الأخوات.

ج أوجِد الوسيط لعدد الأخوات.

د احسب الوسط الحسابي لعدد الأخوات.

١٥) أُجريت دراسة لمعرفة عدد أفراد الأسرة في كل منزل في أحد الشوارع. لخّصت النتائج في الأعمدة البيانية المجاورة، لكن أحد الأعمدة مُسح جزئيًا. إذا علمت أن الوسط الحسابي لعدد الأفراد في كل منزل هو ٣ فأوجِد:



أ مجموع عدد المنازل التي أُجريت عليها الدراسة.

ب مجموع الأفراد في المنازل جميعها.

١٦) يبيّن مخطّط الساق والورقة الآتي عدد الكتب الموجودة على كل رفّ في مكتبة المدرسة:

٠	٨ ٨ ٩
١	٣ ٢ ٤ ٦ ٨
٢	٠ ١ ٣ ٣ ٧
٣	١ ١ ١ ٢ ٢ ٣ ٤ ٥

المفتاح: ٣ | ١
تمثّل ١٣ كتابًا على الرفّ

أ اكتب منوال عدد الكتب على كل رفّ.

ب أوجِد وسيط عدد الكتب على كل رفّ.

ج احسب، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، الوسط الحسابي لعدد الكتب على كل رفّ.

١٧) يبيّن مخطّط الساق والورقة المزدوج الدرجات المئوية لأفضل ٢٥ من الطلبة في اختبار ما:

الذكور (١٣)		الإناث (١٢)
٢	٨	١ ٤
٥ ٩	٨	٦ ٦ ٨
٠ ١ ٣ ٣ ٤ ٤	٩	٠ ١ ٢ ٣
٥ ٦ ٦ ٩	٩	٧ ٧ ٨

المفتاح: ٢ | ٨ | ١
تمثّل ٨١٪ من الإناث، ٨٢٪ من الذكور

أ حدّد وسيط الدرجات لـ:

١) الإناث

٢) الذكور

ب سيمنح الطلبة الـ ٢٥ جوائز. سيقفون، قبل العرض، في خطّ مستقيم بالترتيب بحسب درجاتهم.

صِف الطالب الذي سيقف في منتصف المستقيم.

١٨) إذا كان الوسط الحسابي للمتغيّر (س) يساوي ٩,٦ فأوجد قيمة ك

التوزيع التكراري للمتغير س	
س	**التكرار (ت)**
٧	٢
٨	٧
٩	١١
١٠	٩
١١	ك
١٢	ك − ٣

١٩) يبيّن الجدول الآتي عدد الكتب التي قرأتها كل مجموعة من مجموعات الأطفال الشهر الماضي:

عدد الكتب	٠	١	٢	٣
عدد الأطفال (ت)	١٠	٨	٦	س

أ أوجِد قيمة س إذا كان الوسط الحسابي لعدد الكتب هو ١ بالضبط.

ب أوجِد أكبر قيمة ممكنة لـ س إذا كان العدد المنوالي للكتب التي قُرِأت هو ٠ (صفر).

ج إذا كان العدد الوسيط للكتب التي قُرِأت هو ٢ فأوجِد:

١) أصغر قيمة ممكنة لـ س

٢) أكبر قيمة ممكنة لـ س

٢٠) يبين الجدول الآتي التوزيع التكراري للمتغير المنفصل ك:

ك	١	٢	٣	٤
التكرار (ت)	س	٢س	٣س	٤س

أ أوجِد الوسيط.

ب احسب الوسط الحسابي.

ج ما نوع العدد الذي يجب أن يأخذه س لتكون الحسابات مقبولة؟

٢١) الأعداد ٧، ١٣، ١٨، ٢٦، ص رُتِّبت تصاعديًا ووسطها الحسابي يساوي وسيطها: أوجِد قيمة ص

٢٢) سُئِل ٥٠ ولدًا و٣٠ بنتًا عن عدد العمّات وعدد الأعمام لدى كل منهم. المدخلة ٥/٤ في الجدول الآتي تبيّن أن ٤ أولاد و ٥ بنات لدى كل منهم ٣ عمّات و ٢ من الأعمام:

		العمّات			
		٠	١	٢	٣
الأعمام	٠	٠/١	٢/٠	١/٢	١/١
	١	٠/٠	٤/٣	٤/٠	٠/٠
	٢	٠/٠	٠/١	١١/٧	٥/٤
	٣	٠/١	٠/٠	١/٠	١/٠

أ أوجِد الوسط الحسابي لعدد الأعمام عند الأولاد.

ب لمجموعة الأولاد والبنات معًا، احسب الوسط الحسابي لعدد:

١) العمّات ٢) العمّات والأعمام.

ج اقترح طريقة بديلة لتمثيل البيانات بحيث تكون الحسابات في الجزئيّتَين (أ) ، (ب) أسهل.

٢٣) أُعطيت الرواية نفسها إلى مجموعة من الأطفال ٥ أولاد و٧ بنات. بعد القراءة مدة ٣٠ دقيقة، جميع الأولاد كانوا قد وصلوا إلى الصفحة ١٢، وجميع البنات وصلن إلى الصفحة ١٥؛ احسب الوسط الحسابي التقديري لعدد الصفحات التي قرأها:

أ الـ ٥ أولاد ب الـ ٧ بنات ج الـ ١٢ طفلًا (جميعهم)

٤ - ٢ الحساب التقديري لمقاييس النزعة المركزية

تُمثّل البيانات أيضًا في جدول بيانات مجمّعة، وقد يكون هذا بسبب أن البيانات لا يمكن التعبير عنها بدقة؛ على سبيل المثال: لا نستطيع أن نقول إن عمر الطالب في هذه اللحظة هو ١٥ سنة و٣ أشهر و١٢ يومًا و٤ ساعات و٢١ دقيقة و٣ ثوان، لكن يمكننا اختصار الجواب بأن عمره الآن هو ١٥ سنة كاملة، وبالتالي كتابته في صورة فئة.

كذلك قد يكون عدد القيم كبيرًا جدًا، فيكون الحل الأنسب هو تجميع البيانات في فئات، لأن هذا الأمر يجعل التعامل مع البيانات وحساب مقاييس النزعة المركزية أسهل.

وفي كلتا الحالتَين، إذا كانت القيم تقع ضمن مدى من البيانات (فئات) فإن مقاييس النزعة المركزية تكون تقديرية.

٤-٢أ الحساب التقديري لمقاييس النزعة المركزية: الوسط الحسابي والمنوال

حساب الوسط الحسابي التقديري

لحساب الوسط الحسابي التقديري للبيانات المجمعة، نستخدم مركز الفئة **mid-value** كقيمة تمثيلية لتلك الفئة. مركز الفئة يساوي وسط قيم حدود الفئة.

بالنسبة للفئة التي تكون فيها جميع القيم بين ١٠ و ٢٠، تكون مركز الفئة (١٠ + ٢٠) ÷ ٢ = ١٥

نتيجة ٧

الوسط الحسابي التقديري للفئات التي مراكزها م وتكراراتها ت، يعطى بالقاعدة

$$\overline{س} = \frac{\sum ت\, م}{\sum ت}$$

مثال ١٠

يبيّن الجدول الآتي كتل ٧٥ كيسًا من حبات البطاطس. قدّر الوسط الحسابي لكتل أكياس البطاطس:

الكتلة (كغم)	عدد الأكياس (ت)
١١٥- ١٦٥	١٥
١٦٥- ٢١٥	٣٧
٢١٥- ٢٦٥	٢٣

الحــلّ:

الكتلة (كغم)	عدد الأكياس (ت)	مركز الفئة (م)	ت م
١١٥ – ١٦٥	١٥	١٤٠	١٥ × ١٤٠ = ٢١٠٠
١٦٥ – ٢١٥	٣٧	١٩٠	٣٧ × ١٩٠ = ٧٠٣٠
٢١٥ – ٢٦٥	٢٣	٢٤٠	٢٣ × ٢٤٠ = ٥٥٢٠
	مجـ ت = ٧٥		مجـ ت م = ١٤٦٥٠

الوسط الحسابي التقديري لكتلة كيس البطاطس مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة

هو: $\frac{\text{مجـ ت م}}{\text{مجـ ت}} = \frac{١٤٦٥٠}{٧٥} = ١٩٥,٣$ كغم

مُساعَدة

م = $\frac{\text{(الحد الأعلى للفئة + الحد الأدنى للفئة)}}{٢}$

مثال: $\frac{(١٦٥ + ١١٥)}{٢} = ١٤٠$

مثــال ١١

يبيّن الجدول الآتي أعمار ٥٠ رياضيًا بالسنوات المكتملة. قدّر الوسط الحسابي للأعمار:

العمر (بالسنوات المكتملة)	١٧	١٨	١٩	٢٠
عدد الرياضيّين (ت)	٦	١٢	١٨	١٤

الحــلّ:

مراكز الفئات هي: ١٧,٥، ١٨,٥، ١٩,٥، ٢٠,٥

الوسط الحسابي التقديري للأعمار =

$\frac{(٦ \times ١٧,٥) + (١٢ \times ١٨,٥) + (١٨ \times ١٩,٥) + (١٤ \times ٢٠,٥)}{٦ + ١٢ + ١٨ + ١٤} = \frac{٩٦٥}{٥٠} = ١٩,٣$ سنة.

مُساعَدة

العمر ١٧ سنة مكتملة تعني الفترة من ١٧سنة إلى أقل من ١٨ سنة

أي ١٧ ⩽ العمر < ١٨

إيجاد الفئة المنوالية

قد تكون **أطوال الفئات class widths** في التوزيعات التكرارية متساوية أو غير متساوية. فإذا كانت الفئات في التوزيع التكراري متساوية، فإن **الفئة المنوالية modal class** هي الفئة الأكثر شيوعًا (ذات التكرار الأكبر بالوحدة أو بالطول). أما إذا كانت أطوال الفئات في التوزيع التكراري غير متساوية، فإن الفئة المنوالية هي **الفئة ذات الكثافة الأكثر class density**. أما في حال تمثيل البيانات في المدرجات التكرارية فإن الفئة المنوالية يمثلها العمود الأكثر ارتفاعًا.

نتيجة ٨

في المدرّجات التكرارية، الفئة المنوالية هي العمود الأكثر ارتفاعًا. وينتفي وجود الفئة المنوالية عندما تكون جميع الفئات لها كثافة التكرار نفسها.

مثــال ١٢

أوجِد الفئة المنوالية لأطوال أقلام الرصاص الـ ٢٧٠ المقربة إلى أقرب سنتيمتر في الجدول المجاور:

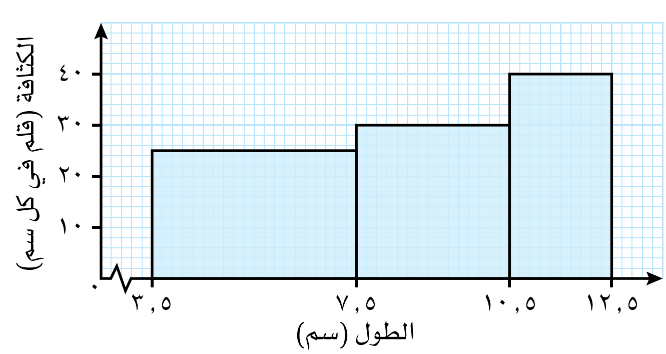
الطول (س سم)	عدد الأقلام (ت)
٤–٧	١٠٠
٨–١٠	٩٠
١١–١٢	٨٠

الحــلّ:

كثافة التكرار = $\frac{\text{التكرار}}{\text{طول الفئة}}$

الطول (س سم)	عدد الأقلام (ت)	طول الفئة (سم)	كثافة التكرار
٣,٥ ≤ س < ٧,٥	١٠٠	٤	١٠٠ ÷ ٤ = ٢٥
٧,٥ ≤ س < ١٠,٥	٩٠	٣	٩٠ ÷ ٣ = ٣٠
١٠,٥ ≤ س < ١٢,٥	٨٠	٢	٨٠ ÷ ٢ = ٤٠

يبيّن الجدول حساب حدود الفئات وطول الفئات وكثافاتها.



على الرغم من أن الإجابة عن السؤال واضحة من الجدول، إلّا إنه من المفيد أن تلاحظ من المدرج التكراري المبين أن الفئة المنوالية هي الفئة التي تمثل العمود الأطول والأكثر كثافة تكرارية ولو أنها أقل تكرارًا.

الفئة المنوالية هي ١١–١٢ سم، (للدقة ١٠,٥ ≤ س < ١٢,٥ سم).

مُساعَدة

عندما تُقرَّب القيم، يجب التحقق من قيم طرفي الفئات الصحيحة بعناية باستخدام قيم الحدود الفعلية للفئات.

مُساعَدة

يمكن احتساب مركز الفئة ٤–٧، مباشرة على الشكل $\frac{٤ + ٧}{٢} = \frac{١١}{٢} = ٥,٥$

مُساعَدة

طول الفئة = الحد الأعلى للفئة – الحد الأدنى لها

لحساب مركز فئات الأطوال مقربة إلى ٤–٧ سم. يمكن حساب مركزها مباشرة $\frac{٤ + ٧}{٢}$ = ٥,٥
أو يمكن حسابها بدقة أكبر بإرجاع الفئة لقياساتها الفعلية قبل التقريب إلى ٤ و ٧، وهي
٣,٥ ≤ الطول < ٧,٥ يساوي $\frac{٣,٥ + ٧,٥}{٢}$ = ٥,٥
يجب توخي الحذر لأن الحساب المباشر لن يؤدي دائمًا إلى القيمة الصحيحة لمركز الفئات.

مثــال ١٣

يبين الجدول الآتي زمن انتظار ١٨٠ مسافرًا في محطة القطار. ما الفئة المنوالية للزمن؟

زمن الانتظار (دقيقة)	عدد المسافرين (ت)
٠ – ١٥	٧٥
١٥ – ٢٥	٦٠
٢٥ – ٣٠	٤٥

الحـــلّ:

زمن الانتظار (دقيقة)	عدد المسافرين (ت)	الكثافة (مسافرون في كل دقيقة)
٠ – ١٥	٧٥	٧٥ ÷ ١٥ = ٥
١٥ – ٢٥	٦٠	٦٠ ÷ ١٠ = ٦
٢٥ – ٣٠	٤٥	٤٥ ÷ ٥ = ٩

أوجِد الكثافة بدلالة عدد المسافرين لكل دقيقة.

الفئة المنوالية هي ٢٥–٣٠ دقيقة، والتي تتضمّن أكبر عدد من المسافرين في كل دقيقة.

تمارين ٤-١٢أ

١) تبين الجداول التكرارية الآتية المتغيرات ط، ك، س، ن، ع

أ احسب الوسط الحسابي التقديري لكل متغيّر من المتغيرات.

ب حدد الفئة المنوالية لكل متغير من المتغيرات.

١)

الطول (ط سم)	ت
٠ ≤ ط < ١٠	١٩
١٠ ≤ ط < ٢٠	٢٢
٢٠ ≤ ط < ٣٠	١٩

٢)

الكتلة (ك كغم)	ت
١٢ ≤ ك < ٢٠	١٣
٢٠ ≤ ك < ٢٨	٢٠
٢٨ ≤ ك < ٣٦	١١

٣)

السرعة (س كم/ ساعة)	ت
١٠ ≤ س < ٢٥	٦٤
٢٥ ≤ س < ٤٠	١٠٩
٤٠ ≤ س < ٥٥	١١٦
٥٥ ≤ س < ٧٠	١١١

٤)

الزمن (ن ثانية)	ت
١٠ – ١٩	٧
٢٠ – ٢٩	١٨
٣٠ – ٣٩	٣١
٤٠ – ٤٩	١٩

٥)

الارتفاع (ع سم)	٢٠٠–٥٠٠	٦٠٠–١٠٠٠	١١٠٠–١٣٠٠	١٤٠٠–١٧٠٠	١٨٠٠–٢١٠٠
ت	٤٠	٥٠	٤٢	٢٤	٤٤

مُساعَدة

يعتمد تقدير الوسط الحسابي على كيفية تقسيم البيانات إلى فئات. هنا، الأطوال غير متساوية.

٢) يبيّن الجدول الآتي أطوال (ل سم) عيّنات من أوراق الشجر:

الطول (ل سم)	٢٠ ≤ ل < ٤٥	٤٥ ≤ ل < ٦٠	٦٠ ≤ ل < ٧٠	٧٠ ≤ ل < ٩٠
ت	١٠٠	٧٥	٦٠	٦٠

أ احسب الوسط الحسابي التقديري للطول.

ب أوجِد الفئة المنوالية.

٣) يتنافس ٦٠ شخصًا من نادي التجديف في سباق التحمّل. يبيّن جدول التوزيع التكراري المجمّع أدناه، الزمن الذي يحتاجون إليه لإتمام السباق:

الزمن (ن ساعة ودقيقة)	عدد الأشخاص (ت)
٤٠ د ≥ ن > ٥٠ د	٤
٥٠ د ≥ ن > ١ س ٠٠ د	٢٨
١ س ٠٠ د ≥ ن > ١ س ٠٥ د	١٠
١ س ٠٥ د ≥ ن > ١ س ١٠ د	١٢
١ س ١٠ د ≥ ن > ١ س ١٨ د	٦

أ اكتب مركز الفئة (بالدقائق) التي تتضمّن ١٠ مجدّفين (أشخاصًا).

ب احسب الوسط الحسابي التقديري للزمن الذي يستغرقه المجدّفون بالدقائق والثواني.

ج اشرح باختصار سبب كون ٥٠ د ≥ ن > ١ س ٠٠ د هي الفئة المنوالية.

٤) نظّم طلبة مدرسة سباقًا مدّته ٢٠ دقيقة، حيث يركضون في مسارات حول المدرسة. عدد الدورات الكاملة التي اجتازها الطلبة مبيّنة في الجدول الآتي:

عدد الدورات الكاملة	١ – ٤	٥ – ٧	٨ – ٩	١٠ – ١٢
عدد الطلبة (ت)	٥٦	٨٠	٤٨	١٦

أ اشرح سبب كون مركز الفئة الأولى يساوي ٣ دورات.

ب رُعاة الحفل يتبرعون بمبلغ ٢ ريال عماني مقابل كل دورة مكتملة إلى جمعية خيرية محلية:

احسب تقديرًا لـ:

١) المبلغ الإجمالي الذي جمعه الطلبة.

٢) الوسط الحسابي للدورات لكل طالب.

٥) يبيّن الجدول الآتي عدد حبّات الطماطم المنتجة في عدد من الأثلام في مزرعة ما:

عدد حبّات الطماطم	٢٠ – ٢٩	٣٠ – ٤٩	٥٠ – ٧٩	٨٠ – ١٠٠
عدد الأثلام (ت)	٣٢٩	٤١٣	٧٠٤	٢٥٨

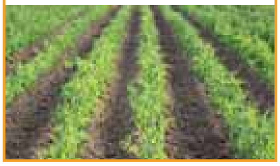
أ احسب الوسط الحسابي التقديري لعدد حبات الطماطم المنتجة في اليوم.

ب تمّ إيجاد كتل الطماطم بدقة، فكان الوسط الحسابي لكتلة حبّة الطماطم ١٥٦,٥٠ غم. وتمّ بيع الطماطم في السوق بسعر ١,٢٨٠ ريالًا عُمانيًّا للكيلوغرام الواحد، فكان الإيراد الكلي ٢٠١٤٠ ريالًا عُمانيًّا: أوجد الوسط الحسابي الفعلي لعدد حبات الطماطم المنتجة في كل ثلم.

ج ما سبب إمكانية عدم دقة الإجابة في الجزئية (ب)؟

مُساعَدة

الأثلام هي مساحات صغيرة من الأرض مقسّمة بطريقة طولية ومنتظمة تسهّل نمو المحاصيل وريّها والعناية بها.



٤-٢ب الحساب التقديري لمقاييس النزعة المركزية: الوسيط

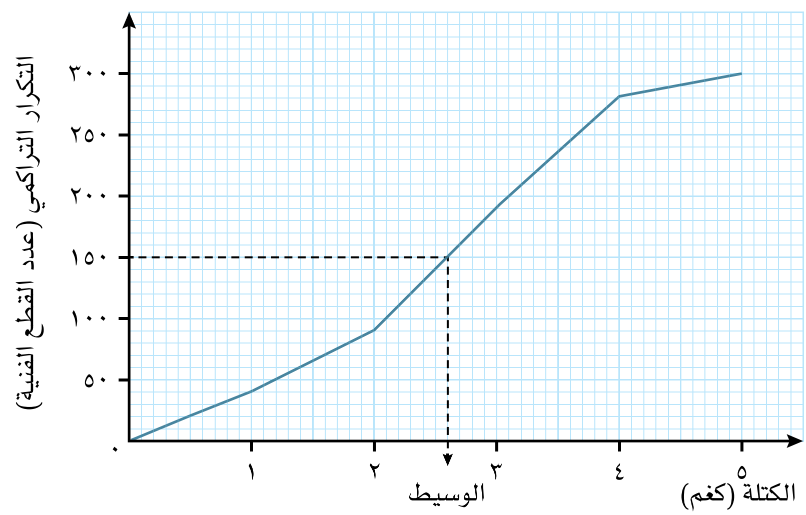
البيانات التي تنظم في فئات (البيانات المتصلة أو البيانات الكثيرة) لا يمكن معها رؤية القيم الفعلية وهذا يعني أن المقاييس الإحصائية كالوسيط تكون تقديرية.

الطريقة المتّبعة لتقدير الوسيط لهذا النوع من البيانات هو قراءة قيمتها من المنحنى التكراري التراكمي. فالوسيط يُقدّر على أنه القيمة التي تكرارها التراكمي يساوي نصف مجموع التكرار التراكمي.

نتيجة ٩

في منحنى التكرار التراكمي يكون موقع الوسيط (رتبته) = $\frac{ن}{٢}$، حيث ن = مجـ ت

افترض أن كتل ٣٠٠ قطعة فنّية في متحف ممثلة في المنحنى التكراري التراكمي الآتي:



عدد قيم مجموعة البيانات هو ن = ٣٠٠ قطعة فنية.

تقدير الوسيط هو كتلة القطعة الفنية التي رتبتها $\frac{ن}{٢} = \frac{٣٠٠}{٢} = ١٥٠$

نرسم مستقيمًا أفقيًّا من القيمة التراكمية ١٥٠ ليتقاطع مع المنحنى. ومن نقطة التقاطع نرسم عمودًا رأسيًّا على محور الكتلة.

نقرأ المنحنى ونجد أن الكتلة الوسيطية هي ٢,٦ كغم.

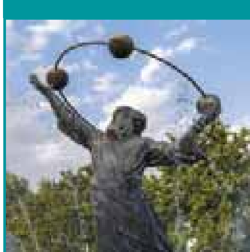
مُساعَدة

المنحنى تقديري لذا نستخدم رتبة $\frac{ن}{٢}$ وليس رتبة $\frac{ن + ١}{٢}$ لتقدير رتبة الوسيط. يؤكد صحة $\frac{ن}{٢}$ أننا نصل إلى الموقع نفسه للوسيط سواء حسبنا من الأسفل إلى الأعلى أو من الأعلى إلى الأسفل على محور التكرار التراكمي.

مُساعَدة

لا تخلط بين رتبة الوسيط (١٥٠) وقيمته (٢,٦ كغم).

هل تعلم؟



مفهوم تمثيل عدة مقاييس مختلفة بقيمة واحدة ممثلة هو اختراع حديث. فقبل القرن السابع عشر لا نجد مثالًا على استخدام الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال.

يُعدّ البيروني Al-Biruni الذي عاش في القرن الحادي عشر، أحد أقدم المستخدمين لطريقة إيجاد مقياس لتمثيل البيانات. فقد استخدم الأعداد في منتصف القيم الصغيرة والقيم الكبيرة (ما نسميه نصف المدى)، متجاهلًا جميع القيم الصغرى والعظمى.

وفي القرنَين ١٧ و ١٨ استخدم إسحق نيوتن Newton وعدد من المكتشفين نصف المدى لتقدير مواقعهم الجغرافية، وهو ما يشبه قياس الانحراف المغناطيسي.

مثـــال ١٤

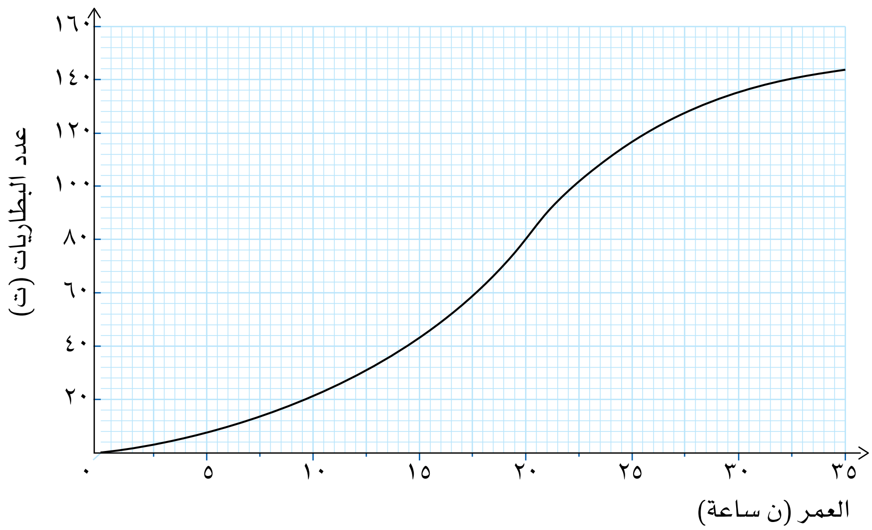
يبيّن المنحنى التكراري التراكمي الآتي عيّنة من أعمار ١٤٤ بطارية جافة:

أ قدّر وسيط عمر البطارية.

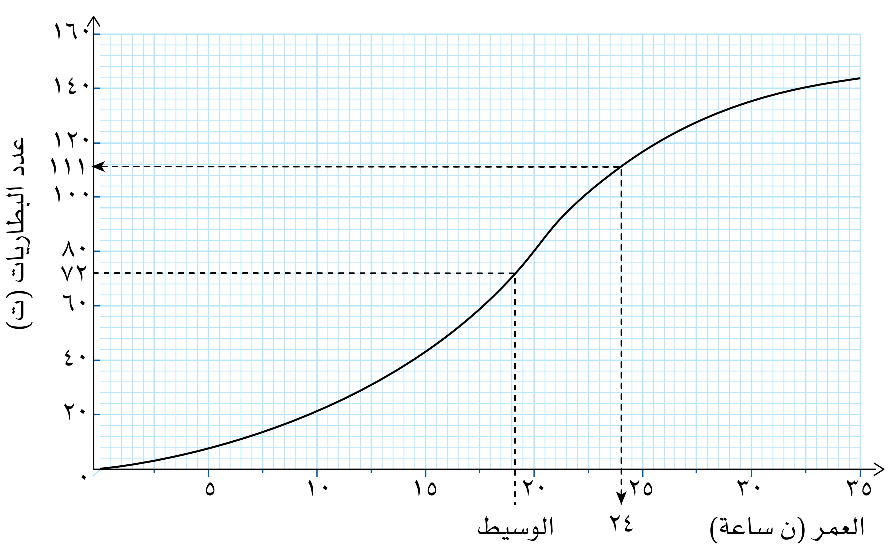
ب قدّر عدد البطاريات التي عمرها:

١) أقل من ٢٤ ساعة.

٢) أكثر من ٢٤ ساعة.



الحـــلّ:



بما أن كت = ١٤٤، سيكون الوسيط هو عمر البطارية التي رتبتها $\left(\frac{\text{كت}}{٢}\right)$ = ٧٢ وبرسم الخط الأفقي والرأسي، وبالتقريب يساوي ١٩,٢ ساعة.

الخط المنقّط الثاني يسمح بأن نقدّر عدد البطاريات التي عمرها أقل من ٢٤ ساعة وهذا ما يساوي ١١١ بطارية تقريبًا.

أ الوسيط يساوي ١٩,٢ ساعة تقريبًا.

ب ١) أقل من ٢٤ ساعة، وهي ١١١ بطارية تقريبًا.

٢) أكثر من ٢٤ ساعة هي ١٤٤ − ١١١ = ٣٣ بطارية.

استكشف ٣

أنتجت شركة خدمة الطعام لأحد المطاعم ٤٨٠ قرص بيتزا الأسبوع الماضي. يبيّن الجدول التكراري الآتي البيانات عن قطر قرص البيتزا مقرّبًا إلى أقرب سنتيمتر:

القطر (إلى أقرب سم)	عدد أقراص البيتزا (ت)
١٠ – ١٩	٣٦
٢٠ – ٢٩	٧٨
٣٠ – ٤٩	١٠٢
٥٠ – ٧٩	٢١٦
٨٠ – ٩٩	٤٨
	مجـ ت = ٤٨٠

القطر (ق سم)	عدد أقراص البيتزا (التكرار التراكمي)
ق < ٩,٥	٠
ق < ١٩,٥	٣٦
ق < ٢٩,٥	١١٤
ق < ٤٩,٥	٢١٦
ق < ٧٩,٥	٤٣٢
ق < ٩٩,٥	٤٨٠

قبل أن تحاول رسم الجدول التكراري التراكمي، يجب الأخذ بالحسبان فجوات الـ ١ سم بين الفئات عبر إيجاد الحدود الفعلية لتلك الفئات، كما هو مبيّن في الجدول التكراري التراكمي الثاني أعلاه.

في المنحنى التكراري التراكمي، يجب تعيين النقاط الآتية (٩,٥، ٠)، (١٩,٥، ٣٦)، ...، (٩٩,٥، ٤٨٠).

افترض أن النقاط قد حددت مواقعها بطريقة خاطئة على النحو (٩، ٠)، (١٩، ٣٦)، ... ، (٩٩، ٤٨٠).

١) كيف يؤثر هذا الخطأ على شكل المنحنى؟

٢) كيف يؤثر هذا الخطأ على موقع المنحنى؟

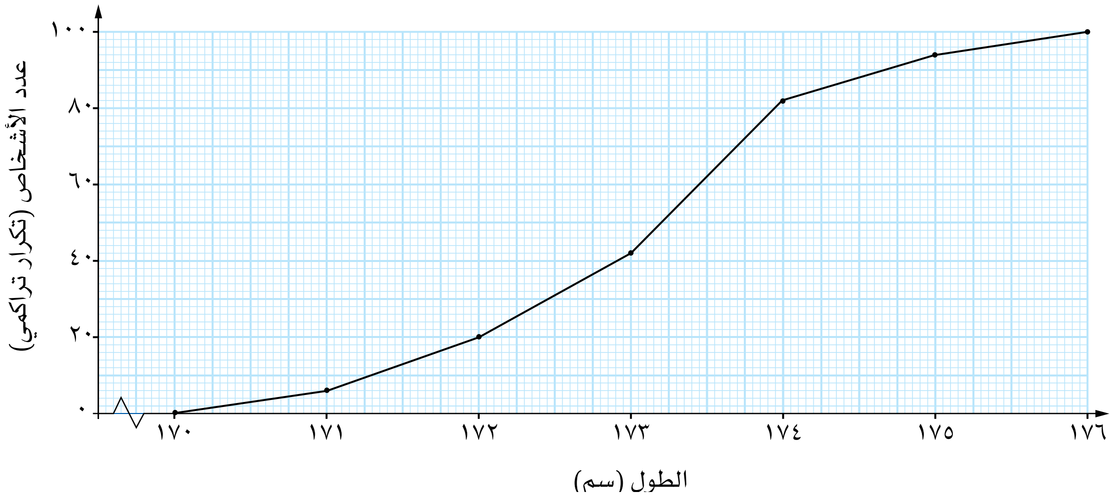
٣) قارن بين القراءتَين التي ستحصل عليهما لوسيط قطر قرص البيتزا.

مُساعَدة

في حال أُعطِيت البيانات التقريبية، يجب تعيين النقاط حسب الحدود العليا للفئات.

تمارين ٤-٢ب

١) يبيّن المنحنى التكراري التراكمي الآتي أطوال ١٠٠ شخص مقرّبة إلى أقرب سنتيمتر:



استخدم المنحنى لتجد:

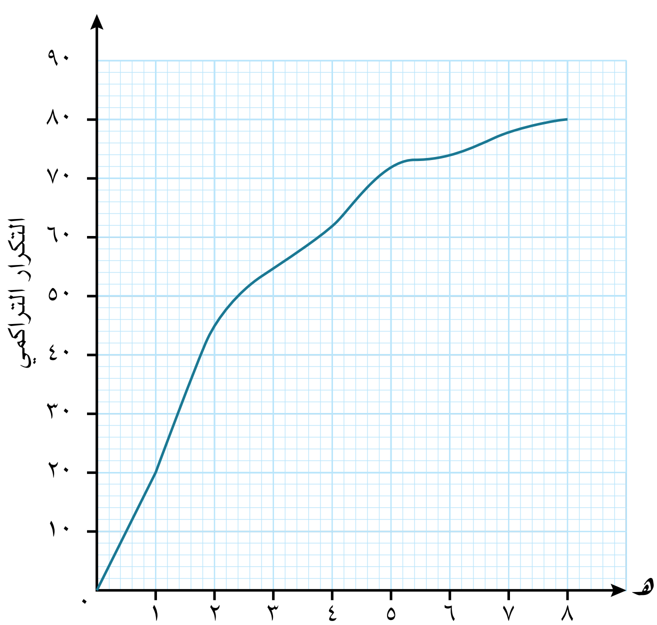
أ عدد الأشخاص الذين تقل أطوالهم عن ١٧٢ سم.

ب تقدير وسيط الأطوال.

ج عدد الأشخاص الذين أطوالهم ١٧٥ سم أو أكثر.

٢) يمثل البيان التكراري التراكمي والبيانات المدرجة في الجدول الآتي:

هـ	التكرار التراكمي
هـ < ٠	٠
هـ < ١	٢٠
هـ < ٢	٤٥
هـ < ٣	٥٥
هـ < ٤	٦٢
هـ < ٥	٧٢
هـ < ٦	٧٤
هـ < ٧	٧٨
هـ < ٨	٨٠

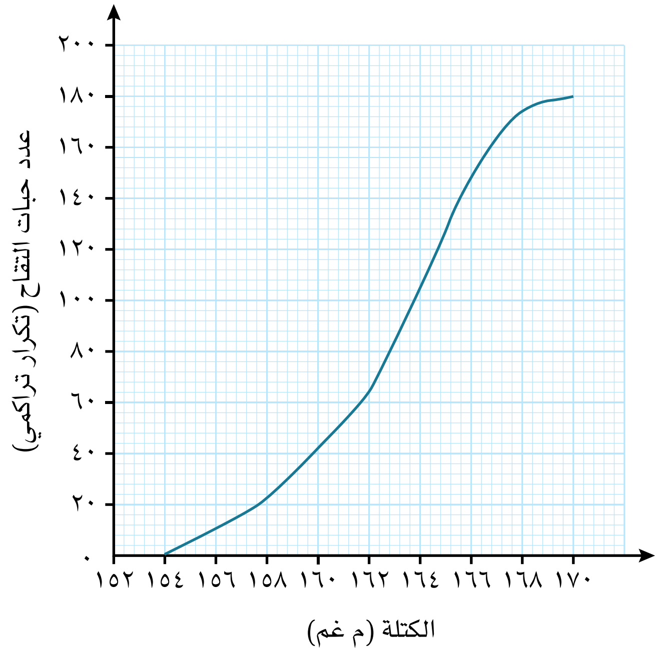


قدّر عدد قيم هـ التي:

أ تقل عن ٤٫٥ **ب** ٢٫٥ أو أكثر.

٣) يبيّن الجدول والمنحنى التكراري التراكمي الآتيان كتل ١٨٠ حبة تفاح (م غم):

الكتلة (م غم)	م < ١٥٤	م < ١٥٦	م < ١٥٨	م < ١٦٠	م < ١٦٢	م < ١٦٤	م < ١٦٦	م < ١٦٨	م < ١٧٠
عدد حبات التفاح (التكرار التراكمي)	٠	١٠	٢٢	٤٢	٦٤	١٠٤	١٤٨	١٧٤	١٨٠



أ استخدم الشكل الناتج لتقدر وسيط كتل التفاح مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

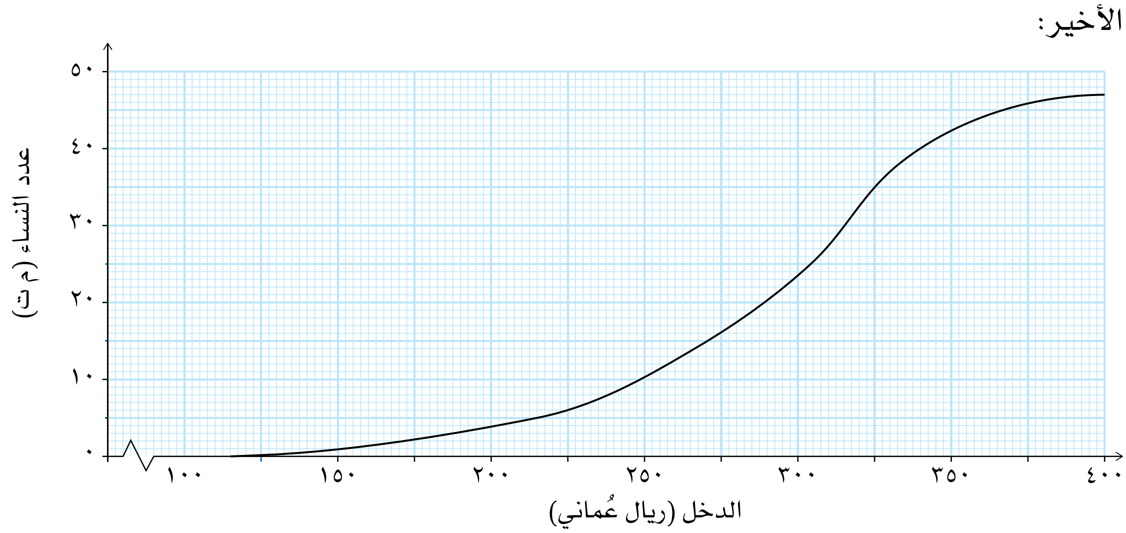
ب قدّر عدد حبّات التفاح الذي:

١) تقل كتلته عن ١٦٣ غم.

٢) كتلته ١٦٧ غم أو أكثر.

٣) تقع كتلته في الفئة ١٥٩ غم < م < ١٦١غم.

٤) يبين المنحنى التكراري التراكمي الآتي دخل جميع النساء اللاتي يعملن في شركة تأمين كبيرة في الشهر الأخير:



أ أوجد:

١) عدد النساء اللاتي يعملن في الشركة.

٢) أقل دخل يمكن أن تحصل إحداهن عليه.

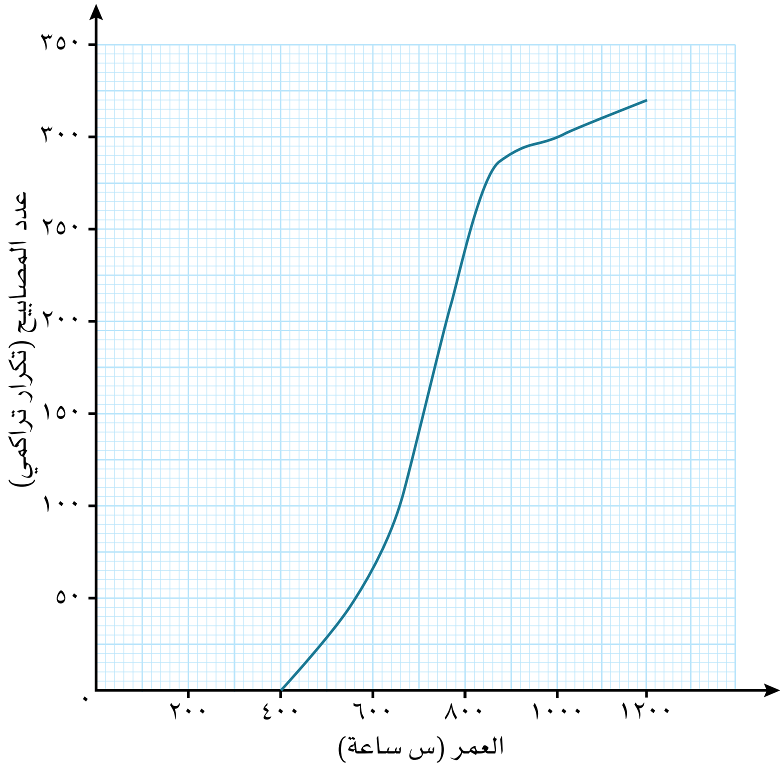
ب قدّر من المنحنى:

١) وسيط الدخل الذي حصلت عليه النساء.

٢) عدد النساء اللاتي حصلن على أقل من ٢٠٠ ريال عُماني.

٣) عدد النساء اللاتي حصلن على ٢٥٠ ريالًا عُمانيًّا أو أكثر.

٥) يبيّن الجدول المجاور والمنحنى التكراري التراكمي أعمار عيّنة من ٣٢٠ مصباح إنارة:



العمر (س ساعة)	عددالمصابيح (تكرار تراكمي)
س < ٤٠٠	٠
س < ٥٠٠	٢٨
س < ٦٥٠	٩٢
س < ٨٥٠	٢٧٦
س < ١٠٠٠	٣٠٠
س < ١٢٠٠	٣٢٠

استخدم المنحنى لتقدّر:

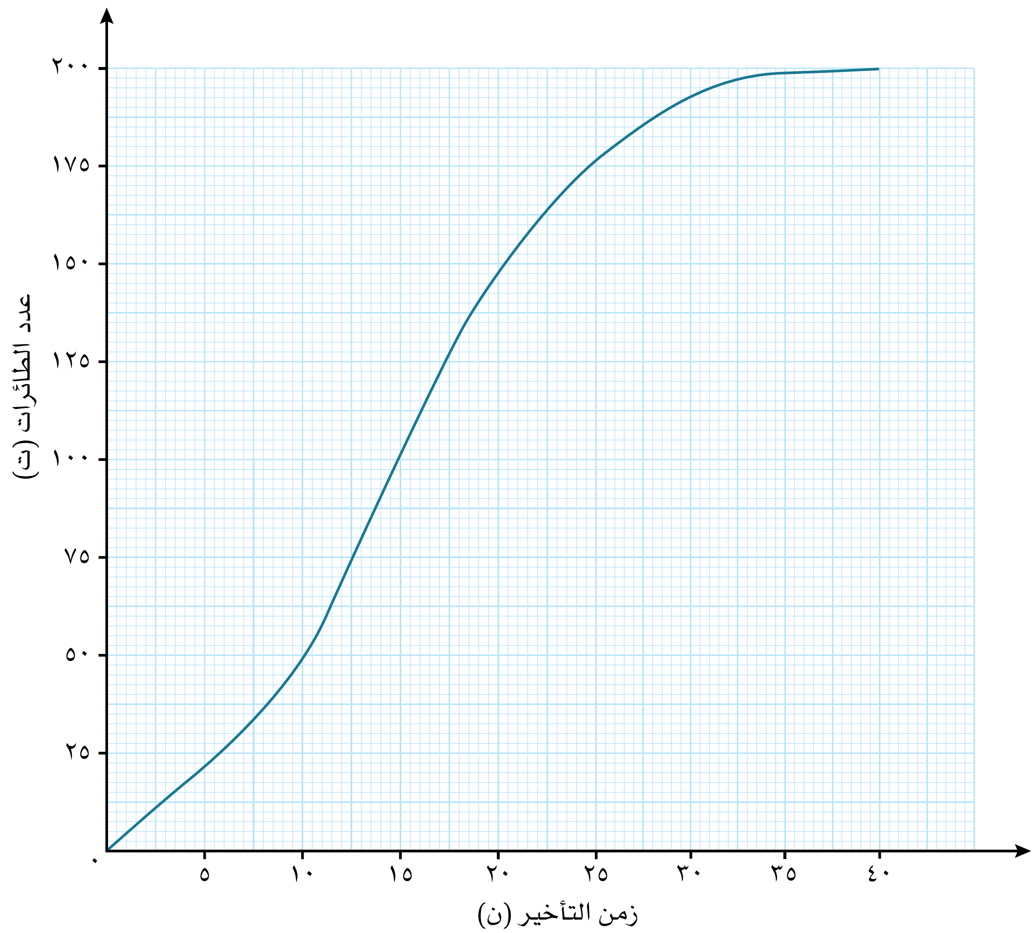
أ وسيط العمر لمصابيح الإنارة.

ب عدد المصابيح التي عمرها أقل من ٦٠٠ ساعة.

ج عدد المصابيح التي عمرها ٩٥٠ ساعة أو أكثر.

٦) استقصى مجموعة من الطلبة زمن مغادرة ٢٠٠ طائرة تجارية. سجلوا عدد الدقائق التي تأخرتها كل طائرة، وظهرت نتائجهم كما في الجدول المجاور والمنحنى التكراري التراكمي:

زمن التأخير (ن دقيقة)	عدد الطائرات (ت)
٠ ≥ ن > ١٠	٤٨
١٠ ≥ ن > ٢٠	٩٨
٢٠ ≥ ن > ٣٠	٤٦
٣٠ ≥ ن > ٤٠	٨
	Σت = ٢٠٠

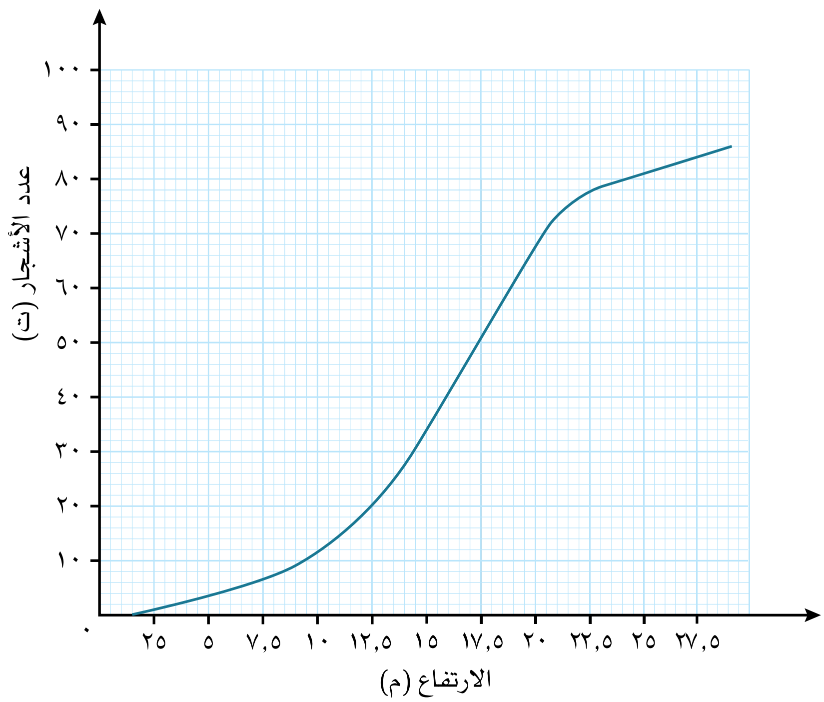


استخدم المنحنى لتقدّر:

- **أ** وسيط زمن التأخير.
- **ب** عدد الطائرات التي تأخرت أقل من ٨ دقائق.
- **ج** عدد الطائرات التي تأخرت ٢٥ دقيقة أو أكثر.
- **د** النسبة المئوية للطائرات التي تأخرت ١٧ دقيقة على الأقل.
- **هـ** عدد الطائرات التي تأخرت مدة ١٥ ≥ ن > ٢٥ دقيقة.

٧ يبيّن الجدول والمنحنى التكراري التراكمي الآتي ارتفاع ٨٧ شجرة في متنزّه عام:

الارتفاع (م)	٢ – ٥	٦ – ٩	١٠ – ١٣	١٤ – ١٧	١٨ – ٢١	٢٢ – ٢٥	٢٦ – ٢٩
عدد الأشجار (ت)	٤	٦	١٤	٢٦	٢٥	٧	٥



أ اكتب الحدّ الأدنى الفعلي والحدّ الأعلى الفعلي للفئة التي تتضمّن ٤ شجرات.

ب استخدم المنحنى لتجد تقديرًا لـ:

١) وسيط ارتفاع الأشجار.

٢) عدد الأشجار التي يقل ارتفاعها عن ١٥٫٥ م

٣) عدد الأشجار التي ارتفاعها ٢٤٫٣ م على الأقل.

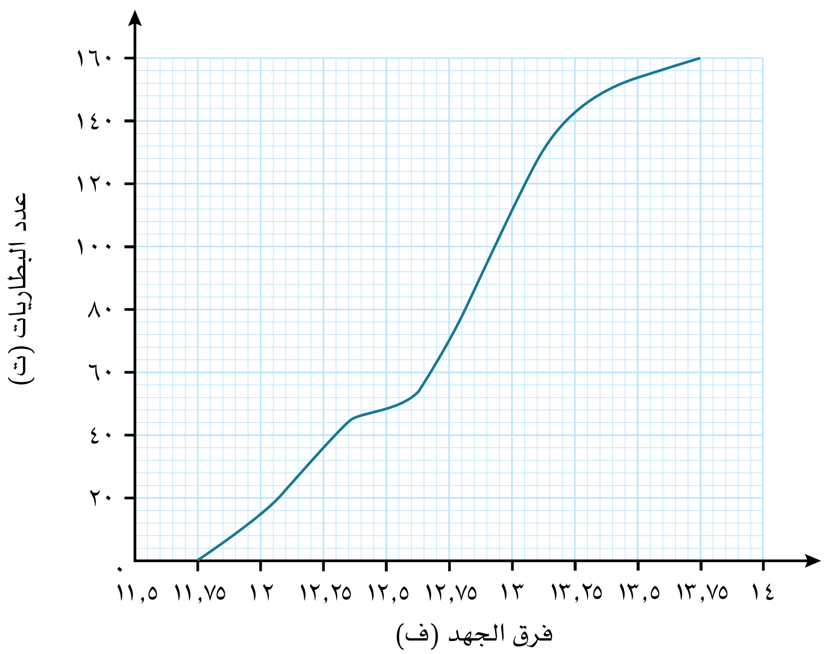
ج إذا وجِد ٣٠ شجرة ارتفاعها أقل من س مترًا، فقدّر قيمة س

د إذا كان ارتفاع ثُلث الأشجار ص سنتيمترًا على الأقل، فقدّر قيمة س

٨) يبلغ فرق الجهد لبطاريات السيارات العادية ١٢ فولتًا. اختبر مصنع عيّنة من ١٦٠ بطارية وجاءت نتائجها كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

فرق الجهد (ف)	١١,٨ – ١٢,٠	١٢,١ – ١٢,٣	١٢,٤ – ١٢,٦	١٢,٧ – ١٣,١	١٣,٢ – ١٣,٤	١٣,٥ – ١٣,٧
عدد البطاريات (ت)	١٨	٢٦	١٢	٧٨	١٨	٨

أ يمثل المنحنى التكراري التراكمي هذه البيانات.



ب استخدم المنحنى لتقدّر:

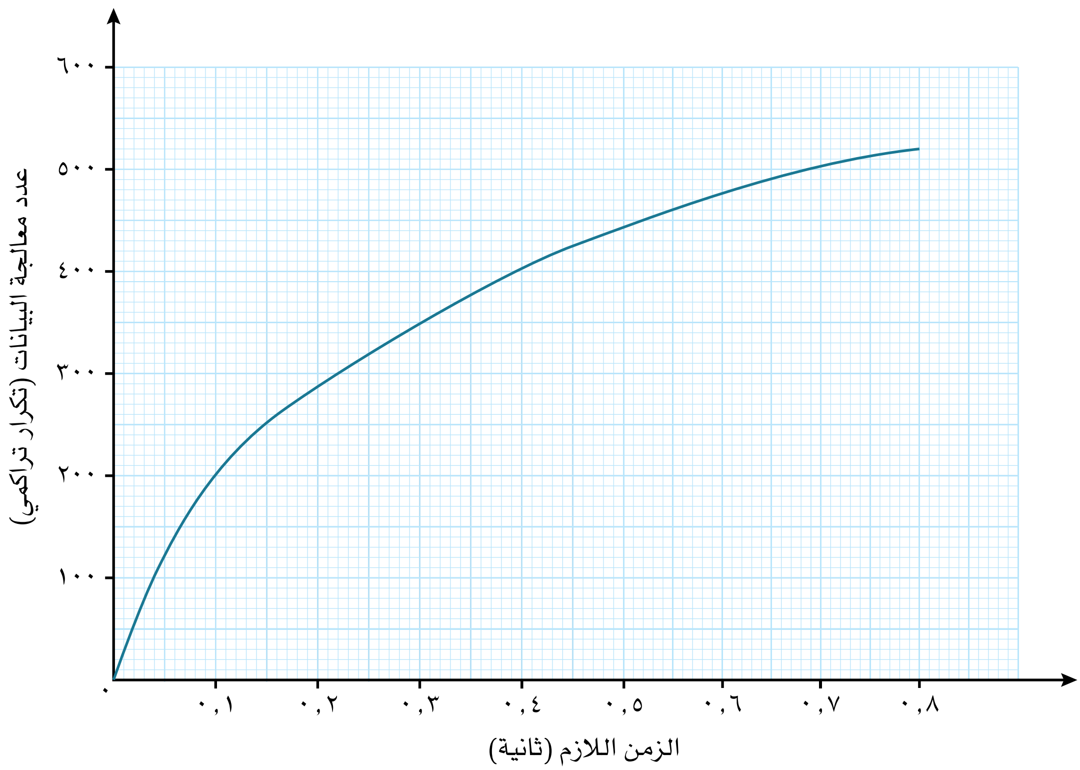
١) وسيط فرق الجهد.

٢) عدد البطاريات التي فرق جهدها أقل من ١٢,٤ فولتًا.

٣) عدد البطاريات التي فرق جهدها ١٣ فولتًا أو أكثر.

٩) تمّ اختبار ٥٢٠ حاسوبًا في معالجة البيانات لمعرفة الزمن الذي تستغرقه لمسح ١٠٠ ميجابايت من المعلومات. يبيّن الجدول الآتي النتائج:

الزمن اللازم (ن ثانية)	ن < ٠	ن < ٠,٠٥	ن < ٠.١٥	ن < ٠.٤٠	ن < ٠.٦٥	ن < ٠.٨٠
عدد معالجات البيانات (تكرار تراكمي)	٠	١٢٠	٢٥٠	٤٠٠	٤٩٠	٥٢٠



أ استخدم المنحنى لتقدّر عدد المعالجات التي تحقّق المتباينات الآتية:

١) ن < ٠,٣٠　　　٢) ن ≥ ٠,٦٠　　　٣) ٠,٣٢٠ ≤ ن < ٠,٥٢٥

ب فشلت ٥٪ من هذه المعالجات في الاختبار.

قدّر الزمن الذي لا يفشل فيه معالج بيانات.

٤-٣ خصائص مقاييس النزعة المركزية

في أغلب المواقف يدور نقاش كبير حول اختيار المقياس الإحصائي الأكثر مناسبة لعرض القيم في مجموعة بيانات، حيث يمكن من اختيار مقياس إحصائي معيّن أن يظهر البيانات بشكل جيد، كذلك من الممكن لمقياس إحصائي آخر أن يعرض البيانات بشكل سيئ، وعليه لابد من الأخذ في الاعتبار الهدف من التعبير عن البيانات الإحصائية.

افترض أن درجات طالب في ١٠ اختبارات (من ٢٠) هي: ٣، ٤، ٦، ٧، ٨، ١١، ١٢، ١٣، ١٧، ١٧ المقاييس الثلاثة لهذه المجموعة من هذه البيانات هي: المنوال = ١٧، الوسط الحسابي = ٩,٨، الوسيط = ٩,٥

إذا رغب الطالب أن يبهر أصدقاءه أو والديه بدرجاته، فغالبًا ما يستخدم المنوال لأنه أعلى مقياس بين المقاييس الثلاثة، حيث إن استخدام الوسط الحسابي أو الوسيط كمقياس للدرجات يشير إلى إن الطالب قد حصل على درجة تقل عن منتصف درجات الاختبارات.

إليك بعض خصائص مقاييس النزعة المركزية مبيّنة في الجدول الآتي:

	الإيجابيات	السلبيات
المنوال	لا يتأثر بالقيم المتطرفة **Biased values**. مفيد لأصحاب المصانع الذين يرغبون في النوع الأكثر تفضيلًا وقياسًا. يمكن استخدامه لجميع البيانات النوعية.	يتجاهل معظم القيم. نادرًا ما يستخدم في حسابات إضافية.
الوسط الحسابي	يأخذ جميع القيم بالحسبان، ويستخدم في حسابات إضافية. أكثر المقاييس الإحصائية استخدامًا. يمكن استخدامه لمعرفة مجموع قيم البيانات في حالة معرفة عدد القيم.	لا يمكن إيجاده ما لم تعرف القيم جميعها. يتأثر بالقيم المتطرفة.
الوسيط	يمكن معرفته من دون معرفة جميع القيم، ولا يتأثر بالقيم المتطرفة.	يأخذ بالحسبان ترتيب القيم فقط، لذا يتجاهل معظم القيم.

كمثال على تأثير القيمة المتطرفة. لتكن لديك مجموعة البيانات ٤٠، ٤٠، ٧٠، ١٠٠، ١٣٠، ٢٥٠

إذا زدنا القيمة الأكبر من ٢٥٠ إلى ٨٨٠، فلا يتأثر كل من المنوال والوسيط (وهما ٤٠، ٨٥)، لكن الوسط الحسابي يزيد بنسبة ١٠٠٪ من ١٠٥ إلى ٢١٠

مثــال ١٥

يعمل في مصنع ٣٠ موظفًا عاديًا ومدير عالي الدخل.

أيّ من مقاييس النزعة المركزية الثلاثة تعطي في الغالب قيمة لا تظهر أن الموظفين العاديين يتقاضون دخلاً أقل بكثير من دخل المدير. اشرح إجابتك؟

الحــلّ:

يعتبر دخل المدير قيمة متطرفة، وبما أن الوسط الحسابي أكثر المقاييس الإحصائية تأثرًا بالقيم المتطرفة، فإن قيمة 'الوسط' الحسابي في هذه الحالة ستكون أكبر من قيم دخل الموظفين، لكنها أيضًا ستكون أقل من دخل المدير، كما أن قيم كلّ من المنوال والوسيط ليسا من ضمن قيم دخل المدير، وبذلك يمكن اعتبار الوسط الحسابي المقياس الإحصائي الأفضل في هذه الحالة.

مثــال ١٦

سجل طبيب الألوان المفضلة لـ ٢٥ من زملائه. أيّ مقياس (مقاييس) للنزعة المركزية يستطيع أن يجد لبياناته؟

الحــلّ:

تتألف بيانات طبيب من قائمة من الكلمات، وليس قائمة أرقام.

يستطيع فقط إيجاد اللون الذي يتكرر أكثر من غيره، وهذا هو المنوال.

تمارين ٤-٣

١) إذا سُئلت أن تجد معدل أطوال الطلبة في صفك، فأيّ مقياس من مقاييس النزعة المركزية يمكنك أن تجد بإيجاد طولَي طالبَين على الأكثر؟

٢) قاست فاطمة بدقّة كتلة طفلَين حديثَي الولادة، ووجدت أن وسطهما الحسابي يساوي ٣,٨٧٣١٥ كغم. اشرح سبب اعتبار ذلك تقديرًا.

٣) يبيّن مخطّط الساق والورقة المجاور عدد الأشخاص الذين يعالجهم طبيب الأسنان يوميًا خلال ٢٠ يومًا:

٠	٤ ٤ ٤ ٥ ٦ ٦ ٦ ٧
١	٤ ٥ ٥ ٦ ٦ ٧ ٧ ٨ ٨ ٩
٢	٠ ١

المفتاح: ١ | ٥ تمثّل ١٥ مريضًا

أ) أوجِد وسيط عدد المرضى.

ب) في ثمانية أيام من هذه المدة (٢٠ يومًا)، وصل طبيب الأسنان متأخرًا لأنه كان يصطحب أطفاله من المدرسة. إذا قرروا استخدام معدل عدد المرضى سببًا للوصول متأخرًا، فهل يستخدمون الوسط الحسابي أم الوسيط؟ اشرح إجابتك.

ج) اشرح موقفًا يكون من المفيد لطبيب الأسنان أن يستخدم المنوال مقياسًا للمعدل.

٤) تمّ بيع مجموعة من المنازل في الجوار بمبلغ ٢٢٠٠٠٠، ٢٤٢٠٠٠، ٢٣٦٠٠٠، ٣٥٠٠٠٠ ريال عماني. يرغب مشترٍ أن يعرف معدل الأسعار في المنطقة. أيّ مقياس يساعده أكثر: الوسط الحسابي؟ أم الوسيط؟ أم المنوال؟ وضّح إجابتك.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- مقاييس النزعة المركزية هي الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال.
- للبيانات غير المجمّعة يُعدّ المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا.
- للبيانات المجمعة، الفئة المنوالية هي الفئة الأكثر كثافة تكرارية، وتمثل العمود الأعلى في المدرّج التكراري.
- للبيانات غير المجمّعة، $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$
- للبيانات المجمّعة، $\overline{س} = \frac{\sum س\ ت}{\sum ت}$ أو $\frac{\sum ت\ س}{\sum ت}$
- للبيانات غير المجمّعة، الوسيط عند القيمة التي رتّبتها $\left(\frac{ن + ١}{٢}\right)$.
- للبيانات المجمّعة، الوسيط التقديري يقع عند القيمة التي رتّبتها $\frac{ن}{٢}$ على المنحنى التكراري التراكمي.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الرابعة

١) في كل مجموعة من مجموعات البيانات الآتية، قرر ما إذا كان الوسط الحسابي أصغر، أو يساوي، أو أكبر من الوسيط والمنوال:

- **أ** أعمار المرضى الذين يتابعون علاجًا دائمًا في المستشفى.
- **ب** عدد الأهداف التي سجلها فريق كرة القدم.
- **ج** أطوال البالغين القاطنين في إحدى المدن.

٢) الوسط الحسابي لكتلة ١٣ كتابًا يساوي ٨٧٥ غم، والوسط الحسابي لكتلة (ن) رواية يساوي ١٣٧٠٦ غم. أوجِد الوسط الحسابي لكتلة الرواية الواحدة علمًا أن الوسط الحسابي للكتب والروايات معًا يساوي ٧١٦,٦ غم.

٣) إذا علمت أن القيم التسعة الآتية هي: ٧، ١٣، ٢٨، ٣٦، ١٣، ٢٩، ٣١، ١٣، (س):

- **أ** اكتب اسم مقياس النزعة المركزية وقيمته التي يمكن إيجادها من دون إيجاد قيمة س
- **ب** إذا علمت أن س أكبر من ٤٠ فأيّ مقياس آخر للنزعة المركزية يمكن إيجاده؟ وما قيمته؟
- **ج** إذا كانت قيمة مقياس النزعة المركزية المتبقي ٢٥، فأوجِد قيمة س

٤) يبيّن الجدول الآتي أطوال مجموعة من الأشخاص مقرّبة إلى أقرب ٥ سم:

الأطوال (سم)	١٢٠ – ١٣٥	١٤٠ – ١٥٠	١٥٥ – ١٦٠	١٦٥ – ١٧٠	١٧٥ – ١٨٥
عدد الأشخاص	٣٠	ل	١٢	١٦	٢١

أوجِد أقل قيمة للعدد ل إذا علمت أن الفئة المنوالية تساوي ١٤٠

٥) أرادت شركة خدمة الإنترنت معرفة رأي الزبائن بخدمتها، فوزّعت عليهم استمارة تسألهم أن يضع كل منهم علامة في واحد من المربّعات الآتية:

ممتاز ☐ جيد ☐ وسط ☐ ضعيف ☐ ضعيف جدًا ☐

- **أ** كيف يمكن للشركة أن تستفيد من معرفة إجابات الزبائن على كل مقياس؟
- **ب** ما الاستفادة الإضافية التي يمكن للشركة أن تحصل عليها باستخدم العلامة في المجموعة الآتية من المربّعات؟

ممتاز = ٥ ☐ جيد = ٤ ☐ وسط = ٣ ☐ ضعيف = ٢ ☐ ضعيف جدًا = ١ ☐

٦) تمّ توصيل ١٥٠ صندوقًا في كل منها ٢٠ قطعة إلى أحد المتاجر. يبيّن الجدول الآتي عدد القطع التالفة في كل صندوق:

عدد القطع التالفة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦ أو أكثر
عدد الصناديق (ت)	١٠٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	٠

أ أوجِد المنوال والوسط الحسابي والوسيط لعدد القطع التالفة.

ب أيّ من مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب للشركة لاستخدامه في هذه الحالة؟ برّر السبب في احتمال أن يكون المقياسان الآخران مضللَين.

الوحدة الخامسة
مقاييس التشتّت Measures of dispersion

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٥-١ تحسب مقاييس التشتّت: المدى في البيانات الأولية غير المجمّعة وكذلك البيانات الممثلة في جداول التكرار ومخططات الساق والورقة.

٥-٢ تحسب تقديرات مقاييس التشتّت: مدى البيانات المجمّعة الممثلة في الجداول التكرارية ذات الفئات.

٥-٣ تحسب مقاييس التشتّت: المدى الرُبيعي في البيانات غير المجمّعة. وكذلك البيانات الممثلة في جداول التكرار ومخططات الساق والورقة ومخططات الصندوق والمؤشر.

٥-٤ تحسب مقاييس التشتّت: التباين والانحراف المعياري لبيانات غير مجمّعة وكذلك البيانات الممثلة في الجداول التكرارية.

٥-٥ تحسب تقديرات مقاييس التشتّت: التباين والانحراف المعياري لبيانات مجمّعة ممثلة في الجداول التكرارية ذات الفئات.

٥-٦ تحسب وتفسر مقاييس التشتت في سياقات من الحياة الواقعية.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الثالثة	تعالج الصيغ الجبرية التي تتضمن مربعات وجذورًا تربيعية وتعوّض فيها.	١) إذا كانت ص = $\sqrt{\frac{س^٢}{أ} - \left(\frac{ب}{أ}\right)^٢}$ فأوجِد القيمة الموجبة لكل من: أ ص عندما س = ١٣، أ = ٤، ب = $\sqrt{٣٥٢}$ ب س عندما ص = ١٢، أ = ٥، ب = ١١
الصف العاشر الوحدة الخامسة	تحسب الوسط الحسابي والوسيط والمدى والمنوال لبيانات أولية.	٢) ما مدى مجموعة البيانات؟ ٩ ، ٢ ، ٤ ، ٠ ، ٣ ، ١٥ ، ١١ ، ٨
الصف العاشر الوحدة الخامسة	تفسر المخطط الصندوقي ومخطط الساق والورقة	٣) ما الرسم التخطيطي الإحصائي المستخدم لإظهار خمسة مقاييس لمجموعة من البيانات. ٤) ما الرسم التخطيطي الإحصائي الذي يتضمن بيانات مجمعة، بحيث تبقى قيم البيانات الأولية ظاهرة.

المفردات

البيانات غير المجمعة ungrouped

المدى range

البيانات المجمعة grouped

المدى الرُبيعي interquartile range

الربيع الأعلى upper quartile

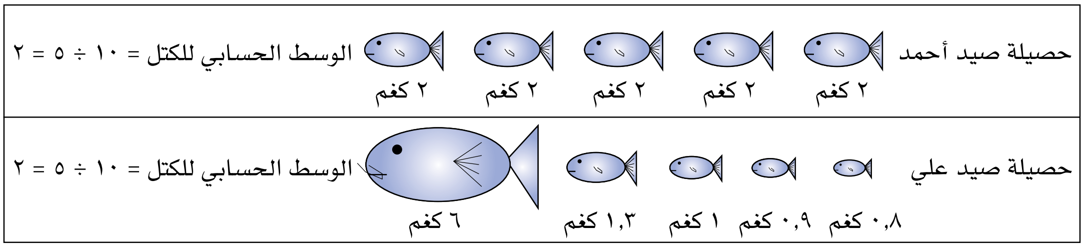
الربيع الأدنى Lower quartile

لماذا ندرس مقاييس التشتت؟

مقاييس النزعة المركزية وحدها لا تصف أو تلخص مجموعة البيانات بصورة كاملة ودقيقة، هي فقط تسلط الضوء على القيم المركزية الأكثر شيوعًا من دون التطرق إلى انتشار هذه القيم، فقد يكون لمجموعتي بيانات ما الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال نفسه، لكنهما مختلفتان اختلافًا جذريًا.

فمثلًا، إذا ذهب أحمد وعلي للصيد يوم الجمعة، واصطاد كلّ منهما خمس سمكات، وكان الوسط الحسابي لكتلها ٢ كغم.

فمن هذه المعلومات، قد نظنّ أن الاثنين عادا إلى المنزل وقد اصطادا كميّتَين متماثلتَين لأن الكتلة الكلية وعدد الأسماك التي تم صيدها هي نفسها، بينما الأمر مختلف تمامًا كما يبيّن الشكل الآتي:



على الرغم من أن الوسط الحسابي لما اصطاده كل من أحمد وعلي هو نفسه، وكذلك مجموع كتلة ما اصطاد كل منهما هو ١٠ كغم، إلّا أننا نرى تشتتًا كبيرًا في ما اصطاده علي.

ولمعرفة مدى اتساق ما اصطاده كل منهما، نحن بحاجة إلى مقاييس **التشتت Dispersion** بجانب معرفة مقياس النزعة المركزية.

من مقاييس التشتت المستخدمة لوصف انتشار القيم في مجموعة بيانات هي: المدى، المدى الربيعي، الانحراف المعياري.

٥-١ المدى للبيانات المجمعة وغير المجمعة

في البيانات **غير المجمعة ungrouped**، يكون **المدى range** أبسط مقياس للتشتت، حيث يسهل حسابه، ويساوي الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في التوزيع الإحصائي.

أما بالنسبة للبيانات **المجمعة grouped** فلا يمكننا حساب القيمة الدقيقة للمدى، ولكن يمكننا تقديرها من خلال إيجاد القيمتين اللتين يقع بينهما. تُعرف هاتان القيمتان بـ **الحد الأدنى lower boundary** و**الحد الأعلى upper boundary** للمدى.

يُعدّ المدى أبسط مقاييس التشتت حيث يتميز بسهولة حسابه، ويستخدم في مواقف كثيرة من الحياة اليومية.

مُساعَدة

كلما كانت قيمة المدى أقل كانت القيم أكثر اتساقًا.

مثـــال ١

إذا كان عدد طلبة ستة فصول في مدرسة ما هو: ٢٢ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٢٨ ، ٢٦ ، ٢٣

فأوجِد مدى عدد الطلبة في فصول هذه المدرسة.

الحــلّ:

٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٦، ٢٨ .... ترتيب قائمة البيانات يسهل تحديد أصغر قيمة وأكبر قيمة.

مدى عدد الطلبة يساوي ٢٨ − ٢١ = ٧ .... المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة

مثــال ٢

في إحدى شركات النقل، يعمل ١٢ شخصًا يتقاضى كل منهم ٣,٢٥٠ ريالًا عُمانيًّا في الساعة، وخمسة أشخاص آخرون يتقاضى كل منهم ٥,٥٠٠ ريالًا عُمانيًّا في الساعة، وشخصان يتقاضى كل منهما ٩,٢٥٠ ريالًا عُمانيًّا في الساعة.

أ ما مدى الدخل في الساعة؟

ب مدى الدخل في شركة أخرى هو ٥ ريالات عُمانية في الساعة، علمًا بأنها تعطي للوظائف العليا الراتب نفسه الذي تعطيه الشركة الأولى لموظفيها، أيّ الشركتَين أكثر اتساقًا في طريقة الدفع؟

الحــلّ:

أ مدى الدخل في الساعة هو ٩,٢٥٠ − ٣,٢٥٠ = ٦ ريالات عُمانيّة.

ب مدى الدخل في الساعة للعاملين في الشركة الثانية أقل؛ وعليه، فإن انتشار الدخل في الساعة يكون أصغر من الشركة الأولى، الأمر الذي يعني أنها أكثر اتساقًا في طريقة الدفع.

مثــال ٣

يبين مخطط الساق والورقة الآتي عدد المركبات التي عبرت جسرًا في الأسبوعين الماضيين (أربعة عشر يومًا).

٢	٤	٧	٩			
٣	١	١	٣	٦	٨	٩
٤	٣	٦	٨			
٥	٥	٧				

المفتاح: ١ | ٣
يمثّل ٣١ مركبة

أوجد مدى عدد المركبات.

الحــلّ:

المدى = ٥٧ − ٢٤ = ٣٣ مركبة

المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة

مثــال ٤

يبين الجدول الآتي التوزيع التكراري للمتغير ل. أوجد المدى للمتغير ل.

ل	١٧	٢٤	٣١	٣٨	٤٥	٥٢	٥٩
التكرار	١	٤	٧	١١	١٣	٨	٦

المدى = ٥٩ − ١٧ = ٤٢

أكبر قيمة للمتغير ل هي ٥٩
أصغر قيمة للمتغير ل هي ١٧

مثــال ٥

يبين جدول التكرار الآتي أطوال ٢٠ نبتة من نبات دوّار الشمس.

طول النبتة (ل) سم	عدد نبتات دوّار الشمس
٤٠ ≤ ل < ٨٠	١
٨٠ ≤ ل < ١٠٠	٤
١٠٠ ≤ ل < ١١٥	٥
١١٥ ≤ ل < ١٢٥	٥
١٢٥ ≤ ل < ١٥٠	٤

أ أوجد

١) الحد الأدنى لمدى أطوال نبتات دوّار الشمس،

٢) الحد الأعلى لمدى أطوال نبتات دوّار الشمس.

ب لخّص ما تعرفه عن مدى أطوال نبتات دوّار الشمس.

الحــلّ:

أ ١) ١٢٥ − ٨٠ = ٤٥ سم

الحد الأدنى = الحد الأدنى للفئة الأخيرة − الحد الأعلى للفئة الأولى

٢) ١٥٠ − ٤٠ = ١١٠ سم

الحد الأعلى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة − الحد الأدنى للفئة الأولى

ب ٤٥ < المدى < ١١٠ سم

المدى يقع بين ٤٥ و ١١٠ سم

مثـــال ٦

طول أطول طالب وأقصر طالب في أحد الصفوف بعد تقريبهما إلى أقرب سنتيمتر، هما ١٦٩ سم، ١٥٠ سم على الترتيب. أوجِد أصغر مدى وأكبر مدى ممكنًا لأطوال الطلبة.

الحـــلّ:

أصغر مدى ممكن = ١٦٨,٥ − ١٥٠,٥
= ١٨ سم

أكبر مدى ممكن = ١٦٩,٥ − ١٤٩,٥
= ٢٠ سم

الفترات التي يقع فيها طولا الطالبَين هي ١٦٨,٥ ≤ أ < ١٦٩,٥سم، و ١٤٩,٥ ≤ أ < ١٥٠,٥ سم

مُساعَدة

الحد الأدنى للمدى = الحد الأدنى للفئة الأخيرة − الحد الأعلى للفئة الأولى

الحد الأعلى للمدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة − الحد الأدنى للفئة الأولى

مثـــال ٧

يبين الجدول التكراري الآتي أطوال ٣٠ قلم رصاص مقربة إلى أقرب سنتمتر:

طول الأقلام (ل الى أقرب سم)	٨	٩	١٠	١١
عدد الأقلام (ت)	٧	١٢	٦	٥

أ أوجد

١) الحد الأدنى لمدى الأطوال.

٢) الحد الأعلى لمدى الأطوال.

ب حدّد مدى الأطوال.

الحـــلّ:

تمثل كل فئة مدى من الأطوال لأنها مقربة الى أقرب سنتيمتر الفئات الفعلية هي ٧,٥ ≤ ل < ٨,٥ ؛ ٨,٥ ≤ ل < ٩,٥؛ ٩,٥ ≤ ل < ١٠,٥؛ ١٠,٥ ≤ ل < ١١,٥

أ ١) ١٠,٥ − ٨,٥ = ٢ سم

الحد الأدنى = الحد الأدنى للفئة الأخيرة − الحد الأعلى للفئة الأولى

٢) ١١,٥ − ٧,٥ = ٤ سم

الحد الأعلى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة − الحد الأدنى للفئة الأولى

ب ٢ < المدى < ٤ سم

يقع المدى بين ٢ و ٤ سم

تمارين ٥-١

١) أوجِد مدى كل مجموعة من مجموعات الأعداد الآتية:

أ ٤ ، ٧ ، ٧ ، ٩ ، ١٣ ، ٢١

ب ٢٣ ، ١٥ ، ٢٨ ، ٢٢ ، ١٣ ، ٢١

ج −٣ ، ٥ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٢٩ ، ٣٧

٢) تبيّن الجداول الآتية التوزيع التكراري لثلاثة متغيّرات س، ص، ع. اذكر مدى كل منها:

أ التوزيع التكراري للمتغيّر س

المتغيّر (س)	التكرار (ت)
١٠	٥
١١	٧
١٢	٩
١٣	٤

ب التوزيع التكراري للمتغيّر ص

المتغيّر (ص)	التكرار (ت)
٧	٠
٩	١٥
١١	٢٠
١٣	١٤

ج التوزيع التكراري للمتغيّر ع

المتغيّر (ع)	التكرار (ت)
٦٠	١٧
٦٥	٢٣
٧٠	٢٨
٧٥	٥٩
٨٠	٢١
٨٥	١٢

٣) يبيّن الجدول الآتي عدد الأخوة وعدد الأخوات لـ ٢٧ طفلًا:

		الأخوة					
		٠	١	٢	٣	٤	٥
الأخوات	٠	١	٢	١	٠	٠	٠
	١	٢	٢	٢	١	١	٠
	٢	١	٣	٤	٠	٠	١
	٣	٣	٠	٢	١	٠	٠

أوجِد مدى عدد:

أ الأخوة.

ب الأخوات.

ج الأخوة والأخوات.

٤) يبيّن الجدول الآتي الزمن الذي يستغرقه ٥٠ طالبًا بين دخول قاعة الطعام والخروج منها وقت الغداء، مقرّبًا إلى أقرب دقيقة:

الوقت المستغرق (دقيقة)	٢٠−٢١	٢٢−٢٤	٢٥−٣٠
عدد الطلبة (ت)	٦	٣٩	٥

أوجِد الحد الأدنى والحد الأعلى لمدى الزمن المستغرق.

مُساعَدة

الحد الأدنى للفئة ٢٢−٢٤ دقيقة هو ٢١,٥ والحد الأعلى هو ٢٤,٥

٥) **أ** تم قياس طول ٥٠ فتاة فكانت أطوال كل منهن بين ١٤٠سم و١٦٠ سم مقرّبة إلى أقرب ١٠ سم. أوجِد الحد الأعلى لمدى الأطوال.

ب سجّل محل لبيع العصافير كتل العصافير مقرّبة إلى أقرب غرام، فكانت بين ٢٢غم، ٣٠ غم. أوجِد الحد الأعلى لمدى كتل العصافير.

ج في هذا الموسم، اجتازت عداءة سباق ١٠٠ م في زمن (مقرب إلى أقرب منزلة عشرية) يقع بين ١٠,٤ و ١٠,٩ ثانية. أوجِد الحد الأدنى لمدى زمن السباق.

٦) الوسط الحسابي لأطوال فريق كرة السلة في مدرسة للتعليم ما بعد الأساسي هو ١٨٢ سم ومدى الطول هو ١٨ سم. والوسط الحسابي لأطوال فريق السباحة في المدرسة هو ١٧٥ سم ومدى الطول هو ٤٢ سم. قارن بين أطوال الفريقَين.

٧) تم رسم مخطط الساق والورقة لإظهار درجة الحرارة الدنيا (بالدرجات السيليزية) في موقع صحراوي ما لمدة ٢٠ يومًا متتاليًا. وكانت أعلى درجة حرارة مسجلة على مخطط الساق والورقة هي ١٢ درجة سيليزية ومدى درجات الحرارة ١٧ درجة سيليزية. ما أدنى درجة حرارة مسجلة على مخطط الساق والورقة؟

٥-٢ المدى الربيعي

إذا احتوى التوزيع على قيمة واحدة متطرفة فإن المدى لن يكون مقياسًا ممثّل للانتشار، ويمكن أن يقود إلى تضليل النتائج .

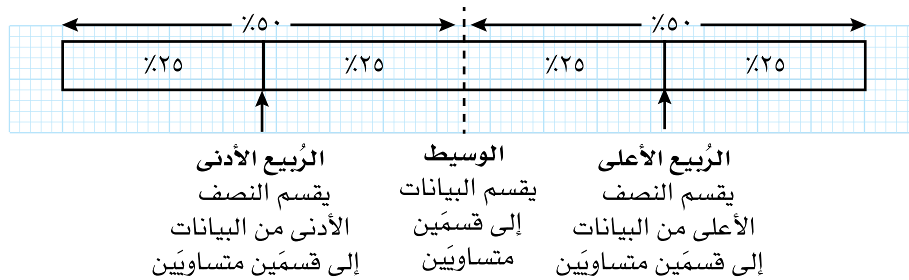
فمثلًا، مجموعة القيم ٤، ٦، ٧، ٧، ٨، ٨، ٩، ١٠، المدى هو ١٠ − ٤ = ٦

فإذا تم استبدال القيمة ١٠ بالقيمة ١٠٠، فإن المدى سيكون ١٠٠ − ٤ = ٩٦، وهذا لا يعطي صورة دقيقة عن مدى انتشار غالبية القيم. الأمر الذي يعني أننا بحاجة إلى مقياس لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

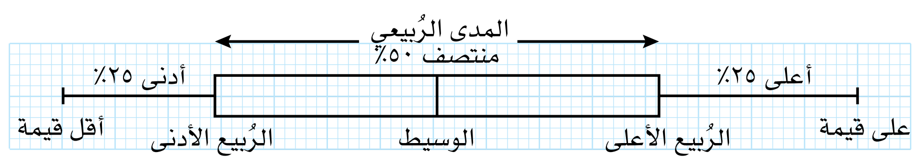
المدى الرُبيعي interquartile range هو مقياس التشتت الذي يعطي مدى نصف توزيع القيم (منتصف ٥٠٪) لذا فإنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة .

الوسيط يقسم توزيع القيم إلى قسمَين متساويَين، حيث يكون عدد القيم نفسه في كل قسم.

الرُبيع الأدنى lower quartile يقسم النصف الأدنى إلى قسمَين متساويَين، و**الرُبيع الأعلى upper quartile** يقسم النصف الأعلى إلى قسمَين متساويَين.



المدى الرُبيعي هو الفرق بين الرُبيع الأعلى والرُبيع الأدنى للتوزيع. وعليه، فإن الوسيط والرُبيعات تقسم توزيع القيم إلى أربعة أقسام متساوية كما هو مبيّن في المخطّط الآتي:



نتيجة ١

المدى الرُبيعي = الرُبيع الأعلى − الرُبيع الأدنى أو

المدى الرُبيعي = ر$_{٣}$ − ر$_{١}$

الوسيط يعرف بـ ر$_{٢}$

فيما يلي مجموعتين من القيم لـ س وص، ويبيّن الجدول الآتي الوسيط والمدى والمدى الربيعي لكل من المتغيّرَين س، ص.

مجموعة قيم المتغيّر س: ٠، ١، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ١٠، ١١، ١٣

مجموعة قيم المتغيّر ص: ٠، ٢، ٤، ٦، ٧، ٩، ١٠، ١١، ١٤، ١٥

	الوسيط	المدى	المدى الرُبيعي
مجموعة بيانات س	٦	١٣ − ٠ = ١٣	١٠ − ٣ = ٧
مجموعة بيانات ص	٩	١٥ − ٠ = ١٥	١٣ − ٤ = ٩

ويمكن أن نستخدم هذه المقاييس للمقارنة:

عند المقارنة باستخدام الوسيطَين، يظهر أن قيم س أصغر من قيم ص.

عند المقارنة باستخدام المدى والمدى الربيعي، يظهر أن قيم ص أكثر انتشارًا من قيم س الأمر الذي يعني أن قيم ص أقل اتساقًا من قيم س.

نتيجة ٢

إذا كان المدى الربيعي لمجموعة من القيم أقل من المدى الربيعي لمجموعة قيم أخرى تكون المجموعة أكثر ثباتًا وأقل انتشارًا.

يعتمد موقع الرُبيع الأدنى والرُبيع الأعلى على عدد القيم في مجموعة البيانات سواء أكان فرديًّا أم زوجيًّا. أحد الأمثلة الذي نستخدمه لنجد الربيعيات هو الآتي:

عندما يكون عدد القيم المرتبة زوجيًّا: نقسم البيانات إلى نصف أدنى ونصف أعلى. فيكون $ر_١$، $ر_٣$ وسيطَي النصف الأدنى والنصف الأعلى على الترتيب.

عندما يكون عدد القيم المرتبة فرديًّا نقسم البيانات إلى نصف أدنى ونصف أعلى حول الوسيط، ثم نهمله مرة أخرى فيكون $ر_١$، $ر_٣$ وسيطَي النصف الأدنى والنصف الأعلى على الترتيب.

مُساعَدة

في مجموعة بيانات غير مجمّعة، رتبة الوسيط ($ر_٢$) هي $\left(\frac{ن + ١}{٢}\right)$.

ينصح بإيجاد الرُبيعات بالاستقصاء وليس بحفظ صيغة رتبة مواقعها.

مثـــال ٨

أوجِد المدى الرُبيعي للقيم الآتية: ٦٩، ١٧ ، ٤٣ ، ٦ ، ٧٣ ، ٧٧ ، ٣٩

الحـــلّ:

الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع
٦	١٧	٣٩	٤٣	٦٩	٧٣	٧٧
	$ر_١$		$ر_٢$		$ر_٣$	

القيم مرتبة، لذا نقسمها إلى أربعة أقسام متساوية.

المدى الرُبيعي = $ر_٣ - ر_١$

= ٧٣ − ١٧

= ٥٦

مُساعَدة

يفضل ترتيب القيم ترتيبًا تصاعديًا عند التعامل مع الربيعيات.

مثــال ٩

أوجِد المدى الرُبيعي للقيم الثماني المرتبة: ٢ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ٢٩ ، ٣٣ ، ٤٩ ، ٥٥

الحــلّ:

الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع	الثامن
٢	٥	٩	١٣	٢٩	٣٣	٤٩	٥٥

ر١ (بين ٥ و ٩)، ر٢ (بين ١٣ و ٢٩)، ر٣ (بين ٣٣ و ٤٩)

القيم مرتبة، تقسم إلى أربعة أقسام متساوية.

المدى الرُبيعي = ر٣ − ر١

$$= \frac{٣٣ + ٤٩}{٢} - \frac{٥ + ٩}{٢}$$

= ٤١ − ٧

= ٣٤

في مخطط الساق والورقة، تكون البيانات الأولية بالترتيب، ويمكننا رؤية كل قيمة من القيم. نجد أولاً الوسيط للحصول على النصف الأدنى والنصف الأعلى. الربيع الأدنى يقسم النصف الأدنى إلى مجموعتين متساويتَين من حيث عدد القيم، والربيع الأعلى يقسم النصف الأعلى إلى مجموعتين متساويتين من حيث عدد القيم. ثم نطرح الربيع الأدنى من الربيع الأعلى لإيجاد المدى الربيعي.

مثــال ١٠

أوجِد المدى الرُبيعي للقيم الثلاث عشرة المبيّنة في مخطّط الساق والورقة الآتي:

١٤	٢ ٢ ٤ • ٨ ٩
١٥	١ $\boxed{٣}$ ٥ ٦ ٧ • ٩
١٦	٥ ٨

المفتاح: ٢ | ١٤ تمثّل ١٤٢

الحــلّ:

موقع ر٢ عند $\left(\frac{١٣ + ١}{٢}\right)$ = القيمة السابعة، وهي $\boxed{١٥٣}$

حددنا الوسيط فكان ١٥٣، وذلك بهدف معرفة النصف الأدنى (من ١٤٢ إلى ١٥١)،

والنصف الأعلى (من ١٥٥ إلى ١٦٨) وعدد القيم في كل منهما ٦ قيم.

ر١ = $\frac{١٤٤ + ١٤٨}{٢}$ = ١٤٦

وسيط مجموعة عدد قيمها ٦ هو القيمة التي رتبتها ٣,٥، وهي النقطة التي حددت بلون أحمر في مخطّط الساق والورقة.

ر٣ = $\frac{١٥٧ + ١٥٩}{٢}$ = ١٥٨

المدى الرُبيعي = ١٥٨ − ١٤٦

= ١٢

استكشف ١

في هذا الاستكشاف، سوف تستقصي قيم الوسيط من خلال علاقته بأصغر وأكبر قيمة في مجموعة البيانات، وأيضًا من خلال علاقته بالرُبيع الأدنى والرُبيع الأعلى.

لكل مجموعة بيانات من المجموعات المرتبة من (أ) إلى (د)، اكتب قيمة كل من:
أصغر قيمة، الرُبيع الأدنى، الوسيط، الرُبيع الأعلى، أكبر قيمة.

المجموعة (أ): ٢ ، ٢ ، ٣ ، ١١ ، ١١ ، ٢١ ، ٢٢

المجموعة (ب): ٦ ، ٦ ، ٦ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٠

المجموعة (ج): ٩ ، ١٥ ، ٢٨ ، ٣٢ ، ٣٥ ، ٤٩

المجموعة (د): ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٧

من المفيد أن تؤشِّر إلى القيم الخمس لكل مجموعة على خط الأعداد.

استخدم نتائجك لتقرر أيًّا من العبارات الآتية تكون دائمًا صحيحة، أو أحيانًا صحيحة، أو غير صحيحة على الإطلاق.

١) يقع الوسيط في منتصف المسافة بين أصغر قيمة وأكبر قيمة.

٢) يقع الوسيط في منتصف المسافة بين الرُبيع الأدنى والربيع الأعلى.

٣) المدى الرُبيعي يساوي نصف المدى بالضبط.

٤) $ر_{٣} - ر_{٢} > ر_{٢} - ر_{١}$

مثـــال ١١

يعتقد عامر أن مزود خدمة الإنترنت لديه (وهي الأرخص بين الخدمات المتوافرة) لا يقوم بعمل جيد لأنه يستغرق وقتًا طويلًا لتنزيل أفلامه الوثائقية المفضلة.

اتفق مع صديقه منصور على اختبار ذلك عن طريق تنزيل خمسة أفلام معينة، بحيث يتم تنزيل فيلم كل يوم في الساعة ٦ مساءً لمدة ٥ أيام.

يتم عرض الأوقات التي يستغرقها عامر ومنصور لتنزيل الأفلام في الجدول الآتي:

الفيلم	أ	ب	ج	د	ك
الوقت المستغرق من عامر (دقائق)	١٨	٤٠	٢٠	٣٦	٢٤
الوقت المستغرق من منصور (دقائق)	١٠	٤٨	١٤	٢٤	٢٢

أ استخدم الوسيط والمدى الربيعي لمقارنة مجموعتي أوقات التنزيل.

ب ما السبب المحتمل الذي دفع عامر إلى عدم تغيير مزوّد خدمة الإنترنت كالمزود الذي يستخدمه منصور؟

الحــلّ:

أ الوسيط لأوقات عامر = ٢٤ دقيقة

الأوقات بالترتيب هي ١٨، ٢٠، ٢٤، ٣٦، ٤٠

الوسيط لأوقات منصور = ٢٢ دقيقة

الأوقات بالترتيب هي ١٠، ١٤، ٢٢، ٢٤، ٤٨

المدى الربيعي لأوقات عامر = ٣٨ − ١٩ = ١٩ دقيقة

المدى الربيعي = $\frac{٤٠ + ٣٦}{٢} - \frac{٢٠ + ١٨}{٢}$

المدى الربيعي لأوقات منصور = ٣٦ − ١٢ = ٢٤ دقيقة

المدى الربيعي = $\frac{٢٤ + ٤٨}{٢} - \frac{١٤ + ١٠}{٢}$

الوسيط للوقت بالنسبة إلى عامر أكبر من وسيط الوقت بالنسبة إلى منصور.

المدى الربيعي لأوقات عامر أصغر من المدى الربيعي لأوقات منصور.

ب على الرغم من أن الاتصال لمزود خدمة الإنترنت الذي يستخدمه عامر أبطأ، إلا أن أوقات التنزيل الخاصة به أقل تشتتًا (أكثر موثوقية) واتساقًا من وقت منصور، لذلك قد يكون هذا هو سبب عدم تغييره أو أن الأمر لا يستحق دفع المزيد من المال للحصول على إنترنت أسرع قليلاً ولكنه أقل موثوقية.

مثــال ١٢

يبيّن الجدول الآتي التوزيع التكراري للمتغيّر س، أوجِد المدى الرُبيعي للمتغيّر س:

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ت	١٠	١٤	١٨	١٧	١٤	٦

الحــلّ:

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	
ت	١٠	١٤	١٨	١٧	١٤	٦	مجـ ت = ٧٩
الموقع	من الأول إلى العاشر	من الحادي عشر إلى الرابع والعشرين	من الخامس والعشرين إلى الثاني والأربعين	من الثالث والأربعين إلى التاسع والخمسين	من الستين إلى الثالث والسبعين	من الرابع والسبعين إلى التاسع والسبعين	

رُتّبت قيم س التسع والسبعون ترتيبًا تصاعديًا. يجب النظر إلى مواقع هذه القيم لمساعدتنا على تحديد مواقع الرُبيعيات.

موقع الوسيط هو $\frac{٧٩ + ١}{٢}$ = ٤٠ وقيمته ٣

رتبة $ر_١$ هي ٢٠ وقيمة س عندها تساوي ٢

بما أن عدد القيم فردي، نهمل قيمة الوسيط. يوجد ٣٩ قيمة تحت الوسيط، وعليه يكون منتصف هذه البيانات هي القيمة التي رتبتها $\frac{٣٩ + ١}{٢}$ = ٢٠

رتبة $ر_٣$ هي ٦٠ وقيمة س عندها تساوي ٥

فيكون المدى الرُبيعي ٥ − ٢ = ٣

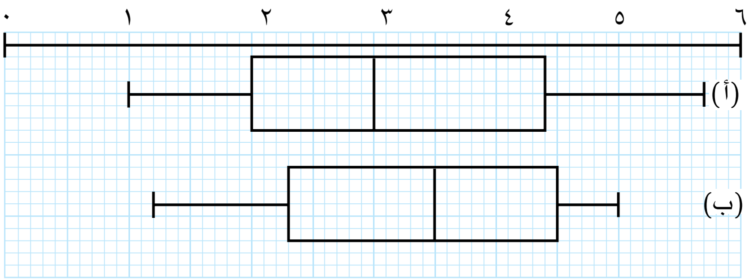
موقع الوسيط هو ٤٠، القيمة في الموقع العشرين فوق الوسيط ستكون في الموقع الستين.

في المخطط الصندوقي، يُشار بوضوح إلى الربيع الأدنى والربيع الأعلى في القيم التي يبدأ فيها الصندوق وأين ينتهي الصندوق. لذا، فإن المدى الربيعي يساوي عرض الصندوق. يجب قراءة هذه القيم بدقة – تحقق من فهمك للمقياس المستخدم في كل مخطط صندوقي.

مثــال ١٣

يبين المخطّط الصندوقي الآتي بيانات كل توزيع من التوزيعَين (أ)، (ب)

قارن بين التوزيعَين.



الحــلّ:

نحسب كل من الوسيط، المدى والمدى الربيعي لكل من التوزيعين.

ويبين الجدول الآتي قيم كل منها:

	الوسيط	المدى	المدى الربيعي
التوزيع (أ)	٣,٠	٤,٧ = ١,٠ – ٥,٧	٢,٤ = ٢,٠ – ٤,٤
التوزيع (ب)	٣,٥	٣,٨ = ١,٢ – ٥,٠	٢,٢ = ٢,٣ – ٤,٥

بمقارنة الوسيطين يظهر أن القيم (أ) أصغر من القيم (ب).

وبمقارنة (مقاييس التشتت) المدى والمدى الربيعي يظهر أن القيم (أ) أقل ثباتًا وأكثر تشتتًا من القيم (ب).

تمارين ٥-٢

١) لكلّ مجموعة من مجموعات الأعداد الآتية، أوجِد:

- الرُبيع الأدنى
- الرُبيع الأعلى
- المدى الرُبيعي

أ ٢٠ ، ٦ ، ٢٨ ، ٣٤ ، ١٦

ب ٦ ، ١٣ ، ٢ ، ٢٠ ، ٩ ، ٢٥ ، ٣١

ج ٥ ، ٨ ، ١١ ، ٧– ، ٠ ، ١٤ ، ٢٣ ، ١٩ ، ٢– ، ١٠، ٥–

د ٨ ، ٢ ، ٢٢ ، ٣٠ ، ٤ ، ١٤

هـ ١٢٠ ، ٩٢ ، ٧٤ ، ٨٨ ، ١٠٤ ، ٥٨ ، ٥٠ ، ٦٢

و ١٥ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٣٧ ، ٧١ ، ٤٣ ، ١٧ ، ١٥ ، ٧ ، ١٤

٢) يبيّن الجدول الآتي قيم المتغيّر ك:

ك	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	
التكرار	٢	١٣	٥	١١	١٣	١٥	مجـ ت = ٥٩

أ) حدّد موقع (رتبة) الرُبيع الأدنى والرُبيع الأعلى.

ب) أوجِد المدى الرُبيعي لقيم المتغير ك

٣) احتفظت طالبة بسجل درجاتها للواجب المنزلي الأسبوعي لمدة ثلاث سنوات، ونظمتها في الجدول الآتي:

الدرجة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار	١	٣	٤	٦	١٠	١٤	١٧	١٦	١٢	١١	١

أ) ما عدد الواجبات المنزلية التي سجلت الطالبة درجاتها؟

ب) أوجِد الرُبيع الأدنى والرُبيع الأعلى للدرجات، ثم أوجِد المدى الرُبيعي.

٤) يبيّن الجدول الآتي قيم المتغيّر المنفصل ك:

ك	١,٠	١,١	١,٢	١,٣	١,٤	١,٥	١,٦	١,٧	١,٨	١,٩	٢,٠	
التكرار	٨	١١	١٣	١٧	٢٢	٢٧	١١	٧	٦	٥	٢	مجـ ت = ١٢٩

أ) حدّد موقع (رتبة) الرُبيع الأدنى والرُبيع الأعلى.

ب) أوجِد قيمة الرُبيع الأدنى والرُبيع الأعلى للمتغيّر ك

ج) أوجِد قيمة المدى الرُبيعي.

٥) يبيّن الجدول الآتي قياسات أحذية مجموعة من النساء:

قياس الحذاء	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	
عدد النساء (ت)	٥	٦	٩	١٠	٧	٧	٥	مجـ ت = ٤٩

أوجِد قيمة المدى الربيعي لقياسات الأحذية.

٦) يبيّن الجدول الآتي عدد الأبناء وعدد البنات لدى ٢٥٩ أسرة:

		الأبناء				
		٠	١	٢	٣	المجموع
البنات	٠	٤	٤١	١٩	٧	٧١
	١	٣١	٥٨	١١	٥	١٠٥
	٢	٢٢	١٩	١٠	٦	٥٧
	٣	٧	٨	٧	٤	٢٦
المجموع		٦٤	١٢٦	٤٧	٢٢	٢٥٩

أوجِد المدى الرُبيعي لأعداد:

أ) البنات

ب) الأبناء

٧) يعتقد طارق أن الرحلة إلى المدرسة تستغرق وقتًا طويلًا بسبب عدد مرات التوقف عند إشارات المرور الضوئية. وقد سجّل عدد مرات الانتظار عند الإشارة الحمراء وهو في طريقه إلى المدرسة لمدة سبعة أيام. في حين يسلك صديقه سليمان طريقًا مختلفًا إلى المدرسة ويعتقد أنه الطريق الأفضل. طلب إليه طارق أن يجمع البيانات نفسها في رحلته. يبيّن الجدول أدناه البيانات التي سجلها كلّ منهم.

اليوم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
طارق	٦	٢	٧	٥	١	١	٥
سليمان	٣	٤	٤	٣	٣	٤	٣

استخدم الوسيط والمدى الرُبيعي لتقارن بين طريقَي طارق وسليمان، وتقرر ما إذا كان على طارق أن يغيّر طريقه.

٨) يبيّن مخطّط الساق والورقة الآتي عدد المرضى الذين يراجعون طبيب الأسنان كل يوم لمدّة ١٥ يومًا:

١	٦	٦	٧	٨	٩		
٢	٠	١	٢	٣	٥	٧	٩
٣	٠	٠	٢				

المفتاح: ٦ | ١
تمثّل ١٦ مريضًا

أ أوجِد وسيط عدد المرضى.

ب أوجِد الرُبيع الأدنى والرُبيع الأعلى والمدى الرُبيعي.

٩) يبيّن مخطّط الساق والورقة الآتي درجات (من ٥٠) لـ ٢٥ شخصًا في اختبار قيادة السيارات:

١	٣	٥	٦	٦					
٢	٠	٧	٧	٧	٨	٩	٩		
٣	١	٢	٢	٥	٥	٥	٦	٧	٩
٤	٠	٠	٣	٤	٥				

المفتاح: ٣ | ١
تمثّل الدرجة ١٣ من ٥٠

أ اكتب المدى.

ب أوجد المدى الرُبيعي للدرجات.

١٠) يبيَن مخطّط الساق والورقة الآتي الدرجات من ٤٤ لـ ١٠٠ مرشحًا في اختبار جامعي:

٢	٠	١	٨					
٣	٣	٥	٦	٦				
٤	٢	٢	٧	٨	٨			
٥	٢	٥	٧	٩	٩	٩		
٦	١	٣	٤	٦	٧	٩		
٧	٠	٠	١	٥	٦	٧	٧	
٨	٠	٤	٤	٦	٧	٧	٨	٩
٩	٣	٣	٥	٩				

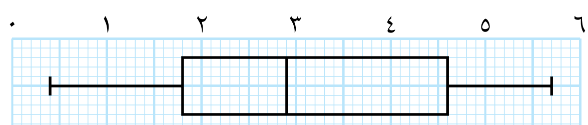
المفتاح: ٨ | ٤
تمثّل الدرجة ٨٤ من ١٠٠

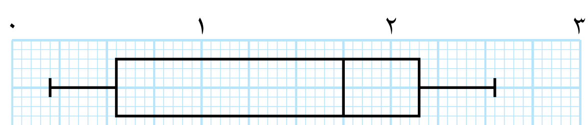
أوجِد:

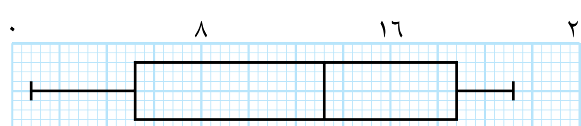
أ مدى الدرجات.
ب وسيط الدرجات.
ج المدى الرُبيعي للدرجات.

١١) لكل مخطّط من المخطّطات الصندوقية المبيّنة أدناه، أوجِد:

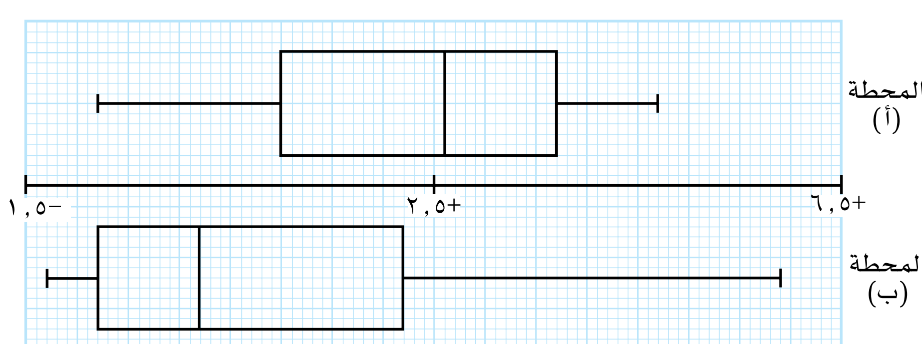
- المدى
- المدى الرُبيعي

أ


ب


ج


١٢) يبيّن المخطّطان الصندوقيان الآتيان معدل درجة الحرارة الصباحية في محطتَي رصد جوّي (أ) ،(ب).
سُجّلت درجات الحرارة على مدى ثلاثة أشهر:



انسخ الجدول الآتي وأكمله، مبيّنًا سبعة مقاييس لكل من محطتَي الرصد الجوي:

	القيمة الصغرى	القيمة العظمى	الرُبيع الأدنى	الوسيط	الرُبيع الأعلى	المدى	المدى الرُبيعي
المحطة (أ)							
المحطة (ب)							

١٣) يبيّن الجدول الآتي المبالغ التي ينفقها ٣٠ شخصًا على الملابس مقرّبة إلى أقرب ١٠ ريالات عُمانية.

٢٢٠	٩٠	١٣٠	٢٢٠	٢٣٠
٨٠	١١٠	٧٠	٩٠	١٥٠
٧٠	١٦٠	٨٠	١٢٠	١٢٠
٥٠	٦٠	٧٠	١٢٠	٦٠
١١٠	١٤٠	٨٠	١١٠	١٦٠
٥٠	١٨٠	٦٠	٢٤٠	٧٠

أ) اعرض بيانات الإنفاق في مخطّط الساق والورقة.

ب) ما أقل قيمة ممكنة للإنفاق؟

ج) لماذا ليس بالضرورة أن يكون ٢٤٠ ريالًا عُمانيًّا أكثر قيمة إنفاق؟

د) قدّر وسيط كميّة الإنفاق.

هـ) إذا علمت أن الرُبيع الأعلى هو١٥٠ ريالًا عُمانيًّا، فأوجِد المدى الرُبيعي.

٥-٣ التباين والانحراف المعياري

استكشف ٢

يوجد المدى الربيعي حول الوسيط، في هذا النشاط الاستكشافي سوف نستشكف مقياس تشتّت آخر حول الوسط الحسابي.

اختر مجموعة من خمسة أعداد مختلفة وسطها الحسابي ١٠

يدلنا انحراف العدد على بُعده عن الوسط الحسابي، وعلى موقعه (عند أي طرف منه. فالأعداد الأكبر من الوسط الحسابي لها انحراف موجب، بينما الأعداد الأصغر من الوسط الحسابي لها انحراف سالب، كما هو موضّح في الشكل الآتي:

أوجِد انحراف كل عدد من الأعداد الخمسة، ثم احسب الوسط الحسابي للانحراف.
ناقش نتائجك وقارنها مع زملائك، ثم استقصِ مجموعات أخرى من الأعداد.

ماذا تتوقع أن يحدث لمجموعة جديدة من خمسة أعداد وسطها الحسابي ١٠؟

ماذا تتوقّع أن يحدث لأيّ مجموعة من الأعداد؟ هل يمكنك تبرير توقّعك؟

مُساعَدة

انحراف العدد =
العدد − الوسط الحسابي

٥-٣أ إيجاد التباين والانحراف المعياري

الانحراف المعياري Standard deviation: مقياس واسع الاستخدام لقياس تشتت مجموعة قيم عن الوسط الحسابي فكلما اقتربت قيمة الانحراف المعياري لمجموعة البيانات من الصفر فهذا يشير إلى اقتراب القيم من وسطها الحسابي (تشتتها قليل). بينما تشير قيمة الانحراف المعياري الكبيرة إلى تشتت (ابتعاد) القيم عن متوسطها الحسابي.

فمثلًا إذا كان لدينا جهاز إعداد القهوة يصب ٢٠٠ مل من القهوة لكل كوب، نتوقع زيادة أو نقصانًا في كمية القهوة (الانحراف المعياري)، ولكن إذا كان الانحراف المعياري كبيرًا فسيشعر بعض الزبائن بأنه قد تم خداعهم، لأنها يمكن أن تعطي أقل أو أكثر من ٢٥٠ مل في الكوب الواحد.

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين.

تربيع الفرق يحول دون العمل مع القيم السالبة التي تسبب المشكلة، انظر إلى فقرة استكشف ٢

نتيجة ٣

التباين $ع^٢$ = الوسط الحسابي لمربعات القيم – مربّع الوسط الحسابي

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{\text{تباين (س)}}$

لمجموعة تتضمن ن عددًا، يرمز إليها بالمتغيّر س:

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{\frac{\sum س^٢}{ن} - \left(\frac{\sum س}{ن}\right)^٢}$ حيث $\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$

مُساعَدة

لنوجد $\sum س^٢$ فإننا نجمع مربعات القيم. من الأخطاء الشائعة إيجاد مجموع القيم ثم تربيع الناتج، يعبّر عن ذلك بالرمز $(\sum س)^٢$

مثــال ١٤

أوجِد التباين والانحراف المعياري مقربة إلى أقرب عدد صحيح لمجموعة الأعداد ٣، ٦٠، ٩٠

الحــلّ:

الوسط الحسابي لمربّعات القيم = $\frac{٣^٢ + ٦٠^٢ + ٩٠^٢}{٣}$ = ٣٩٠٣

قم بتربيع كل الأعداد $(س^٢)$.
أوجد مجموعهم $(\sum س^٢)$.
اقسم على عددهم (÷ ٣).

الوسط الحسابي $(\bar{س})$ = $\frac{٣ + ٦٠ + ٩٠}{٣}$ = ٥١

أوجد الوسط الحسابي $\frac{\sum س}{ن}$، وقم بتربيعه.

التباين $(ع^٢)$ = $٣٩٠٣ - ٥١^٢$ = ١٣٠٢

التباين = الوسط الحسابي لمربعات القيم – مربع الوسط الحسابي = $\frac{\sum س^٢}{ن} - \left(\frac{\sum س}{ن}\right)^٢$

الانحراف المعياري (ع) = $\sqrt{١٣٠٢}$ = ٣٦ (مقرّبة إلى أقرب عدد صحيح).

مثــال ١٥

لمجموعة الأعداد الآتية ٣، ٩، ١٥، ٢٤، ٢٩، أوجِد الانحراف المعياري مقربًا إلى أقرب عدد عشري:

الحــلّ:

$ع^٢ = \frac{\sum س^٢}{ن} - \left(\frac{\sum س}{ن}\right)^٢$

$= \frac{٣^٢ + ٩^٢ + ١٥^٢ + ٢٤^٢ + ٢٩^٢}{٥} - \left(\frac{٣ + ٩ + ١٥ + ٢٤ + ٢٩}{٥}\right)^٢$

$= \frac{١٧٣٢}{٥} - \left(\frac{٨٠}{٥}\right)^٢$

$= ٣٤٦,٤ - ١٦^٢$

$= ٩٠,٤$

نطرح مربّع الوسط الحسابي من الوسط الحسابي لمربّعات القيم لنوجِد التباين.

$ع = \sqrt{٩٠,٤}$

$= ٩,٥$

نأخذ الجذر التربيعي للتباين لنوجِد الانحراف المعياري مقرّبًا إلى أقرب عدد عشري.

نتيجة ٤

التوزيع التكراري للمتغير س وتكراراتها ت يكون:

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{\frac{\sum س^٢ت}{\sum ت} - \left(\frac{\sum س ت}{\sum ت}\right)^٢}$ حيث $\frac{\sum س ت}{\sum ت}$ هو الوسط الحسابي $(\overline{س})$

مثال ١٦

أوجد الانحراف المعياري لقيم س في الجدول الآتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية:

س	ت
١٢	١٣
١٤	٢٨
١٦	١٠

الحــل:

س	ت	س ت	س^٢ت = س × س ت
١٢	١٣	١٥٦	١٢ × ١٥٦ = ١٨٧٢
١٤	٢٨	٣٩٢	١٤ × ٣٩٢ = ٥٤٨٨
١٦	١٠	١٦٠	١٦ × ١٦٠ = ٢٥٦٠
	$\sum$ت = ٥١	$\sum$س ت = ٧٠٨	$\sum$س^٢ ت = ٩٩٢٠

الجدول التكراري الموسع أفضل طريقة لإيجاد $\sum$ ت، $\sum$س ت، $\sum$س^٢ت المطلوبة لحساب الانحراف المعياري.

الانحراف المعياري (ع) = $\sqrt{\frac{\sum س^٢ ت}{\sum ت} - \overline{س}^٢}$

$= \sqrt{\frac{٩٩٢٠}{٥١} - \left(\frac{٧٠٨}{٥١}\right)^٢}$

$= ١,٣٤$

نستخدم المجاميع ٥١، ٧٠٨، ٩٩٢٠ لنوجد الانحراف المعياري.

تمارين ٥-٣أ

١) احسب لكل مجموعة من مجموعات الأعداد الآتية:

- الوسط الحسابي.
- التباين.
- الانحراف المعياري.

أ ٥ ، ٩ ، ١٢ ، ١٤

ب ١١ ، ١٦ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ٣٢

ج ١ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٨٩

د ١٠ ، ٤٥ ، ٦٣ ، ٧٧ ، ٨٣ ، ٨٥ ، ٩٠

هـ ٣ ، ٧ ، ١٦ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٥، ٣١ ، ٣٢

و ٥ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٤ ، ١ ، ٥ ، ٤ ، ١ ، ٢

٢) سجّل حارس في متنزه ما عدد الحيوانات التي ترتاد بركة المياه كل يوم لمدة أسبوع.

جاءت النتائج كالآتي: ١٦ ، ٢١ ، ٣٣ ، ١٩ ، ٢٧ ، ٢٢ ، ٢٥

أ أوجِد مقربًا إلى أقرب عدد صحيح الوسط الحسابي لعدد الحيوانات التي تذهب إلى بركة المياه كل يوم.

ب استخدم قيمة الوسط الحسابي الدقيقة لتحسب الانحراف المعياري مقرّبًا إلى أقرب عدد مكون من ٣ أرقام معنوية.

٣) استخدم التوزيع التكراري للمتغيرات أ، ب، ج، د ، هـ لتحسب:

- الوسط الحسابي.
- التباين.
- الانحراف المعياري.

أ التوزيع التكراري للمتغير أ

أ	١٠	٢٠	٣٠
ت	٦	٩	٥

ب التوزيع التكراري للمتغيّر ب

ب	١٣	١٤	١٥	١٦
ت	٤	٧	٩	٥

ج التوزيع التكراري للمتغير ج.

ج	ت
١١	١٥
١٢	٢٤
١٣	٣٠
١٤	٢٥
١٥	٦

د التوزيع التكراري للمتغير د

د	ت
١,٠	٨
١,٥	١١
٢,٠	١٧
٢,٥	٣
٣,٠	١

هـ التوزيع التكراري للمتغير هـ

هـ	ت
٥,٢	١٣
٥,٥	١٩
٥,٨	٢٨
٦,١	٤٢
٦,٤	٣٩
٦,٧	٢٣
٧,٠	٢١

٤) يبيّن الجدول الآتي عدد العمال (٥٠ عاملًا) الذين سجلوا نصف يوم غياب في السنة الماضية:

عدد غيابات نصف يوم	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد العمال (ت)	٢	٣	٤	٧	٣	٨	٩	٣	٧	١	٣

أ احسب الوسط الحسابي لغياب العامل في السنة الماضية.

ب احسب الانحراف المعياري.

ج حوّل إجابة الجزئية (ب) إلى دقائق إذا علمت أن عدد ساعات العمل اليومي ٨ ساعات.

٥) كشفت دراسة مسحيّة على عيّنة من ٣٠٠ طالب أن ١٤٥ طالبًا لم يقرأوا أيّة رواية، و٨٤ منهم قرأوا رواية واحدة، و٦٣ قرأوا روايتَين، و٧ قرأوا ٣ روايات، وطالبًا واحدًا قرأ ٦ روايات في العام الماضي.

أ مثِّل هذه البيانات في جدول توزيع تكراري.

ب احسب الوسط الحسابي لعدد الروايات التي قرأها الطلبة في العام الماضي.

ج احسب الانحراف المعياري مقرّبًا الإجابة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

د بالمقابل، الوسط الحسابي لعدد الروايات التي قرأها ٣٠٠ موظف هو ٤,٥ والانحراف المعياري ١,٢، اذكر تعليقَين لتقارن بين عادة القراءة عند الموظفين وتلك التي عند الطلبة.

٦) مجموعة من ١٣ عددًا: ٨، ٨، ٨، ٨، ٨، ٨، ٨، ٩، ٩، ٩، ٩، ٩، ٩

أ أيّ مقياسَي تشتت لهما القيمة نفسها لهذه البيانات؟ حدّد القيمة.

أُضيف العدد الرابع عشر س إلى هذه الأعداد.

ب إذا علمت أن س= ١٠، فاشرح ما يحصل لكل من المقياسَين في إجابة الجزئية (أ).

ج إذا علمت ان س = ٠، ماذا يحصل للمقياس الذي لم يظهر في إجابة الجزئية (أ)؟

٥-٣ب حساب تقديرات التباين والانحراف المعياري

مُساعَدة

مركز الفئة هو الوسط الحسابي للحدين الأدنى والأعلى للفئة.

نستخدم صيغ الانحراف المعياري السابقة لإيجاد الانحراف المعياري التقديري للبيانات المجمعة مع استبدال القيم (س) بمراكز الفئات (م).

الانحراف المعياري التقديري = $\sqrt{\frac{\sum م^{٢} ت}{\sum ت} - \left(\frac{\sum م ت}{\sum ت}\right)^{٢}}$ ، حيث

الوسط الحسابي التقديري = $\frac{\sum م ت}{\sum ت}$.

من المهم جدًا حساب قيم مراكز الفئة بدقة. إذا كانت هناك فجوات بين الفئات، يجب أن نتأكد من استخدام حدود الفئة الصحيحة لحساب قيم المراكز.

مثــال ١٧

يبين الجدول التكراري للبيانات المجمعة ارتفاعات ٢٠ شجرة (بالمتر) في حديقة كبيرة.

الارتفاع بالمتر (ل)	عدد الأشجار (ت)
$٢,٨ \leq س < ٣,٠$	٤
$٣,٠ \leq س < ٣,٤$	٧
$٣,٤ \leq س < ٤,٠$	٥
$٤,٠ \leq س < ٦,٥$	٤

أوجد

أ الوسط الحسابي التقديري للارتفاع،

ب الانحراف المعياري للارتفاعات مقرب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

الحــلّ:

أ مراكز الفئات الأربع هي ٢,٩ ، ٣,٢ ، ٣,٧ ، ٥,٢٥

مركز الفئة = $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{٢}$

الوسط الحسابي التقديري = $\frac{٤ \times ٢,٩ + ٧ \times ٣,٢ + ٥ \times ٣,٧ + ٤ \times ٥,٢٥}{٢٠}$

$= \frac{٧٣,٥}{٢٠}$

الوسط الحسابي = $\frac{\sum ل ت}{\sum ت}$

$= ٣,٦٧٥$

ب الوسط الحسابي للمربعات = $\frac{٤ \times ٢,٩^{٢} + ٧ \times ٣,٢^{٢} + ٥ \times ٣,٧^{٢} + ٤ \times ٥,٢٥^{٢}}{٢٠}$

الوسط الحسابي للمربعات = $\frac{\sum ل^{٢} ت}{\sum ت}$

$= \frac{٢٨٤,٠٢}{٢٠}$

$= ١٤,٢٠١$

الانحراف المعياري = $\sqrt{١٤,٢٠١ - ٣,٦٧٥^{٢}}$

استخدم = $\sqrt{\frac{\sum ل^{٢} ت}{\sum ت} - \left(\frac{\sum ل ت}{\sum ت}\right)^{٢}}$

$= \sqrt{٠,٦٩٥٣٧٥}$

$= ٠,٨٣٤$

الانحراف المعياري التقديري = ٠,٨٣٤ م

مثــال ١٨

يبيّن الجدول التكراري الآتي أعمار ٢٠ طفلًا، بالسنوات الكاملة، قدّر الانحراف المعياري:

العمر (سنة)	٥–٩	١٠–١٤	١٥–١٩
عدد الأطفال (ت)	٧	٨	٥

الحــلّ:

العمر الفعلي (ع سنة)	ت
٥ ≥ ع > ١٠	٧
١٠ ≥ ع > ١٥	٨
١٥ ≥ ع > ٢٠	٥
	مجـ ت = ٢٠

مراكز الفئات (م)	م ت	م^{2}ت
٧,٥	٥٢,٥	٣٩٣,٧٥
١٢,٥	١٠٠	١٢٥٠
١٧,٥	٨٧,٥	١٥٣١,٢٥
	مجـ م ت = ٢٤٠	مجـ م^2 ت = ٣١٧٥

كُتبت أعمار الأطفال بحدود الفئات الفعليّة، بحيث يمكن إيجاد قيم مراكز الفئات.

مراكز الفئات هي: ٧,٥ ، ١٢,٥ ، ١٧,٥ وليس ٧ ، ١٢ ، ١٧

الوسط الحسابي التقديري = $\frac{\text{مجـ م ت}}{\text{مجـ ت}} = \frac{٢٤٠}{٢٠} = ١٢$ سنة.

الانحراف المعياري التقديري = $\sqrt{\frac{\text{مجـ م}^2\text{ت}}{\text{مجـ ت}} - \left(\frac{\text{مجـ م ت}}{\text{مجـ ت}}\right)^2} = \sqrt{\frac{٣١٧٥}{٢٠} - \left(\frac{٢٤٠}{٢٠}\right)^2} = \sqrt{١٤,٧٥}$

= ٣,٨٤ سنة أو ٣ سنوات و١٠ أشهر تقريبًا.

تمارين ٥-٣ب

١) يبيّن الجدول التكراري الآتي بيانات المتغير المتصل س:

س	٠ ≥ س > ١٠	١٠ ≥ س > ٢٠	٢٠ ≥ س > ٣٠	٣٠ ≥ س > ٤٠
التكرار (ت)	٨	١٢	٦	٤

أ احسب الوسط الحسابي التقديري للمتغير س

ب احسب الانحراف المعياري التقديري للمتغير س مبينًا كامل عملك.

٢) يبيّن الجدول الآتي سعة ٨٥ وعاءً:

السعة (س لتر)	عدد الأوعية (ت)
٢٠ ≤ س < ٢٤	٧
٢٤ ≤ س < ٢٨	١٥
٢٨ ≤ س < ٣٠	٢٩
٣٠ ≤ س < ٣٢	٢٢
٣٢ ≤ س < ٣٥	١٢

أ احسب الوسط الحسابي التقديري للسعة.

ب احسب الانحراف المعياري التقديري للسعة باللتر، مبينًا كامل عملك، واكتب إجابتك مقرّبًا الناتج إلى أقرب ١٠ مللتر.

٣) نُظِّمت مجموعة من الألعاب في حفل شارك فيها ١٦٨ طفلًا. قُسّم الأطفال إلى ست مجموعات متساوية بحسب أعمارهم بالسنوات الكاملة:

مجموعات العمر هي: ٢–٥ ، ٦–٨ ، ٩–١٠ ، ١١–١٢ ، ١٣ ، ١٤–١٦

أ استخدم حدود الفئات الفعليّة لتنشئ جدولًا تكراريًّا يعرض البيانات المعطاة أعلاه.

ب احسب الوسط الحسابي التقديري للأعمار.

ج احسب الانحراف المعياري التقديري للأعمار مقرّبًا إلى أقرب شهر.

٤) يبيّن الجدول الآتي جزءًا من مشروع مدرسي زراعي لإحدى الطالبات، حيث زرعت ٣٥٠ بذرة طماطم، وسجلت الزمن الذي تتطلبه كل بذرة للنمو:

الزمن (ساعة)	٢٤–٢٦	٢٦–٣٠	٣٠–٣٥	٣٥–٥٠	٥٠–٦٠	٦٠–٧٢
عدد البذور (ت)	١	٣	٧	٧٢	١٩٢	٥٥

أ للبذور التي نمت، احسب:

١) الوسط الحسابي التقديري. ٢) الانحراف المعياري التقديري.

ب ما الصعوبة التي ستواجهك لو طُلب إليك أن تحسب الانحراف المعياري التقديري للزمن اللازم لنمو الـ ٣٥٠ بذرة؟

٥-٤ خصائص مقاييس التشتت

استكشف ٣

حلّل أربعة طلبة البيانات التي جمعوها، فجاءت النتائج كالآتي:

١) الانحراف المعياري لأسعار العقارات في إحدى المناطق عال.

٢) تباين المبيعات الشهرية لمنتج ما في السنة الماضية كان عاليًا.

٣) الانحراف المعياري لدرجات الطلبة في امتحان ما قريب من الصفر.

٤) تباين الأوقات اللازمة لإعداد الإجراءات الطبية قليل.

ناقش ما وجده الطلبة، وأعطِ وصفًا ممكنًا لكلّ عبارة من العبارات الآتية:

١) بيئة المنطقة وشراء الناس للعقارات في هذه المنطقة من البلدة.

٢) نوع المنتج المبيع.

٣) فوائد الاختبارات.

٤) كفاءة فريق إعداد الإجراءات الطبية.

عند اختيار مقياس للتشتت ليمثل انتشار توزيع مجموعة من القيم، وبناءً على خصائص تلك البيانات والسياق المذكورة فيه يكون أحد المقاييس أكثر ملاءمة للاستخدام من المقاييس الأخرى. الجدول أدناه يعرض بعض خصائص كل مقياس من المقاييس الآتية:

المدى	• سهولة حسابه. • سهولة استخدامه في مقارنة الانتشار بين مجموعتَي بيانات متشابهة. • يعطي معلومات عن القيم العظمى والقيم الصغرى. • يعتمد على قيمتَين فقط في مجموعة البيانات. • يتأثر بالقيم المتطرفة.
المدى الرُبيعي	• لا يتأثر بالقيم المتطرفة. • يمكن حسابه من دون التسجيل الدقيق لجميع البيانات. • يعتمد على الوسيط كونه مقياسًا إحصائيًا مناسبًا. • يعتمد على قيمتَين فقط في مجموعة البيانات.
الانحراف المعياري	• يأخذ جميع القيم في مجموعة البيانات بالحسبان. • يمكن استخدامه في حسابات إضافية. • يعتمد على قيمة الوسط الحسابي فقط وليس أي قيمة أخرى. • يتأثر بالقيم المتطرفة وأخطاء التدوين.

على الرغم من أن الانحراف المعياري أكثر استخدامًا من المدى الرُبيعي كمقياس للتشتت، إلّا أنه ليس مثاليًا على الإطلاق لأنه يتأثر بصورة جوهرية بالقيم المتطرفة. وقد يكون المدى الرُبيعي أفضل.

مثــال ١٩

في شهر ديسمبر، سجلت درجات الحرارة منتصف النهار في بلدة ما بشكل يومي فكانت بين ٢٥ و ٢٩ درجة سيليزية باستثناء يومَين كانت درجة حرارتها ٣٧ درجة سيليزية و ١٩ درجة سيليزية.

أعطِ سببًا يجعل المدى الربيعي أو الانحراف المعياري أنسب مقياس للتشتت لاستخدامه في قياس درجات الحرارة في منتصف النهار في شهر ديسمبر.

الحــلّ:

المدى = ٣٧ − ١٩ = ١٨° سيليزية

يطرح السؤال: لماذا لا يكون المدى مناسبًا؟

المدى غير مناسب لأنه تمّ احتسابه باستخدام القيمتَين المتطرفتَين فقط، وكلتاهما ليستا درجات حرارة نموذجية في منتصف النهار لشهر ديسمبر.

القيم المتطرفة تحرّف ولا تعطي صورة واضحة عن الانتشار الحقيقي للقيم.

مثــال ٢٠

قام اثنان من لاعبي الكريكيت أ، ب، بوضع قائمة بأعداد الضربات التي سجلوها في آخر ١٠ مباريات.

اللاعب أ	٢٥	٢٨	٢١	٣٢	٢٦	٣٣	٢٩	٢٦	٣١	٢٩
اللاعب ب	٤٠	٧	٣	٥٠	٠	٨٩	٣٨	٤٥	١	١٧

يحتاج قائد فريق الكريكيت المحلي إلى ضارب جديد. يسمح له باختيار واحد من اللاعبين: اللاعب 'أ' أو اللاعب 'ب'.

أ لماذا يجب على القائد أن يفكر في مقاييس التشتت، بدلًا من المتوسطات، لمساعدته في تحديد اللاعب الذي يختاره؟ اشرح إجابتك.

ب نصح نائب القائد باختيار اللاعب 'ب' لأنه حائز على درجات عالية، في حين أن اللاعب 'أ' لا يمتلكها.

اشرح السبب في أفضلية عدم تقديم هذه النصيحة للقائد.

الحــلّ:

أ اللاعب 'أ'

الوسط الحسابي = $\frac{٢٨٠}{١٠}$

درجاته : ٢١، ٢٥، ٢٦، ٢٦، ٢٨، ٢٩، ٢٩، ٣١، ٣٢، ٣٣.

الوسط الحسابي = ٢٨

الوسيط = ٢٨,٥

اللاعب 'ب':

الوسط الحسابي = ٢٩

الوسيط = ٢٧,٥

الوسط الحسابي = $\frac{٢٩٠}{١٠}$
درجاته : ٠، ١، ٣، ٧، ١٧، ٣٨، ٤٠، ٤٥، ٥٠، ٨٩.

المتوسطات لا تساعد القائد على اتخاذ القرار الواضح بتحديد اللاعب الأفضل.

وفقًا لمقاييس النزعة المركزية، هناك فرق بسيط جدًا بين قدرات اللاعبين.

ب اللاعب 'أ'

المدى = ١٢

المدى الربيعي = ٥

الانحراف المعياري ≈ ٣.٤٤

المدى = ٣٣ − ٢١

المدى الربيعي = ٣١ − ٢٦

الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{٧٩٥٨}{١٠} - ٢٨^{٢}}$

اللاعب 'ب':

المدى = ٨٩

المدى الربيعي = ٤٢

الانحراف المعياري ≈ ٢٧,٢٥

المدى = ٨٩ − ٠

المدى الربيعي = ٤٥ − ٣

الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{١٥٨٣٨}{١٠} - ٢٩^{٢}}$

لا تُعدّ نصيحة جيدة لأن اللاعب 'ب' أقل موثوقية من اللاعب 'أ'.

جميع مقاييس التشتت الثلاثة للّاعب 'أ' أقل بكثير من تلك الخاصة باللاعب 'ب'.

سيخاطر قائد الفريق بشكل كبير باختيار اللاعب 'ب' لأن ضرباته غير متّسقة بشكل كاف مقارنة باللاعب 'أ'

تمارين ٥-٤

١) يدّعي أحد الطلبة أن المدى الربيعي لأي مجموعة من البيانات دائمًا ما يكون أقل من مدى البيانات.

أ هل ادّعاء الطالب صحيح؟ إذا لم يكن كذلك، فهل يمكنك تصحيح ادّعاء الطالب؟

ب انسخ العبارتين التاليتين اللتين تنطبقان على جميع مجموعات البيانات، وأدخل الرموز الرياضية الصحيحة لدعم إجابتك على الجزئية (أ):

العبارة (١): الربيعي الأعلى ...... القيمة الكبرى.

العبارة (٢): الربيعي الأدنى ...... القيمة الصغرى.

٢) بالنسبة لمجموعة معينة من البيانات، من المتفق عليه أن الوسط الحسابي ليس معدلًا مناسبًا للاستخدام. ما هو مقياس التشتت الذي تعتقد أنه لن يكون مناسبًا لاستخدامه كمقياس لانتشار هذه المجموعة من البيانات؟ أعط سببًا لاختيارك.

٣) توفّر ثلاث شركات **س**، **ص**، ع وسائل النقل العام بين المدينة (أ) والمدينة (ب)، والتي تبعد مسافة ١٥٠ كم عن بعضها البعض، الحد الأقصى للسرعة على الطريق بين المدينة (أ) والمدينة (ب) ٨٠ كم/ ساعة.

تم تسجيل الأوقات التي تستغرقها كل حافلة من حافلات الشركات للقيام بـ ٥٠٠ رحلة من هذه الرحلات وتم الحصول على النتائج التالية:

الوسط الحسابي لوقت الرحلة لكل من هذه الشركات يقع ين ساعتين و ١٠ دقائق وساعتين و ٢٠ دقيقة.

مدى أوقات الرحلات للشركة **س** هو ٢٩ دقيقة.

الانحراف المعياري لأوقات الرحلات للشركة **ص** هو ١٠ دقائق.

المدى الربيعي لأوقات الرحلات للشركة ع هو ٢٥ دقيقة.

أ ما الشركة الأكثر موثوقية برأيك؟

ب ناقش أي من الشركات الثلاث التي تعتقد أنها توظف أكثر السائقين غير المسؤولين. أعط بعض التفسيرات لكل إجابة من إجاباتك.

٤) **أ** قم بإدراج مقاييس التشتت الثلاثة التي تعلمتها للقيم الثلاث ٠، ١٠٠، ٢٠٠، بترتيب تصاعدي.

ب اكتب، بترتيب تصاعدي، مجموعة من خمسة أرقام ليست كلها متشابهة، بحيث يتساوى فيها المدى والمدى الربيعي.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- مقاييس التشتت الشائعة هي المدى، المدى الرُبيعي، والانحراف المعياري.
- يبيّن المخطط الصندوقي أصغر قيمة وأكبر قيمة، الرُبيع الأدنى والرُبيع الأعلى، ووسيط مجموعة البيانات.
- للبيانات غير المجمّعة، رتبة الوسيط $ر_٢$ هي $\left(\frac{ن + ١}{٢}\right)$
- المدى الربيعي = $ر_٣ - ر_١$
- للبيانات غير المجمّعة:

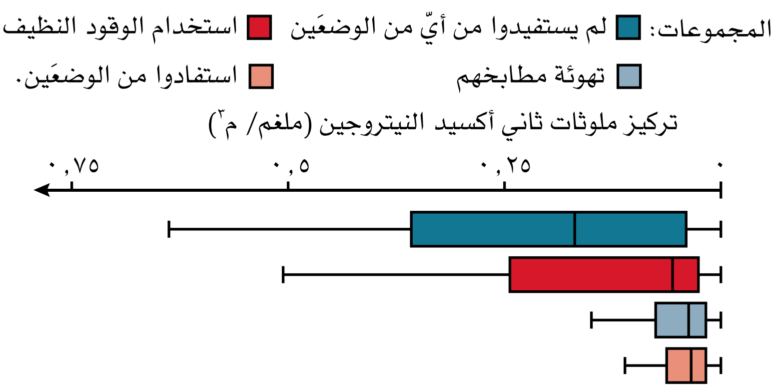
$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{تباين (س)}} = \sqrt{\frac{\sum س^٢}{ن} - \overline{س}^٢} \quad \text{حيث } \overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

- للبيانات المجمّعة:

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{تباين (س)}} = \sqrt{\frac{\sum س^٢ ت}{\sum ت} - \overline{س}^٢} \quad \text{حيث } \overline{س} = \frac{\sum س ت}{\sum ت}$$

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الخامسة

١) أُجريت دراسة لمدة ٩ سنوات على تخفيض التلوث عند استخدام الوقود الحيوي في الطبخ. تعامل الباحثون مع ١٠٠٠ شخص تقريبًا يعيشون في ١٢ قرية جنوب الصين استخدموا غاز الوقود الحيوي وحسّنوا تهوئة المطابخ. بعض الأشخاص لم يستفيدوا من أيّ من الوضعَين، وبعضهم انتقل لاستخدام الوقود النظيف، وبعضهم الآخر حسّن تهوئة المطابخ، وبعضهم استفاد من الوضعَين معًا. يبيّن المخطّط الآتي بيانات عن تركيز ثاني أكسيد النيتروجين في بيوت هؤلاء الأشخاص عند نهاية مدة الدراسة:



ادرس البيانات الممثلة في المخطّط واكتب تحليلًا مختصرًا يلخص نتائج هذا الجزء من الدراسة.

٢) يبيّن الجدول الآتي كتلة النفايات (بالطن)، مقرّبة إلى أقرب عددَين عشريين، الخارجة من أحد المنتجعات السياحية خلال ثلاثة فصول في السنة:

الكتلة (بالطن)	٠,١٥–٠,٢٩	٠,٣٠–٠,٨٦	٠,٨٧–١,٣٥	١,٣٦–٢,٠٠
عدد الأسابيع (ت)	٥	٨	٢٠	٦

أ) احسب الوسط الحسابي التقديري والانحراف المعياري التقديري لكتل النفايات لكل أسبوع مقرّبة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

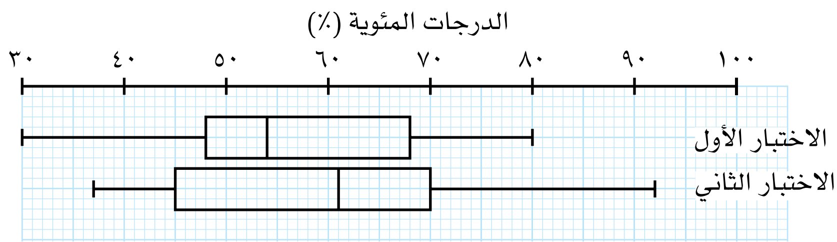
ب) لا توجد نفايات في الأسابيع الثلاثة عشر التي يكون المنتجع مغلقًا فيها. إذا ضمّنت هذه البيانات الإضافية في الحسابات، فما أثرها على الوسط الحسابي وعلى الانحراف المعياري؟

٣) تمّ سؤال ٣ أولاد و٤ بنات عن كميّة النقود في جيوبهم. وُجِد أن مع كلّ ولد ٢,٥٠٠ ريال عُماني، وأن الوسط الحسابي لكميّة النقود في جيوب جميع الأطفال هو ٣,٩٠٠ ريال عُماني.

أ) بيّن أن مجموع النقود مع البنات هو ٣١,٥٠٠ ريال عُمانيّ.

ب) إذا كان مع الأطفال السبعة كمية النقود نفسها، فأوجد الانحراف المعياري للنقود الموجودة مع جميع الأطفال.

٤) يبيّن المخطط الصندوقي الآتي الدرجات المئوية لطلبة صف في اختبارَي رياضيات في هذا الفصل الدراسي:



صِف التقدم الذي حققه طلبة الصف في اختباري الرياضيات في هذا الفصل الدراسي.

٥) عدد النقاط التي حصل عليها ١١ راميًا عندما رمى كل منهم ثلاثة سهام على لوحة السهام هي
٥٤ ، ٤٦ ، ٤٣، ٥٢ ، ١٨٠ ، ٥٠ ، ٤١ ، ٥٦ ، ٥٢ ، ٤٩ ، ٥٤

أ) أوجِد المدى، والمدى الرُبيعي، والانحراف المعياري لهذه النقاط.

ب) ما أفضل مقياس في الجزئية (أ) يلخص تشتت النقاط؟ اشرح سبب اختيارك ذلك المقياس.

٦) طُلب إلى ١٢٠ شخصًا قراءة مقالة في صحيفة. يبيّن الجدول الآتي الزمن المستغرق مقرّبًا إلى أقرب ثانية لقراءة المقال:

الزمن (ثانية)	١-٢٥	٢٦-٣٥	٣٦-٤٥	٤٦-٥٥	٥٦-٩٠
عدد الأشخاص	٤	٢٤	٣٨	٣٤	٢٠

احسب الوسط الحسابي التقديري والانحراف المعياري التقديري لزمن القراءة.

٧) يبين الجدول التكراري للبيانات المجمعة الآتي أطوال ٨٠ طفلًا بالسنتيمتر.

الطول بالسنتمتر (ل)	١٢٠ ≤ ل < ١٢٤	١٢٤ ≤ ل < ١٢٨	١٢٨ ≤ ل < ١٣٠	١٣٠ ≤ ل < ١٣٨	١٣٨ ≤ ل < ١٤٦
عدد الأطفال (ت)	٥	١٥	٢٢	١٨	٢٠

أ) اشرح كيف يمكننا أن نعلم أن المدى الربيعي التقديري هو ١٠ سم.

ب) احسب الانحراف المعياري التقديري مقربًا إلى أقرب ٣ منازل عشرية.

مصطلحات علمية

أ

اختبار المستقيم الأفقي horizontal line test: طريقة تستخدم لتحديد عدد قيم س الممكنة لكل قيمة ص. (ص ٥٨)

اختبار المستقيم الرأسي vertical line test: طريقة تستخدم لتحديد عدد قيم ص الممكنة لكل قيمة س. (ص ٥٨)

الأساس (الفرق المشترك) common difference: الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة في متتالية حسابية ويكون مقدار ثابت. (ص ٨٩)

أساس المتتالية الهندسية (النسبة المشتركة) Common ratio: النسبة الثابتة بين أي حدَّين متتاليَين في متتالية هندسية. (ص ٩٦)

الأعمدة البيانية: شكل يستخدم الأعمدة لتمثّل التكرارات. (ص ١٢٤)

الانحراف المعياري standard deviation: الجذر التربيعي للفرق بين الوسط الحسابي لمربعات القيم ومربع الوسط الحسابي. (ص ١٧١)

الانعكاس: خاصية يمكن من خلالها طي نصف الشكل على طول المستقيم بحيث يتطابق تمامًا مع النصف الآخر من الشكل. (ص ٧٩)

ب

البيانات المجمعة grouped: هي بيانات تنظم في فئات حيث لا تظهر القيم في صورة مفردة ولا يمكن إيجاد التكرار لأي قيمة محددة. (ص ١٥٥)

البيانات غير المجمعة ungrouped: هي بيانات تظهر فيها القيم بصورة مفردة. (ص ١٥٥)

ت

التباين variance: هو الفرق بين الوسط الحسابي لتربيع القيم ومربع الوسط الحسابي للقيم. (ص ١٧١)

الترتيب: ترتيب القيم تصاعديًا من الأصغر إلى الأكبر، أو تنازليًا من الأكبر إلى الأصغر. (ص ١٢١)

التشتت Dispersion: مقياس لمدى انتشار أو تباعد قيم مجموعة من البيانات. (ص ١٥٥)

التقريب: تدوير العدد إلى درجة الدقة المطلوبة. (ص ١٣٩)

التكرار التراكمي cumulative frequencies: مجموع التكرارات حتى قيمة محددة في مجموعة البيانات، ويتمثّل بجمع التكرارات معًا الواحدة تلو الأخرى. (ص ١٢٢)

التوزيع التكراري: قائمة تبيّن القيم وتكراراتها. (ص ١٣٢)

ج

الجذور roots: إذا كانت د(س) دالة، فإن حلول المعادلة د(س) = ٠ تسمّى جذور المعادلة. (ص ٣٧)

ح

الحد الأدنى lower boundary: أصغر قيمة ممكنة في مجموعة بيانات أو فئة. (ص ١٥٥)

الحد الأعلى upper boundary: أكبر قيمة ممكنة في مجموعة بيانات أو فئة. (ص ١٥٥)

الحد الأول: الحد في بداية المتتالية. (ص ٨٩)

الحد العام لمتتالية حسابية: $ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) د، حيث يتم تعريف الحد النوني بشكل فريد من خلال قيم الحد الأول أ، والأساس د. (ص ٨٩)

الحد العام لمتتالية هندسية: إنه أ$ر^{(ن - ١)}$ حيث يتم تعريف الحد النوني بشكل فريد من خلال الحد الأول أ والأساس ر. (ص ٩٦)

الحد النوني: تعبير جبري يمكننا من خلاله إيجاد أي حد إذا عرفنا رتبته (موقعه). (ص ٩٠)

الحدّ term: عدد في المتتالية. (ص ٨٩)

التحليل إلى العوامل Expand: كتابة عبارة جبرية، في صورة ناتج ضرب عواملها. (ص ١٩)

خ

خط الانعكاس: الخط المستقيم الذي ينعكس بموجبه منحنى الدالة على منحنى دالتها. (ص ٧٩)

د

الدالة function: هي علاقة بين مجموعتين حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية. (ص ٥٥)

الدالة العكسيّة لنفسها self-inverse function: إذا كانت الدالتان د، $د^{-1}$ متساويتين، فتسمى الدالة د بالدالة العكسية لنفسها. (ص ٧٥)

الدالة العكسيّة inverse function: الدالة العكسية $د^{-1}$(س) هي الدالة التي تعكس ما تقوم به الدالة د(س). (ص ٧٣)

الدالة المركبة composite function: دالة تنتج من دالتَين عند تطبيق الدالة الأولى، ثم تطبيق الدالة الثانية على الناتج. (ص ٦٧)

ر

الرُبيع: القيم الثلاث (الرُبيع الأدنى أو الوسيط أو الرُبيع الأعلى) التي تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أقسام متساوية. (ص ١٦١)

الرُبيع الأدنى Lower quartile: هو القيمة التي ينتهي عندها الربع الأول عند القراءة صعودًا في مجموعة بيانات مرتبة بترتيب تصاعدي. (ص ١٦١)

الرُبيع الأعلى upper quartile: هو القيمة التي ينتهي عندها الربع الثالث عند القراءة صعودًا في مجموعة بيانات مرتبة بترتيب تصاعدي. (ص ١٦١)

رتبة الحد: الموقع حيث يكون الحد في المتتالية.

رتبة الوسيط: موقع الوسيط في مجموعة البيانات. (ص ١٢١)

ط

طول الفئة class width: هو الفرق بين قيم حدَّي الفئة. (ص ١٣٢)

ع

عدد الحدود: كم من الحدود الموجودة في المتتالية. (ص ٨٩)

العلاقة relation: هي ارتباط بين عناصر مجموعة ما (المجال) بعناصر مجموعة أخرى (المدى). (ص ٥٥)

ف

الفئة class: مجموعة القيم بين الحدَّين الأدنى والأعلى. (ص ١٣٢)

الفئة المنوالية modal class: هي الفئة الأكثر كثافة ولها أكبر تكرارفي الفئات المعيارية. (ص ١٣٢)

ق

القيم المتطرفة biased values: فئة القيم التي تتضمن أكبر كثافة تكرارية. (ص ١٤٧)

القيمة المتطرفة: قيمة تقع على مسافة غير اعتيادية من القيم الأخرى في مجموعة البيانات. (ص ١٤٧)

القيمة الممثلة: قيمة تستخدم لتمثّل فئة من البيانات، مثل مركز الفئة. (ص ١١٦)

ك

كثافة الفئة class density: التكرار لكل وحدة من طول الفئة. (ص ١٣٢)

كسر عشري دوري: عدد تتكرر فيه الأرقام بعد الفاصلة العشرية بصفة دورية، مثل ٠,١٢٣١٢٣١٢٣١٢ (ص ١٠٥)

م

المتباينة: عبارة جبرية تقارن بين كميتين أو عبارتين جبريتين. (ص ٣٩)

المتتالية sequence: مجموعة من الأعداد المرتبة وفق نمط محدد. (ص ٨٩)

المتتالية الحسابية arithmetic sequence: مجموعة من الأعداد المرتبة التي تحقق قاعدة ما وتسمّى الأعداد في المتتالية حدود المتتالية ويفرق كل حدّ في المتتالية عن الحدّ الذي يسبقه مباشرة بمقدار ثابت. (ص ٨٩)

المتتالية الهندسيّة Geometric sequence: هي متتالية تكون فيها النسبة ثابتة بين أي حد في المتتالية والحد الذي يسبقه مباشرة مثل ١، ٣، ٩، ٢٧، ... (ص ٩٦)

المتسلسلات المتقاربة convergent series: هي تقارب مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية من عدد محدد. (ص ١٠٣)

المتسلسلة غير المنتهية: متسلسلة فيها عدد لا يحصى من الحدود. (ص ١٠٣)

متسلسلة هندسية : متتالية هندسية يتم فيها جمع الحدود معًا: مثل ١ + ٣ + ٩ + ٢٧ + ... + (ص ٩٨)

المتسلسلة series: مجموع حدود المتتالية. (ص ٩١)

متعدّد إلى متعدد many-many: علاقة تربط أكثر من قيمة مدخلة بقيمة المخرجة نفسها، وتربط قيمة مدخلة واحدة بأكثر من قيمة مخرجة. (ص ٥٧)

متعدّد إلى واحد many-one: دالة تربط أكثر من قيمة مدخلة بقيمة المخرجة نفسها. (ص ٥٥)

المجال domain: مجموعة قيم مدخلات الدالة. (ص ٥٥)

مجموع الحدود: الإجمالي الذي يتم الحصول عليه عندما تجمع الحدود في جزء من المتتالية. (ص ٩١)

مجموعة الحلول: مجموعة أو مدى القيم التي تحقق متباينة ما، مكتوبة باستخدام المتباينات في صورة أ < س < ب أو س < أ، س > ب. (ص ١٧)

مخطط الساق والورقة: هو نوع من الجداول لعرض البيانات المرتبة في صفوف تتضمّن العرض نفسه. (ص ١٥٦)

المخطط الصندوقي: مخطط يستعمل لعرض خمس قيم مفتاحية في مجموعة بيانات (القيمة الصغرى، الرُّبيع الأدنى، الوسيط، الرُّبيع الأعلى، والقيمة الكبرى). (ص ١٦٦)

المدرج التكراري: مخطط مكوّن من أعمدة متلاصقة مساحاتها تمثّل تكرارات الفئات. (ص ١١٣)

المدى range: مجموعة قيم مخرجات الدالة. (ص ١٥٥)

المدى range: الفرق العددي بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في التوزيع. (ص ١٥٥)

المدى الرُبيعي interquartile range: هو مقياس التشتت الذي يعطي مدى نصف توزيع القيم ن لذا فإنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة. (ص ١٦١)

مركز الفئة mid-value: القيمة المنتصف بين حدَّي الفئة، وتساوي الوسط الحسابي لحدَّي الفئة. (ص ١٣٠)

المستقيم: أقصر مسافة بين نقطتين، معادلة المستقيم هي معادلة خطية. (ص ٤٩)

المعادلة التربيعية quadratic equation: معادلة يمكن أن تُكتب في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ لا يساوي ٠ (ص ٤٤)

المعادلة الخطيّة: معادلة من الدرجة الأولى ويمكن كتابتها في صورة ص = م س + جـ، حيث م لا يساوي ٠ (ص ٤٢)

المعدل: هو أيّ من مقاييس النزعة المركزية، الوسط الحسابي، والوسيط والمنوال. (ص ١١٤)

المماس tangent: مستقيم يمس المنحنى في نقطة واحدة. (ص ١٨)

المميّز discriminant: جزء من الصيغة التربيعية يقع تحت رمز الجذر التربيعي. (ص ١٨)

المنحنى التربيعي Quadratic curve: منحنى الدالة التربيعية. (ص ١٧)

المنوال mode: أكثر البيانات تكرارًا. (ص ١١٤)

ن

نقطة التقاطع بين المستقيم والمنحنى: النقطة أو النقاط حيث المستقيم يلامس فيه المنحنى أو يقطعه.

نقطة الثبات stationary point/ نقطة التحول turning point: نقطة على المنحنى يكون ميل المماس للمنحنى التربيعي عندها صفرًا. وتُعرف أيضًا بالنقطة الحرجة. (ص ٢٥)

نقطة القيمة الصغرى minimum point: أدنى نقطة على منحنى الدالة التربيعية بحيث قيمة ص عند هذه النقطة أصغر من أيّة قيمة أخرى ل ص، وتظهر القيمة الصغرى عندما تكون إشارة معامل س^{٢} في معادلة تربيعية موجبة إذ يكون الرأس عنده هو القيمة الصغرى. (ص ٢٥)

نقطة القيمة العظمى maximum point: أعلى نقطة على منحنى الدالة التربيعية بحيث قيمة ص عند هذه النقطة أكبر من أيةّ قيمة أخرى ل ص، وتظهر القيمة العظمى عندما تكون إشارة معامل س^{٢} في الدالة التربيعية سالبة، إذ يكون الإحداثي الصادي لنقطة الرأس هو القيمة العظمى. (ص ٢٥)

و

واحد إلى متعدد one-many: دالة تربط قيمة مدخلة واحدة بأكثر من قيمة مخرجة. (ص ٥٦)

واحد إلى واحد one-one: دالة تربط قيمة مدخلة واحدة بقيمة مخرجة واحدة فقط. (ص ٥٥)

الوسط الحسابي mean: قيمة تنتج من قسمة مجموع القيم على عددها. (ص ١١٤)

الوسيط median: القيمة التي تقع في منتصف مجموعة البيانات المرتبة. (ص ١٢١)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعـراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

English Heritage/Heritage Images/Getty Images; Fan jianhua/Shutterstock; californiabirdy/Getty Images; Getty Images; Katiekk/Shutterstock; Antonio Ciufo/Getty Images; XH4D/Getty Images

تم بحمد الله

رقم الإيداع : ٦٣٧٦ / ٢٠٢٣

طبع بمطبعة عمان ومكتبتها المحدودة ش.م.م هاتف: ٢٤٤٤٦١١٦٠ (٩٦٨)

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

كتاب الطالب

يتضمن هذا الكتاب:

- جداول معرفة قبلية للتذكر والتحقق من التعلم السابق.
- مهارات رياضية جديدة مع أمثلة محلولة تتضمن تفسيرات واضحة.
- أسئلة تطبيقية لمساعدة الطلبة على تعزيز معرفتهم والتقدم من خلال المنهج الدراسي.
- أنشطة تشجع على مناقشة المفاهيم الرياضية.
- فرص لإجراء استقصاءات أعمق في كيفية تطبيق الرياضيات لحل مجموعة متنوعة من المسائل.
- قائمة تقييم ذاتي للتحقق من التعلم والفهم.
- أسئلة مراجعة نهاية الوحدة ليتحقق الطالب من إتقانه للمهارات التي درسها في الوحدة.

يشمل منهج الرياضيات الأساسية للصف الحادي عشر أيضًا:

- كتاب النشاط.
- دليل المعلّم.

www.moe.gov.om

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS