سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم
المديرية العامة للتربية الخاصة والتعليم المستمر

رؤية عمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

كتيب الرياضيات لطلبة ذوي الإعاقة السمعية

إعداد:
اشراف الرياضيات
دائرة التربية الخاصة

الصف العاشر

الفصل الدراسي الثاني

العام الدراسي ٢٠٢١/٢٠٢٢م

المغفور له
السلطان قابوس بن سعيد
-طيب الله ثراه-

حضرة صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المعظم
- حفظه الله ورعاه -

سلطنـــة عمـــان

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان بِالْعِزِّ والأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا عاهِلًا مُمَجَّدًا
بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء وَامْلَئي الْكَوْنَ الضِّياء
وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

فهرس المحتوى مرتبط بروابط الكترونية وباركود الوسائل الالكترونية المقترحة

الوحدة	اسم الوسيلة المقترحة	رابط الوسائل التعليمية الالكترونية	الكود
المزيد من المعادلات	رسم الدالة التربيعية	https://phet.colorado.edu/ar_SA/simulations/graphing-quadratics	
	ديسموس لدالة التربيعية	https://www.desmos.com/calculator/dxkknajdqb	
الاحتمال البسيط	حجر نرد	/https://www.didax.com/apps/dice	
	العملة	/https://toytheater.com/coin-flip	
	اناء الكرات	/https://toytheater.com/marble-jar	

	سبنر	https://toytheater.com/spinner/	
	لعبة الورق	https://toytheater.com/playing-cards/	
المثلث القائم الزاوية	شبكة المسامير	https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/	
	حساب المثلثات	https://phet.colorado.edu/ar_SA/simulations/trig-tour	
	ديسمو س لدوال	https://www.desmos.com/calculator/2rnqgoa6a4	

المتجهات	المتجهات	https://phet.colorado.edu/sims/html/vector-addition-equations/latest/vector-addition-equations_en.html	
	الاحداثيات	https://toytheater.com/coordinate-graph/	

الوحدة التاسعة: المزيد من المعادلات

٩-١ الإكمال إلى مُربّع

- يمكن كتابة العبارة الجبرية $س^{٢} + أس$ في صورة $\left(س + \frac{أ}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{أ}{٢}\right)^{٢}$

مثال 1

أعد كتابة العبارة الجبرية $س^{٢} - ٤س + ١١$ في صورة $(س + أ)^{٢} + ب$

الحــلّ:

$س^{٢} - ٤س + ١١$ $= س^{٢} - ٤س + \left(\frac{-٤}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{-٤}{٢}\right)^{٢} + ١١$ $= س^{٢} - ٤س + ٤ - ٤ + ١١$ $= س^{٢} - ٤س + ٤ + ٧$ $= (س - ٢)^{٢} + ٧$	مُعامِل 'س' هو -٤ ونصف المُعامِل هو -٢

نشاط

اكتب كل عبارة من العبارات الجبرية التالية في صورة $(س + أ)^{٢} + ب$:

أ $س^{٢} + ٦س + ١٤$ ب $س^{٢} + ٨س + ١$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

تمرين

اكتب كل عبارة من العبارات الجبرية التالية في صورة $(س + أ)^{٢} + ب$:

أ $س^{٢} + ٦س + ٤$ ب $س^{٢} - ٤س + ٧$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

مثال 2

حلّ المعادلة $س^{٢} + ٤س - ٦ = ٠$ مُقرّبًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

الحـــلّ:

$س^{٢} + ٤س - ٦ = ٠$	لا يمكن تحليل هذه المعادلة إلى عوامل.
$س^{٢} + ٤س + (\frac{٤}{٢})^{٢} - ٦ = (\frac{٤}{٢})^{٢}$	استخدم طريقة الإكمال إلى مربع:
$س^{٢} + ٤س + ٤ - ٦ = ٤$	أضف $(\frac{٤}{٢})^{٢}$ إلى الطرفَين.
$س^{٢} + ٤س + ٤ = ١٠$	أضف ٦ إلى الطرفَين.
$(س + ٢)^{٢} = ١٠$	اكتب $س^{٢} + ٤س + ٤$ في صورة $(س + أ)^{٢}$
$س + ٢ = \pm \sqrt{١٠}$	خذ الجذر التربيعي للطرفَين.
$س = -٢ \pm \sqrt{١٠}$	اطرح ٢ من الطرفَين.
$س = ١,١٦٢٢... \text{ أو } -٥,١٦٢٢...$	أوجد القيمتَين الموجبة والسالبة للجذر التربيعي.
$س = ١,١٦ \text{ أو } -٥,١٦$	قرّب كل قيمة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

نشاط

حل كل معادلة من المعادلات التربيعية التالية بالإكمال إلى مُربّع،

أ $س^{٢} + ٦س - ٥ = ٠$ ب $س^{٢} + ٨س + ٤ = ٠$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

تمرين

حل كل معادلة من المعادلات التربيعية التالية بالإكمال إلى مربّع،

أ $س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠$ ب $س^{٢} - س - ٦ = ٠$ ج $س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

٢-٩ الصيغة التربيعية

ملاحظات هانة

- الصورة العامّة للمعادلة التربيعية هي $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$
- الصيغة التربيعية هي $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$.

مثال

$$س^{٢} + ٤س + ٣ = ٠$$

الحــلّ:

أ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-٤ \pm \sqrt{٤^{٢} - ٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١}$

$= \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ - ١٢}}{٢}$

$= \frac{-٤ \pm \sqrt{٤}}{٢}$

$= \frac{-٤ \pm ٢}{٢}$

إما $س = \frac{-٤ + ٢}{٢} = \frac{-٢}{٢} = -١$ أو

$س = \frac{-٤ - ٢}{٢} = \frac{-٦}{٢} = -٣$

قارن المعادلة التربيعية $س^{٢} + ٤س + ٣ = ٠$ مع $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$، وستجد أن $أ = ١، ب = ٤، جـ = ٣$

لاحظ أنّه بالإمكان تحليل المعادلة التربيعية إلى عوامل لتظهر في صورة $(س + ١)(س + ٣) = ٠$ وتعطي الإجابة نفسها.

إذا كان تحليل العبارة التربيعية ممكنًا، بادر إلى القيام بذلك لأنها الطريقة الأسهل.

نشاط

حل كلّ معادلة من المعادلات التالية

أ $س^{٢} + ٧س + ١٢ = ٠$ ب $س^{٢} + ٨س + ١٢ = ٠$

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....

تمرين

حلّ كل معادلة من المعادلات التالية باستخدام الصيغة التربيعية.

أ $س^{٢} + ٦س - ١ = ٠$ ب $س^{٢} + ٥س + ٥ = ٠$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

تمرين

حلّ كلًّا من المعادلات التالية باستخدام الصيغة التربيعية.

أ $٢س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$ ب $٣س^{٢} - ٣س - ١ = ٠$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

٣-٩ حل المعادلات الآنية

- عند وجود معادلة تربيعية ومعادلة خطّية، يمكنك حلهما آنيًّا.

- يمكنك حلّ المعادلة الناتجة باستخدام التحليل إلى عوامل، أو باستخدام الصيغة التربيعية.

مثال

حل المعادلتَين الآنيّتَين ص = س^{٢} + ٣س − ١٠، ص = س + ٥

الحـــلّ:

ص = س^{٢} + ٣س − ١٠	تبدأ كلّ من المعادلتَين بـ (ص =)، لذا يمكن حذف ص بسهولة.
ص = س + ٥	
فيكون، س^{٢} + ٣س − ١٠ = س + ٥	أعد ترتيب المعادلة لتصبح مساوية للصفر.
س^{٢} + ٢س − ١٥ = ٠	حل المعادلة كالمعتاد.
(س+ ٥)(س − ٣) = ٠	
س = −٥، س = ٣	
عوّض بقيَم س في المعادلة الثانية:	سوف نحلّ معادلتَين آنيّتَين، لذا نحتاج إلى إيجاد قيمة س وقيمة ص. عوّض قيَم س في المعادلة الخطّية لأنها أسهل. تحقّق من النواتج: عندما تكون س = −٥ في المعادلة التربيعية نجد أنّ قيمة ص= (−٥)^{٢} + ٣ × (−٥) − ١٠، فتكون ص = ٠، وهي نفسها في المعادلة الخطّية. عندما تكون س = ٣ نجد أنّ قيمة ص = ٣^{٢} + ٣ × ٣ − ١٠، فتكون ص = ٨، وهي أيضًا نفسها في المعادلة الخطّية.
ص = −٥ + ٥ ص = ٣ + ٥	
ص = ٠ ص = ٨	
وتكون النواتج:	
س = −٥ ص = ٠	
و س = ٣ ص = ٨	
أي (−٥، ٠) أو (٣، ٨)	

نشاط

أ ص = س^{٢} − ٢س + ٢

ص = س

.....
.....
.....
.....
.....
.....

ب ص = س^{٢} + ٣س − ١٠

ص = ٢س + ٢

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

تمرين

ص = س^{٢} + ٥

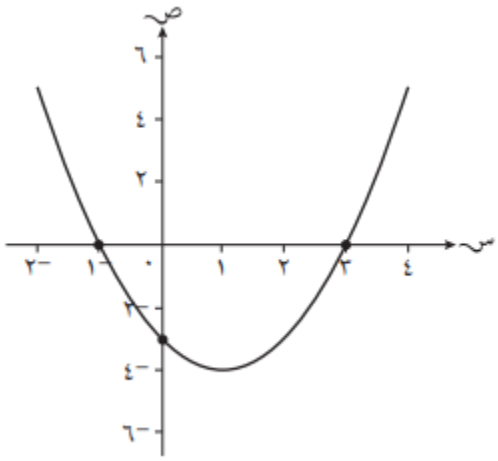
ص = ٤س + ١٧

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

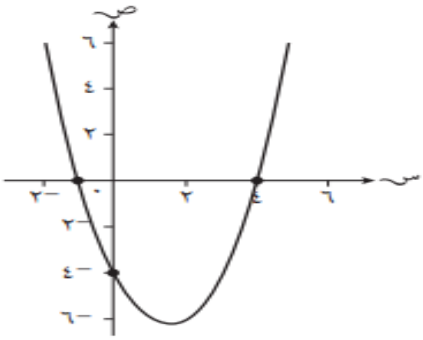
٤-٩ رسم الدوال التربيعية

نشاط

لكل دالة من الدوال أوجد مجور التماثل وراس المنحنى ونقاط التقاط مع محور السينات و الصادات



.....
.....
.....

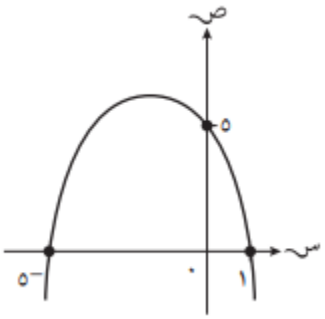


.....
.....
.....

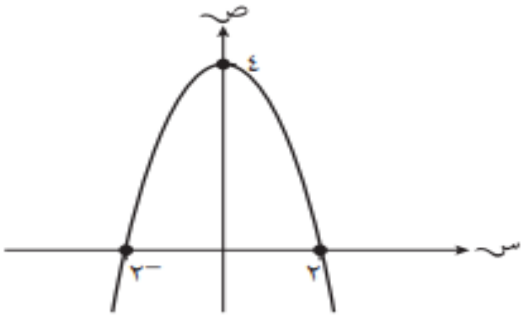
.....
.....

تمرين

لكل دالة من الدوال أوجد مجور التماثل وراس المنحنى ونقاط التقاط مع محور السينات و الصادات



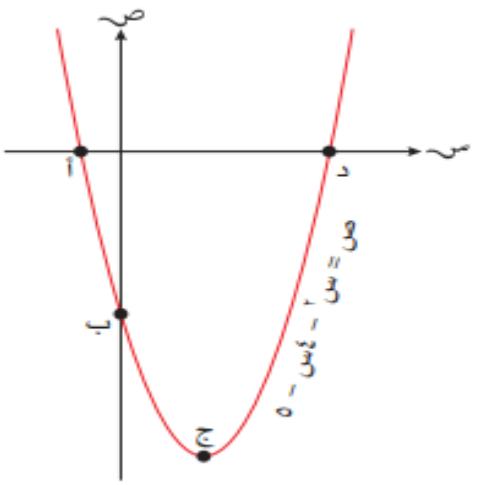
.....
.....
.....
.....



.....
.....
.....
.....
.....

تمرين

يمثّل الرسم أدناه التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢} – ٤س – ٥



اكتب إحداثيات النقاط الأربع المُشار إليها بالأحرف أ، ب، ج، د.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

الوحدة العاشرة: الاحتمال البسيط

١٠-١ مقدمة في الاحتمال

- الاحتمال هو قياس إمكانية وقوع حدث ما. يتم قياس الاحتمال بمقياس من صفر إلى ١:
  - النواتج التي احتمالها صفر هي نواتج مستحيلة.
  - النواتج التي احتمالها واحد هي نواتج مؤكدة.

$$\text{الاحتمال التجريبي للناتج} = \frac{\text{عدد النواتج الناجحة}}{\text{عدد مرّات إجراء التجربة}}$$

نشاط

وضعت سلمى في علبة كرة حمراء وكرة بيضاء وكرة خضراء. ثم سحبت منها كرة عشوائيًا، وكرّرت ذلك ٥٠ مرة. واستخدمت جدول الإشارات التالي لتسجّل نواتج تجربتها:

حمراء	𝍸 𝍸 𝍸
بيضاء	𝍸 𝍸 𝍸 ///
خضراء	𝍸 𝍸 𝍸 //

احسب التكرار النسبي لسحب كل لون من الألوان الثلاثة.

.....
.....
.....
.....
.....

ما مجموع التكرارات النسبية الثلاثة؟

.....
.....

.....

.....

تمرين

لدى زياد عشر بطاقات متماثلة مرقّمة من الواحد إلى العشرة. سحب بطاقة واحدة عشوائيًا وسجّل العدد المكتوب عليها:

أ اكتب كل النواتج الممكنة لهذا الحدث.

.....

.....

.....

ب احسب احتمال أن يسحب زياد بطاقة مكتوبًا عليها:

) العدد خمسة _____

) عدد من مضاعفات العدد ثلاثة _____

) عدد < ٥ _____

) مربّع كامل _____

) عدد > ١٠ _____

فكر وشارك

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تمرين

أدار سالم القرص ٢٦٠ مرّة وسجّل النواتج في الجدول التالي:

العدد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
التكرار	٣٣	٣٨	٢٦	٣٥	٣٩	٢١	٣٣	٣٥

احسب الاحتمال التجريبي لظهور:

أ العدد ٣

ب العدد ٥

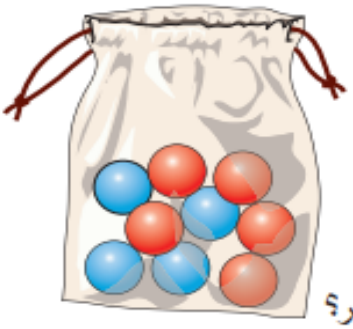
ج عدد فردي

د عامل من عوامل العدد ٨

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....

تمرين



أ تحتوي حقيبة على تسع كرات متماثلة الحجم. أربع كرات منها زرقاء اللون والكرات الخمس الباقية حمراء اللون. إذا سُحبت كرة من الحقيبة، فما احتمال أن يكون لونها:

أ أزرق؟

ب أحمر؟

ج لا أزرق ولا أحمر؟

د أزرق أو أحمر؟

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

٢-١٠ مخطّط الفضاء الاحتمالي

نشاط

رُمي حجرا نرد معًا لكل منهما ٦ أوجه أحدهما أحمر والآخر أزرق، ثم جُمع العددان الظاهران على وجهَي الحجرَين. أوجد احتمال أن يكون المجموع:

أ ٧ ب أقلّ من ٥

ج أكبر من أو يساوي ٨ د أقلّ من ٨

أحمر

+	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

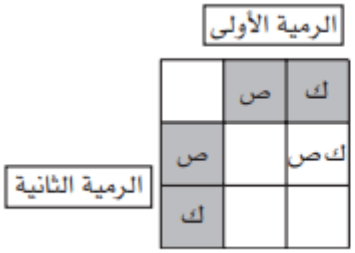
أزرق

يرد في المخطّط أعلاه ٣٦ مجموعًا ممكنًا، لذا فإن عدد النواتج الممكنة يساوي.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

تمرين

عند رمي قطعة نقدية معدنية منتظمة مرّتَين، تم تسجيل النواتج باستخدام الحرف ص للدلالة على الصورة، والحرف ك للدلالة على الكتابة. يمكن رسم مخطّط الفضاء الاحتمالي المجاور:



أ- أكمل الجدول

ب أوجد احتمال أن:

(١) يظهر على القطعتَين نفس الناتج.

(٢) تظهر صورة على كلّ من القطعتَين.

(٣) تظهر على الأقلّ صورة واحدة.

(٤) لا تظهر صورة على أيّ من القطعتَين.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

تمرين

عند رمي حجرَي نرد منتظمَين لكل منهما ستة أوجه، تمّ تسجيل ناتج ضرب العددَين الظاهرَين.

أ ارسم مخطّط الفضاء الاحتمالي الذي يعرض جميع النواتج الممكنة.

ب أوجد احتمال أن يكون ناتج الضرب:

(١) العدد ١

(٢) العدد ٧

(٣) أقلّ من أو يساوي ٤

(٤) أكبر من ٤

(٥) عددًا أوليًّا.

(٦) مُربَّعًا كاملاً.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

٣-١٠ تجميع الأحداث المستقلّة والأحداث المتنافية

- عندما لا يؤثّر الناتج في تجربة ما على الناتج التالي، نقول: إنّ الحدثَين مستقلاّن.

- إذا كان الحدثان أ، ب مستقلّين، فإن: ل(وقوع أ، ثم وقوع ب) = ل(أ) × ل(ب)

نشاط

تقدّمت سعاد وسارة لاختبار في الطبخ بطريقة مستقلّة. إذا كان احتمال أن تنجح سعاد في الاختبار هو $\frac{٣}{٤}$ واحتمال أن تنجح سارة فيه هو $\frac{٥}{٦}$

ما احتمال أن:

أ تنجح الفتاتان معًا

ب لا تنجح أيٌّ منهما

ج تنجح إحداهما على الأقلّ

د تنجح سعاد أو سارة (ليس كلتَيهما)

.....
.....
.....
.....
.....
.....

تمرين

يلعب سمير وجواد لعبة رمي السهم. احتمال أن يصيب سمير المركز ٠,١ واحتمال أن يصيب جواد المركز ٠,٢، رمى كل منهما سهمًا واحدًا. أوجد احتمال أن يصيب:

أ الاثنان المركز

ب سمير المركز ولا يصيبه جواد.

ج أحدهما فقط المركز.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

الوحدة الحادية عشرة: المثلّث القائم الزاوية

١١-١ نظرية فيثاغورث

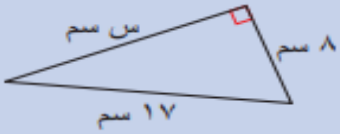
تنصّ نظرية فيثاغورث في المثلّث القائم على أن $أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$.

مثال

أوجد قيمة س في كل من المثلّثين التاليين، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية.

أ

ب



الحـــلّ:

أ

$أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$
$٣^{٢} + ٥^{٢} = س^{٢}$
$٩ + ٢٥ = س^{٢}$
$\Leftarrow س^{٢} = ٣٤$
$س = \sqrt{٣٤} = ٥,٨٣٠٩...$
$\approx ٥,٨$ سم

لاحظ أن الإجابة النهائية يجب أن تقرّب إلى أقرب منزلة عشرية.

ب

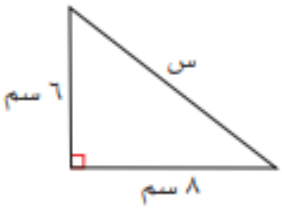
$أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$
$٨^{٢} + س^{٢} = ١٧^{٢}$
$٦٤ + س^{٢} = ٢٨٩$
$س^{٢} = ٢٨٩ - ٦٤$
$س^{٢} = ٢٢٥$
$س = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$ سم

لاحظ أن المطلوب هو إيجاد طول أحد ضلعَي الزاوية القائمة. لذا يجب عليك بعد كتابة نظرية فيثاغورث، أن تعيد كتابتها لتجعل $س^{٢}$ في أحد الطرفين وباقي الأعداد في الطرف الآخر.

نشاط

أوجد طول الضلع المُشار إليه بالحرف س في كلّ مثلّث من المثلّثات التالية:

أ

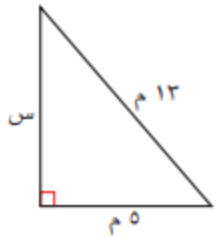


ب

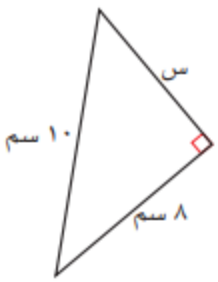
.....
.....
.....
.....
.....
.....

تمرين

أوجد طول الضلع المشار إليه بالحرف س في كلّ مثلّث من المثلّثات التالية:



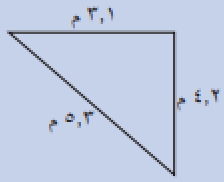
.....



....
....
....

مثال

تحقّق ما إذا كان المثلّث المجاور قائم الزاوية أم لا.



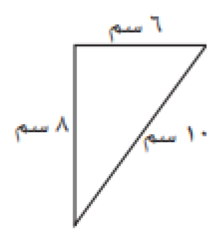
الحــلّ:

تأكّد من تحقّق نظرية فيثاغورث: $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$	اكتب نظرية فيثاغورث.
$أ^{٢} + ب^{٢} = (٣,١)^{٢} + (٤,٢)^{٢} = ٢٧,٢٥$	عوّض عن أ، ب في النظرية.
$جـ^{٢} = ٥,٣^{٢} = ٢٨,٠٩ \neq ٢٧,٢٥$ نظرية فيثاغورث غير محقّقة، ما يعني أن المثلّث المعطى ليس قائم الزاوية.	

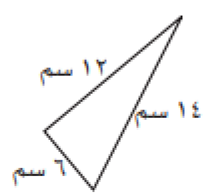
نشاط

حدّد أيًّ من المثلّثات التالية قائم الزاوية:

أ



ب



,,,
,,
,,
,,
,,
,,

١١-٢ تطبيقات على نظرية فيثاغورث

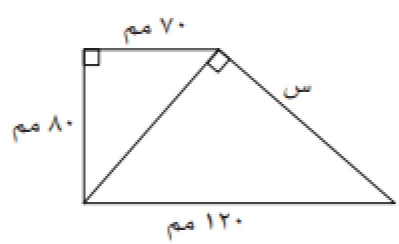
نشاط

مستطيل طوله ١٦ مم وعرضه ١٢ مم. احسب طول أحد قطرَيه.

,,
,,
,,
,,
,,
,,
,,
,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

تمرين

أوجد طول الضلع المشار إليه



,,
,,
,,
,,
,,

تمرين

أوجد طول القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتَين في كل زوج من أزواج النقاط التالية:

أ (−٢، −٢)، (٢، ٢)

ب (−٣، −١)، (٠، ٢)

....

....

....

....

....

....

....

....

ج (−٤، ٥)، (٠، ١)

د (٢، ٤)، (٨، ١٦)

,,

,,

,,

,,

,,

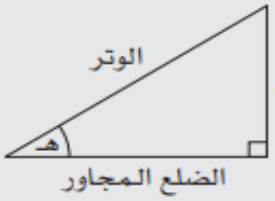
,,

,,

,,,

١١-٣ النسب المثلّثية

النسب المثلثية



- الوتر هو الضلع الأطول في المثلّث قائم الزاوية.
- الضلع المقابل هو الضلع المقابل لزاوية معيّنة.
- الضلع المجاور هو أحد ضلعي الزاوية غير الوتر.
- نسبة ظل الزاوية هي $\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$ لزاوية معيّنة.

$$\text{ظا (هـ)} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$ ،

$$\text{طول الضلع المقابل للزاوية (هـ)} = \text{طول الضلع المجاور للزاوية (هـ)} \times \text{ظا (هـ)}$$

$$\text{طول الضلع المجاور للزاوية (هـ)} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية (هـ)}}{\text{ظا (هـ)}}$$

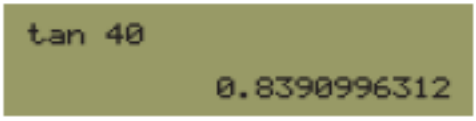
مثال

احسب كل قيمة من القيمتَين التاليتَين:

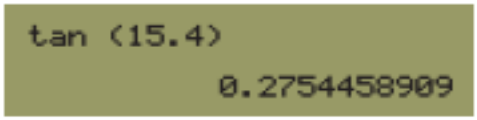
أ ظا(٤٠°)　　ب ظا(١٥,٤°)

الحــلّ:

أ



ب

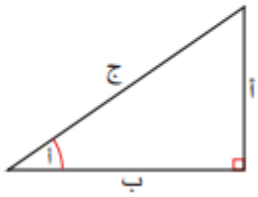


إذا لم تحصل على هذه الإجابة، فعليك التحقّق من أن قياس الزاوية في آلتك الحاسبة على وضعية 'درجة'. غالبًا ما يظهر حرف 'D' أو 'DEG' على الشاشة.

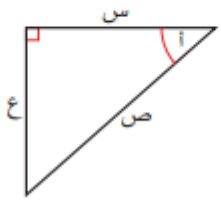
نشاط

اكتب لكل مثلّث من المثلّثات التالية، حرف الوتر، وحرف الضلع المقابل للزاوية (أ)،
وحرف الضلع المجاور للزاوية (أ):

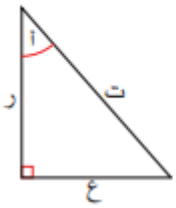
أ



ب



ج



.....

.....

.....

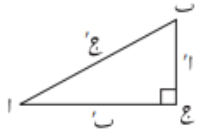
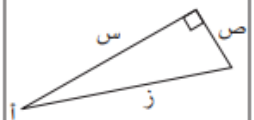
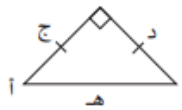
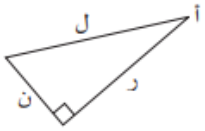
.....

.....

.....

تمرين

أكمل الجدول التالي

	أ	ب	ج	د
				
الوتر				
طول الضلع المقابل للزاوية (أ)				
طول الضلع المجاور للزاوية (أ)				

تمرين

احسب قيمة كلٍّ مما يلي باستخدام الآلة الحاسبة، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين عند الضرورة:

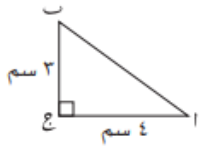
أ ظا (٣٣°) _____ ب ظا (٥٥°) _____ ج ظا (٧٩°) _____

د ظا (٢٢,٥°) _____ هـ ظا (٠°) _____

تمرين

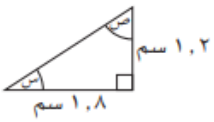
في كل مثلّث من المثلّثات التالية، أكمل كل جملة واكتب الناتج على صورة كسر في أبسط صورة عند الضرورة:

أ



ظا (ا) = _____

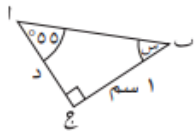
ب



ظا (س) = _____

ظا (ص) = _____

ج



ظا (٥٥°) _____

س = _____

ظا (س) = _____

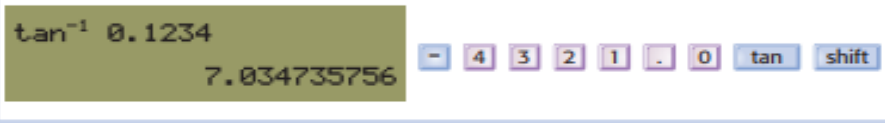
مثال

أوجد قياس كل زاوية من الزاويا الحادّة التالية مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة إذا علمت أن ظل الزاوية يساوي:

أ ٠,١٢٣٤ ب ٥ ج ٢,٧٦٥

الحــلّ:

أ



قياس الزاوية هو ٧,٠°

ب

قياس الزاوية هو ٧٨,٧°

ج

قياس الزاوية هو ٧٠,١°

تمرين

في كل حالة من الحالات التالية، أوجد (مُقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية) قياس الزاوية الحادة التي نسبة ظلّها تساوي:

أ ٠,٥ _____ ب ٠,٨٦٦ _____ ج ١,٢٥ _____ د ١٢ _____

.....

.....

.....

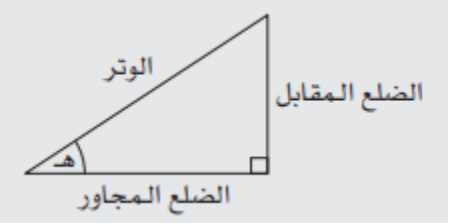
.....

.....

قوانين هامة

$$\text{جا (هـ)} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}\ ،$$

$$\text{جتا (هـ)} = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}\ ،$$

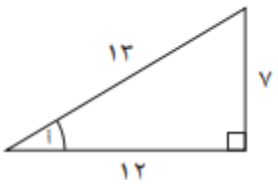


تمرين

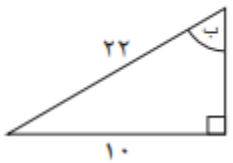
لكل مثلّث من المثلّثات التالية، اكتب قيمة كل من:

(١) جيب الزاوية المشار إليها بحرف (٢) جيب تمام الزاوية المشار إليها بحرف (٣) ظل الزاوية المشار إليها بحرف

أ



ب



.....

.....

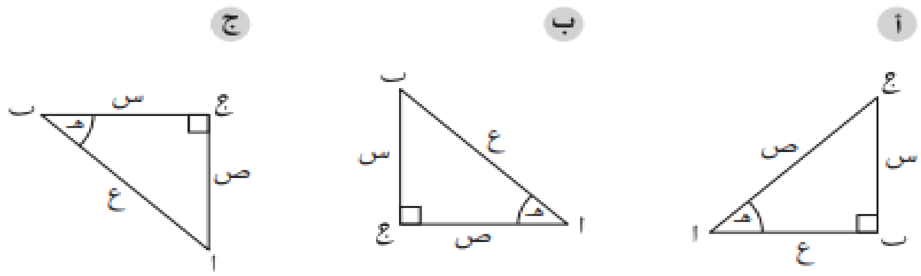
....

....

تمرين

لكل مثلّث من المثلّثات التالية، أوجد:

(١) الوتر (٢) طول الضلع المقابل للزاوية (هـ)



,,

,,

,,

,,

,,

تمرين

استخدم الآلة الحاسبة لتجد كل ناتج فيما يلي مقرّبًا إلى أقرب درجة:

أ زاوية حادّة جيبها ٠,٧٠٧ ________

ب زاوية حادّة جيب تمامها ٠,٤٣٨ ________

ج زاوية حادّة جيب تمامها ٠,٥٥ ________

د زاوية حادّة جيبها $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ________

هـ زاوية حادّة جيبها $\frac{١}{٢}$ ________

و زاوية حادّة ظلّها ٠,٥ ________

,,
,,
,,
,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

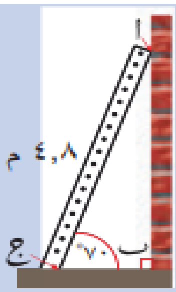
٤-١١ حل مسائل باستخدام حساب المثلّثات

نشاط

يرتكز سلم طوله ٤,٨ سم على جدار رأسي وقاعدته على أرض أفقية. يشكّل السلّم مع الأرض زاوية قياسها ٧٠°

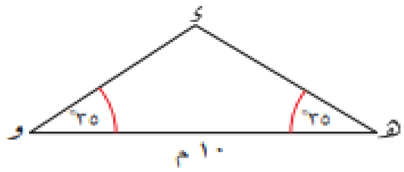
أ كم تبعد قمة السلم عن قاعدة الجدار؟

ب كم تبعد قاعدة السلّم عن الجدار؟



,,
,,
,,
,,
,,
,,

تمرين



في المثلّث المتطابق الضلعَين ء هـ و،
قياس (هـ^) = قياس (و^) = ٣٥° وطول
الضلع هـ و = ١٠ م.

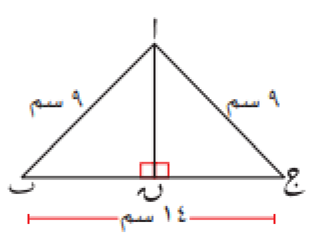
أ احسب طول العمود النازل من الرأس ء
إلى القاعدة هـ و.

ب احسب طول الضلع ء هـ.

,,,

تمرين

احسب قياسات زوايا مثلّث متطابق الضلعَين
أطوال أضلاعه ٩ سم، ٩ سم، ١٤ سم.



....
....
....

.....

.....

.....

.....

.....

الوحدة الثانية عشرة: الاحتمالات ومخطّط الشجرة ومخطّط ڤن

١٢-١ استخدام مخطط الشجرة لتمثيل النواتج الممكنة للحدث

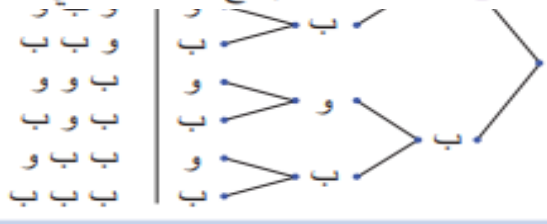
مثال

ارسم مخطّط الشجرة لتبيّن النواتج الممكنة لولادة أول ثلاثة أطفال في عائلة ما. استخدم (و) لتدل على ولد، (ب) لتدل على بنت.

وضعت سميرة في حقيبتها ثلاث بطاقات ملوّنة: حمراء، و زرقاء، و خضراء.

أ ارسم مخطّط شجرة لتعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة سحب بطاقة واحدة من الحقيبة عشوائيًّا، ثم إعادتها إلى الحقيبة، ومن ثم سحب بطاقة أخرى من الحقيبة عشوائيًّا.

ب ما عدد النواتج الممكنة في التجربة؟



والثالث.

ب ب ب
ب ب و
ب و ب
ب و و
و ب ب
و ب و
و و ب
و و و

نشاط

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين

وُضعت أربع بطاقات كُتبت عليها الأحرف: أ، ب، ج، د في وعاء، سُحبت بطاقة واحدة، وتمّ تسجيل الحرف، ثم أُعيدت البطاقة إلى الوعاء. وسُحبت بطاقة أخرى وتم تسجيل الحرف أيضًا للحصول على نواتج من حرفَين.

أ ارسم مخطّط الشجرة الذي يعرض الفضاء العَيني لهذه التجربة.

ب كم ناتجًا يوجد في الفضاء العَيني؟

,,

,,

,,

,,

,,

,,

,,

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

تمرين

وضعت آمنة أربع بطاقات ملوّنة: صفراء، وحمراء، وخضراء، وزرقاء في علبة. سحبت من العلبة بطاقة واحدة عشوائيًّا، ثم رمت قطعة نقد معدنية. ارسم مخطّط الشجرة لعرض النواتج الممكنة.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين

علبة تحتوي على ثماني بطاقات خضراء، وأربع بطاقات صفراء. سحب سعيد بطاقة واحدة من العلبة، ولم يُعدها إلى العلبة، ثم سحب بطاقة أخرى.

ارسم مخطّط الشجرة لعرض النواتج الممكنة لسحب البطاقتَين.

,,

,,

,,

الوحدة الثالثة عشرة: النسب المثلّثية لزوايا قياسها أكبر من ٩٠°

,,

,,,

,,,

,,,

١٣-١ الجيب وجيب التمام والظل لزوايا قياسها أكبر من ٩٠°.

قوانيين هامة

- تكون الزاويتان متكاملتين إذا كان مجموع قياسيهما يساوي ١٨٠°.
- للزاوية، والزاوية المتكاملة معها نفس قيمة الجيب (جا(هـ) = جا(١٨٠° − هـ)).
- للزاوية، والزاوية المتكاملة معها نفس قيمة جيب التمام، ولكن بإشارتين مختلفتين (جتا(هـ) = ⁻جتا(١٨٠° − هـ)).
- للزاوية، والزاوية المتكاملة معها نفس قيمة الظل ولكن بإشارتين مختلفتين (ظا(هـ) = ⁻ ظا(١٨٠° − هـ)).

مثال 1

مثال 2

ما قياس الزاوية الحادة التي جيبها يساوي (١٢٠°)؟

الحـــلّ:

جا(١٨٠° − هـ) = جا(هـ) جا(١٨٠° − ١٢٠°) = جا(١٢٠°) جا(٦٠°) = جا(١٢٠°) قياس الزاوية هو ٦٠°	عوّض هـ = ١٢٠°

عبّر عن كلّ نسبة من النسب المُثلّثية التالية بدلالة زاوية تقع بين ٠° و ١٨٠°:

أ جتا(١٠٠°)　　ب −جتا(٣٥°)

الحـــلّ:

أ	جتا(١٨٠° − هـ)= −جتا(هـ) جتا(١٨٠° − ١٠٠°) = −جتا(١٠٠°) جتا(٨٠°) = −جتا(١٠٠°)، ∴ جتا(١٠٠°) = −جتا(٨٠°)	عوّض هـ = ١٠٠°
ب	−جتا(هـ) = جتا(١٨٠° − هـ) −جتا(٣٥°) = جتا(١٤٥°)	عوّض هـ = ٣٥°

نشاط

عبّر عن كل نسبة من النسب المثلّثية التالية بدلالة زاوية قياسها يقع بين ٠° و ١٨٠°:

أ جتا(١١٢°)　　ب جا(١٥٦°)　　ج −جتا(٧٥°)　　د جا(١٢٥°)

مُساعَدة

جا(هـ) = جا(١٨٠° − هـ)

جتا(هـ) = −جتا(١٨٠° − هـ)

.....

.....

.....

.....

تمرين

أوجد كل القيَم الممكنة لقياس الزاوية $\hat{هـ}$ الواقعة بين ٠° و ١٨٠° (مُقرّبًا إلى أقرب درجة) في كل حالة من الحالات التالية:

أ جا(هـ) = ٠,٢٥٥ ب جتا(هـ) = ⁻٠,٥٦٦ ج جا(هـ) = ٠,٧٨٩ د جتا(هـ) = ٠,٣٤٥

....

....

....

....

٢-١٣ قانون الجيب

ينصّ قانون الجيب على أن: $\frac{جا(ا)}{ا'} = \frac{جا(ب)}{ب'} = \frac{جا(ج)}{ج'}$ أو $\frac{ا'}{جا(ا)} = \frac{ب'}{جا(ب)} = \frac{ج'}{جا(ج)}$.

نشاط

أوجد قيمة س في كلّ معادلة من المعادلات التالية:

أ $\frac{س}{جا(٥٠°)} = \frac{٩}{جا(٣٨°)}$ ب $\frac{س}{جا(٢٥°)} = \frac{٢٠}{جا(١٠٠°)}$

,,,

,,,

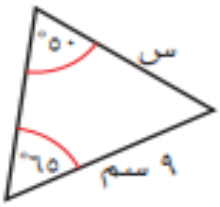
,,,

,,,

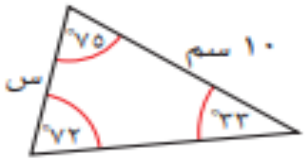
تمرين

أوجد طول الضلع المشار إليه بالحرف س في كلّ مثلّث من المُثلّثات التالية:

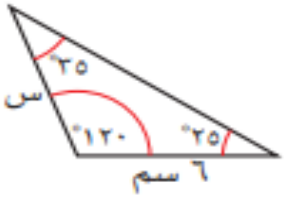
أ



ب



ج



.....

.....

.....

.....

تمرين

أوجد قيمة س في كل معادلة من المعادلات التالية مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية:

أ $\frac{\text{جا}(\text{س})}{١١} = \frac{\text{جا}(٤٥^\circ)}{١٢}$

ب $\frac{\text{س}}{\text{جا}(٥٠^\circ)} = \frac{٢٣}{\text{جا}(٧٢^\circ)}$

.....

.....

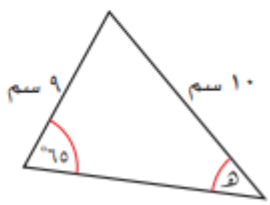
.....

.....

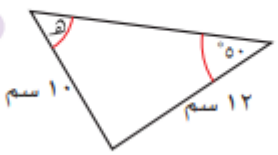
تمرين

أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف هـ في كل مثلّث من المُثلّثات التالية، واكتب إجابتك مقرَّبةً إلى أقرب منزلة عشريّة واحدة:

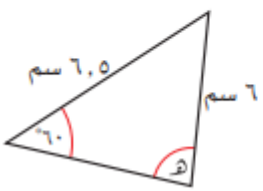
أ



ب



ج



.....

.....

.....

.....

.....

.....

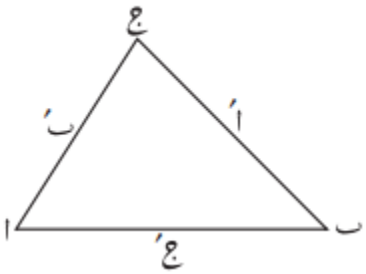
.....

...

١٣-٣ قانون جيب التمام

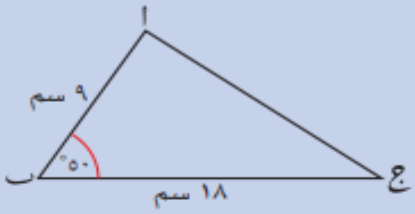
يُعبَّر عن **قانون جيب التمام** بصيغة منفردة:

$$(أ')^{٢} = (ب')^{٢} + (ع')^{٢} - ٢(ب')(ع')(\text{جتا}(أ))$$



مثال

في المُثلَّث ا ب ج، ق(∠ب) = ٥٠°، طول الضلع ا ب = ٩ سم وطول الضلع ب ج = ١٨ سم.
احسب طول الضلع ا ج.



الحـــلّ:

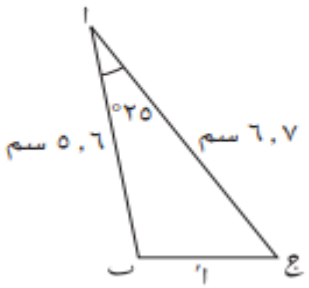
$(ب')^{٢} = ٩^{٢} + ١٨^{٢} - (٢ \times ٩ \times ١٨ \times \text{جتا}(٥٠°))$
$= ٨١ + ٣٢٤ - (٢٠٨,٢٦٣١...)$
$= ١٩٦,٧٣٦٨...$
$\therefore ب' = \sqrt{١٩٦,٧٣٦٨...}$
$= ١٤,٠٢٦٢...$
طول ا ج = ١٤,٠ سم (مقرَّبًا إلى أقرب عدد مكون من ٣ أرقام معنوية)

لاحظ أن ا ج = ب'، وتعرف أن ق(∠ب) = ٥٠°.
استخدم قانون جيب التمام في صورة
$(ب')^{٢} = (أ')^{٢} + (ع')^{٢} - ٢(أ')(ع')(\text{جتا}(ب))$

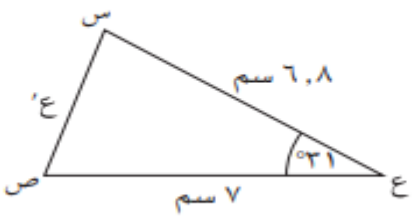
نشاط

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلّث من المثلّثات التالية مُقرَّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية:

أ



ب



.....

.....

.....

.....

.....

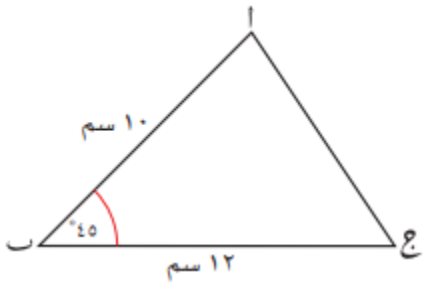
.....

.....

.....

تمرين

في المُثلَّث ا ب ج، ق(∠ب) = ٤٥°، طول الضلع ا ب = ١٠سم، طول الضلع ب ج = ١٢ سم.
احسب طول الضلع ا ج.



.....

.....

.....

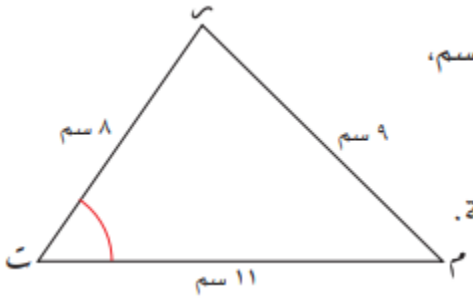
تذكر

$$\text{جتا}(ع) = \frac{(أ')^٢ + (ب')^٢ - (ج')^٢}{٢(أ')(ب')}$$

تمرين

في المُثلَّث ت م ر، طول الضلع ت م = ١١ سم، وطول الضلع م ر = ٩ سم، وطول الضلع ر ت = ٨ سم.

احسب ق(ت̂) مُقرِّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

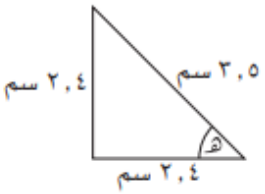
.....

تمرين

أوجد قياس الزاوية هـ في كل مثلّث من المثلّثات التالية مُقرَّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية:

أ

ب



.....

.....

.....

.....

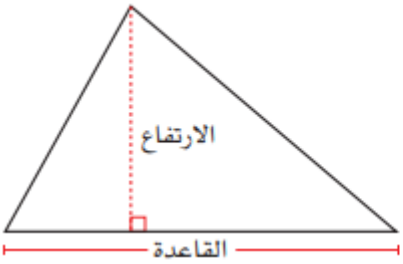
.....

١٣-٤ مساحة المثلّث

تذكر

عرفت أن مساحة المُثلّث تُعطى بالصيغة التالية:

المساحة = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع



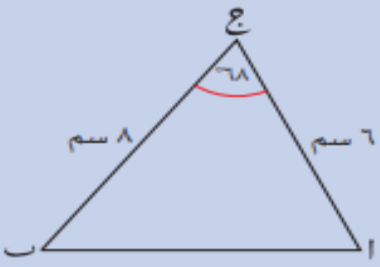
قوانيين هامة

- مساحة المثلّث ا ب ع: المساحة = $\frac{١}{٢}$ أ × ب جا(ع) أو المساحة = $\frac{١}{٢}$ أ × ج جا(ب) أو المساحة = $\frac{١}{٢}$ ب × ج جا(ا).

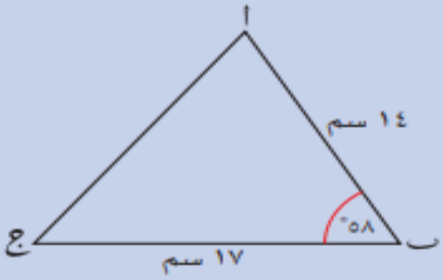
مثال

احسب مساحة كل مُثلَّث من المُثلَّثين التاليَين:

أ



ب



الحــلّ:

أ

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ا′ × ب′ × جا(ج)

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٦ × جا(٦٨°)

= ٢٢,٣ سم^{٢} (مُقرَّبة إلى أقرب منزلة عشريّة).

نحتاج دائمًا إلى معرفة طول ضلعَين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

ب

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ا′ × ج′ × جا(ب)

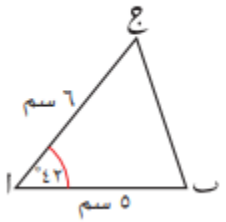
= $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ١٤ × جا(٥٨°)

= ١٠٠,٩ سم^{٢} (مُقرَّبة إلى أقرب منزلة عشريّة).

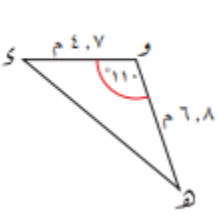
نشاط

أوجد مساحة كلّ مثلّث من المثلّثات التالية:

أ



ب



ج

.....

.....

.....

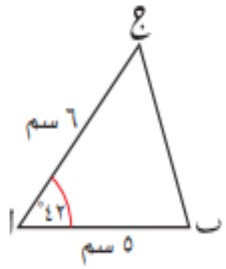
.....

.....

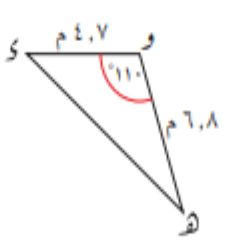
نشاط

أوجد مساحة كلّ مثلّث من المثلّثات التالية:

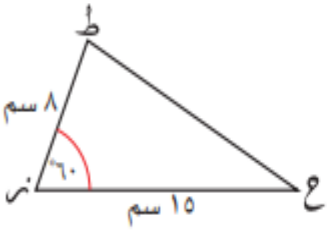
أ



ب



ج



.....

.....

.....

.....

.....

.....

تمرين

ارسم رسمًا تشبيهيًّا لكل مثلّث من المثلّثات التالية قبل حساب المساحة:

أ المثلّث ا ب ج، حيث $\overline{ب ج}$ = ٨ سم، $\overline{ا ج}$ = ٥ سم، ق(ج) = ٣٤°

_____

_____

_____

_____

ب المثلّث ا ب ج، حيث ا′ = ٤٫٥ سم، ب′ = ١٢ سم، ق(ج) = ١١٠°

_____

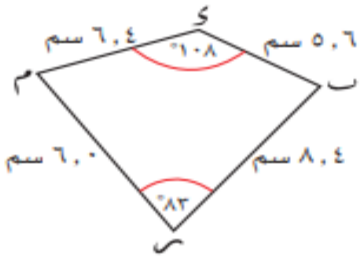
_____

_____

_____

تمرين

أوجد مساحة الشكل م ر ب ك المجاور.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

١٤-١ المُتّجهات

قوانيين هامة

- المتّجه كمّية لها طول واتّجاه.
- تُمثّل المتّجهات بقطع مستقيمة. يمثّل طول القطعة المستقيمة طول المتّجه ويمثّل السهم اتّجاهه. المتّجه المتمثل بالقطعة المستقيمة اب يبدأ عند النقطة ا، ويمتد في اتّجاه النقطة ب.

- تُكتب المتّجهات في الصورة الرأسية $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ أيضًا.

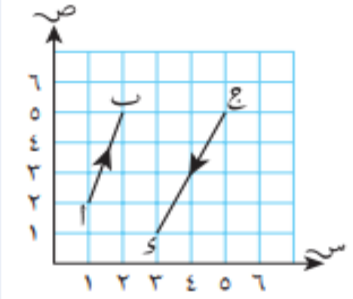
يمثّل المتّجه الرأسي سحبًا (كيفية تحريك نقطة بداية المتّجه للوصول إلى نقطة نهايته).

يمثّل المتّجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ سحب وحدة واحدة في الاتّجاه السيني، ووحدتَين في الاتّجاه الصادي.

مثال

ارسم المُتَّجهين الرأسيّين $\overrightarrow{أ ب} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{ج ء} = \begin{pmatrix} -٢ \\ -٤ \end{pmatrix}$.

الحـــلّ:



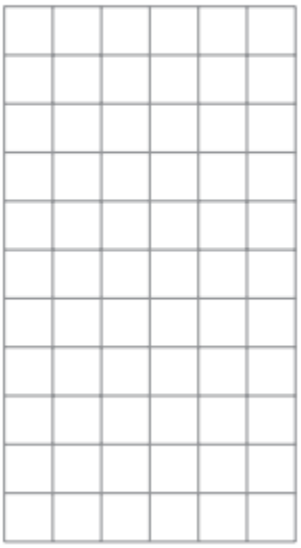
ابدأ من النقطة أ، وتحرّك وحدة واحدة إلى اليمين، ثم ثلاث وحدات إلى الأعلى، لتصل إلى النقطة ب. صل بين النقطتَين، وأشر إلى الاتجاه بسهم.

ابدأ من النقطة ج، وتحرك وحدتَين إلى اليسار، وأربع وحدات إلى الأسفل، لتصل إلى النقطة ء. صل بين النقطتَين، وأشر إلى الاتّجاه بسهم.

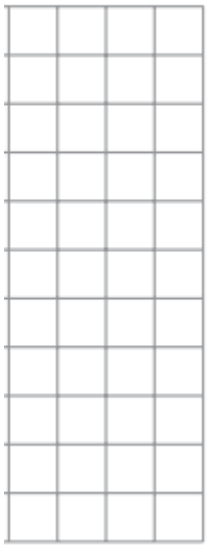
نشاط

مثل كلا من المتجهات الاتية على شبكة المربعات

أ $\overrightarrow{أ ب} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$



ب $\overrightarrow{ج ء} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٤ \end{pmatrix}$



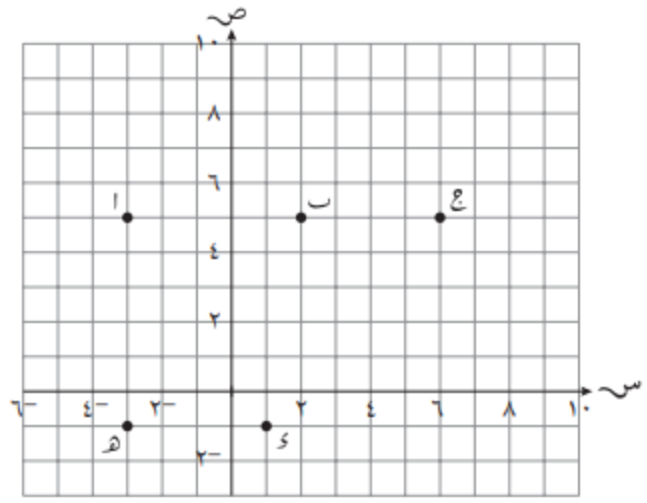
١٤-٢ المُتّجهات المتساوية والمتّجهات المتوازية

قوانيين هامة

- المتّجهان المتساويان هما متّجهان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه.
- سالب المتّجه هو متّجه له طول المتّجه نفسه، ولكن يتعاكسان في الاتّجاه. إذًا، سالب المتّجه $\overrightarrow{آ}$ هو المتّجه $-\overrightarrow{آ}$ وسالب المتّجه $\overrightarrow{اب}$ هو المتّجه $\overrightarrow{با}$

نشاط

استخدم النقاط المبيّنة على الرسم، لتكتب كل متّجه من المتّجهات التالية في الصورة الرأسية:



أ $\overrightarrow{اب}$ _____ ب $\overrightarrow{بج}$ _____ ج $\overrightarrow{اهـ}$ _____

د $\overrightarrow{بء}$ _____ هـ $\overrightarrow{ءب}$ _____ و $\overrightarrow{هـج}$ _____

.....

.....

.....

مثال 1

إذا كان $\overleftarrow{هـ} = \begin{pmatrix} ٨ \\ -٤ \end{pmatrix}$، فأوجد $\frac{١}{٤}\overleftarrow{هـ}$.

الحـــلّ:

$\frac{١}{٤}\overleftarrow{هـ} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٨ \\ -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٤} \times ٨ \\ \frac{١}{٤} \times -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \end{pmatrix}$	اضرب كلا العددَين في $\frac{١}{٤}$

مثال 2

إذا كان $\overleftarrow{ق} = \begin{pmatrix} -٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$، أوجد $-٥\overleftarrow{ق}$.

الحـــلّ:

$-٥\overleftarrow{ق} = -٥\begin{pmatrix} -٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ \times -٣ \\ -٥ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥ \\ -١٠ \end{pmatrix}$	مقدار هذا المُتّجه يساوي ٥ أضعاف مقدار المُتّجه الأصلي، لكنه في الاتّجاه المعاكس له.

تمرين

إذا علمت أن $\overleftarrow{أ} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$، $\overleftarrow{ب} = \begin{pmatrix} -٢ \\ ٤ \end{pmatrix}$، $\overleftarrow{ج} = \begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix}$. فأوجد:

أ $٤\overleftarrow{ب}$ _____ ب $٢\overleftarrow{أ}$ _____ ج $-٤\overleftarrow{ج}$ _____

.....

.....

.....

.....

١٤-٣ حساب المُتّجهات

قوانين هامة

- لا يمكن ضرب المتّجهات بعضها في بعض، ولكن يمكن ضرب المتّجه في مقدار عددي (عدد).
  ينتج عن ضرب المتّجه $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ في المقدار العددي ث المتّجه $\begin{pmatrix} ث\ س \\ ث\ ص \end{pmatrix}$.
- تُجمع المتّجهات وتُطرح باستخدام طريقة 'القمّة-القاع' أو قانون المثلّث. إذًا:

$$\begin{pmatrix} س_١ \\ ص_١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} س_٢ \\ ص_٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س_١ + س_٢ \\ ص_١ + ص_٢ \end{pmatrix}$$

مثال

إذا كان $\overleftarrow{أ} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$، $\overleftarrow{ب} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \end{pmatrix}$، أوجد متّجهًا رأسيًّا يساوي:

أ $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$ ب $\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}$ ج $٣\overleftarrow{أ}$

د $\overleftarrow{أ} + ٤\overleftarrow{ب}$ هـ $٢\overleftarrow{أ} - ٣\overleftarrow{ب}$

الحـلّ:

أ $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٢ \\ ٤ - ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

ب $\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ - ٢ \\ ٤ + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٥ \end{pmatrix}$

ج $٣\overleftarrow{أ} = ٣\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \times ٣ \\ ٤ \times ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ١٢ \end{pmatrix}$

د $\overleftarrow{أ} + ٤\overleftarrow{ب} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix} + ٤\begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٨ \\ ٤ + (-٤) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

هـ $٢\overleftarrow{أ} - ٣\overleftarrow{ب} = ٢\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ \\ ٨ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦ \\ -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ١١ \end{pmatrix}$

$\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} + (-\overleftarrow{ب})$؛
$-\overleftarrow{ب}$ يساوي $\begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

نشاط

إذا علمت أن ا = $\begin{pmatrix}١\\٢\end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix}-٢\\٤\end{pmatrix}$، ج = $\begin{pmatrix}٠\\-٣\end{pmatrix}$. فأوجد:

أ $٤\overline{ب}$ _____ ب $٢\overline{ا}$ _____ ج $-٤\overline{ج}$ _____

د $\overline{ا}+\overline{ب}$ _____ هـ $\overline{ب}+\overline{ج}$ _____ و $\overline{ا}+\overline{ب}+\overline{ج}$ _____

ز $٢\overline{ا}+٣\overline{ب}$ _____ ح $٤\overline{ب}-٢\overline{ج}$ _____ ط $-٤\overline{ا}-٢\overline{ب}$ _____

.....,

.....

.....

.....

.....

تمرين

إذا كان $\overleftarrow{ت}$ = $\begin{pmatrix}٤\\-٢\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{ر}$ = $\begin{pmatrix}-١\\-٣\end{pmatrix}$

اكتب كل متّجه من المُتّجهَين التاليين في الصورة الرأسية:

أ $٣\overleftarrow{ت}$ ب $\overleftarrow{ت}+\overleftarrow{ر}$

.....

.....

.....

تمرين

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = $\begin{pmatrix}٤\\-٢\end{pmatrix}$، $\overleftarrow{ب}$ = $\begin{pmatrix}-٤\\٣\end{pmatrix}$، فاكتب $٢\overrightarrow{أ}-\overleftarrow{ب}$ في صورة متّجه رأسي.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تمرين

إذا كان $\overrightarrow{أ} = \begin{pmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{pmatrix}$، $\overrightarrow{ب} = \begin{pmatrix} ٤ \\ -٢ \end{pmatrix}$،

احسب

أ $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ ب $٢\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب}$ ج $\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

.....

.....

.....

.....

.....

هذا والله ولى التوفيق