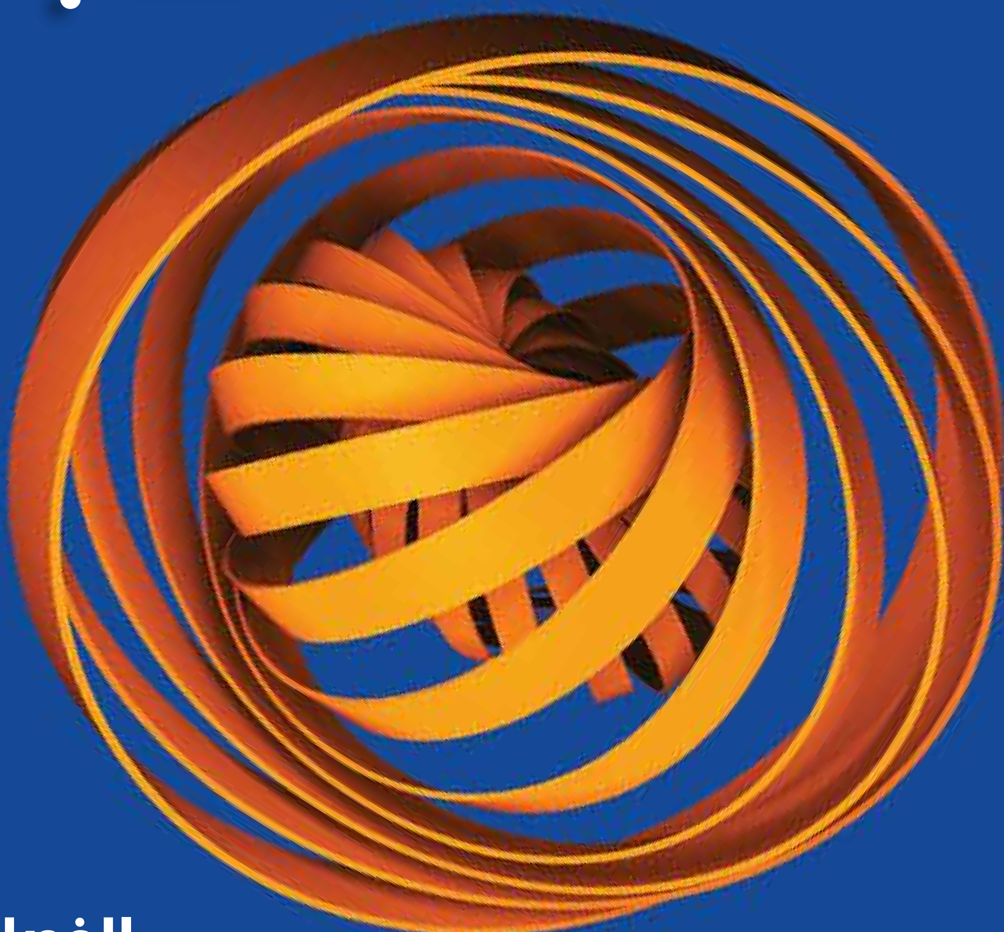
سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات

كتاب الطالب

١٠



الفصل الدراسي الأول

الطبعة التجريبية ١٤٤٣ هـ - ٢٠٢١ م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

كتاب الطالب

١٠

الفصل الدراسي الأول

الطبعة التجريبية ١٤٤٣ هـ - ٢٠٢١ م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

© مطبعة جامعة كامبريدج ووزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

يخضع هذا الكتاب لقانون حقوق الطباعة والنشر، ويخضع للاستثناء التشريعي
المسموح به قانونًا ولأحكام التراخيص ذات الصلة.
لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب من دون الحصول على الإذن المكتوب من
مطبعة جامعة كامبريدج ومن وزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

الطبعة التجريبية ٢٠٢١ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب - الرياضيات للصف العاشر - من سلسلة
كامبريدج للرياضيات الأساسية والمُوسَّعة IGCSE للمؤلفَين كارين مورّيسون ونيك هامشاو.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج رقم ٤٠ / ٢٠٢٠.

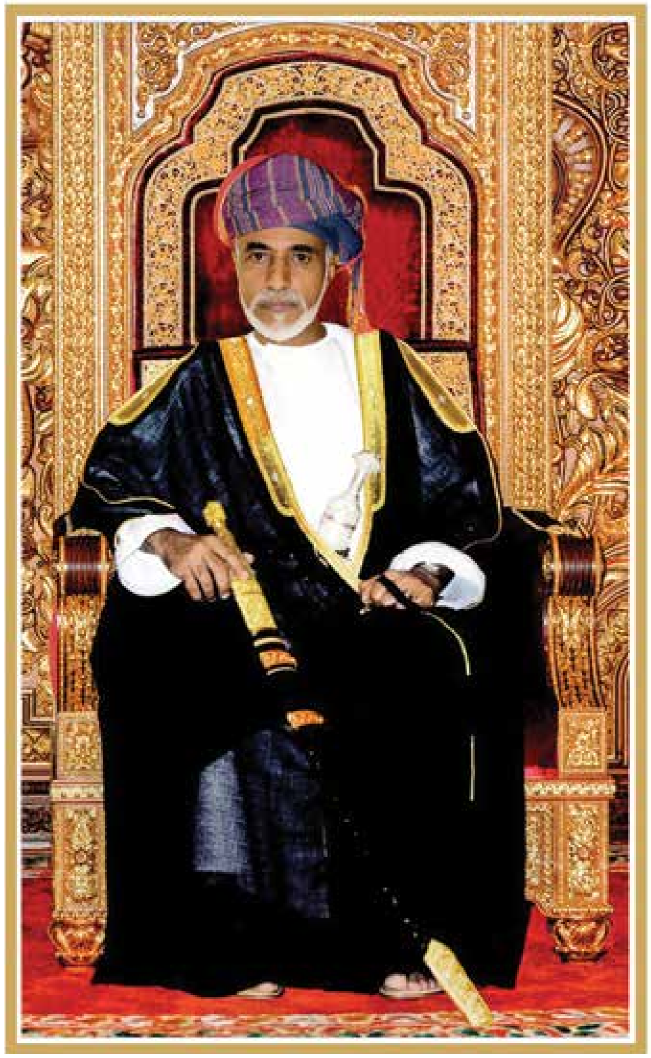
لا تتحمَّل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توفُّر أو دقة المواقع الإلكترونية
المستخدمة في هذا الكتاب، ولا تؤكِّد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق
وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٩٠ / ٢٠٢١ واللجان المنبثقة عنه

محفوظة جميع الحقوق

جميع حقوق الطبع والتأليف والنشر محفوظة لوزارة التربية والتعليم
ولا يجوز طبع الكتاب أو تصويره أو إعادة نسخه كاملاً أو مجزّأً أو ترجمته
أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات بهدف تجاري بأي شكل من الأشكال
إلا بإذن كتابي مسبق من الوزارة، وفي حالة الاقتباس القصير يجب ذكر المصدر.



المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
–طيّب اللّه ثراه–

حضـرة صـاحب الجـلالـة
السلطان هيثم بن طارق المعـظـم
– حـفـظـه اللّه ورعاه –

سلطنـــة عُمـــان

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لَنا　　جَلالَةَ السُّلْطان

وَالشَّعْبَ في الأَوْطان　　بِالْعِزِّ والأَمان

وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا　　عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي　　أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ

فارْتَقي هامَ السَّماء　　وَامْلَئي الْكَوْنَ الضِّياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد :

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقرّرات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المقدمة

يرتكز هذا الكتاب المدرسي على كتاب معروف وناجح تمَّت كتابته للمرة الأولى بالاستناد إلى منهج كامبريدج IGCSE في الرياضيات (٠٥٨٠ / ٠٩٨٠). وهو يُغطّي المنهج الدراسي بأكمله ضمن مجموعة متكاملة تُعطى لجميع الطلاب والمعلمين.

تمّ تأليف الكتاب، بحيث تستطيع العمل فيه بالتدرُّج من البداية إلى النهاية. تعتمد جميع الوحدات على المعرفة والمهارات التي تعلّمتها في السنوات السابقة، وتُبنى بعض الوحدات اللاحقة على المعرفة التي تم تطويرها في الكتاب من قبل. وسوف تُساعدك فقرات 'فائدة' و'سابقًا' 'ولاحقًا' على ربط محتوى الوحدات بما تعلّمته سابقًا، والإضاءة على المكان الذي ستستخدم فيه تلك المعرفة مرّة أخرى في الدروس اللاحقة.

المسار المقترح للعمل في الكتاب هو:

الفصل الدراسي الأول للصفّ العاشر: الوحدات من ١ إلى ٨

الفصل الدراسي الثاني للصفّ العاشر: الوحدات من ٩ إلى ١٧

ميزات رئيسية

تُفتتَح كل وحدة بقائمة مُفردات رياضية رئيسية وقائمة أهداف ستتعلَّمها في الوحدة، ومُقدِّمة تعرض نظرة عامَّة عن كيفية استخدام الرياضيات في الحياة الواقعية.

ويُشار إلى **المفردات الرياضية الرئيسية** في متن الدروس باللون الأزرق، حيث يتمّ استخدامها وشرحها.

تقسم الوحدات إلى أقسام (دروس)، يُغطّي كل منها موضوعًا مُعيَّنًا، ويتم تقديم وشرح المفاهيم في كل موضوع، وإعطاء أمثلة لتقديم طرائق مختلفة للعمل بطريقة عملية وسهلة المُتابَعة.

تُقدِّم **التمارين** الخاصّة بكل موضوع أسئلة مُتنوِّعة، وبمستويات مختلفة، تسمح للطالب بالتدرُّب على الأساليب التي تم تقديمها في الدرس، وتتراوح هذه التمارين بين الأنشطة البسيطة والتطبيقات وحل المسائل.

يرد مُلخَّص لكل وحدة تُعرَض فيه المعارف والمهارات التي يجب أن تمتلكها عند الانتهاء من العمل في الوحدة، حيث يمكنك استخدام هذا المُلخَّص كقائمة عند المراجعة، للتحقّق من تغطية المطلوب معرفته في الوحدة.

ترد بعض التمارين الموجزة في نهاية كل وحدة.

فائدة

يجب أن تكون معظم مفاهيم الأعداد مألوفة لديك. سوف تُساعدك هذه الوحدة على مراجعة المفاهيم والتحقُّق من تذكُّرها.

سابقًا

من المهم أن تتذكر قواعد ترتيب العمليات الحسابية قبل البدء بهذا الدرس.

لاحقًا

لاحقًا، ستتعامل مع ضرب وقسمة وجمع وطرح الكسور مرة ثانية عند التعامل مع المقادير الجبرية.

مُميّزات في الهامش

تتضمّن الإرشادات المُفيدة في هوامش الكتاب ما يلي:

مفاتيح: وهي تعليقات عامّة تُذكِّرك بمعلومات مُهمَّة أو أساسية مُفيدة للتعامُل مع تمرين ما، فهي توفِّر معلومات إضافية أو دعمًا إضافيًا في موضوعات قد تكون مُلتبِسة.

مساعدة: تُغطّي الأخطاء الشائعة بناءً على تجارب المعلّمين مع طلبتهم، وتمنحك أشياء يجب أن تتذكّرها أو أن تكون حذرًا منها.

مساعدات في حل المسائل: أثناء عملك في العام الدراسي، سوف تُطوِّر 'صندوق الأدوات' الخاص بك والمُتعلِّق بمهارات واستراتيجيات حل المسائل، وسوف يُذكِّرك هذا الصندوق بإطار حل المسائل ويحثّك على اقتراح طرائق لمعالجة أنواع مختلفة من المسائل.

روابط مع موضوعات أخرى: لا يتمّ تعلُّم مادة الرياضيات بمعزل عن المواد الأخرى، وسوف تستخدم وتُطبِّق ما تتعلَّمه في الرياضيات على العديد من المواد الدراسية الأخرى، وتُشير هذه النوافذ إلى كيفية الاستفادة من المفاهيم الرياضية في موضوعات أخرى.

تذكر أن 'المعامل' هو العدد الذي يقع إلى جانب المتغير في الحد.

مُساعَدة

انتبه للأعداد السالبة التي تسبق الأقواس لأنها تحتاج دائمًا إلى اهتمام مضاعف.

يعتبر تحويل المعلومات من صيغ لفظية إلى مخططات أو معادلات من الاستراتيجيات المفيدة لحل المسائل.

مصادر إضافية

دليل المعلم: هذا الكتاب متوفر لمُعلّميك، وهو يتضمَّن، إضافة إلى الأشياء الأخرى، بطاقات مراجعة لكل وحدة، بالإضافة إلى إجابات جميع التمارين وتمارين نهاية الوحدة.

كتاب النشاط: يتبع هذا الكتاب وحدات ودروس كتاب الطالب، ويُقدِّم تمارين إضافية هادفة لمن يرغب منكم في المزيد من التدريبات، ويتضمّن أيضًا مُلخَّصًا للمفاهيم الأساسية، إضافة إلى 'المفاتيح' و'المساعدات' بهدف توضيح الموضوعات المرتبطة بها.

الوحدة الأولى: استخدام التمثيلات البيانية

المُفردات

- التحويل Conversion
- المنطقة Region
- البرمجة الخطّية Linear programming
- المماس Tangent

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تستخدم التمثيلات البيانية للتحويل.
- تكتب مُتباينات خطّية وتوجد المناطق التي تُمثّلها في المستوى الإحداثي.
- تُقدّر ميل المنحنى برسم المماس.
- تحل مسائل باستخدام التمثيلات البيانية للمسافة-الزمن والسرعة-الزمن.

القطار الدوّار – مدينة الألعاب.

تهدف مدن الألعاب إلى تسلية وترفيه زوّارها، حيث تضم عادة مجموعة من الألعاب الإلكترونية الممتلئة بالإثارة والمتعة، مثل الدولاب العملاق والقطار الدوّار وغيرهما من الألعاب الرائعة والجاذبة للصغار والكبار.

وتعود الإثارة الناجمة عن القطار الدوّار إلى شعورك وأنت تصل إلى القمّة أنك ستستمر في الصعود ولن تبقى على نفس المسار، ذلك أنّ عربة القطار تتحرك في اتّجاه مماسّ للمسار. سترسم في هذه الوحدة بعض التمثيلات البيانية، وستتعلم كيف تحسب ميل المنحنى عند نقاط مختلفة باستخدام المماس لذلك المنحنى.

١-١ التمثيلات البيانية للتحويل

يمكننا استخدام التمثيلات البيانية **للتحويل** من وحدة قياس إلى وحدة قياس أخرى، مثل التحويل من ميل إلى كيلومتر أو من دولار إلى ريال عُماني.

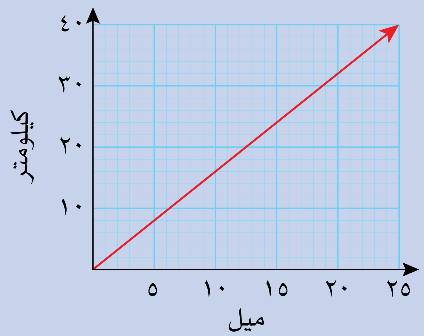
مثـــال ١

استخدم التمثيل البياني المجاور لتحوّل:

أ ١٠ أميال إلى كيلومترات.

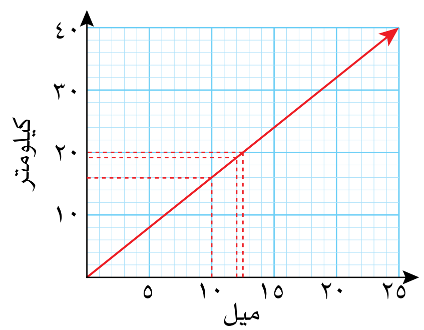
ب ١٢ ميلاً إلى كيلومترات.

ج ٢٠ كيلومترًا إلى أميال.



الحـــلّ:

أ
ب
ج



١٠ أميال تساوي ١٦ كم تقريبًا

١٢ ميلاً تساوي ١٩ كم تقريبًا

٢٠ كم تساوي تقريبًا ١٢,٥ ميلاً تقريبًا.

ارسم القطع المستقيمة المنقطة التي تتعامد مع المحورَين السيني والصادي وتتقاطع مع المستقيم الذي يمثّل التحويل بين الأميال والكيلومترات.

تمارين ١-١

طبِّق مهاراتك

١) يبيّن التمثيل البياني المجاور العلاقة بين درجات الحرارة السيليزية (° س) ودرجات الحرارة بالفهرنهايت (° ف).

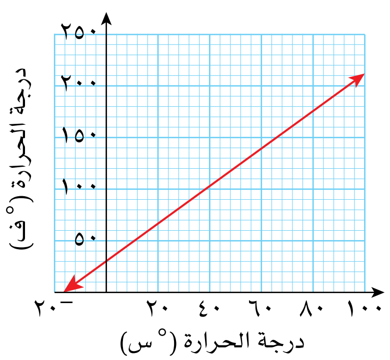
استخدم التمثيل البياني لتحول:

أ ٦٠° س إلى ° ف

ب ١٦° س إلى ° ف

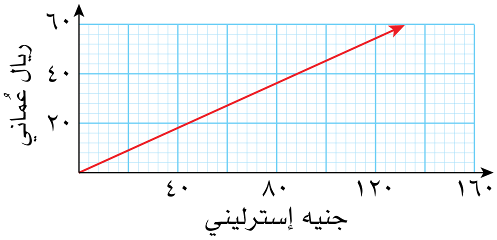
ج ٠° ف إلى ° س

د ١٠٠° ف إلى ° س



الجنيه الإسترليني هو العملة الرسمية في المملكة المتحدة.

٢) استخدم التمثيل البياني المجاور الذي يبين التحويل بين الجنيه الإسترليني والريال العماني للإجابة عن كل من الأسئلة التالية:



أ حوّل ٨٠ جنيهًا إسترلينيًّا إلى ريالات عُمانية.

ب إذا كان سعر شاشة حاسوب ٥٧ ريالاً عُمانيًّا، فكم سعرها بالجنيه الإسترليني؟

ج حدّد التحويل الخاطئ في كل ممّا يلي، ثم صحّح الخطأ:

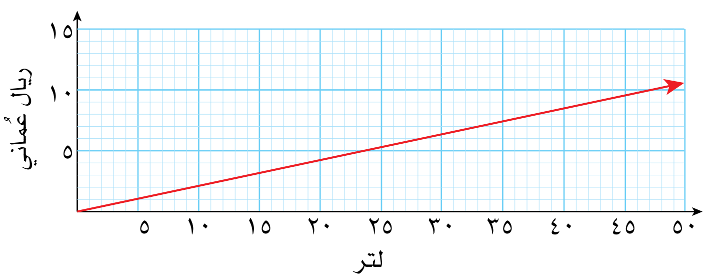
(١) ٣٠ ريالاً عُمانيًّا = ٦٦ جنيهًا إسترلينيًّا

(٢) ١٨ جنيهًا استرلينيًّا = ٤٠ ريالاً عُمانيًّا

(٣) ٦٠ جنيهًا استرلينيًّا = ٣٧ ريالاً عُمانيًّا

(٤) ٢٠ جنيهًا استرلينيًّا = ٩ ريالات عُمانيّة

٣) يُبيّن التمثيل البياني أدناه سعر لترات الوقود (بالريال العُماني) في سلطنة عُمان خلال شهر أبريل ٢٠٢٠م:



استخدم التمثيل البياني لتجد:

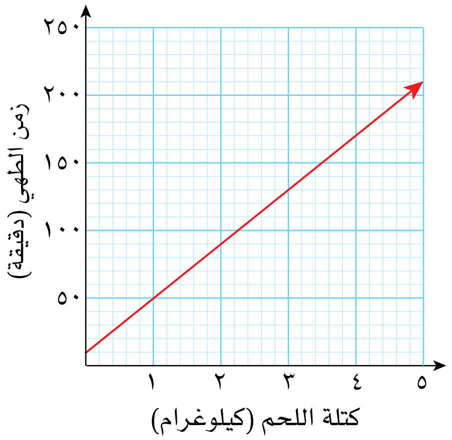
أ سعر ٣٠ لترًا من الوقود بالريال العُماني.

ب عدد اللترات التي تحصل عليها مقابل ٥ ريالات عُمانية.

ج سعر ١٠ لترات من الوقود.

د سعر ٨٠ لترًا من الوقود.

٤) يبيّن التمثيل البياني المجاور زمن الطهي اللازم لكتل مختلفة من اللحم.
استخدم التمثيل البياني للإجابة عن الأسئلة التالية:



أ ما الزمن التقريبي اللازم لنضج قطعة من اللحم كتلتها ٣,٤ كغم؟

ب نضجت قطعة من اللحم بعد ١٨٠ دقيقة، ما الكتلة التقريبية لهذه القطعة؟

ج اشرح لماذا لا يمكن استخدام هذا التمثيل البياني لتقدير الزمن اللازم لطهي بعض كتل اللحم التي تحتاج إلى ١٠ دقائق لتنضج.

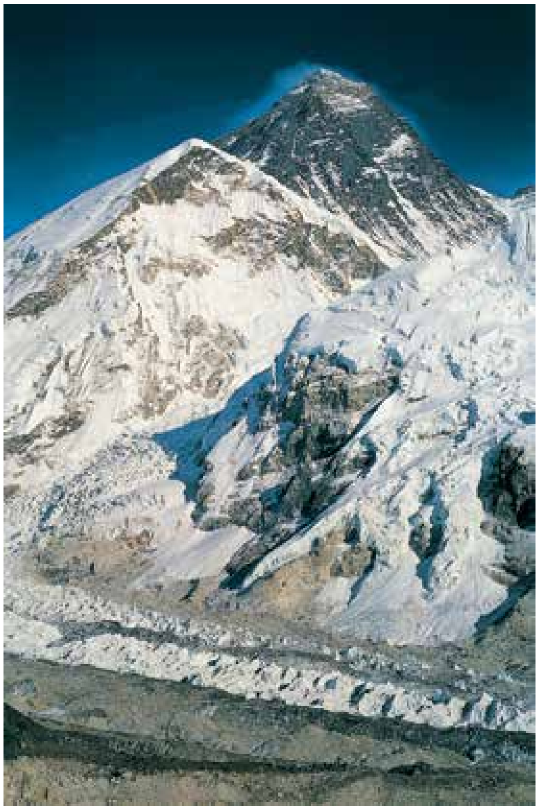
القدمِ الواحدة تُساوي ٣٠ سم تقريبًا.

٥) إذا علمت أن ارتفاع أعلى قمّة في جبل إفرست يبلغ حوالي ٢٩٠٠٠ قدم ويساوي ٨٨٥٠ مترًا تقريبًا:

أ ارسم على ورقة رسم بياني تمثيلاً بيانيًّا للتحويل بين الأقدام والأمتار.

ب يبلغ ارتفاع جبل شمس ٣٠٠٩ م تقريبًا، ما ارتفاعه بالأقدام؟ استخدم التمثيل البياني.

ج إذا كان طول نفق في جبال الألب الفرنسية ٣٤٠٠ قدم، فما طوله بالأمتار؟



قمة جبل إفرست

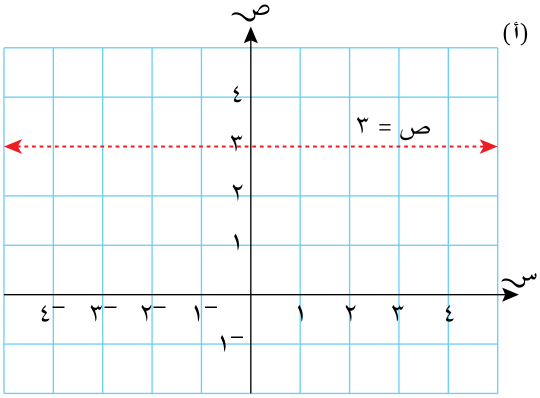
١-٢ تمثيل المناطق في المستوى الإحداثي

١-٢-أ المُتباينات في المستويات ثُنائية الأبعاد

يبيّن المخطط (أ) المجاور خطًّا مستقيمًا مُتقطِّعًا مُوازيًا للمحور السيني، ويكون الإحداثي الصادي لكل نقطة على المستقيم = ٣، أي أن معادلة المستقيم هي ص = ٣

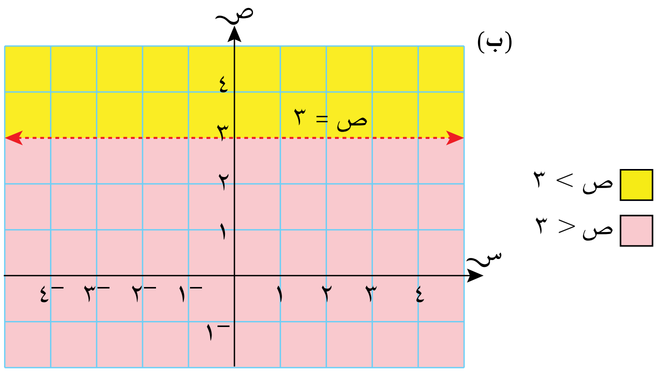
ويكون الإحداثي الصادي لجميع النقاط التي تقع فوق المستقيم ص = ٣ أكبر من ٣،

(أ)

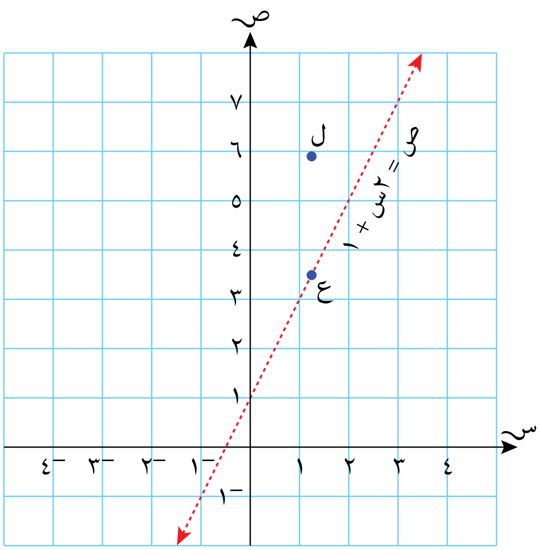


لذا تُمثّل المُتباينة ص > ٣ **المنطقة** التي تقع أعلى المستقيم وبالمثل تُمثّل المُتباينة ص < ٣ المنطقة التي تقع أسفل المستقيم.
وتظهر هاتان المنطقتان في المُخطّط (ب) المجاور.

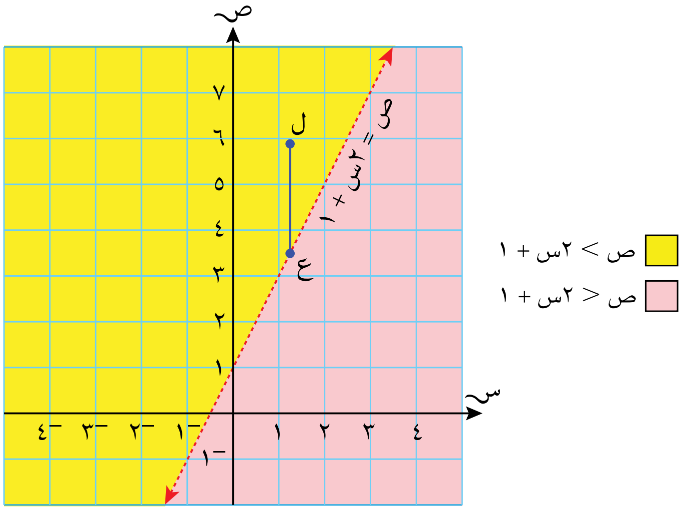
(ب)



يُظهِر الشكل المجاور التمثيل البياني للمستقيم المُتقطّع ص = ٢س + ١
وتكون إحداثيّات كل نقطة عليه (س، ص) تُحقّق المعادلة ص = ٢س + ١
ع نقطة تقع على المستقيم.
الإحداثي الصادي للنقطة ل أكبر من الإحداثي الصادي للنقطة ع.
للنقطتَين ع، ل نفس الإحداثي السيني وهذا يعني أن أي نقطة ل تنتمي إلى المنطقة التي تقع أعلى المستقيم يكون فيها ص > ٢س + ١



تُمثّل المنطقة الواقعة أعلى المستقيم المُتباينة ص > ٢س + ١، كذلك تُمثّل المنطقة الواقعة أسفل المستقيم المُتباينة ص < ٢س + ١



إذا كانت معادلة المستقيم في صورة ص = م س + جـ، فإن:

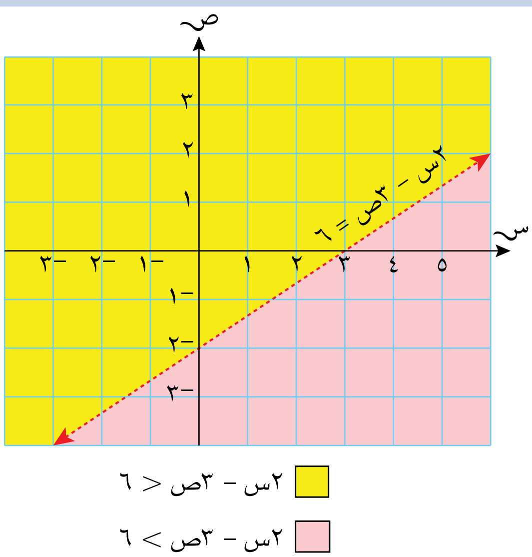
- تمثيل المُتباينة ص > م س + جـ يقع أعلى المستقيم.
- تمثيل المُتباينة ص < م س + جـ يقع أسفل المستقيم.

إذا لم تكن المعادلة في صورة ص = م س + جـ، عليك أن توجد طريقة للتحقُّق من المنطقة التي تُمثّل المُتباينة.

مثـــال ٢

بيّن المنطقتَين اللتَين تُمثّلان المُتباينتَين ٢س − ٣ص > ٦، ٢س − ٣ص < ٦ على المستوى الإحداثي.

الحـــلّ:



الحدود بين المنطقتين المطلوبتين يُمثّلها المستقيم الذي تكون معادلته ٢س − ٣ص = ٦

يقطع هذا المستقيم المحور السيني في النقطة (٣، ٠) والمحور الصادي في النقطة (٠، −٢) ويُرسَم بشكل مُتقطِّع.

عوّض في المعادلة بأي نقطة تنتمي إلى المنطقة الواقعة أعلى المستقيم.
أسهل النقاط استخدامًا هي نقطة الأصل (٠، ٠). عندما س = ٠، ص = ٠، فإن (٢س − ٣ص) = ٠، وبما أن ٠ أصغر من ٦، فإن المنطقة الواقعة أعلى المستقيم تُمثّل المُتباينة ٢س − ٣ص < ٦

إرشادات حول حدود المناطق وتظليلها

درست سابقًا أن المُتباينات ليست دائمًا > أو <، فقد تكون في صورة ≥ أو ≤، لذا يجب أن تبيّن التمثيلات البيانية هذه الفروق في رموز المُتباينة.

عندما تتضمّن المُتباينة رمز المساواة (≥ أو ≤)، فإن المستقيم يكون مُتضمّنًا في التمثيل البياني، ويظهر ذلك في صورة مستقيم مُتّصل.

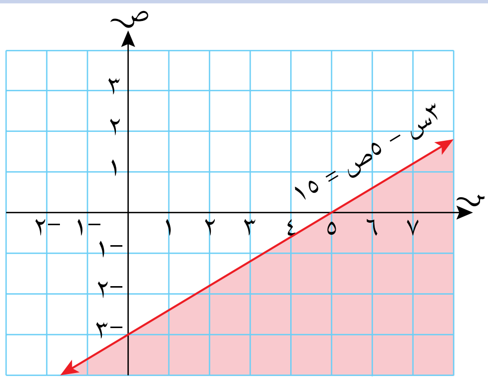
وعندما لا تتضمّن المُتباينة رمز المساواة (> أو <)، فإن المستقيم لا يكون مُتضمَّنًا في التمثيل البياني، وبالتالي يظهر مُتقطّعًا.

يُفضَّل أحيانًا تظليل المنطقة التي لا تُمثّل المتباينة.

مثــال ٣

ظلّل المنطقة التي لا تُمثّل المُتباينة ٣س − ٥ص ≥ ١٥

الحــلّ:



المستقيم الذي يُمثّل حد المنطقة هو المستقيم الذي معادلته ٣س − ٥ص = ١٥، وهو مُتضمَّن في المنطقة (لأن المُتباينة تحتوي على رمز المساواة).

يقطع هذا المستقيم المحور السيني عند النقطة (٥، ٠) ويقطع المحور الصادي عند النقطة (٠، −٣)، ويظهر المستقيم في التمثيل البياني مُتّصلاً.

عندما س = ٠، ص = ٠، ٣س − ٥ص = ٠

وبما أن ٠ أقل من ١٥، فإن نقطة الأصل تحقّق المتباينة. (بالمقابل أعد تنظيم

٣س − ٥ص ≥ ١٥ لتحصل على

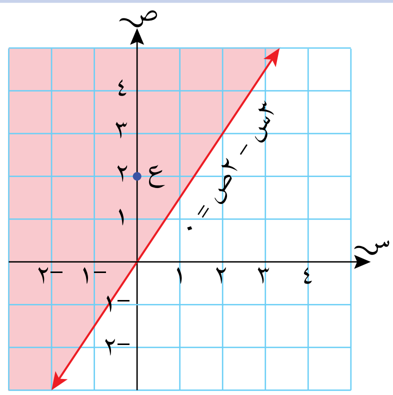
ص ≤ $\frac{٣}{٥}$ س − ٣ وتستنتج أن المنطقة التي تحقّق المتباينة تقع أعلى المستقيم).

المنطقة غير المظلّلة في هذا الشكل تُمثّل المُتباينة ٣س − ٥ص ≥ ١٥

مثـــال ٤

ظلّل المنطقة التي لا تُمثّل المُتباينة ٣س − ٢ص ⩾ ٠

الحـــلّ:

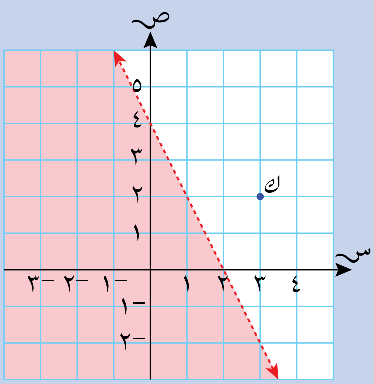


لا يمكنك أن تستخدم نقطة الأصل للتحقُّق لأنها تقع على المستقيم الذي يُمثّل حدّ المنطقة، وبدلاً من ذلك، استخدم النقطة ع (٠، ٢) للتحقُّق وهي تقع أعلى المستقيم. عندما س = ٠، ص = ٢، فإن ٣س − ٢ص = ⁻٤، وهي أقلّ من صفر، وبذلك تقع النقطة ع في المنطقة التي لا تُمثِّل الحل.

المستقيم ٣س − ٢ص = ٠ الذي يُمثّل الحد (مستقيم الحد) يجب أن يكون مُتضمَّنًا في المنطقة، لذلك يظهر مُتّصلًا.

مثـــال ٥

أوجد المُتباينة المُمثّلة بالمنطقة غير المُظلّلة في الشكل المجاور.



الحـــلّ:

أوّلاً، أوجد معادلة المستقيم.

ميل المستقيم هو م = $\frac{⁻٤}{٢}$ = ⁻٢

والجزء المقطوع من محور الصادات هو ص = ٤

معادلة مستقيم الحد هي ص = ⁻٢س + ٤

معادلة المستقيم هي ص + ٢س = ٤

استخدم النقطة ك (٣، ٢) في المنطقة غير المُظلّلة للتحقُّق: ٢ + ٦ = ٨

لاحظ أن ٨ أكبر من ٤، أي أن المنطقة غير المُظلّلة تُمثّل ص + ٢ س > ٤. وحيث أن المستقيم الذي يمثل حدّ المنطقة مُتقطِّع، فإنه غير مُتضمَّن في المنطقة، لذا فإن الرمز > لا يتضمّن رمز المساواة.

المتباينة هي: ص + ٢س > ٤

تمارين ١-٢-أ

في التمارين من ١ إلى ٣، وضّح إجابتك على شبكة إحداثيات يكون فيها تدريج المحورَين السيني والصادي من ⁻٣ إلى ⁺٤:

١) ظلّل المنطقة التي لا تُمثّل المُتباينة ٢ص − ٣س ≥ ٦

٢) ظلّل المنطقة التي لا تُمثّل المُتباينة س + ٢ص < ٤

٣) ظلّل المنطقة التي لا تُمثّل المُتباينة س − ص ≥ ٠

٤) ظلّل المنطقة التي تُمثّل كل متباينة من المُتباينات التالية:

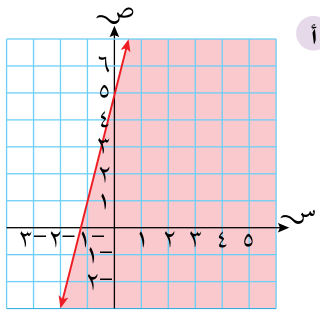
- **أ** ص < ٣ − ٣س
- **ب** ٣س − ٢ص ≥ ٦
- **ج** س ≤ ٥
- **د** ص < ٣
- **هـ** س + ٣ص ≤ ١٠
- **و** ⁻٣ < س < ٥
- **ز** ٠ ≤ س ≤ ٢

٥) أكمل العبارات التالية بانتقاء الخيار الصحيح:

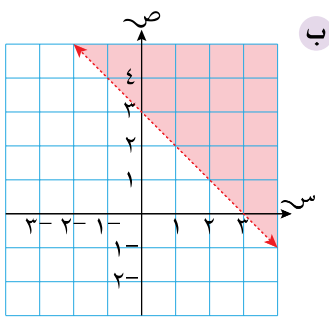
- **أ** إذا كان ص < م س + جـ، فإن المنطقة التي لا تُمثّل المُتباينة تكون (**أعلى/ أسفل**) التمثيل البياني للمستقيم ص = م س + جـ.
- **ب** إذا كان ص > م س + جـ، فإن المنطقة التي لا تُمثّل المُتباينة تكون (**أعلى/ أسفل**) التمثيل البياني للمستقيم ص= م س + جـ
- **ج** إذا كان ص < م١س + جـ١، ص > م٢س + جـ٢ فإن المنطقة المُظلّلة التي لا تُمثّل المُتباينة تكون (**أعلى/ أسفل**) التمثيل البياني للمستقيم ص = م١س + جـ١، و /أو (**أعلى/ أسفل**) التمثيل البياني للمستقيم ص = م٢س + جـ٢

٦) لكل شكل من الأشكال التالية، أوجد المُتباينة التي تُمثّل المنطقة غير المُظلّلة:

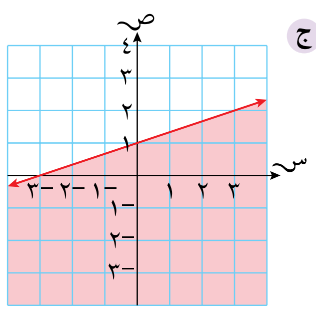
أ



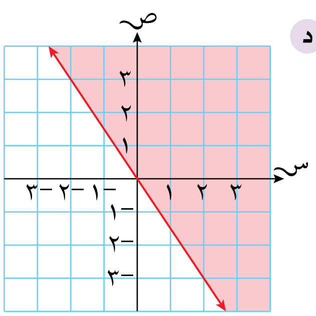
ب



ج



د



١-٢-ب تمثيل المُتباينات الخطّية الآنيّة

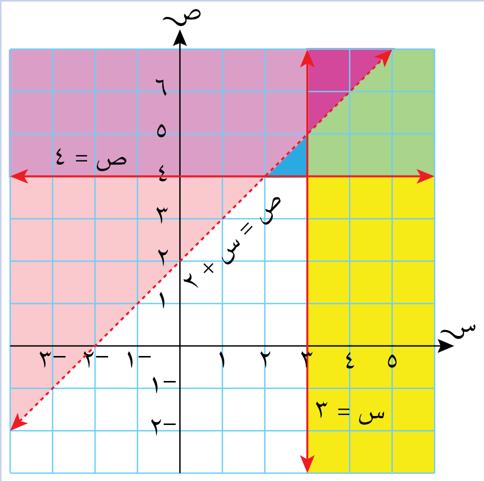
عند وجود مُتباينتَين خطّيتَين أو أكثر في نفس الوقت، فإنها تُسمّى مُتباينات خطّية آنيّة، ويمكن تمثيلها بيانيًّا.

في المثال (٦) تمّ تمثيل المُتباينات الخطّية بمناطق في نفس المستوى الإحداثي، وقد ظُلّلت المناطق التي لا تُمثِّل المُتباينة، وسوف تتضمّن المنطقة غير المُظلّلة جميع الإحداثيات (س، ص) التي تحقّق جميع المُتباينات الخطّية الآنيّة.

مثــال ٦

مثّل بيانيًّا المنطقة المُعرَّفة بمجموعة المُتباينات الخطّية ص > س + ٢، ص ≤ ٤، س ≤ ٣، وذلك بتظليل المناطق التي لا تُمثّلها.

الحــلّ:



حدود المنطقة التي تُمثِّل المُتباينة
ص = س + ٢ (مستقيم مُتقطِّع)،
ص = ٤ (مُستقيم مُتّصل)،
س = ٣ (مُستقيم مُتّصل).

تُمثّل المنطقة غير المُظلّلة في الشكل المنطقة المعرّفة بمجموعة المُتباينات ص > س + ٢، ص ≤ ٤ وس ≤ ٣.

لاحظ أن مساحة هذه المنطقة غير مُحدّدة لأنها ليست مُغلقة.

تمارين ١-٢-ب

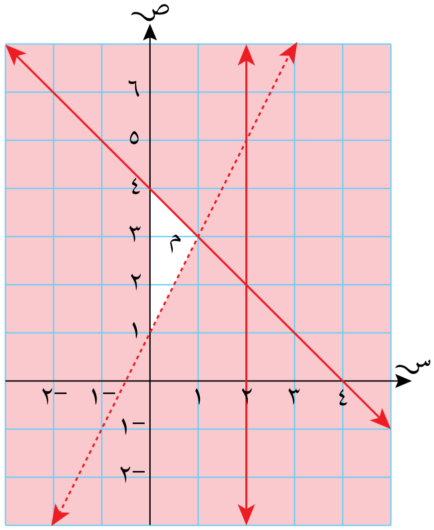
١) بيّن المنطقة المُعرَّفة بمجموعة المُتباينات س + ٢ص ≤ ٦ ، ص ≤ س ، ص > ٤، وذلك بتظليل المناطق التي لا تُمثِّل المُتباينات.

٢) بيّن المنطقة المُعرَّفة بمجموعة المُتباينات س + ص ≤ ٥ ، ص ≤ ٢ ، ص ≥ ٠. وذلك بتظليل المناطق التي لا تُمثِّل المُتباينات.

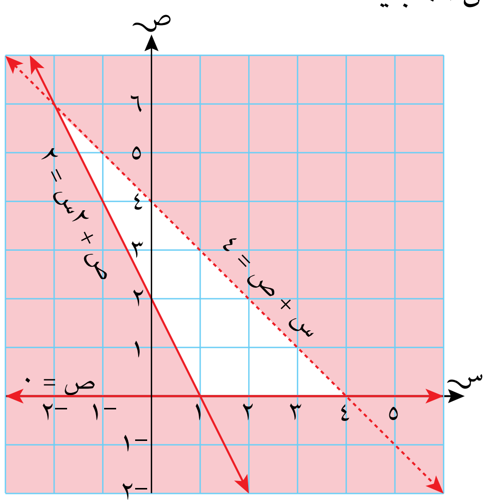
٣) أ ارسم المستقيمات س = ٤، ص = ٣، و س + ص = ٥ في المستوى الإحداثي.

ب بيّن المنطقة (م) التي تحقّق مجموعة المُتباينات س ≤ ٤ ، ص ≤ ٣، س + ص ≥ ٥، وذلك بتظليل المناطق التي لا تُمثِّل المُتباينات.

٤) اكتب ثلاث مُتباينات تُعرّف المنطقة المثلثة (م) غير المُظلّلة في الرسم أدناه.



٥) تُمثّل المنطقة غير المُظلّلة في الرسم أدناه مجموعة المُتباينات ص ⩾ ٠، ص + ٢س ⩾ ٢، س + ص < ٤. اكتب زوجَين مُرتَّبَين من الأعداد الصحيحة (س، ص) يحقّقان كلّ المُتباينات:



٦) ارسم تمثيلاً بيانيًّا يبيّن حلّ المُتباينات ص ⩽ ٤، ص ⩾ س + ٢، ٣س + ص ⩾ ٤.
اكتب كل الأزواج المُرتّبة من الأعداد الصحيحة التي تُحقِّق كل هذه المُتباينات.

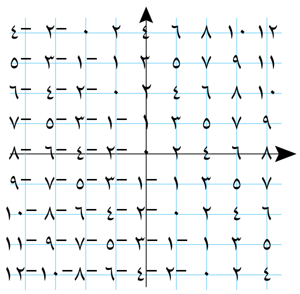
١-٣ البرمجة الخطيّة

تهتم الكثير من التطبيقات الرياضية في الإدارة والصناعة بالحصول على أعلى مكسب أو أقلّ تكلفة اعتمادًا على مجموعة من المُحدّدات (القيود)، مثل عدد العمّال أو الآلات المتوفِّرة أو رأس المال المتوفِّر.

عندما يُعبّر عن هذه المُحدّدات رياضيًّا، فإنها تتّخذ شكل المُتباينات، وعندما تكون هذه المُتباينات خطّية (مثل ٣س + ٢ص > ٦)، يُعرف ذلك في الرياضيات **بالبرمجة الخطّية**.

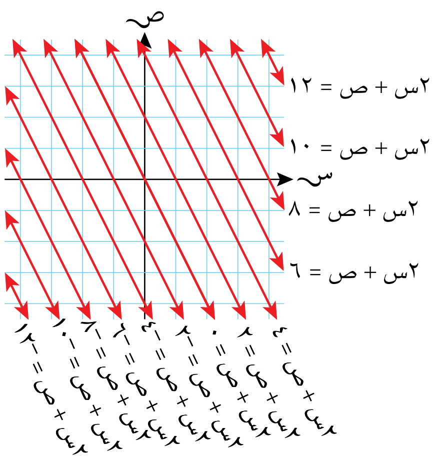
أكبر القيَم وأصغرها

تأخذ العبارة الجبرية (٢س + ص) قيمة لكل نقطة (س، ص) في المستوى الإحداثي، ويبيّن الشكل المجاور قيم ٢س + ص على بعض نقاط الشبكة.



ج هو قيمة الجزء المقطوع من محور الصادات.

إذا قمنا برسم خط مستقيم يصل بين جميع النقاط التي تعطي نفس القيمة، سيكون الناتج مستقيمات معادلاتها في صورة ٢س + ص = جـ (جـ ثابت). يمكنك أن تلاحظ أنه كلما ازدادت قيمة جـ، يتحرّك المستقيم ٢س + ص موازيًا لنفسه نحو الأعلى إلى الجهة اليُمنى من الشبكة، وكلما نقصت قيمة جـ، يتحرّك المستقيم موازيًا لنفسه نحو الأسفل إلى الجهة اليُسرى من الشبكة.



(الشكل المجاور يوضّح المستقيمات ذات الثابت الزوجي فقط).

لا تكون للعبارة الجبرية (٢س + ص) أكبر قيمة أو أصغر قيمة ما لم تضع مُحدّدات لقيَم س، ص، حتى نستطيع إيجاد أكبر قيمة و/أو أصغر قيمة للعبارة الجبرية.

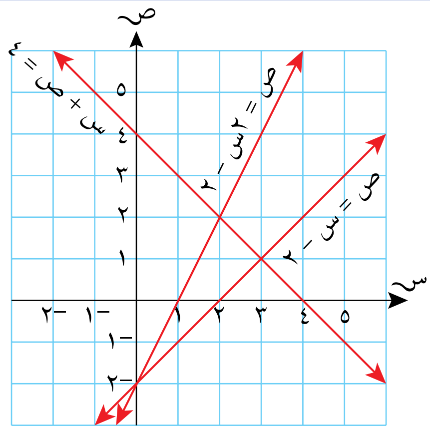
مثـــال ٧

يُحقِّق العددان س، ص جميع المُتباينات التالية:

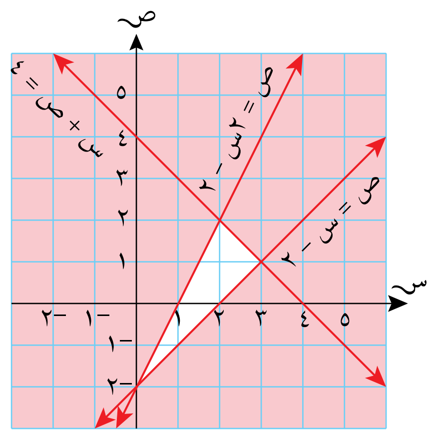
س + ص ⩽ ٤، ص ⩾ ٢س − ٢، ص ⩽ س − ٢

أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة ممكنة للعبارة الجبرية (٢س + ص).

الحــلّ:



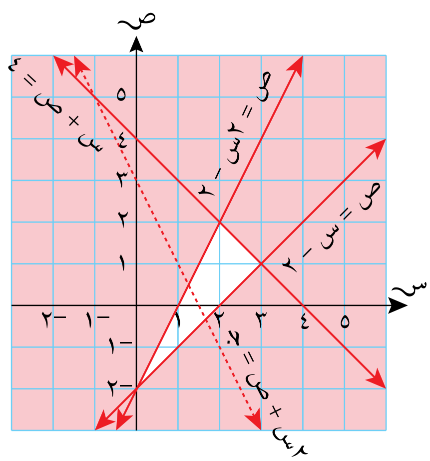
ابدأ برسم المستقيمات الثلاثة في نفس المستوى الإحداثي.



والآن، ظلّل الأجزاء التي لا تُمثِّل المُتباينات لتظهر المنطقة المُعرّفة لكل المتباينات. مثلاً، س + ص ⩽ ٤ تعني أن منطقة الحل هي المنطقة الواقعة في أسفل الجهة اليسرى للمستقيم س + ص = ٤،

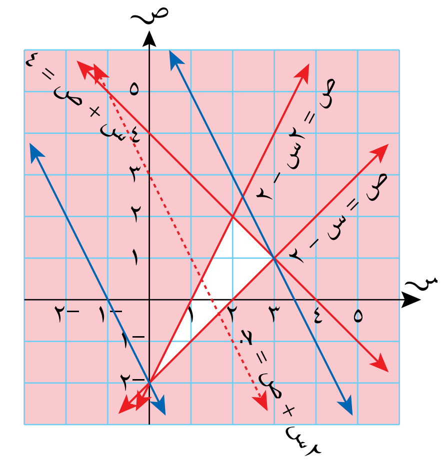
لذا عليك بتظليل المنطقة الواقعة في أعلى الجهة اليمنى للمستقيم (أي المنطقة التي لا تُمثِّل المُتباينة).

المنطقة التي تحقّق كل المتباينات هي المنطقة غير المُظلّلة الواقعة في الوسط.



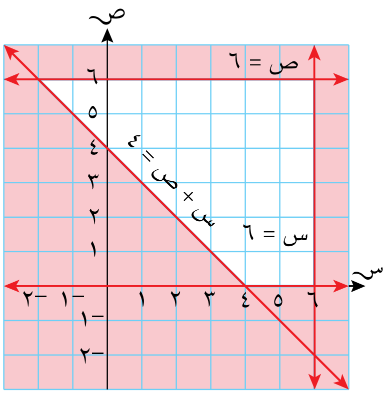
نحتاج إلى إيجاد أكبر قيمة للعبارة الجبرية (٢س + ص).

لذا عليك رسم مستقيم معادلته ٢س + ص = جـ (هنا تم اختيار مستقيم معادلته ٢س + ص = ٣) كل المستقيمات ذات المعادلة ٢س + ص = جـ موازية للمستقيم الذي تم اختياره.



ضع مسطرة على المستقيم ٢س + ص = ٣، وحرّكها بحيث تبقى موازية لهذا المستقيم. ارسم مستقيمَين يمر أحدهما بالنقطة (٠، −٢) حيث توشك المسطرة الابتعاد عن المنطقة غير المُظلّلة ويمرّ الآخر بالنقطة (٣، ١) حيث توشك المسطرة الابتعاد عن المنطقة غير المُظلّلة أيضًا. ستجد أصغر قيمة للعبارة الجبرية عند النقطة (٠، −٢)، وأكبر قيمة لها عند النقطة (٣، ١). والآن عليك إيجاد قيمة (٢س + ص) في كل حالة من الحالتين: أصغر قيمة للعبارة الجبرية (٢س + ص) هي −٢ وأكبر قيمة لها هي ٧

تمارين ١-٣



١) إذا كانت المنطقة غير المُظلّلة في الشكل المجاور تُمثّل مجموعة المُتباينات س ≥ ٦، ٠ ≥ ص ≥ ٦، س + ص ≤ ٤، أوجد أكبر قيمة ممكنة وأصغر قيمة ممكنة للعبارة الجبرية (٣س + ٢ص) حيث أن س، ص تُحقّقان المُتباينات المُعطاة.

٢) أ ظلّل المناطق التي لا تُمثّل كلاًّ من المُتباينات على شبكة إحداثيات لتُحدّد المنطقة التي تُحقّق حل المُتباينات ص ≥ س، س + ص ≥ ٦ ، ص ≤ ٠

ب ما أكبر قيمة للعبارة الجبرية (٢س + ص) إذا كان س، ص يُحقّقان كل المُتباينات؟

٣) إذا كانت س، ص تُحقّقان كلاًّ من المُتباينات ص ≤ ١، ص ≥ س + ٣ ، ٣س + ٢ص ≥ ١٢، أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للعبارة الجبرية (س + ص).

٤) أراد طلاب الصف العاشر صنع أعلام وقمصان لبيعها من أجل دعم المدرسة، لكنّهم، (بسبب شروط الوقت)، لا يستطيعون تجهيز أكثر من ١٥٠ علمًا و١٢٠ قميصًا، علمًا أنّهم حصلوا من التبرُّعات على أقمشة كافية لتجهيز ٢٠٠ قطعة من النوعَين. فإذا كان العلم يُباع بسعر ٢ ريال عُماني والقميص بسعر ٥ ريالات عُمانية، فكم عدد كل من الأعلام والقمصان التي سوف يصنعونها ليحصلوا على أكبر دخل ممكن من المبيعات؟

٥) تريد مديرة مدرسة شراء خزائن لمكتبة المدرسة، وأمامها نوعان من الخزائن. سعر الخزانة من النوع (أ) ١٠ ريالات عُمانية وتحتاج إلى مساحة ٠,٦ م^2 وتتسع لـ ٠,٨ م^3 من الكتب، وسعر الخزانة من النوع (ب) ٢٠ ريالاً عُمانيًّا وتحتاج إلى مساحة ٠,٨ م^2 وتتسع لـ ١,٢ م^3 من الكتب. فإذا كانت أكبر مساحة متوفرة في المكتبة هي ٧,٢ م^2 والميزانية المتوفّرة هي ١٤٠ ريالاً عُمانيًّا، فما عدد ونوع الخزائن التي يجب أن تشتريها مديرة المدرسة لتحصل على أوسع مساحة ممكنة لتخزين الكتب من خلال صرف أقل مبلغ ممكن؟

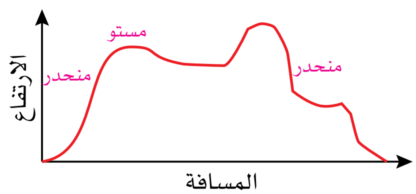
١-٤ المَيل

١-٤-أ إيجاد مَيل المنحنى

سابقًا

راجع كيفية حساب المَيل من الصف التاسع. تأكد من قدرتك على القيام بذلك قبل الانتقال إلى هذا الدرس من الوحدة.

يبيّن التمثيل البياني أدناه الارتفاع مقابل المسافة التي قطعها أحد العدائين على مسار جبلي.



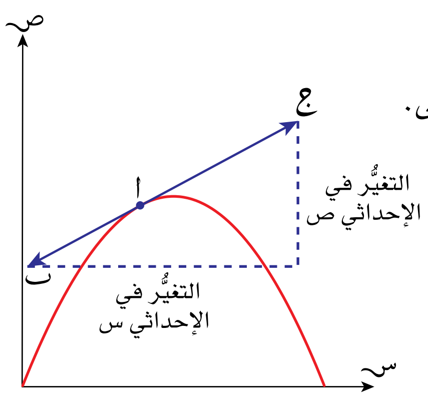
تبيّن بعض أجزاء المسار **مَيلاً** موجبًا حادًّا، ويبيّن بعضها الآخر مَيلاً موجبًا مُتدرّجًا، وهناك أجزاء تبيّن ميلاً مستويًا، وأجزاء تبيّن ميلًا سالبًا.

ويتّضح من هذا التمثيل البياني أن منحنى التمثيل ليس له ميل ثابت كما هو الحال في المستقيمات، لذا لا يمكنك إيجاد المَيل لكامل المنحنى، ولكنّك تستطيع إيجاده عند نقطة مُحدّدة على المنحنى وذلك بأن ترسم **مماسًّا** له عند تلك النقطة.

عندما ترسم المماس للمنحنى يمكنك إيجاد مَيله بنفس الطريقة التي يتم فيها إيجاد مَيل المستقيم.

$$\text{مَيل المماس للمنحنى عند نقطة ما} = \frac{\text{التغيُّر في الإحداثي ص}}{\text{التغيُّر في الإحداثي س}}$$

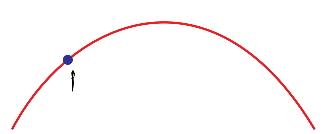
في التمثيل البياني المجاور يُمثّل ع ب مماسًّا للمنحنى.



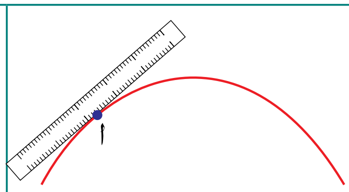
كيف ترسم المماس

إذا مددت المماس قد يمس المنحنى مرّة أخرى عند نقطة مختلفة، وهذه ليست بمشكلة.

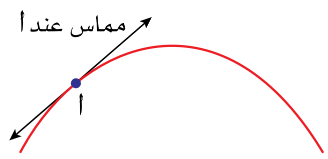
إذا كان المماس صاعدًا في الاتّجاه من اليسار إلى اليمين، يكون ميله موجبًا. وإذا كان المماس نازلًا في الاتّجاه من اليسار إلى اليمين، يكون مَيله سالبًا.



حدِّد نقطة على المنحنى (سمّها أ).

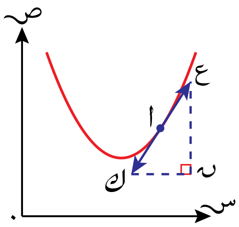


ضع المسطرة بحيث تلامس المنحنى فقط عند النقطة أ



ثبِّت المسطرة بحيث تكون الزاوية عند جانبَي النقطة نفسها تقريبًا، واستخدم قلم رصاص لترسم المماس.

١-٤-ب حساب مَيل المماس للمنحنى



عيّن نقطتَين ك، ع على المماس. حاول جعل المسافة الأفقية بين ك، ع عددًا كلّيًّا من الوحدات.

ارسم مستقيمًا أفقيًّا من النقطة ك ومستقيمًا رأسيًّا من النقطة ع لتكوّن مُثلّثًا قائم الزاوية (ك نَ ع).

مَيل المماس للمنحنى عند النقطة أ = ميل المماس ع ك

$= \frac{\text{ع ن}}{\text{ن ك}}$

مُساعَدة

يجب قياس طول كل من ن ع، ك ن اعتمادًا على مقياسَي المحور الصادي والمحور السيني. وعدم إجراء ذلك يُعدّ أحد الأخطاء الشائعة!

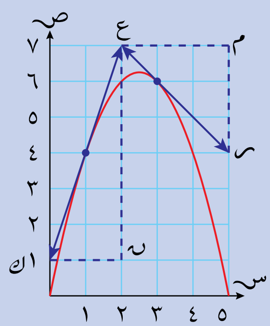
مثــال ٨

يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للدالة ص = ٥س − س^{٢}

أوجد مَيل المماس للمنحنى:

أ عند النقطة (١، ٤)

ب عند النقطة (٣، ٦)



الحــلّ:

أ	عند النقطة (١، ٤)، المَيل = $\frac{\text{ع ن}}{\text{ن ك}} = \frac{٦}{٢} = ٣$	المَيل = $\frac{\text{التغيُّر في الإحداثي ص}}{\text{التغيُّر في الإحداثي س}}$
ب	عند النقطة (٣، ٦)، المَيل = $\frac{\text{ن م}}{\text{م ع}} = \frac{-٣}{٣} = -١$	يميل المستقيم يمينًا إلى أسفل، لذا يكون المَيل سالبًا.

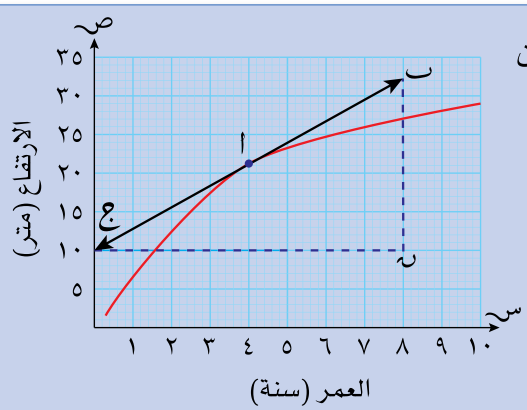
مُساعَدة

عندما تُقدِّر مَيل مماس المنحنى عند نقطة معطاة، من المفيد استخدام مماسّ طويلٍ قدر الإمكان على المنحنى. كلما كان المماس طويلاً، كانت النتيجة أكثر دقّة.

مثــال ٩

يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للعلاقة بين ارتفاع شجرة (ص متر) وعمرها (س سنة).

قدِّر معدّل نموّ الشجرة عندما كان عمرها أربع سنوات.



الحــلّ:

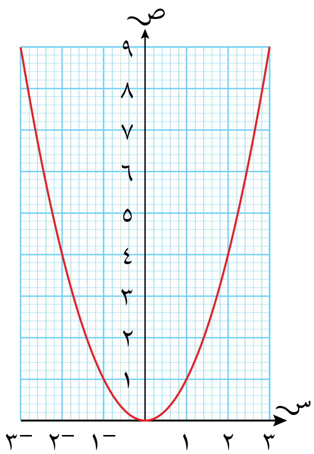
المَيل عند النقطة أ = $\frac{\text{ب ں}}{\text{ں ع}} = \frac{٢٢,٥}{٨} = ٢,٨$
نمَت الشجرة بمعدَّل ٢,٨ متر في السنة.

ارسم المماس عند النقطة أ حيث س = ٤، لأن مُعدّل نموّ الشجرة عندما كان عمرها أربع سنوات يساوي مَيل مماس المنحنى عند هذه النقطة.

تذكّر أنّك تستطيع استخدام المَيل لإيجاد مُعدّلات التغيُّر.

تمارين ١-٤-(أ، ب)

١) يُبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢}

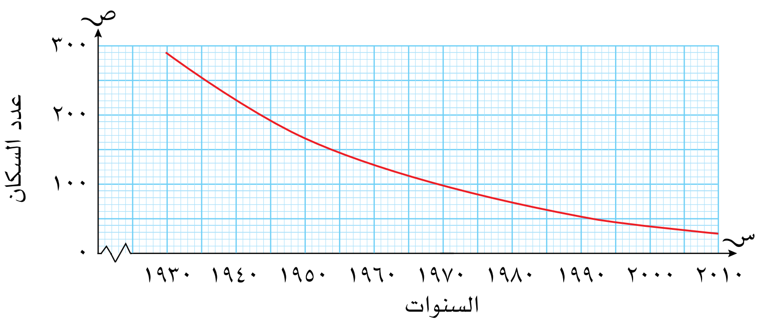


أ أوجد مَيل المماس للمنحنى عند النقطة:

(١) (٢، ٤)　　　(٢) ($^{-}$١، ١)

ب مَيل المماس للمنحنى عند النقطة (١,٥، ٢,٢٥) يساوي ٣، اكتب إحداثيات النقطة التي يكون المَيل عندها يساوي $^{-}$٣

٢) يبيّن التمثيل البياني التالي كيفية تغيُّر عدد سكان قرية ما منذ عام ١٩٣٠م:



أ أوجد مَيل مماس المنحنى عند النقطة (١٩٥٠، ١٧٠)

ب ماذا يُمثّل هذا المَيل؟

٣) أ ارسم التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢} + ١ في الفترة $^{-}$٢ ⩽ س ⩽ ٢

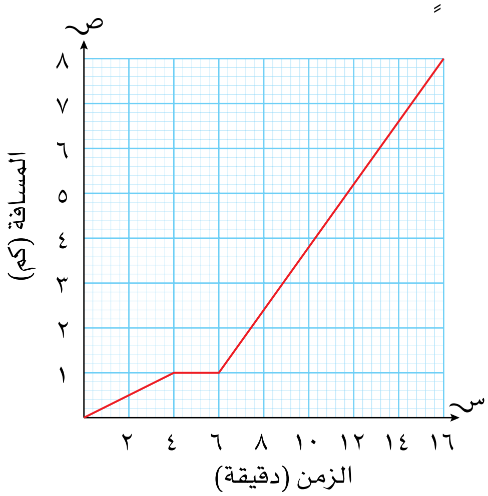
ب أوجد مَيل مماس المنحنى عند النقطة أ(١، ٢)

١-٥ التمثيلات البيانية للحركة

يعطي ميل منحنى التمثيل البياني مؤشّراً على السرعة:
- يدل المستقيم الأفقي في المنحنى على أن السرعة ثابتة.
- كلما كان المنحنى أكثر ميلًا، كانت السرعة أكبر.
- الميل إلى الأعلى والميل إلى الأسفل يُمثّلان الحركة في اتّجاهَين مُختلفَين.

١-٥-أ التمثيل البياني للمسافة-الزمن

تُعرَف التمثيلات البيانية للعلاقة بين المسافة التي يقطعها جسم ما والزمن اللازم لقطعها بالتمثيلات البيانية للمسافة-الزمن، وفيها يُمثّل الزمن عادة على المحور الأفقي وتُمثَّل المسافة على المحور الرأسي، كما أن التمثيل البياني يبدأ عادة عند نقطة الأصل، لأن البداية ليس فيها وقت منقضٍ ولا مسافة مقطوعة.

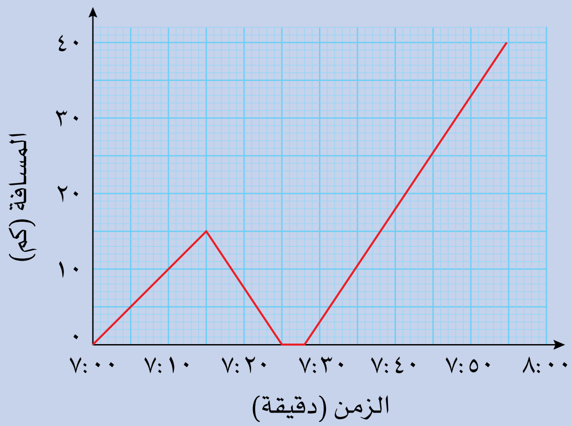


التمثيل البياني أعلاه يبيّن التالي:

- ٤ دقائق هي الزمن المُستغرَق لقطع المسافة من البيت إلى موقف الحافلة والتي تبلغ ١ كم.
- توقُّف الحافلة لمدة دقيقتَين.
- استغرقت إحدى رحلات الحافلة ١٠ دقائق لقطع مسافة ٧ كم.
- يبقى المستقيم في التمثيل البياني أفقيًّا ما دام الشخص لا يتحرّك؛ لعدم قطع أي مسافة في هذه الفترة، وكلما كان المستقيم شديد الانحدار، كانت رحلة الشخص أسرع.

مثال ١٠

يبعد مركز عمل سليمان مسافة ٤٠ كم عن منزله، ويستغرق وصوله إليها ٤٠ دقيقة بالسيّارة، وفي أحد الأيام، غادر سليمان المنزل عند الساعة ٧ صباحًا، وأدرك بعد ١٥ دقيقة أنه نسي محفظته في المنزل، فعاد مسرعًا لمدة ١٠ دقائق، ثمّ استغرق ٣ دقائق حتى وجد المحفظة، وعاد إلى مركز عمله مسرعًا بنفس السرعة. يبيّن التمثيل البياني أدناه رحلة سليمان.



أ ما المسافة التي قطعها سليمان قبل أن يتذكّر أنه نسي المحفظة؟

ب ماذا حدث للتمثيل البياني خلال العودة إلى المنزل؟

ج ماذا يُمثّل الجزء الأفقي من التمثيل البياني؟

د كم كانت سرعته بالأمتار في الدقيقة (م / دقيقة) عندما عاد إلى المنزل؟

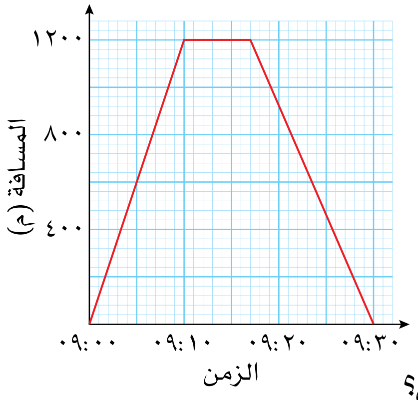
الحــلّ:

أ	قطع سليمان مسافة ١٥ كم قبل أن يتذكّر أنه نسي محفظته.	هنا حدثت أوّل قمة في التمثيل البياني.
ب	يميل المنحنى إلى الأسفل ليصل إلى ٠ كم عندما عاد إلى المنزل.	
ج	يقابل الجزء الأفقي من التمثيل البياني الدقائق الثلاث التي قضاها سليمان في المنزل.	هنا يبعد عن المنزل ٠ كم عندما يكون جزء التمثيل البياني أفقيًا.
د	قطع مسافة ١٥ كم في ١٠ دقائق بسرعة متوسّطة مقدارها ١٥٠٠ م/ دقيقة.	هذا يُمثّل ميل المستقيم الأخير من التمثيل البياني.

تمارين ١-٥-أ

طبّق مهاراتك

١) يبيّن التمثيل البياني للمسافة-الزمن المجاور رحلة منى من المنزل إلى المركز التجاري والعكس:



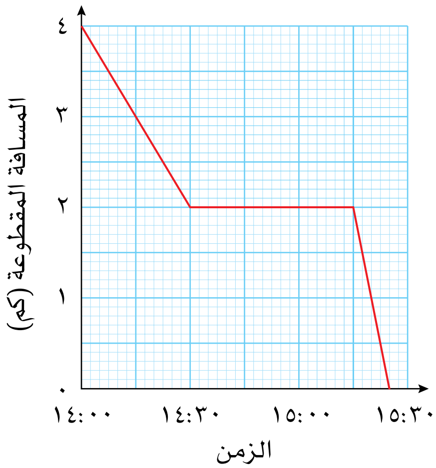
أ ما المسافة التي قطعتها منى عند الساعة ٠٩:٠٦؟

ب كم دقيقة قضت منى في المركز التجاري؟

ج متى كانت منى على بُعد ٨٠٠ متر عن المنزل؟

د متى كانت منى أسرع في رحلتها: عندما ذهبت من منزلها إلى المركز التجاري أم عندما عادت من المركز التجاري إلى المنزل؟

٢) غادر عُمَر بدرّاجته من المدرسة إلى المنزل عند الساعة ١٤:٠٠، وفي الطريق توقّف عند منزل صديقه قبل العودة إلى منزله. يبيّن التمثيل البياني أدناه هذه البيانات:



أ ما المدة التي قضاها عُمر في منزل صديقه؟

ب متى وصل عُمَر إلى منزله؟

ج غادر أخو عُمَر المدرسة عند الساعة ١٤:١٥ وعاد إلى المنزل سيرًا على الأقدام سالكًا نفس المسار. إذا كانت سرعته ٤ كم في الساعة، فمتى تجاوز منزل صديق أخيه عمر؟

٣) إذا كان طول حوض للسباحة ٢٥ م، وسبح ليث من أحد الأطراف إلى الطرف الآخر خلال ٢٠ ثانية، استراح ١٠ ثوانٍ، ثم عاد وسبح إلى نقطة البداية، حيث استغرق ٣٠ ثانية ليسبح مسافة العودة:

أ ارسم التمثيل البياني للمسافة-الزمن مبيّنًا المسافة التي قطعها ليث بدلالة الزمن.

ب كم كان بعد ليث عن نقطة البداية بعد ١٢ ثانية؟

ج كم كان بُعده عن نقطة البداية بعد ٥٤ ثانية؟

١-٥-ب السرعة في التمثيل البياني للمسافة-الزمن

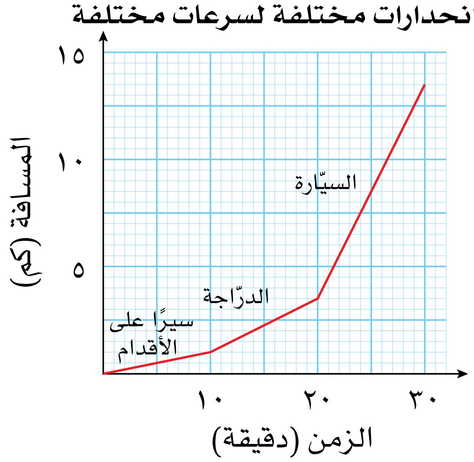
يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمسافة-الزمن لرحلة شخص تنقسم إلى سير على الأقدام وركوب درّاجة وركوب سيّارة على ثلاث فترات زمنية متساوية.

تُعطى السرعة لكل فترة بالصيغة:

$$\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن المستغرق}}$$

من المُهمّ في الرياضيات أن تكون أكثر تحديدًا عندما تتحدّث عن انحدار المستقيم.

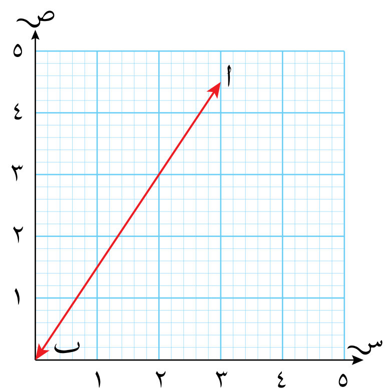
انحدارات مختلفة لسرعات مختلفة



في الشكل المجاور، يقاس انحدار المستقيم

اب باستخدام الصيغة: $\frac{\text{التغيُّر في الإحداثي ص}}{\text{التغيُّر في الإحداثي س}}$

وهذه هي $\frac{\text{المسافة الرأسية}}{\text{المسافة الأفقية}}$ أو ميل المستقيم اب.



يُشِير الميل الموجب في التمثيل البياني للمسافة-الزمن، إلى أن الجسم يتحرّك بازدياد في اتّجاه الإحداثي الصادي، ويُشير الميل عندما يساوي صفرًا إلى أن الجسم ثابت لا يتحرّك، ويُشير الميل السالب إلى أن الجسم يتحرك بتباطؤ في اتّجاه الإحداثي الصادي.

في التمثيل البياني للمسافة-الزمن:

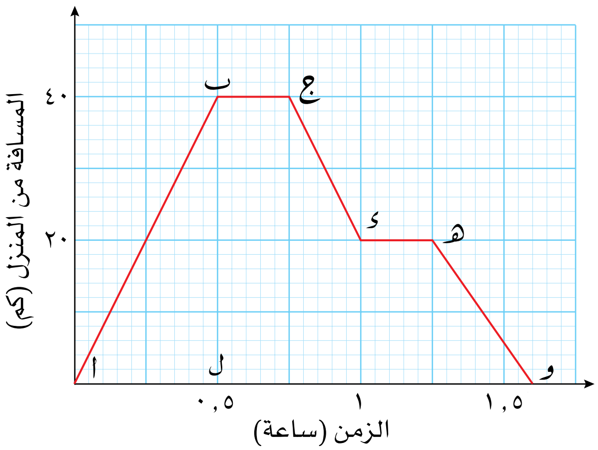
$$\frac{\text{التغير في الإحداثي ص}}{\text{التغير في الإحداثي س}} = \frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن المستغرق}} = \text{السرعة}$$

إذن، ميل المماس للمنحنى يعطي سرعة الجسم واتّجاه حركته، ويعرّف بالسرعة المُتّجهة للجسم.

لاحقًا

يكون ميل المستقيم:

- موجباً إذا كان المستقيم يتجه إلى الأعلى كلما اتجهنا إلى اليمين.
- سالباً إذا كان المستقيم يتجه إلى الأسفل كلما اتجهنا إلى اليمين



يُمثّل التمثيل البياني المجاور رحلة سيارة.

ميل الجزء الأفقي صفر (أي أن السيّارة لم تتحرّك خلال هذه الفترة).

في الجزء اب، الميل موجب:

الميل = $\frac{\text{ب ل}}{\text{ل ا}} = \frac{٤٠}{٠,٥} =$ ٨٠ كم/ ساعة

في الجزء ج ء، الميل سالب:

الميل= $\frac{٢٠ - ٤٠}{١ - ٠,٧٥} =$ ⁻٨٠ كم/ ساعة

∴ السرعة المُتّجهة تساوي ٨٠ كم/ ساعة باتّجاه المنزل.

في الجزء هـو، الميل سالب:

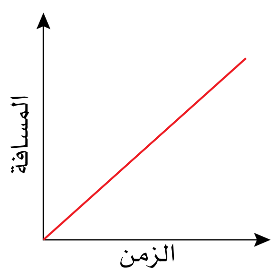
الميل = $\frac{٠ - ٢٠}{١,٦٠ - ١,٢٥} =$ ⁻٥٧,١ كم/ ساعة

∴ السرعة المُتّجهة تساوي ٥٧,١ كم/ ساعة باتّجاه المنزل.

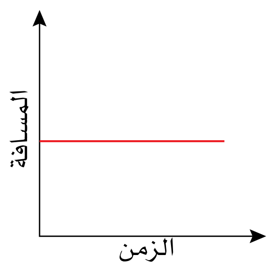
تمارين ١-٥-ب

١) صِف ما يحدث في كل من التمثيلات البيانية للمسافة–الزمن. اقترح موقفًا من الحياة اليومية يحاكي كل منها:

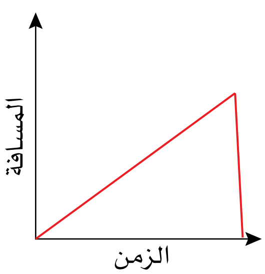
أ



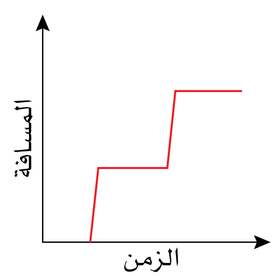
ب



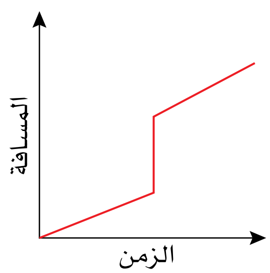
ج



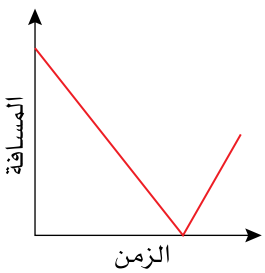
د



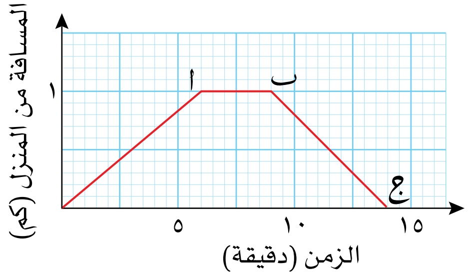
هـ



و



٢) يبيّن التمثيل البياني المجاور مسار أحمد اليومي في الركض:



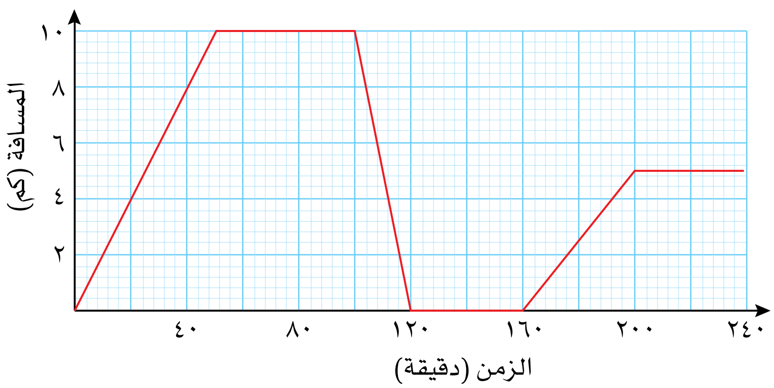
أ كم دقيقة يركض أحمد قبل أن يستريح؟

ب احسب سرعة أحمد في الركض قبل أن يستريح مستخدمًا وحدة القياس كم/ ساعة.

ج كم دقيقة استراح أحمد؟

د احسب سرعة أحمد في الركض عند عودته إلى المنزل مستخدمًا وحدة القياس م/ثانية.

٣) يبيّن التمثيل البياني المجاور حركة سيّارة أجرة خلال أزمة السير لفترة ٤ ساعات:



أ صِف بدقة ووضوح حركة السيّارة.

ب كم دقيقة انتظر سائق السيّارة الركاب؟ كيف عرفت ذلك؟

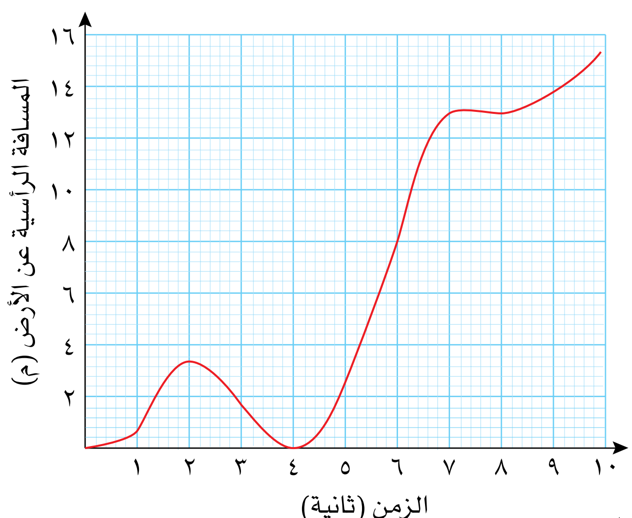
ج ما المسافة الكلّية التي قطعتها السيّارة؟

د احسب السرعة المتوسّطة للسيّارة خلال:

(١) أوّل ٢٠ دقيقة　　　(٢) الساعة الأولى

(٣) من الدقيقة ١٦٠ إلى الدقيقة ٢١٠　　　(٤) ٤ ساعات.

٤) يبيّن التمثيل البياني المجاور موقفًا حقيقيًّا للمسافة–الزمن، وهو عملية إقلاع مروحية من الأرض والطيران بعيدًا عن المطار:

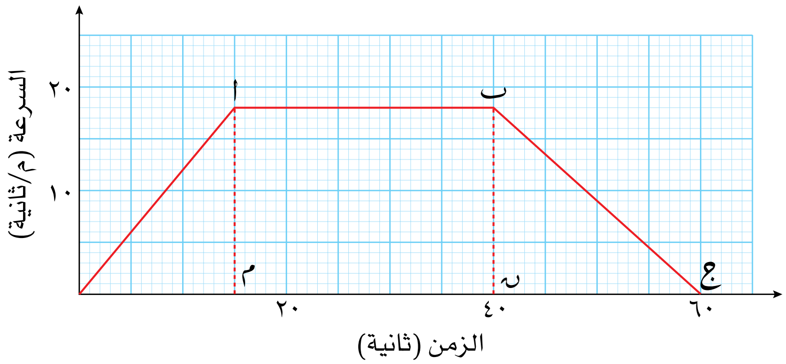


أ اكتب خمسة أسئلة يمكن الإجابة عنها باستخدام التمثيل البياني.

ب تبادل الأسئلة التي كتبتها في الجزئية (أ) مع أحد زملائك وحاول الإجابة عنها.

١-٥-ج التمثيل البياني للسرعة-الزمن

في بعض الحالات قد تتغيَّر سرعة الجسم (أو السرعة المُتّجهة للجسم)، وتُسمّى الزيادة في السرعة تسارُعًا؛ ويُسمى نقصان السرعة تباطؤًا، وتكون السرعة ممثّلة على المحور الرأسي (بدلاً من المسافة) في التمثيل البياني للسرعة-الزمن.



- تبدأ السيّارة بسرعة صفر.
- تزداد السرعة بانتظام لتصل إلى ١٨ م/ ثانية بعد ١٥ ثانية.
- تتحرَّك السيّارة بسرعة ثابتة (الجزء الأفقي) بسرعة ١٨ م/ثانية لمدة ٢٥ ثانية.
- ثم تتباطأ السيارة بمُعدّل ثابت حتى تتوقَّف.
- زمن الرحلة الكاملة ٦٠ ثانية.

انظر إلى الجزء الأول من الرحلة مرة أخرى:

ازدادت سرعة السيّارة بمقدار ١٨ م/ثانية في ١٥ ثانية.

$\frac{\text{١٨ م/ ثانية}}{\text{١٥ ثانية}}$ هو ميل المستقيم الذي يُمثّل الجزء الأول من الرحلة.

فيكون المُعدّل ١,٢ م/ ثانية لكل ثانية، وهذا هو مُعدّل التسارُع، ويكتب ١,٢ م/ (ثانية)^{٢}.

في التمثيل البياني للسرعة-الزمن، الميل = التسارُع.

الميل الموجب هو تسارُع ويبيّن تزايدًا في السرعة.

الميل السالب هو تباطؤ ويبيّن تناقصًا في السرعة.

المسافة المقطوعة في التمثيل البياني للسرعة-الزمن

تعرف أن المسافة = السرعة × الزمن، ويتُمثّل ذلك على التمثيل البياني للسرعة-الزمن في مساحة الأشكال الواقعة تحت المنحنى في التمثيل البياني، ويمكن أن تستخدم التمثيل البياني لتجد المسافة المقطوعة.

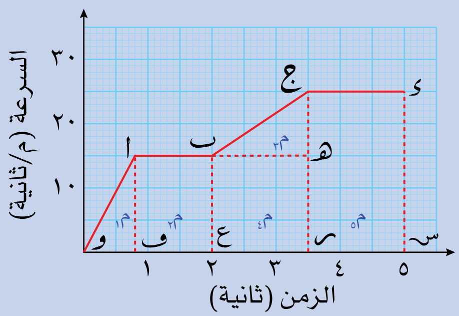
مثـــال ١١

يُبين التمثيل البياني المجاور حركة جُسيم لفترة زمنية مقدارها خمس ثوانٍ:

أ ما الفترات الزمنية التي يكون فيها الجُسيم مُتسارعًا؟

ب احسب تسارُع الجُسيم بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة.

ج احسب المسافة التي يقطعها الجُسيم في خمس ثوانٍ.



الحـــلّ:

أ يتسارع الجُسيم في الفترة من ٠ إلى ٠,٨ ثانية (في الجزء و ا) من التمثيل، وأيضًا في الفترة من ٢ إلى ٣,٥ ثوانٍ (في الجزء ب ج).

لأن التمثيل البياني عند هذه النقاط يتَّجه إلى الأعلى.

ب التسارُع = $\frac{\text{السرعة}}{\text{الزمن}}$

التسارُع بعد ٣ ثوانٍ = $\frac{٢٥ - ١٥}{٣,٥ - ٢} = \frac{١٠}{١,٥}$

= ٦,٧ م/ (ثانية)^{٢}

نحتاج إلى إيجاد المَيل.

التسارُع ثابت في الفترة من ٢ إلى ٣,٥ ثوانٍ.

ج المسافة المقطوعة

= $\frac{١}{٢}$ (٠,٨ × ١٥) + (١,٢ × ١٥) + $\frac{١}{٢}$ (١,٥ × ١٠) + (١,٥ × ١٥) + (١,٥ × ٢٥)

= ٦ + ١٨ + ٧,٥ + ٢٢,٥ + ٣٧,٥

= ٩١,٥

∴ المسافة المقطوعة تساوي ٩١,٥ م

المسافة المقطوعة

= المساحة الكلّية تحت المنحنى

= $م_١ + م_٢ + م_٣ + م_٤ + م_٥$

سابقًا

طبّق صيَغ مساحات الأشكال التي تعلّمتها في الصف التاسع لتجد مساحة الأشكال تحت المنحنى.

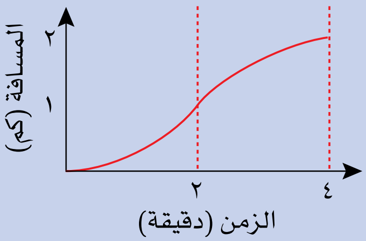
أهمّية وحدات القياس

عند إيجاد التسارُع والمسافة المقطوعة من التمثيل البياني للسرعة-الزمن، يكون ضروريًّا وضع وحدة قياس السرعة على المحور الرأسي مُتضمَّنة نفس وحدة الزمن المُدرجة على المحور الأفقي، ففي المثال السابق، كانت وحدة السرعة متر لكل ثانية، وكانت الوحدة على المحور الأفقي ثانية، وهاتان الوحدتان متوافقتان.

إذا كانت وحدات الزمن مختلفة، يجب تحويل الوحدة على أحد المحورَين لتصبح الوحدتان على المحورَين متوافقتَين.

مثــال ١٢

يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمسافة-الزمن لسيّارة خلال ٤ دقائق. بلغت أقصى سرعة للسيّارة ٦٠ كم/ ساعة، وكان التسارُع في أول دقيقتَين والتباطؤ في آخر دقيقتَين ثابتَين:

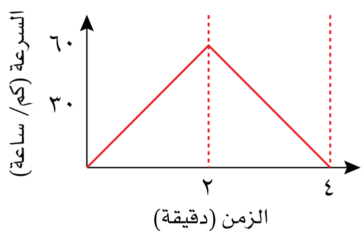


أ ارسم التمثيل البياني للسرعة-الزمن للسيّارة.

ب احسب السرعة المُتوسِّطة للسيّارة مستخدمًا وحدة القياس كم/ ساعة.

الحــلّ:

أ



بما أن التسارُع والتباطؤ ثابتان، فإن التمثيل البياني للسرعة-الزمن يتكوّن من خطّين مستقيمَين. أقصى سرعة تساوي ٦٠ كم/ساعة.

ب

السرعة المُتوسّطة = $\frac{\text{٢ كم}}{\text{٤ دقائق}}$

= $\frac{٢}{(٤ \div ٦٠)}$

= ٣٠ كم/ ساعة

وحدات السرعة الشائعة هي م/ثانية أو كم/ساعة، لذا نحتاج إلى تغيير وحدات القياس. لتحويل الزمن من دقيقة إلى ساعة اقسم الزمن المعطى بالدقائق على ٦٠

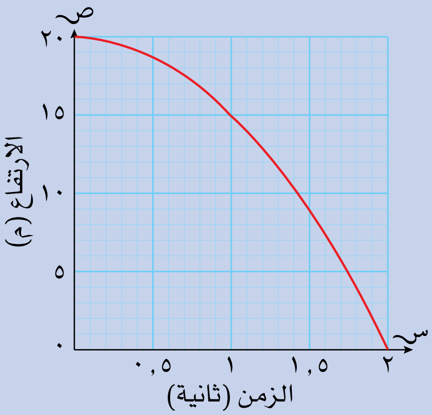
احسب الناتج بوحدة القياس كم/ساعة.

مثــال ١٣

يبين التمثيل البياني للمسافة–الزمن المجاور ارتفاع كرة (على المحور الصادي) تم رميها من إحدى النوافذ التي ترتفع ٢٠ م عن سطح الأرض:

أ ما ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بعد مرور ١ ثانية؟

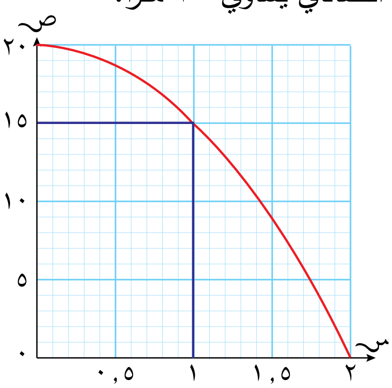
ب ما سرعة الكرة بعد مرور ١ ثانية؟



الحــلّ:

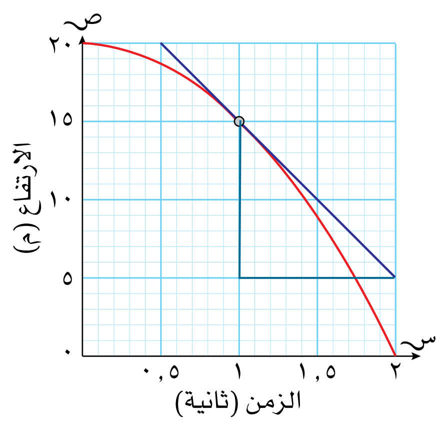
أ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بعد مرور ١ ثانية = ١٥ مترًا

النقطة ذات الإحداثي السيني ١ ثانية على المنحنى إحداثيها الصادي يساوي ١٥ مترًا.



ب ارسم المماس على المنحنى عند النقطة (١، ١٥)

لإيجاد السرعة بعد مرور ثانية واحدة، نقوم برسم مماس للمنحنى عند تلك النقطة (المستقيم الذي يلمس المنحنى ويتجه باتجاه المنحنى).



ميل المنحنى عند النقطة (١، ١٥) = − $\frac{١٠}{١}$

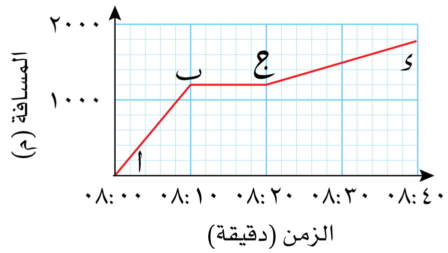
= −١٠

السرعة = −١٠م/ثانية

مَيل المماس هو التغيّر في الإحداثي الصادي ص على التغيّر في الإحداثي السيني س

تمارين ١-٥-ج

١) إذا كان التمثيل البياني للمسافة-الزمن المجاور يُمثّل رحلة إبراهيم من المنزل إلى المدرسة صباحًا:



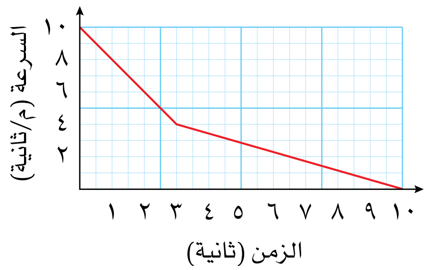
أ كم يكون بُعد إبراهيم عن المنزل عند الساعة ٠٨:٣٠؟

ب كم تكون سرعة ابراهيم باستخدام (م/ثانية) خلال أوّل ١٠ دقائق؟

ج صِف المرحلة المُمثّلة بالمستقيم ب ج.

د كم تكون سرعة إبراهيم باستخدام (م/ثانية) خلال آخر ٢٠ دقيقة؟

٢) يبيّن التمثيل البياني المجاور التغيُّر في سرعة سيّارة ما من ١٠ م/ثانية حتى توقّفت:

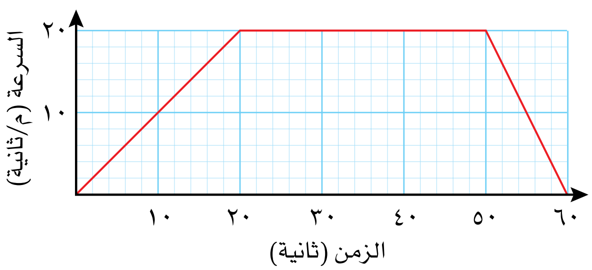


أ احسب مُعدّل تباطؤ سرعة السيارة خلال أول ٣ ثواني.

ب احسب المسافة المقطوعة خلال عشر ثوانٍ المُبيّنة في التمثيل البياني.

ج احسب مُعدّل سرعة السيارة خلال ١٠ ثواني.

٣) يُبيّن التمثيل البياني للسرعة-الزمن المجاور جزءًا من رحلة سيّارة ما:

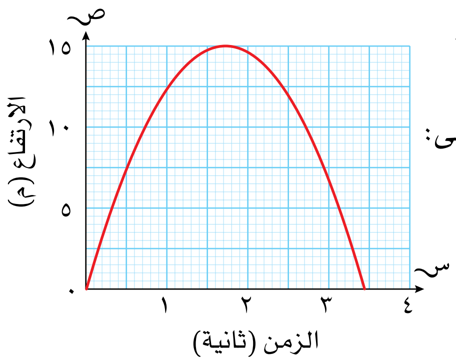


أ احسب التسارُع خلال أول ٢٠ ثانية من الرحلة.

ب احسب المسافة المقطوعة في آخر ١٠ ثوانٍ من الرحلة.

ج احسب السرعة المتوسّطة للرحلة كاملة.

٤) يبيّن التمثيل البياني للمسافة-الزمن المجاور ارتفاع حجر (على المحور الصادي) تم رميه في الهواء من سطح الأرض إلى الأعلى:



أ ما أعلى ارتفاع وصل إليه الحجر؟

ب بعد كم ثانية عاد الحجر ولامس الأرض؟

ج ما سرعة الحجر بعد مرور ١ ثانية؟

د ما سرعة الحجر بعد مرور ١,٧ ثانية؟

هـ ما سرعة الحجر بعد مرور ٠ ثانية؟

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

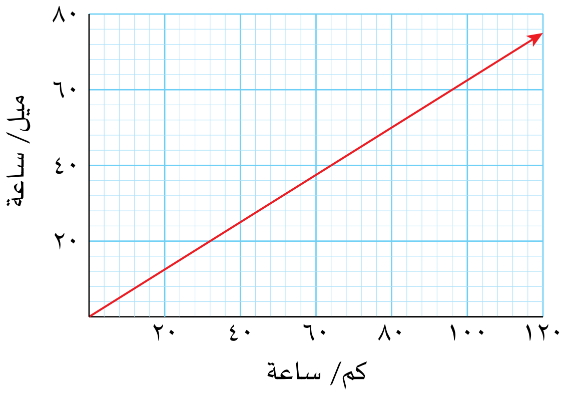
- يمكنك رسم تمثيل بياني ليُساعدك على التحويل بين مختلف أنظمة وحدات القياس.
- تستخدم الدول أنواعًا مختلفة من العملات، ويمكنك التحويل بينها إذا عرفت سعر الصرف.
- يمكن تمثيل المُتباينات في مُتغيّرَين بمنطقة على المستوى الإحداثي.
- يمكنك أن ترسم مماسًّا لمنحنى وتستخدمه لإيجاد ميل المنحنى عند نقطة التماس.
- تُستخدم التمثيلات البيانية للحركة لتبيّن العلاقة بين: المسافة والزمن (التمثيل البياني للمسافة-الزمن)، السرعة والزمن (التمثيل البياني للسرعة-الزمن)، وحل مسائل تطبيقية عليها.
- يُبين مَيل التمثيل البياني للمسافة-الزمن كيفية تغيُّر السرعة خلال فترة زمنية ما.

يجب أن تكون قادرًا على:

- استخدام التمثيل البياني للتحويل بين وحدات القياس المختلفة.
- التحويل بين العملات عندما تُعطى سعر الصرف.
- عرض مُتباينة في مُتغيّرَين في صورة منطقة في المستوى الإحداثي.
- تحديد منطقة في المستوى الإحداثي تُحقِّق أكثر من مُتباينة.
- استخدام البرمجة الخطّية لإيجاد أكبر وأصغر قيمة لعبارة جبرية ضمن منطقة ما في التمثيل البياني.
- تقدير مَيل منحنى برسم مماس للمنحنى.
- قراءة التمثيلات البيانية للحركة وتفسيرها من خلال:
  - حساب السرعة المُتوسِّطة
  - حساب التسارُع والتباطؤ بيانيًّا، وإيجاد المسافة المقطوعة مستخدمًا المساحة الواقعة تحت التمثيل البياني للسرعة-الزمن.

تمارين نهاية الوحدة

١) يبيّن التمثيل البياني المجاور العلاقة بين السرعات باستخدام وحدات القياس ميل/ساعة و كم/ساعة.
استخدم التمثيل البياني لتُقدّر:



أ السرعة بوحدة كم/ساعة لسيّارة تسير بسرعة ٦٥ ميلاً/ساعة.

ب السرعة بوحدة ميل/ساعة لقطار يسير بسرعة ١١٠ كم/ساعة.

٢) **أ** حدِّد المنطقة التي تُحقِّق المُتباينات التالية: ص $\leqslant$ $\frac{١}{٢}$ س + ١ ؛ ٥س + ٦ص $\leqslant$ ٣٠ ؛ ص $\leqslant$ س.

ب إذا كان س، ص يُحقّقان المُتباينات الثلاث، أوجد أكبر قيمة ممكنة للعبارة الجبرية (س + ٢ص).

٣) انسخ جدول القيم للدالة ص = $\frac{س^{٣}}{١٢} - \frac{٦}{س}$، ثم أجب عمّا يلي:

س	٠,٦	١	١,٥	٢	٢,٥	٣	٣,٥	٤	٤,٥	٥
ص	ف	⁻٥,٩	⁻٣,٧	⁻٢,٣	⁻١,١	٠,٣	١,٩	٣,٨	ع	ر

أ أوجد قيَم ف، ع، ر.

ب ارسم التمثيل البياني للدالة في الفترة ٠,٦ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٥ مستخدمًا ٢ سم لتمثِّل وحدة واحدة على المحور السيني، و١ سم لتمثِّل وحدة واحدة على المحور الصادي.

ج استخدم التمثيل البياني لتجد قيمة س (مُقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية) عندما $\frac{س^{٣}}{١٢} - \frac{٦}{س}$ = ٠

د ارسم مماس المنحنى عند النقطة حيث س = ١ وقدّر ميل المنحنى عند تلك النقطة.

٤) **أ** في تفاعُل كيميائي، تتمثّل كتلة مادة كيميائية ك بالغرام بالدالة ك = $\frac{١٦٠}{ن^{٢}}$، حيث ن الزمن بالدقائق.
باستخدام جدول القيم التالي:

ن (دقيقة)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ك (غم)	ف	٨٠	٤٠	٢٠	ع	٥	ر	١,٢٥

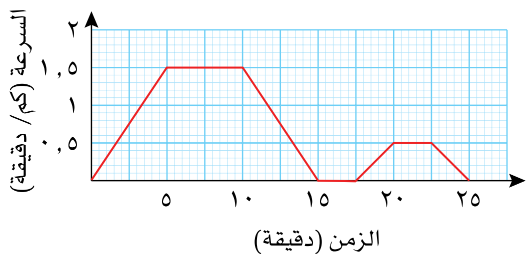
(١) أوجد قيم ف، ع، ر.

(٢) ارسم التمثيل البياني للكتلة ك بدلالة ن في الفترة ٠ ⩽ ن ⩽ ٧، مستخدمًا المقياس ٢ سم لتُمثّل ثانية واحدة على المحور الأفقي المُمثِّل للزمن ن، و١ سم لتُمثّل ١٠ غم على المحور الرأسي المُمثِّل للكتلة ك.

(٣) ارسم مماسًّا مناسبًا للمنحنى الذي رسمته واستخدمه لتُقدّر مُعدّل التغيُّر عندما ن = ٢

ب تتمثّل كتلة مادة كيميائية أخرى م في التفاعُل نفسه بالدالة م = ١٦٠ − ك. أوجد قيمة ن عندما تتساوى كتلتا المادتَين الكيميائيتَين.

٥) يبيّن التمثيل البياني للسرعة-الزمن التالي رحلة قطار ما بين محطّتَين، حيث بدأ القطار بالتباطؤ ثم توقّف بعد ١٥ دقيقة بسبب بعض أعمال الصيانة على خطوط سكة الحديد:



أ احسب أكبر سرعة للقطار مستخدمًا وحدة القياس كم/ ساعة.

ب احسب تباطؤ القطار عندما يصل إلى نقطة أعمال الصيانة.

ج احسب المسافة التي قطعها القطار في أوّل ١٥ دقيقة.

د ما المُدّة التي توقّف فيها القطار عند نقطة أعمال الصيانة؟

هـ ما سرعة القطار بعد ١٩ دقيقة؟

و احسب المسافة بين المحطّتَين.

الوحدة الثانية: جمع البيانات وتمثيلها

المُفردات

- البيانات النوعية Qualitative data
- البيانات العددية Numerical data
- البيانات الكميَّة Quantitative data
- البيانات الأوَّلية Primary data
- البيانات الثانوية Secondary data
- فئات Grouped
- مخطَّط الساق والورقة Steam-and-leaf diagram
- الجداول المُزدوجة Two-way table
- التمثيل بالمُصوّرات Pictogram
- الأعمدة البيانية Bar graph
- المُخطّطات الدائرية Pie chart
- التمثيل بالخطوط البيانية Line graph

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تجمعِ البيانات وتصنِّف أنواعًا مختلفة من البيانات.
- تنظِّم البيانات باستخدام جداول العد والجداول التكرارية ومخطَّطات الساق والورقة والجداول المزدوجة.
- ترسم التمثيل بالمصوَّرات والأعمدة البيانية والمخطَّطات الدائرية لتعرض البيانات وتجيب عن مختلف الأسئلة حولها.

تجمع هذه الفتاة معلومات عن سكّان القرية التي تعيش فيها لتعرف ما إذا كان لديهم فكرة عن الخدمات الحكومية المتوفرة لديهم.

يجمع الأفراد في المجتمع المعلومات المختلفة لأسباب مُحدّدة، فالطلاب مثلاً يقومون بجمع المعلومات للإجابة عن أسئلة معيّنة، واتّخاذ القرارات، وتوقُّع ما سوف يحدث في المستقبل، ومقارنة أنفسهم مع الآخرين، وفهم تأثير الأشياء من حولهم على حياتهم. ويجمع العالِم المعلومات من التجارب العلمية أو الاختبارات ليجد فاعلية أحد الأدوية الجديدة، أما رجل الأعمال فيجمع البيانات من خلال الدراسات المسحية ليعرف الأداء العام للشركة التي يملكها، كذلك الأمر عندما يقوم شخص ما بجمع بيانات من المجلات أو المواقع الإلكترونية ليقرِّر أي نوع من الأحذية أو الألبسة أو الأدوات الكهربائية أو السيّارات يمكنه أن يشتري، ويُعرف فرع الرياضيات الذي يتعامل مع جمع البيانات باسم '**الإحصاء**'.

هذه الوحدة، سوف تُركِّز على طرح أسئلة ما، ثم جمع المعلومات حول تلك الأسئلة وتنظيمها أو عرضها لنتمكّن من الإجابة عن الأسئلة.

٢-١ جمع البيانات وتصنيفها

٢-١-أ دورة التعامُل مع البيانات

البيانات هي مجموعة من الحقائق أو الأعداد، أو أي معلومات أخرى، ويتضمّن الإحصاء عملية جمع البيانات واستخدامها للإجابة عن سؤال ما، ويبيّن الشكل الآتي الخطوات الأساسية المُتضمَّنة في عملية الاستقصاء الإحصائية:

تحديد السؤال (أو المشكلة المطلوب حلّها)
- هل السؤال واضح ومحدَّد؟

جمع البيانات
- ما البيانات التي تحتاج إليها؟
- ما الطرق الذي ستتَّبعها لجمع البيانات؟

تنظيم البيانات وعرضها
- كيف ستنظِّم البيانات لتبسيط التعامل معها؟
- هل يمكنك رسم تمثيل بياني أو جدول لتعرض البيانات بوضوح؟

تحليل البيانات وتفسيرها
- هل يمكنك تلخيص البيانات؟
- ما الاتّجاه الشائع المُتضمِّن في البيانات؟
- ما النتائج التي يمكنك استخلاصها من البيانات؟
- هل تثير البيانات أسئلة جديدة؟
- هل يوجد عوائق في استخلاص النتائج من البيانات؟

تُسمّى المعلومات المُخزَّنة في الحاسوب أيضًا بالبيانات. لا تتضمّن المصطلحات الحاسوبية أي علاقة بين البيانات والإحصاء. فالبيانات هنا تعني معلومات مخزَّنة.

الأنواع المختلفة من البيانات

أجب عن السؤالين التاليَين:

- من هو معلّمك المُفضَّل؟
- كم أخًا وأختًا لك؟

ستكون إجابتك عن السؤال الأوّل اسم شخص، بينما ستكون إجابتك عن السؤال الثاني عددًا، ويُشكِّل كل من الاسم والعدد نوعًا من أنواع البيانات.

البيانات النوعيّة هي بيانات غير عددية، تُسمّي وتصف الأشياء دون الإشارة إلى أي عدد أو قياس، حيث تُعدّ الألوان وأسماء الأشخاص وأسماء الأماكن، والإجابات بنعم أو لا، والآراء الخاصّة والاختيار بين مجموعة من البدائل، بيانات نوعيّة.

البيانات العددية هي بيانات في صورة أعداد، فقد تكون كمّيات أو قياسات أو فترات زمنية أو درجات، وتُسمّى هذه البيانات العددية **بالبيانات الكمّية**.

ويمكن تقسيم البيانات العددية إلى مجموعتَين:

رابط

يعتبر هذا العمل مهمًا في علوم الحياة وعلم النفس، حيث يحتاج العلماء إلى عرض البيانات للإعلان عن استنتاجاتهم.

- **البيانات المنفصلة:** تأخذ هذه البيانات قيَمًا مُحدَّدة، مثل عدد الطلاب في الفصل أو عدد الأهداف في مباراة كرة القدم، أو عدد السيّارات الحمراء الموجودة في مواقف أحد المحلات التجارية، حيث يتمّ جمع البيانات المُنفصِلة عن طريق عد الأشياء.
- **البيانات المُتَّصلة:** يمكن لهذه البيانات أن تأخذ أي قيمة بين قيمتَين محدَّدتَين. مثلاً: يمكن لشخص طوله بين ١,٥ م و ١,٦ م أن يكون طوله ١,٥ م أو ١,٥٧ م أو ١,٥٧٩٣م أو ١,٥٧٩٣٤٢١ م، أو أي قيمة أخرى تقع بين ١,٥ م و ١,٦ م بالاستناد إلى درجة الدقّة المطلوبة، كما تعدّ الأطوال والكتل والمسافات ودرجات الحرارة أمثلة على البيانات المُتَّصلة، ويتمّ جمع البيانات المتَّصلة عن طريق القياس.

لاحقًا

سوف تحتاج إلى فهم البيانات المتَّصلة بشكل معمَّق عندما تدرس المدرج التكراري لاحقًا.

طرق جمع البيانات

تُجمع البيانات من المصادر الأوَّلية عبر إجراء مسوحات أو مقابلات من خلال الطلب إلى الأشخاص أن يُجيبوا عن استبانة ما، أو من خلال إجراء تجربة أو بالعد والقياس، وتُسمّى البيانات المجمَّعة من هذه المصادر **بالبيانات الأوَّلية**.

يمكن أن تُجمع البيانات أيضًا من مصادر ثانوية، ويتضمَّن ذلك استخدام بيانات مُعدَّة لإيجاد المعلومات التي تحتاج إليها، فإذا استخدمت مثلاً بيانات من موقع على الإنترنت أو حتى من هذه الصفحات لتساعدك على الإجابة عن سؤال ما، تكون جميع هذه المصادر بالنسبة إليك مصادر ثانوية، وتُسمّى البيانات المجمعَّة من المصادر الثانوية **بالبيانات الثانوية**.

تتمثّل إحدى الطرق التي تقرِّر من خلالها أن البيانات لديك متَّصلة أم لا، هي معرفة ما إذا كان بإمكاننا التعبير عنها في صورة كسور أو أعداد عشرية.

- قد يظهر العمر بأنه من البيانات المنفصلة، لأنه غالبًا ما يُعطى بالسنوات الكاملة، لكنه في الواقع يُعدّ من البيانات المتَّصلة، لأن العمر يزداد باستمرار.

تمارين ٢-١-أ

١) انسخ الجدول المجاور على كرّاستك:

بيانات نوعيّة	بيانات عددية
لون الشعر	عدد الإخوة والأخوات

أ) اكتب في الجدول المجاور خمسة أمثلة من البيانات النوعيّة وخمسة أمثلة من البيانات العددية التي يمكن جمعها عن كلّ طالب في صفّك.

ب) انظر إلى أمثلة البيانات العددية في جدولك، وضع دائرة حول البيانات المنفصلة.

٢) حدِّد ما إذا كان كل من البيانات التالية منفصلاً أو مُتَّصلاً:

أ) كتلة كل حقيبة على متن الطائرة.

ب) عدد الأشخاص في المنزل.

رابط

في سنة ٢٠١٦م، نشرت مجلة مالية أن وظيفة مُحلِّل البيانات هي الأعلى أجرًا والأكثر قبولاً في المستقبل، ويشير استخدام الحاسوب في جمع البيانات ومعالجتها إلى أن جمع البيانات وعرضها وتحليلها قد أصبحت مُهمّة أكثر في إدارة الأعمال والشركات.

ج الزمن المستغرق للوصول إلى المدرسة.

د حجم الماء المُتبخِّر من السد.

هـ عدد الكلمات الصحيحة في اختبار الإملاء.

و المسافة التي يقطعها الشخص من المنزل إلى مكان العمل.

ز طول قدم كل طالب في الصف.

ح قياس حذاء كل طالب في الصف.

ط محيط رأس الأطفال حديثي الولادة.

ي عدد الأطفال في العائلة.

ك عدد البرامج التي تمّت مشاهدتها على إحدى شاشات التلفاز في الشهر الماضي.

ل عدد السيارات التي تعبر منطقة المشاة في الساعة.

٣ لكل جزئية من الجزئيات من (أ) إلى (ي)، أجب عن الأسئلة التالية:

(١) حدّد طريقة واحدة يمكنك استخدامها لجمع البيانات.

(٢) هل مصادر البيانات أوَّلية أم ثانوية؟

(٣) هل البيانات نوعيّة أم كمّية؟

(٤) هل البيانات الكمّية مُنفصِلة أم متَّصلة؟

أ كم مرَّة ستحصل على العدد ٦ إذا رميت حجر نرد ١٠٠ مرة؟

ب ما البرامج التلفزيونية الأكثر مشاهدة لدى أقرانك في الصف؟

ج ما أطوال عشرة أنهار مصنّفة كأطول الأنهار في العالم؟

د ما الرياضة المُفضَّلة لدى الطلاب في مدرستك؟

هـ ما عدد الكتب المستعارة أسبوعيًّا من المكتبة العامة؟

و هل يكون ذهاب الموظف إلى العمل في سيّارته الخاصّة أكثر تكلفة من استخدام المواصلات العامة؟

ز ما قياس حذاء كل طالب في الصف؟

ح ما لون السيّارة الأكثر تفضيلاً؟

ط ما متوسِّط عدد الأهداف للمُنتخَب الوطني لكرة القدم هذا الموسم؟

ي كم عدد الفواكه التي تأكلها في الأسبوع؟

٢-٢ تنظيم البيانات

عندما تجمع كمّية كبيرة من البيانات، فإنك تحتاج إلى تنظيمها بطريقة ما ليسهل عليك قراءتها واستخدامها، وتتمثَّل أشهر الطرق المستخدمة في جمع البيانات في الجداول (جداول العد والجداول التكرارية والجداول المزدوجة).

لاحقًا

سوف تستخدم هذه الطرق وتتوسَّع في دراستها في وحدات لاحقة. تأكَّد من أنك فهمت هذه الطرق الآن.

٢-٢-أ جداول العد

علامات العد هي علامات صغيرة (////) تستخدمها لتسجيل معلومات عن الأشياء التي تَعدّها، ففي كل مرة تعدّ فيها خمسة أشياء، تقوم برسم علامة تقطع العلامات الأربع السابقة لتحصل على مجموعة من خمس علامات (𝍸)، حيث يُسهِّل تجميع علامات العد، في مجموعات من خمس علامات عدّ، عملية عدّها وإيجاد المجموع.

وكمثال على ذلك، استخدم أحد الطلاب جدول العدّ أدناه ليُسجِّل عدد السيّارات الموجودة في مواقف السيارات والتي لها اللون نفسه، حيث قام بوضع علامة عدّ في العمود الثاني في كل مرة كان يعدّ فيها سيّارة من لون معيّن:

اللون	عدد السيّارات
الأبيض	𝍸 𝍸 ///
الأحمر	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 /
الأسود	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //
الأزرق	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //
الفضّي	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ///
الأخضر	𝍸 𝍸 𝍸 /

مثـــال ١

أرادت أميرة أن تجد ما يعتقده الناس عندما تظهر الإعلانات الفجائية لهم خلال استخدامهم لمواقع التواصُل الاجتماعي، فأجرت دراسة مسحية على ١٠٠ شخص، ووجّهت إليهم السؤال التالي:

ما رأيك بهذه العبارة؟ الرجاء اختيار إجابة واحدة.

يجب أن يكون الإعلان مراقبًا بدقّة على مواقع التواصُل الاجتماعي، حيث يجب حظر جميع الإعلانات الفجائية على مواقع التواصل الاجتماعي.

أ. أوافق بشدّة

ب. أوافق

ج. لا أوافق

د. لا أوافق بشدة

بحيث يختار كل شخص إجابة واحدة من بين الإجابات أ، ب، ج، د.

وقد سجّلت أميرة النتائج التالية:

رابط

عندما أعطت أميرة الأشخاص عبارات مُحدَّدة وطلبت إليهم الاستجابة لها، أظهرت تحيُّزها وهذا يؤثِّر على نتائج الدراسة المسحية. ربّما شعر الأشخاص بضرورة مراقبة الإعلانات على مواقع التواصُل الاجتماعي، ولكن لا ينبغي حجب الإعلانات نهائيًا ولم يكن ذلك خيارًا ممكنًا عند الإجابة عن سؤال الدراسة. يمكن أيضًا لطريقة اختيار العيّنة أن تؤثِّر على استجابتهم. لذلك يجب الانتباه للنتائج التي تظهر من الدراسة.

أ	ب	أ	ج	أ	ج	ج	د	أ	ج
ج	ج	د	أ	د	د	ج	ج	ج	أ
ب	ب	أ	ج	د	ب	ب	أ	ج	ج
أ	ب	ج	أ	د	ب	ج	د	أ	ب
أ	ج	ج	د	أ	ج	ج	ج	د	أ
د	د	ج	ج	ج	أ	ب	ب	أ	ج
د	ج	ج	د	أ	ج	أ	ب	د	ب
ج	ج	د	أ	د	د	ج	ج	ج	أ
ب	ب	أ	ج	د	ب	ب	ج	ج	ج
أ	ب	ج	أ	د	ب	ج	د	أ	ب

أ ارسم جدول العد لتنظِّم النتائج التي سجّلتها أميرة.

ب ماذا تقترح، من خلال نتائج دراسة أميرة على الأشخاص، عن رأيهم عندما تظهر لهم الاعلانات فجأة على مواقع التواصُل الاجتماعي؟

الحــلّ:

أ

الإجابة	علامة العد
أ	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////
ب	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////
ج	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //
د	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~

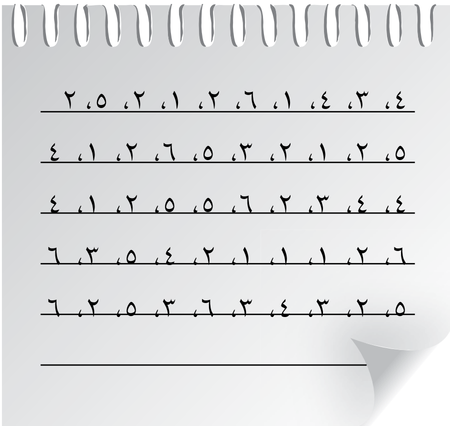
عدَّ كل حرف وضعْ علامة عد عندما تعدّ كل واحدة. قد يساعد شطب الحرف بعد عدّه. تأكَّد من أن مجموع علامات العد الإجمالي يساوي ١٠٠ وهو يمثّل عدد الأشخاص الذين أُجريت عليهم الدراسة المسحية، للتأكد من أن جميع علامات العد قد ضُمّنت (يمكنك تسجيل الاستجابات بالمرور على الصفوف أو على الأعمدة ووضع علامة عد أمام الصف الصحيح في جدولك، وليس عدّ أحد الحروف في كل مرّة).

ب نقترح من خلال نتائج الدراسة المسحية أن الأشخاص لا يعتقدون بوجوب حجب الإعلانات عن مواقع التواصُل الاجتماعي، حيث أن النتائج تشير إلى أن ٥٧ شخصًا لم يوافقوا أو لم يوافقوا بشدّة، بينما نجد أن ٢٤ شخصاً من ١٠٠ شخص وافقوا بشدّة على عبارة أميرة.

من المهم إعطاء تفسير، وذلك من خلال ذكر بعض الإحصاءات ذات الصلة وتفسير دلالاتها.

تمارين ٢-٢-أ

١) رمت منى حجر نرد ذا ستة أوجه ٥٠ مرَّة، وفيما يلي النتائج التي حصلت عليها. ارسم جدول عدّ لتنتظم بيانات منى:



٢) أجرِ مسحًا سريعًا في صفّك لتجد عدد الساعات التي يقضيها كل طالب في إنجاز واجبه المنزلي يوميًّا، ثم أنشئ جدول عد لتُسجِّل البيانات التي حصلت عليها، وتُنظِّمها.

٣) رمى فيصل حجرَي نرد ذوَي ستة أوجه معًا ٢٥٠ مرّة وسجَّل مجموع العددَين الظاهرَين في جدول العد أدناه. انظر إلى الجدول وأجب عن الأسئلة التالية:

مجموع العددَين الظاهرَين	علامة العد
٢	// ~~////~~
٣	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~
٤	/// ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~
٥	//// ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~
٦	/// ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~
٧	/ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~
٨	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~
٩	/// ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~
١٠	/ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~
١١	// ~~////~~ ~~////~~
١٢	/ ~~////~~

أ ما المجموع الأكثر ظهورًا؟

ب ما المجموعان الأقل ظهورًا؟

ج في رأيك: لماذا لم يُسجِّل فيصل العدد ١؟

د في رأيك: لماذا حصل فيصل على علامات عد كبيرة لمجاميع العد التالية: ٦، ٧، ٨؟

٢-٢-ب الجداول التكرارية

يبيّن **الجدول التكراري** مجموع علامات العد في كل صف، وقد تتضمّن بعض الجداول التكرارية علامات عد مع مجموعها في نفس الجدول:

الجدول التكراري هو نفس جدول العد الذي استخدمه الطالب ليُسجِّل ألوان السيارات، ولكنّه يتضمّن عمودًا إضافيًّا، يبيّن مجموع تكرارات علامات العد في كل صف.

اللون	عدد السيارات	التكرار
الأبيض	~~////~~ ~~////~~ ///	١٣
الأحمر	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	٢١
الأسود	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //	٣٧
الأزرق	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //	٢٧
الفضي	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///	٤٣
الأخضر	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	١٦
		المجموع ١٥٧

يتضمَّن الجدول التكراري حيّزًا لتكتب فيه المجموع أسفل عمود التكرار، ويساعدك ذلك على معرفة عدد البيانات التي جُمعت، وفي المثال أعلاه، سجّل الطالب ألوان ١٥٧ سيارة.
من الجدير بالذكر أن معظم الجداول التكرارية لا تتضمَّن علامات العد، ونورد فيما يلي جدولاً تكراريًّا دون علامات عد، صمّمته إدارة أحد المجمّعات الصحّية لتسجيل عدد الأشخاص الذين عولجوا من أمراض مختلفة على مدار أسبوع:

قبل أن تصل إلى أي استنتاج له معنى حول نوع المرض الأكثر شيوعًا في المجمّع الصحي، يجب أن تعرف أين جُمعت هذه البيانات. تختلف تكرارات الأمراض المختلفة باختلاف المناطق الجغرافية في العالم.

المرض	التكرار
السكّري	٣٠
أمراض القلب	٤٠
السل	٦٠
أمراض أخرى	٥٠
المجموع	١٨٠

يبيّن لك عمود التكرار عدد مرات ظهور كل نتيجة في البيانات، ويبيِّن أيضًا أن البيانات منفصلة.

تجميع البيانات في فئات

يُفترض بالبيانات العددية أحيانًا أن تكون مُسجَّلة في مجموعات مختلفة، فمثلاً، إذا جمعت نتائج اختبار ٤٠ طالبًا، وكانت درجات الطلاب تتراوح بين ٤٠ و٨٤ (من ١٠٠)، وقمت بتسجيل درجة كل طالب (وقد تكون كلها مختلفة)، فسوف تحصل على جدول تكراري واسع يصعب التعامُل معه، لتسهيل الأمر، نقوم بتنظيم البيانات المُجمَّعة في مجموعات تُسمّى فئات. تُسمى الجداول التكرارية التي تُنظِّم النتائج في فئات 'جداول تكرارية ذات **فئات**'.

انظر إلى المثال التالي:

الدرجات	التكرار
٤٠–٤٤	٧
٤٥–٤٩	٣
٥٠–٥٤	٣
٥٥–٥٩	٣
٦٠–٦٤	٠
٦٥–٦٩	٥
٧٠–٧٤	٣
٧٥–٧٩	٧
٨٠–٨٤	٩
المجموع	٤٠

درجات الاختبار تتراوح بين (٤٠ و٨٤) وقد قُسّمت إلى فئات. لاحظ أيضًا أن الفئات لا تتداخل، لذلك سيكون من الواضح في أي فئة توضع كل درجة.

لاحقًا

سوف تستخدم الجداول لاحقًا عند إنشاء الأعمدة البيانية ومخطَّطات التكرار الأخرى. تعطي هذه المخطَّطات وضوحًا وانطباعًا بصريًّا عن البيانات.

ليس مسموحًا في هذا المثال إعطاء درجات تتضمّن كسوراً، لذا جاءت جميع درجات الاختبار أعدادًا صحيحة، وجاءت البيانات منفصلة.

تمارين ٢-٢-ب

١) أجرى سلمان دراسة مسحية لمعرفة عدد أقلام التلوين الموجودة في حقائب زملائه في الصف. وحصل على النتائج التالية:

٠	٢	٣	١	٤	٦	٣	٦	٧	٢
١	٢	٤	٠	٠	٦	٥	٤	٨	٢
٦	٣	٢	٠	٠	٠	٢	٤	٣	٥

أ انسخ الجدول التكراري، واستخدمه لتُنظِّم البيانات التي حصل عليها سلمان:

عدد أقلام التلوين	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
التكرار									

ب ما أكبر عدد من أقلام التلوين الموجودة في حقائبهم؟

ج كم طالبًا لديه قلم تلوين واحد فقط؟

د ما عدد أقلام التلوين الأكثر توافُرًا معهم؟

هـ كم عدد الطلاب الذين أجرى سلمان الدراسة عليهم؟ كيف تبيّن ذلك على الجدول التكراري؟

٢) يعمل سعيد نادلًا في أحد المطاعم. تُبيّن الأعداد التالية المبالغ (بالريال العُماني) التي دفعها ٢٥ زبونًا في المطعم خلال فترة عمل سعيد:

٤٣,٥٥٠	٤,٤٥٠	١٧,٦٠٠	٢٥,٩٥٠	٣,٧٥٠
١٢,٣٥٠	٥٥,٠٠	١٢,٩٠٠	٣٥,٩٥٠	١٦,٢٥٠
٢٥,٠٥٠	٢,٥٠٠	٢٩,٣٥٠	١٢,٩٠٠	٨,٧٠٠
١٢,٥٠٠	١٣,٩٥٠	٦,٥٠٠	٣٩,٤٠٠	٢٢,٥٥٠
٢٠,٤٥٠	٤,٥٠٠	٥,٣٠٠	١٥,٩٥٠	١٠,٥٠٠

النقود لا تمثل بيانات متصلة لأن العملات المستخدمة والمعتمدة هي ٥ بيسات، ١٠ بيسات، ٢٥ بيسة، ٥٠ بيسة، ١٠٠ بيسة ... وهكذا؛ لذا فهي تمثّل بيانات منفصلة.

أ انسخ وأكمل الجدول التكراري ذا الفئات التالي، واستخدمه لتُنظِّم البيانات:

القيمة (بالريال العماني)	٠–٩,٩٩٩	١٠–١٩,٩٩٩	٢٠–٢٩,٩٩٩	٣٠–٣٩,٩٩٩	٤٠–٤٩,٩٩٩	٥٠–٥٩,٩٩٩
التكرار						

ب كم شخصًا أنفق أقلَّ من ٢٠,٠٠٠ ريالاً عُمانيًّا؟

ج كم شخصًا أنفق أكثر من ٥٠,٠٠٠ ريالاً عُمانيًّا؟

د ما القيمة الأكثر ظهورًا التي أنفقها الأشخاص خلال فترة عمل سعيد؟

٣) سجَّل خلفان مدّة كل المحادثات الهاتفية بالدقيقة والثواني الكاملة التي أجراها في أحد الأيام، وحصل على النتائج التالية:

٣ دقائق و ٢٩ ثانية	٤ دقائق و ١٢ ثانية	٤ دقائق و ١٥ ثانية	١ دقيقة و ٢٩ ثانية
٢ دقيقة و ٤٥ ثانية	١ دقيقة و ٣٢ ثانية	١ دقيقة و ٩ ثوانٍ	٢ دقيقة و ٥٠ ثانية
٣ دقائق و ١٥ ثانية	٤ دقائق و ٣ ثوانٍ	٣ دقائق و ٤ ثوانٍ	٥ دقائق و ١٢ ثانية
٥ دقائق و ٤٥ ثانية	٣ دقائق و ٢٩ ثانية	٢ دقيقة و ٩ ثوانٍ	١ دقيقة و ١٢ ثانية
٤ دقائق و ١٥ ثانية	٣ دقائق و ٤٥ ثانية	٣ دقائق و ٥٩ ثانية	٥ دقائق و ١ ثانية

نظِّم البيانات أعلاه في جدول تكراري ذي فئات.

٢-٢-ج مُخطَّط الساق والورقة

لاحقًا

ستتعامل مع مُخطَّطات الساق والورقة مرة أخرى عندما تحسب مقاييس النزعة المركزية والتشتُّت مستقبلاً.

مُخطَّط الساق والورقة هو نوع خاص من الجداول التي تسمح لك بتنظيم وعرض البيانات في فئات باستخدام قيَم البيانات الفعلية. عندما تستخدم جدولاً تكراريًّا لتنظِّم البيانات في فئات لا يمكنك مشاهدة القيَم الفعلية، ولكن يمكنك فقط معرفة عدد البيانات في كل فئة.

يعتبر مُخطَّط الساق والورقة مفيدًا، لأنه يحفظ القيَم الفعلية، ممّا يساعد على حساب مدى البيانات ومُتوسِّطاتها.

في مُخطَّط الساق والورقة تقسم كل مدخلة من البيانات إلى جزأَين: الساق والورقة. تُمثِّل الورقة رقم الآحاد لكل قيمة، ويُمثّل الساق الأرقام المتبقية. تُكتب كلمة 'الساق' إلى يسار خطّ رأسي، وتكتب كلمة 'الورقة' إلى يمينه. فمثلاً تكتب القيمة ١٣ كما يلي:

الورقة		الساق
٣	|	١

في هذه الحالة، تُمثِّل الورقة رقم الآحاد ويُمثّل الساق رقم العشرات.

تظهر البيانات الكبيرة مثل ٢٥٩ في صورة:

الورقة		الساق
٩	|	٢٥

في هذه الحالة، تُمثِّل الورقة رقم الآحاد ويُمثّل الساق رقمَي العشرات والمئات

ليكون مُخطَّط الساق والورقة مفيدًا، يجب أن يتضمَّن ٥ قيَم على الأقلّ، فإذا كان عدد السيقان أقل من ذلك، يمكنك تجزئة الأوراق إلى صفَّين (أو أحيانًا إلى ٥ صفوف). إذا قمت بذلك فكل ساق يُسجَّل مرّتَين، وتجمع الأوراق في فئات دنيا أو فئات عليا. فمثلاً، إذا كان الساق يُمثّل العشرات والورقة تُمثِّل الآحاد، يمكنك وضع فئتَين كما يلي:

الورقة		الساق
١ ٢ ٤ ٣ ٠	|	١
٦ ٥ ٧ ٨ ٩	|	١

القيَم من ١٠ إلى ١٤ (الأوراق من ٠ إلى ٤) متضمَّنة في الفئة الأولى، والقيَم من ١٥ إلى ١٩ (الأوراق من ٥ إلى ٩) متضمنة في الفئة الثانية.

يصبح التعامُل مع مُخطَّط الساق والورقة أسهل عند ترتيب الأوراق من الأصغر إلى الأكبر، ويُسمّى في هذه الحالة مُخطَّط الساق والورقة المُرتَّب.

كما يتم وضع مفتاح لتوضيح معنى الساق ومعنى الورقة وما تشير إليه البيانات، فمثلاً إذا كانت البيانات تشير إلى ارتفاعات بعض النباتات، ونريد الحديث عن نبتة ارتفاعها ١٣ سم، سيكون المفتاح في صورة ٣ | ١

مثــال ٢

تعرض مجموعة البيانات التالية أعمار الزبائن الذين يستخدمون الإنترنت في مقهى للإنترنت:

٣٤	٢٣	٤٠	٣٥	٢٥	٢٨	١٨	٣٢
٣٧	٢٩	١٩	١٧	٣٢	٥٥	٣٦	٤٢
٣٣	٢٠	٢٥	٣٤	٤٨	٣٩	٣٦	٣٠

أنشئ مُخطَّط الساق والورقة لتعرض البيانات.

الحــلّ:

الساق	الورقة
١	٧ ٩ ٨
٢	٥ ٠ ٩ ٨ ٥ ٣
٣	٠ ٦ ٩ ٤ ٣ ٦ ٢ ٧ ٢ ٥ ٤
٤	٨ ٢ ٠
٥	٥

المفتاح
٧ | ١ = ١٧ سنة

جمّع الأعمار في فئات طول كل منها ١٠، لتصبح ١٠ – ١٩، ٢٠ – ٢٩ وهكذا.

هذه الأعداد مُكوَّنة من رقمَين لذا سيُمثِّل الساق رقم العشرات. سجِّل الساق بترتيب تصاعُدي على يسار المُخطَّط.

سجّل البيانات بالترتيب المُعطى، واكتب رقم الآحاد تحت عمود الورقة في سطر مُقابل للساق. اترك مسافة بين كل رقمَين لتسهيل قراءة الأعداد.

إذا احتجت إلى التعامُل مع البيانات، يمكنك إعادة رسم المُخطَّط، بوضع الأوراق في ترتيب تصاعُدي.

الساق	الورقة
١	٩ ٨ ٧
٢	٩ ٨ ٥ ٥ ٣ ٠
٣	٩ ٧ ٦ ٦ ٥ ٤ ٤ ٣ ٢ ٢ ٠
٤	٨ ٢ ٠
٥	٥

المفتاح
٧ | ١ = ١٧ سنة

بإعادة تنظيم مُخطَّط الساق والورقة، يمكنك ملاحظة:

- أصغر شخص يستخدم الإنترنت عمره ١٧ سنة.
- أكبر شخص يستخدم الإنترنت عمره ٥٥ سنة.
- أكثر مُستخدمي الإنترنت تقع أعمارهم في الفئة ٣٠ – ٣٩ (المجموعة التي تتضمَّن أكبر عدد من الأوراق).

يستخدم مُخطَّط الساق والورقة المُزدوِج لعرض مجموعتَي بيانات، بحيث تُرسَم مجموعة البيانات الثانية في الجهة الأخرى المقابلة من الساق، وتُكتب الأوراق إلى يسار الساق.
يُقارِن مُخطَّط الساق والورقة التالي بين عمرَي علامتَين تجاريتَين من بطّاريات شحن الهاتف المحمول:

العلامة التجارية س	الساق	العلامة التجارية ص
٢ ٧ ٨ ٤ ٩	٠	٥ ٨
٣ ٢ ٧ ٨ ٧	١	٤ ٧ ٨ ٢
٨ ٩ ٧ ٢ ٦ ٤ ٨	٢	٨ ٩ ٧ ١ ٥
٢ ٧	٣	٧ ٢ ١ ٠
	٤	٢
	٥	١

المفتاح
العلامة التجارية س: ٨ | ٢ = ٢٨ ساعة
العلامة التجارية ص: ٤ | ٢ = ٤٢ ساعة

تُقرأ بيانات العلامة التجارية ص من اليسار إلى اليمين، و تبقى الساق مُمثّلة لرقم العشرات.

تمارين ٢-٢-ج

١) سجَّل معلم الرياضة المدرسية كتلة بعض طلاب الصف العاشر مُقرَّبة إلى أقرب كيلوغرام، فكانت:

٤٥	٥٦	٥٥	٦٨	٥٣	٥٥	٤٨	٤٩	٥٣	٥٤
٥٦	٥٩	٦٠	٦٣	٦٧	٤٩	٥٥	٥٦	٥٨	٦٠

أنشئ مُخطَّط الساق والورقة لعرض البيانات.

٢) يُبيِّن الجدول التالي عدد أزواج أحذية الركض المُباعة يوميًّا لمدة شهر، في فرعَين من فروع أحد محلّات بيع الأحذية:

الفرع الأول	١٧٥، ١٣٢، ١٨٠، ١٣٤، ١٧٩، ١١٥، ١٤٠، ٢٠٠، ١٩٨، ٢٠١، ١٨٩، ١٤٩، ١٨٨، ١٧٩، ١٨٦، ١٥٢، ١٨٠، ١٧٢، ١٦٩، ١٥٥، ١٦٤، ١٦٨، ١٦٦، ١٤٩، ١٨٨، ١٩٠، ١٩٩، ٢٠٠
الفرع الثاني	١٨٨، ١٨٦، ١٨٧، ١٥٩، ١٦٠، ١٨٨، ٢٠٠، ٢٠١، ٢٠٤، ١٩٨، ١٨٥، ١٩٠، ١٤٢، ١٨٨، ١٦٥، ١٨٧، ١٨٠، ١٩٠، ١٩١، ١٦٩، ١٧٧، ٢٠٠، ٢٠٥، ١٩٦، ١٩١، ١٩٣، ١٨٨، ٢٠٠

أ) أنشئ مُخطَّط الساق والورقة المُزدوِج لعرض البيانات.
ب) أي الفرعَين باع أكبر عدد في يوم واحد خلال الشهر؟
ج) أي الفرعَين يظهر أنه باع أكثر عدد من أزواج الأحذية؟ لماذا؟

مُساعَدة
في هذا التمرين، ستتراوح السيقان بين ١١ و ٢٠

٣) أراد عالم أحياء استقصاء تأثير مُستويات التلوُّث على نموّ الأسماك في أحد السدود، حيث قام في يناير باصطياد عدد من الأسماك، ثم قاس أطوالها قبل إعادتها إلى الماء. يُبيِّن مُخطَّط الساق والورقة التالي أطوال الأسماك مُقرَّبة إلى أقرب سنتيمتر:

أطوال الأسماك بالسنتيمتر

الساق	الورقة
١	٢ ٤ ٤ ٦
٢	٠ ١ ٣ ٣ ٤ ٥ ٨ ٩
٣	٣ ٥ ٦ ٦ ٦ ٧ ٨ ٩
٤	٠ ٢ ٥ ٧
٥	٢ ٧

المفتاح

٢ | ١ = ١٢ سم

أ ما عدد الأسماك التي قاس عالم الأحياء أطوالها؟

ب ما طول أقصر سمكة؟

ج ما طول أطول سمكة؟

د كم سمكة طولها يساوي ٤٠ سم أو أكثر؟

هـ في رأيك: كيف سيتغيّر المُخطَّط، إذا أجرى عالم الأحياء نفس الدراسة المسحية بعد عام ووجد أنه قد:

(١) ازدادت مُستويات التلوُّث وتوقَّف نمو الأسماك؟

(٢) تحسَّنت ظروف المياه وازداد طول الأسماك؟

٤) يُبيِّن مُخطَّط الساق والورقة المزدوج التالي مُعدَّل نبض مجموعة من الأشخاص قبل التدريب على جهاز المشي وبعده:

مُعدَّل النبض

قبل التدريب	الساق	بعد التدريب
٠ ١ ٣ ٦ ٨ ٧ ٢	٦	
٣ ٤ ١ ٢	٧	
٧ ٣ ٢ ٧ ٨	٨	٧ ٦ ٤ ٣
٠	٩	٠ ٢ ٤ ١ ٣
١	١٠	٣ ١ ٧ ٨ ٩
	١١	٨ ٢
	١٢	٧
	١٣	
	١٤	٢

المفتاح

قبل التدريب: ٢ | ٦ = ٦٢ نبضة في الدقيقة

بعد التدريب: ٨ | ٧ = ٨٧ نبضة في الدقيقة

أ) كم شخصًا يقع معدَّل نبضه (قبل التدريب) ضمن الفترة من ٦٠ إلى ٧٠ نبضة في الدقيقة؟

ب) ما أعلى مُعدَّل نبض تمَّ قياسه قبل التدريب؟

ج) ما أعلى مُعدَّل نبض تمَّ قياسه بعد التدريب؟

د) ما الذي يدّلك عليه مُخطَّط الساق والورقة بخصوص مُعدَّل النبض والتدريب لهذه المجموعة؟ وضِّح إجابتك.

٢-٢-د الجداول المزدوجة

تُبيِّن **الجداول المُزدوِجة** تكرارات نتائج مجموعتَين أو أكثر من البيانات، ونورد فيما يلي جدولاً مزدوجًا يبيّن عدد الرجال والنساء الذين يضعون حزام الأمان عندما يعبرون مركز الشرطة:

	يضعون حزام الأمان	لا يضعون حزام الزمان
الرجال	١٠	٤
النساء	٦	٣

تعطي العناوين في الصفّ الأوَّل معلومات حول وضع حزام الأمان، وتعطي العناوين في العمود الأول معلومات حول الجنس.

يمكنك استخدام الجدول السابق لإيجاد:

- عدد الرجال الذين يضعون حزام الأمان.
- عدد النساء اللاتي يضعن حزام الأمان.
- عدد الرجال الذين لا يضعون حزام الأمان.
- عدد النساء اللاتي لا يضعن حزام الأمان.

يمكنك أيضًا إضافة المجاميع الأفقية والرأسية لإيجاد:

- عدد الرجال المُستطلَعين في الدراسة المسحية.
- عدد النساء المُستطلَعات في الدراسة المسحية.
- عدد الأشخاص (رجال ونساء) الذين يضعون حزام الأمان وعدد أولئك الذين لا يضعونه.

فيما يلي مثالان إضافيان حول الجداول المزدوجة:

عدد شطائر الدجاج والسمك المباعة في المقصف المدرسي خلال فترة الاستراحة:

	فلفل	دون فلفل	فلفل وبهارات حارة
شطائر الدجاج	٩	٦	٢٣
شطائر السمك	١٠	١٥	١٢

عدد مرات استخدام الذكور والإناث لمواقع التواصُل الاجتماعي:

	لم يستخدمها	يستخدمها أحيانًا	يستخدمها كل يوم
ذكر	٣٥	١٨	٥٢
أنثى	٤٢	٢٦	٤٧

تمارين ٢-٢-د

١) أجرى مُعلِّم دراسة مسحية ليعرف عدد طلاب صفَّي التاسع والعاشر الذين يستخدمون اليد اليسرى في الكتابة. يُبيِّن الجدول المُزدوِج التالي النتائج:

	يستخدم اليد اليُسرى	يستخدم اليد اليُمنى
الصف التاسع	٩	٣٣
الصف العاشر	٦	٤٢

أ كم طالبًا من طلاّب الصف التاسع يستخدم اليد اليُسرى في الكتابة؟

ب كم طالبًا من طلاّب الصف التاسع يستخدم اليد اليُمنى في الكتابة؟

ج أيُّ يد يستخدم طلاب الصف العاشر أكثر: اليُمنى أم اليُسرى؟

د كم طالبًا من صفَّي التاسع والعاشر شاركوا في الدراسة؟

٢) قم بإجراء دراسة مسحية سريعة على طلاب الصفَّين التاسع والعاشر في مدرستك لتعرف ما إذا كانوا يستخدمون اليد اليمنى أو اليد اليسرى. ارسم جدولاً مُزدوِجًا لتعرض نتائج دراستك.

٣) سُئل مجموعة من الطلبة عن الموضوع الأكثر تفضيلاً لديهم بين الجبر والهندسة، ويُبيِّن الجدول التالي إجاباتهم:

الاسم	الجبر	الهندسة
سليمان		✓
علي	✓	
سعيد	✓	
منى		✓
هارون	✓	
مريم		✓
زهير		✓
أحمد	✓	
نوال	✓	
سناء		✓
رقية		✓
ليلى	✓	

أ ضع عددًا في كل مُربّع لإكمال الجدول المزدوج لعرض البيانات أعلاه.

	الجبر	الهندسة
ذكور		
إناث		

ب اكتب جملة تُلخِّص فيها ما يمكن قراءته من الجدول أعلاه.

لاحقًا

تأكَّد من أنك فهمت كيف تُنشئ الجدول المزدوج وتقرأه. ستستخدم هذه الجداول مرة أخرى عندما تدرس الاحتمالات.

٢-٢-هـ الجداول المُزدوِجة في الحياة اليومية

غالبًا ما تُستخدَم الجداول المُزدوجة لتلخيص البيانات وعرضها في مواقف من الحياة اليومية، وأنت في حاجة إلى معرِفة كيفية قراءة هذه الجداول، لتتمكن من الإجابة عن الأسئلة حولها.

مثـــال ٣

يُبيِّن الجدول التالي بيانات عن عدد سكان العالم عام ٢٠٠٨م، وعدد السكّان المتوقّع لعامَي ٢٠٢٥م و ٢٠٥٠م:

القارة	عدد السكّان عام ٢٠٠٨م	عدد السكّان المُتوقَّع عام ٢٠٢٥م	عدد السكّان المُتوقَّع عام ٢٠٥٠م
العالم	٦٧٠٥٠٠٠٠٠٠	٨٠٠٠٠٠٠٠٠٠	٩٣٥٢٠٠٠٠٠٠
أفريقيا	٩٦٧٠٠٠٠٠٠	١٣٥٨٠٠٠٠٠٠	١٩٣٢٠٠٠٠٠٠
أمريكا الشمالية	٣٣٨٠٠٠٠٠٠	٣٩٣٠٠٠٠٠٠	٤٨٠٠٠٠٠٠٠
أمريكا اللاتينية ودول الكاريبي	٥٧٧٠٠٠٠٠٠	٦٧٨٠٠٠٠٠٠	٧٧٨٠٠٠٠٠٠
آسيا	٤٠٥٢٠٠٠٠٠٠	٤٧٩٣٠٠٠٠٠٠	٥٤٢٧٠٠٠٠٠٠
أوروبا	٧٣٦٠٠٠٠٠٠	٧٢٦٠٠٠٠٠٠	٦٨٥٠٠٠٠٠٠
أستراليا	٣٥٠٠٠٠٠٠	٤٢٠٠٠٠٠٠	٤٩٠٠٠٠٠٠

(المصدر: Population Reference Bureau)

أ ما عدد سكّان العالم عام ٢٠٠٨م؟

ب كم يتوقَّع أن يزيد عدد سكان العالم عام ٢٠٢٥م؟

ج ما النسبة المئوية لعدد السكّان الذين يعيشون في آسيا عام ٢٠٠٨م من عدد سكّان العالم؟ أعطِ الناتج مُقرّبًا إلى أقرب عدد صحيح.

د أي قارّة يتوقَّع أن ينقص عدد سكّانها عام ٢٠٢٥م مقارنة بعام ٢٠٠٨م؟

(١) ما عدد سكّان هذه القارّة المتوقع عام ٢٠٢٥م؟

(٢) ما مقدار النقصان المُتوقَّع في عدد سكان هذه القارة عام ٢٠٥٠م؟

الحـــلّ:

أ	٦٧٠٥٠٠٠٠٠٠	اقرأ ذلك من الجدول.
ب	٨٠٠٠٠٠٠٠٠٠ − ٦٧٠٥٠٠٠٠٠٠ = ١٢٩٥٠٠٠٠٠٠	اقرأ القيمة لعام ٢٠٢٥م من الجدول، ثم اطرح العدد الصغير من العدد الكبير.
ج	$\frac{٤٠٥٢٠٠٠٠٠٠}{٦٧٠٥٠٠٠٠٠٠} \times ١٠٠ = ٪٦٠{,}٤٣٢٥ \approx ٪٦٠$	اقرأ الأعداد من الجدول، ثم احسب النسبة المئوية.

د أوروبا (١) ٧٢٦٠٠٠٠٠٠ (٢) ٧٣٦٠٠٠٠٠٠ − ٦٨٥٠٠٠٠٠٠ = ٥١٠٠٠٠٠٠	ابحث عن الأعداد التي تتناقص عبر الصفوف. اقرأ ذلك من الجدول. اقرأ القيَم من الجدول، واطرح العدد الصغير من العدد الكبير.

تمارين ٢-٢-هـ

طبّق مهاراتك

١) يُبيِّن الجدول التالي المسافات المقطوعة (بالكيلومترات) بين بعض المطارات العربية:

	أبو ظبي	دبي	مسقط	عمّان	الدوحة	الشارقة
مسقط	٤٠٧	٣٥٠		٢٣٦٨	٧٠٢	٣٣٨
الرياض	٨٠٥	٨٧٥	١١٨٤	١٢٨٩	٤٩٦	٨٩٢
صنعاء	١٤٧٥	١٥٨٨	١٧٣٥	١٩٨٤	١٣٣٠	١٦١٠
عمّان	٢٠٠٠	٢٠٢٤	٢٣٦٨		١٦٨٥	٢٩١٣
الدوحة	٣٢١	٣٨٢	٧٠٢	١٦٨٥		٣٩٧
دبي	١١٦		٣٥٠	٢٠٢٤	٣٨٢	١٨

أ أوجد مسافة الطيران بين مسقط وكل مدينة من المدن التالية:

(١) دُبي (٢) عمّان (٣) الرياض

ب أيهما أطول: رحلة من الدوحة إلى دبي أم رحلة من مسقط إلى الشارقة؟

ج ما المسافة الكلّية للطيران ذهابًا وإيابًا من عمّان إلى الدوحة؟

د إذا حلّقت طائرة بسرعة ٦٠٠ كيلومتر/ ساعة، فما الزمن الذي ستستغرقه لتطير من أبو ظبي إلى صنعاء مُقرّبًا إلى أقرب عدد صحيح من الساعات؟

٢-٣ استخدام الجداول لعرض البيانات

لاحقًا

سوف تتعلَّم كيف ترسم وتستخدم التوزيعات التكرارية والمُدرَّجات التكرارية في وحدات لاحقة.

تفيد الجداول في عرض البيانات، لأنها تُمكِّنك من ملاحظة الأنماط، واتِّجاه البيانات بسرعة وسهولة، وتُمكِّنك أيضًا من مقارنة مجموعات مختلفة من البيانات بسهولة. في هذا الدرس ستتمّ مراجعة ما عرفته سابقًا عن إنشاء وتفسير التمثيل بالمُصوَّرات والأعمدة البيانية والمُخطَّطات الدائرية.

٢-٣-أ التمثيل بالمُصوَّرات

يعتبر جدول **التمثيل بالمُصوَّرات** من الجداول البسيطة التي تستخدم الرموز (أو المُصوَّرات) لتمثيل الكمّيات. يجب أن يُضاف معنى الرمز والمقدار الذي يمثّله (بالمفتاح) إلى التمثيل البياني لإعطائه معنى.

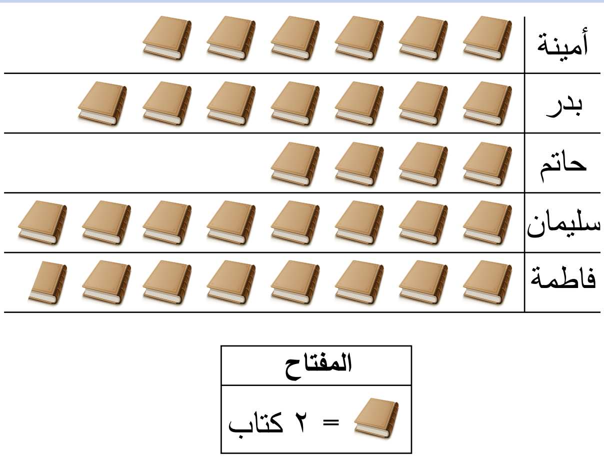
مثــال ٤

يُبيِّن الجدول التالي عدد الكتب التي أنهى خمسة طلاب قراءتها في العام الماضي:

الطالب	عدد الكتب
أمينة	١٢
بدر	١٤
حاتم	٨
سليمان	١٦
فاطمة	١٥

أنشئ التمثيل بالمُصوَّرات لعرض بيانات الجدول أعلاه.

الحــلّ:



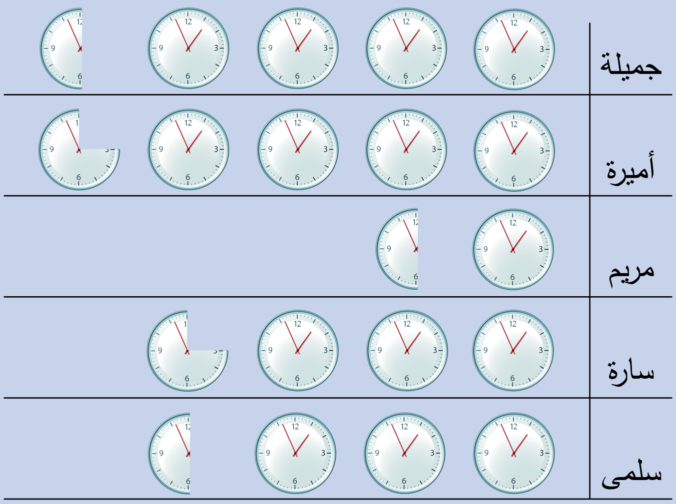
يعتبر المفتاح مهمًّا جدًّا، لأنه يعطي معنى للتمثيل بالمُصوَّرات.

يجب أن يكون لكل الرموز المدى نفسه، ويجب أن تُحاذى رأسيًّا بانتباه.

مثــال ٥

يُبيِّن التمثيل بالمُصوَّرات التالي الزمن الذي قضته خمس طالبات في المراجعة لاختبار الرياضيات:

الزمن المُستغرَق في المراجعة لاختبار الرياضيات



المفتاح

= ١ ساعة

أ) مَن منهنَّ قضت أطول زمن في المراجعة لاختبار الرياضيات؟

ب) كم ساعة راجعت سارة لاختبار الرياضيات؟

ج) مَن قضت $٣\frac{١}{٢}$ ساعة في المراجعة لاختبار الرياضيات؟

د) ارسم الرموز التي تدلّ على $٢\frac{١}{٤}$ ساعة.

الحــلّ:

أ	أميرة	الطالبة التي قضت العدد الأكبر من الساعات في المراجعة.
ب	$٣\frac{٣}{٤}$ ساعات	هناك ٣ ساعات كاملة؛ يبيّن المفتاح أن كل رمز يُمثِّل ساعة واحدة. تُبيِّن الساعة الرابعة ثلاثة أرباع الساعة، لذا يجب أن تشير إلى $\frac{٣}{٤}$
ج	سلمى	تُقابِل ثلاث ساعات كاملة، كل واحدة تُمثِّل ١ ساعة، وواحدة تُمثِّل نصف ساعة.
د		مُصوَّرتان تمثلان ساعتَين كاملتَين، وربع المُصوَّرة يمثّل $\frac{١}{٤}$

تمارين ٢-٣-أ

١) يُبيِّن التمثيل بالمُصوَّرات التالي عدد السيَّاح الذين زاروا أفضل خمسة مواقع سياحية في العالم، مُستخدِمًا المفتاح التالي:


= ٥٠٠٠٠٠ سائح

كم سائحًا يُمثِّل كل رمز من الرموز الآتية؟

أ 
ب 
ج 
د 

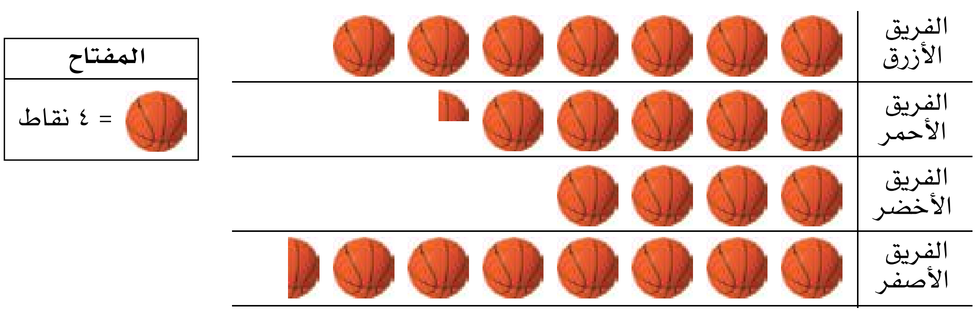
٢) فيما يلي مجموعة بيانات لأفضل خمس دول سياحية (لعام ٢٠١٦م). أنشئ التمثيل بالمُصوَّرات الذي يعرض هذه البيانات، مستخدمًا المفتاح التالي:


= ٢٥٠٠٠٠٠ سائح

الدولة	فرنسا	الولايات المُتَّحدة الأمريكية	إسبانيا	الصين	إيطاليا
عدد السيَّاح	٨٤٥٠٠٠٠٠	٧٧٥٠٠٠٠٠	٦٨٢٠٠٠٠٠	٥٦٩٠٠٠٠٠	٥٠٧٠٠٠٠٠

يجب أن يكون عدد السيَّاح المُتمثِّل في المفتاح عددًا صحيحًا يمكن تقسيمه على البيانات المعطاة بسهولة. قد تحتاج أيضًا إلى تقريب البيانات المعطاة إلى درجة محدَّدة من الدقّة.

٣) يُبيِّن التمثيل بالمُصوّرات التالي عدد النقاط المُسجّلة في دورة لكرة السلة لدى أربعة فرق رياضية:



أ أي فريق سجّل أكبر عدد من النقاط؟

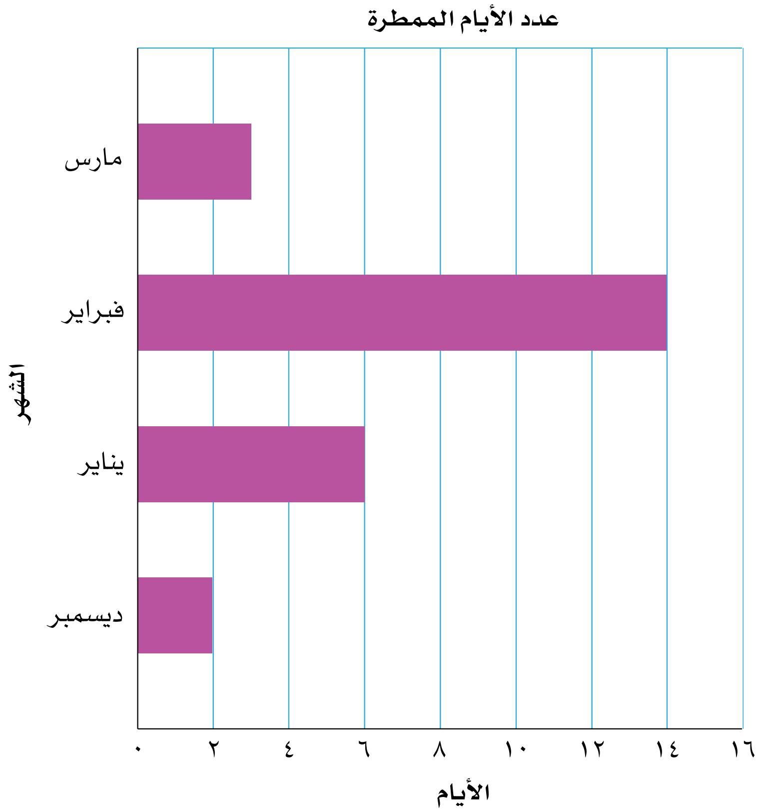
ب أي فريق سجّل أقلّ عدد من النقاط؟

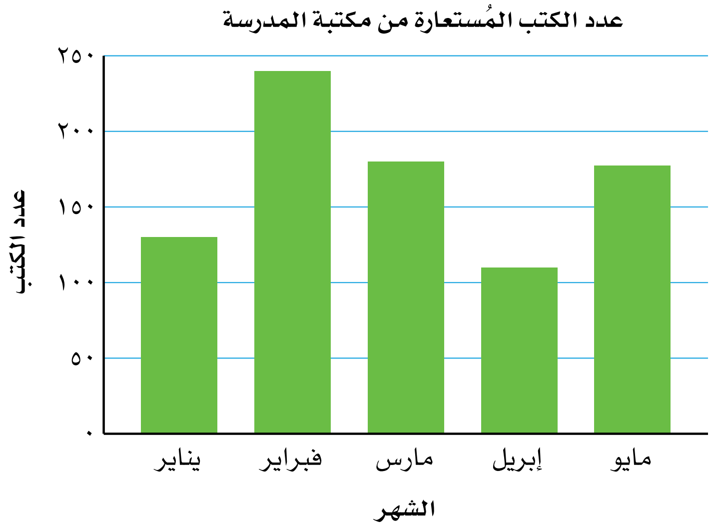
ج بكم يزيد عدد النقاط التي سجّلها الفريق الأزرق على نقاط الفريق الأحمر؟

د ما مجموع عدد النقاط التي سجّلتها الفرق الأربعة؟

٢-٣-ب التمثيل بالأعمدة البيانية

تُستخدَم **الأعمدة البيانية** عادة لعرض البيانات المُنفصِلة، حيث تعرض الأعمدة البيانية المعلومات في صورة سلسلة من الأعمدة تم رسمها بحسب المقياس على المحور، وقد تكون هذه الأعمدة أفقية أو رأسية.





في البيانات المنفصلة أو النوعية، يجب ألّا تتلاصق الأعمدة بعضها ببعض.

تتوفَّر طرق مختلفة لإنشاء الأعمدة البيانية، لكنَّ جميعها يجب أن تتضمّن:

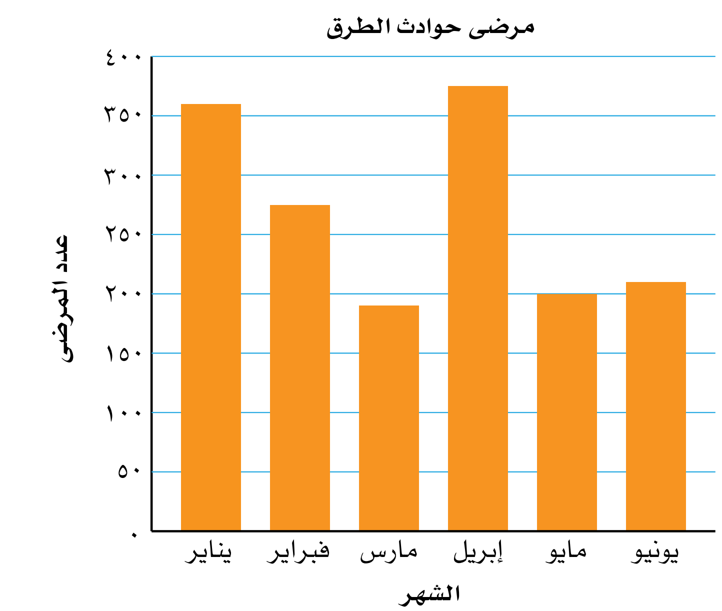
- عنوانًا يدّلنا على طبيعة البيانات المعروضة.
- مقياسًا عدديًّا أو محورًا للتعرُّف على الأعداد في كل فئة، واسمًا على المحور يُبيِّن على ماذا تدلّ الأعداد.
- مقياسًا أو محورًا تُسجِّل عليه الفئات المعروضة.
- أعمدة لها نفس العرض، تفصل بينها مسافات متساوية.

مثــال ٦

يُبيِّن الجدول التكراري التالي عدد الأشخاص الذين تمّت معالجتهم في المستشفى بعد تعرُّضهم لحوادث على الطرقات في أول ستة أشهر من العام. أنشئ أعمدة بيانية لعرض البيانات.

مرضى حوادث الطرق	
الشهر	**عدد المرضى**
يناير	٣٦٠
فبراير	٢٧٥
مارس	١٩٠
إبريل	٣٧٥
مايو	٢٠٠
يونيو	٢١٠

الحــلّ:



يُبيِّن ارتفاع كل عمود عدد المرضى.
المقياس على المحور الرأسي مُقسَّم إلى أجزاء من ٥٠ وقد تمّت كتابة الأعداد على المحور.
كُتبت أسماء الفئات (الأشهر) على المحور الأفقي.
عرض الأعمدة متساوٍ وتفصل بينها مسافات متساوية.
لاحظ أن الأعمدة التي تُمثِّل التكرار يجب أن تبدأ من الصفر.

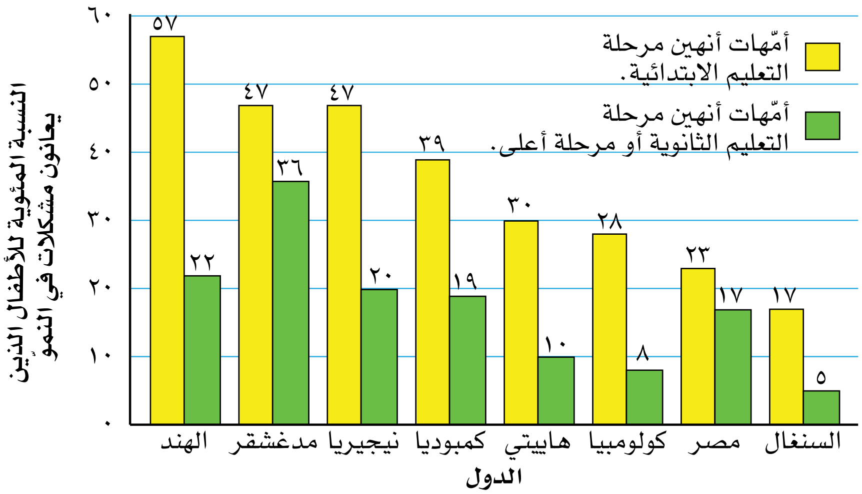
لاحقًا

تختلف الأعمدة البيانية عن المُدرَّج التكراري. يُستخدم المُدرَّج التكراري عادة للبيانات المُتَّصلة. سوف تتعلَّم ذلك لاحقًا.

الأعمدة البيانية المُزدوِجة

تُبيِّن الأعمدة البيانية المُزدوِجة مجموعتَي بيانات أو أكثر على التمثيل البياني نفسه وعلى المحورَيْن نفسيهما، لتجعل المقارنة بينها سهلة. تُقارن الأعمدة البيانية المُزدوِجة التالية بين مُعدَّلات نموّ الأطفال لأمّهات بمستويات تعليم مختلفة.

النسبة المئوية للأطفال الذين تقلّ أعمارهم عن ٣ سنوات ويعانون مشكلات في النموّ



(المصدر: برنامج التغذية ٢٠١٠: www.dhsprogram.com)

تلاحظ أن الأطفال الذين أنهت أمّهاتهم مرحلة التعليم الثانوية أو مرحلة أعلى، يكونون أقلّ عرضة لمشكلات النموّ، لأن الأعمدة التي تُمثِّلهم أقصر من أعمدة الأطفال الذين أنهت أمّهاتهم مرحلة التعليم الابتدائية.

يهدف هذا التمثيل إلى حث الدول على الاهتمام بتعليم الإناث، إذا أرادوا أن ينمو أطفالهم بصحّة جيدة.

تمارين ٢-٣-ب

طبّق مهاراتك

١) أنشئ أعمدة بيانية لعرض بيانات كل مجموعة من مجموعات البيانات التالية:

أ

الوجبة السريعة المُفضَّلة	برجر	باستا	دجاج مقلي	رقائق بطاطا	غير ذلك
عدد الأشخاص	٤٠	٣٠	٨٤	٢٠	٢٩

في برنامج معالجة فيروس نقص المناعة المُكتسَب (HIV)، أصدرت منظّمة أفرت (Avert) التي تعنى بالصحّة تقريرًا عام ٢٠١٧م بيّن أن ٣٦,٧ مليون شخص في العالم يحملون فيروس نقص المناعة المُكتسَب، ويعيش أغلب هؤلاء الأشخاص في دول مستواها الاقتصادي متوسِّط أو متدنٍّ، وأن حوالي ٧٠٪ منهم يعيشون في الصحراء الأفريقية. وكان الأكثر عرضة للفيروس أشخاصًا من دول شرق وجنوب أفريقيا. منذ عام ٢٠١٠م حدث انخفاض في مُعدَّل الإصابة بالفيروس بمقدار ٢٩٪ في هذه المناطق، نتيجة لحملات التوعية الواسعة والتربية وتوفير الأدوية المضادة للفيروسات على نطاق واسع.
(المصدر: www. avert.org)

ب

الدول الأفريقية ذات مُعدَّل الإصابات الأعلى بمرض نقص المناعة المكتسب (تقديرات عام ٢٠١٥م)	
الدولة	**النسبة المئوية للمصابين البالغين (أعمارهم من ١٥ إلى ٤٩)**
سوازيلاند	٢٨,٨٪
بتسوانا	٢٢,٢٪
ليسوتو	٢٢,٧٪
زمبابوي	١٤,٧٪
جنوب أفريقيا	١٩,٢٪
ناميبيا	١٣,٣٪
زامبيا	١٢,٣٪
ملاوي	٩,١٪
أوغندا	٧,١٪
موزامبيق	١٠,٥٪

(المصدر: www.aidsinfo.unaids.org)

٢) تُبيِّن مجموعة البيانات التالية مُعدَّل درجات الحرارة السيليزية (° س) لعشرين مدينة في الشرق الأوسط خلال إحدى السنوات:

٣٢	٤٢	٣٦	٤٠	٣٥	٣٦	٣٣	٣٢	٣٨	٣٧
٣٤	٤٠	٤١	٣٩	٤٢	٣٨	٣٧	٤٢	٤٠	٤١

سابقًا

انظر إلى الأقسام الأولى من هذه الوحدة لتتذكَّر الجداول التكرارية ذات الفئات إن احتجت إليها.

في هذا المثال، سيتمّ عرض فئات درجات الحرارة في صورة "فئات" وترك مسافات بين الأعمدة. وبما أن درجات الحرارة هي بيانات مُتَّصلة، فإن أفضل طريقة لتمثيلها هي المُدرَّج التكراري ذو الفئات المتساوية الذي ستدرسه لاحقًا.

أ انسخ الجدول التكراري ذا الفئات التالي، وأكمله لتنظِّم البيانات:

درجة الحرارة (° س)	٣٢–٣٤	٣٥–٣٧	٣٨–٤٠	٤١–٤٣
التكرار				

ب مثّل البيانات بالأعمدة البيانية الأفقية.

٣) يبيّن الجدول التالي عدد الزوّار المقيمين وعدد الزوّار الوافدين من دول العالم الأخرى إلى إحدى المدن خلال أوّل ستة أشهر من هذه السنة. مثّل هذه البيانات بالأعمدة البيانية المُزدوِجة:

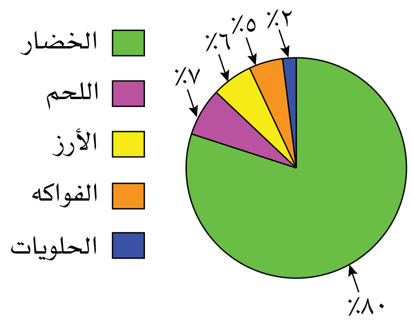
	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو
عدد الزوّار المقيمين	١٢٠٠٠	١٠٠٠٠	١٩٠٠٠	١٦٠٠٠	٢١٠٠٠	٢٠٠٠
عدد الزوّار الوافدين	٤٠٠٠٠	٣٩٠٠٠	١٥٠٠٠	١٢٠٠٠	١٩٠٠٠	٢٥٠٠٠

٢-٣-ج المُخطَّطات الدائرية

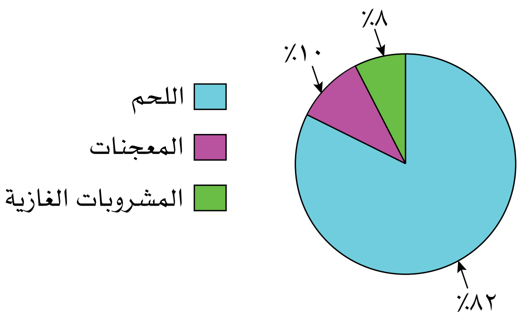
تستخدم **المُخطَّطات الدائرية** القطاعات الدائرية لعرض البيانات. حيث تُمثِّل الدائرة 'كل' مجموعة البيانات. فمثلاً، إذا أجريت دراسة مسحية عن الرياضة المُفضَّلة لكل طلاب المدرسة، فسوف تُمثِّل الدائرة الكاملة كل طلاب المدرسة، وتُمثِّل القطاعات مجموعات الطلاب الذين يلعبون كل نوع من أنواع الرياضة.

ويجب أن يتضمَّن المُخطَّط الدائري شأنه شأن التمثيلات الأخرى عنوانًا ومفتاحًا. فيما يلي أمثلة على المُخطَّطات الدائرية:

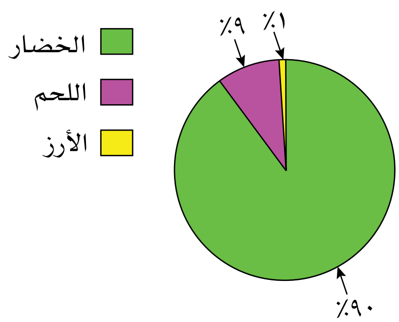
الطعام المفضّل لدى مجموعة من البالغين



الطعام المفضّل لدى مجموعة من المراهقين



الطعام المفضّل لدى مجموعة من المسنّين



مثــال ٧

يُبيِّن الجدول التالي كيف تقضي طالبة يومها:

النشاط	المدرسة	النوم	الأكل	حل الواجبات المنزلية	المساعدة في أعمال المنزل	المطالعة
عدد الساعات	٧	٨	١,٥	٣	٢,٥	٢

أنشئْ مُخطَّطًا دائريًّا لعرض البيانات.

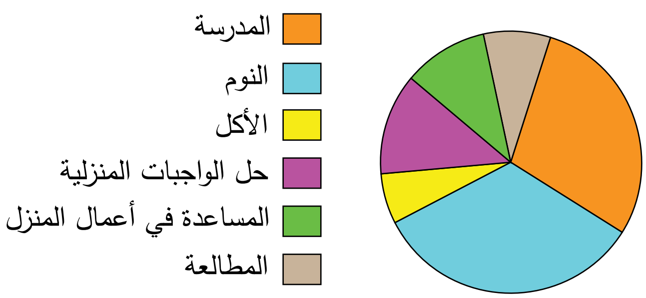
الحـــلّ:

٧ + ٨ + ١,٥ + ٣ + ٢,٥ + ٢ = ٢٤

النشاط	في صورة كسر من ٢٤	التحويل إلى درجات
المدرسة	= $\frac{٧}{٢٤}$	= $\frac{٧}{٢٤}$ × ٣٦٠° = ١٠٥°
النوم	= $\frac{٨}{٢٤}$	= $\frac{٨}{٢٤}$ × ٣٦٠° = ١٢٠°
الأكل	= $\frac{١,٥}{٢٤}$ = $\frac{١٥}{٢٤٠}$	= $\frac{١٥}{٢٤٠}$ × ٣٦٠° = ٢٢,٥°
حل الواجبات المنزلية	= $\frac{٣}{٢٤}$	= $\frac{٣}{٢٤}$ × ٣٦٠° = ٤٥°
المساعدة في أعمال المنزل	= $\frac{٢,٥}{٢٤}$ = $\frac{٢٥}{٢٤٠}$	= $\frac{٢٥}{٢٤٠}$ × ٣٦٠° = ٣٧,٥°
المطالعة	= $\frac{٢}{٢٤}$	= $\frac{٢}{٢٤}$ × ٣٦٠° = ٣٠°

النشاط	المدرسة	النوم	الأكل	حل الواجبات المنزلية	المساعدة في أعمال المنزل	المرضى
عدد الساعات	٧	٨	١,٥	٣	٢,٥	٢
التكرار	١٠٥°	١٢٠°	٢٢,٥°	٤٥°	٣٧,٥°	٣٠°

يوم طالبة



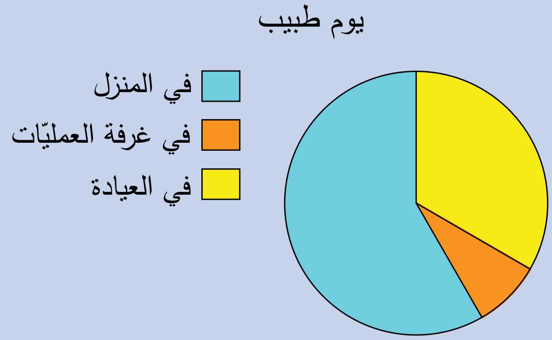
أوجد أوّلاً العدد الإجمالي للساعات، ثم اكتب كل فئة في صورة كسر من الكل، وحوّل الكسر إلى درجات.

عند تقريب قياسات الزوايا، قد لا يساوي المجموع ٣٦٠°. إذا حدث ذلك، يمكنك أن تضيف أو تطرح درجة واحدة من أكبر قطاع (القطاع ذي التكرار الأكبر).

- ارسم دائرة لتُمثِّل اليوم كاملاً.
- استخدم مسطرة ومنقلة لتقيس كل قطاع.
- سمِّ أجزاء المُخطَّط واكتب عنوانًا لها.

مثـــال ٨

يبيّن المُخطَّط الدائري التالي كيف يقضي أحد الأطباء يومه:



أ ما الكسر الذي يُمثِّل ما يقضيه الطبيب في العيادة؟

ب كم ساعة يقضي الطبيب في المنزل؟

الحــلّ:

أ	$\frac{١٢٠}{٣٦٠} = \frac{١}{٣}$	أوجد قياس الزاوية وحوّله إلى كسر. قياس زاوية القطاع الأصفر يساوي ١٢٠°. حوّل قياس الزاوية إلى كسر بقسمته على ٣٦٠° وتبسيط الناتج.
ب	$\frac{٢١٠}{٣٦٠} \times ٢٤ = ١٤$ ساعة	أوجد قياس الزاوية وحوّله إلى ساعات.

تمارين ٢-٣-ج

١) يُبيِّن الجدول التالي نتائج دراسة مسحية أُجريت في حرم جامعي حول استخدام الطلاب لمكتبة الإنترنت. ارسم مُخطَّطًا دائريًّا لتعرض البيانات.

الفئة	عدد الطلاب
لا يستخدم مكتبة الإنترنت.	١٨٠
استخدم مكتبة الإنترنت سابقًا.	١٢٠
يستخدم مكتبة الإنترنت حاليًّا.	١٠٠

٢) يُبيِّن الجدول التالي اللغة الأم لعدد من الأشخاص الذين يعبرون مطارًا دوليًّا. مثِّل هذه البيانات بمُخطَّط دائري:

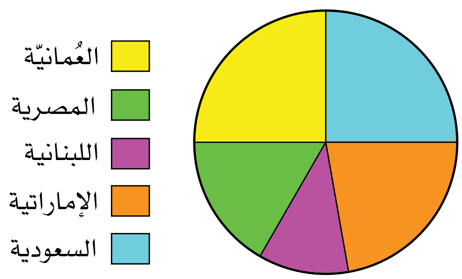
اللغة	التكرار
الإنجليزية	١٣٠
الإسبانية	١٤٤
الصينية	٩٨
العربية	١٠٤
الفرنسية	٢٤
الألمانية	١٧٦
اليابانية	٢٢

٣) يُبيِّن الجدول التالي المساحات المتوافرة في مزرعة لزراعة أنواع مختلفة من الخضراوات. ارسم مُخطَّطًا دائريًّا لعرض البيانات:

الخضراوات	يقطين	قرع	ملفوف	بطاطس حلوة
مساحة الأرض (كم^{٢})	١,٤	١,٢٥	١,١٥	١,٢

٤) أ حدِّد ما إذا كانت البيانات التالية بيانات منفصلة أم بيانات متصلة:

جنسيات الطلبة في مدرسة دولية



ب ما الكسر الذي يدل على عدد الطلبة السعوديين؟

ج ما النسبة المئوية للطلبة اللبنانيين في المدرسة؟

د اكتب نسبة الطلبة العُمانيين إلى كل الطلبة في صورة عدد عشري.

هـ إذا كان عدد طلبة المدرسة ٩٠٠ طالب، فكم طالبًا منهم يحمل الجنسية:

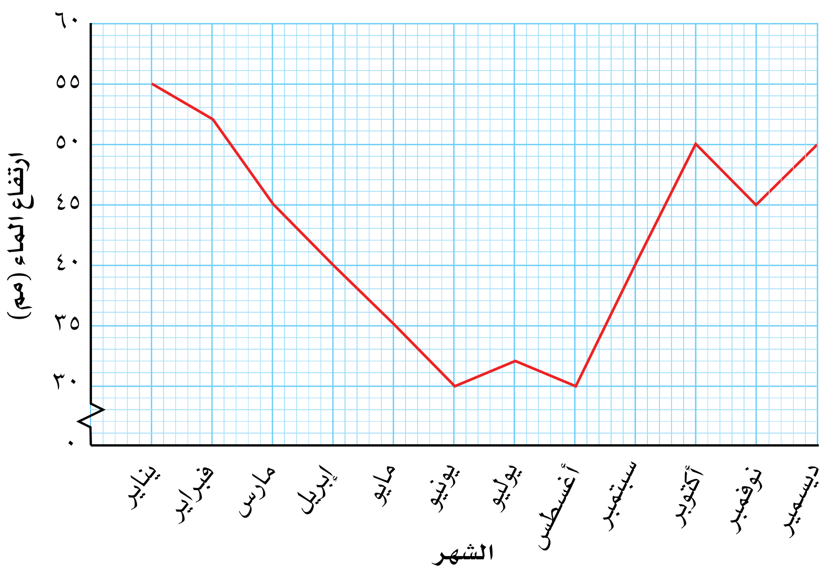
(١) السعودية (٢) اللبنانية (٣) الإماراتية (٤) المصرية؟

٢-٣-د التمثيل بالخطوط البيانية

تتغيَّر بعض البيانات التي تجمعها مع الزمن، مثل معدَّل درجات الحرارة في كل شهر من شهور السنة، أو عدد السيَّارات المركونة كل ساعة في موقف أحد المراكز التجارية، أو كمّيّة النقود في حسابك المصرفي كل أسبوع.

يُبيِّن **التمثيل بالخطوط البيانية** التالي تغيُر ارتفاع الماء في بركة إحدى الحدائق خلال سنة.

يُبيِّن التمثيل البياني أن مستوى الماء يكون عند أدنى نقطة بين شهرَي يونيو وأغسطس:



اختيار التمثيل الأكثر ملاءمة

لا تستطيع القول إن إحدى التمثيلات أفضل من سواه، لأن ذلك يعتمد على البيانات المعطاة وعلى المطلوب عرضه، ولكن من المفيد تذكُّر الإرشادات التالية:

- استخدم المُخطَّطات الدائرية أو الأعمدة البيانية (المنفردة) إذا رغبت في المقارنة بين أجزاء مختلفة من الكل، ولم تتضمن البيانات زمنًا، والبيانات كبيرة.
- استخدم الأعمدة البيانية مع البيانات المُنفصِلة والتي لا تتغيَّر مع الزمن.
- استخدم الأعمدة البيانية المُزدوِجة للمقارنة بين مجموعتَي بيانات مُنفصِلة أو أكثر.
- استخدم التمثيل بالخطوط البيانية مع البيانات العددية لتبيّن تغيُّر شيء ما مع الزمن.

سابقًا

درست في الوحدة الأولى التمثيلات البيانية التي يمكن استخدامها للتحويل بين عملات الدول أو بين أنظمة وحدات القياس.

عندما يكون الزمن أحد المُتغيِّرين، يتم عادة تعيين وحدات الزمن على المحور الأفقي.

مُساعَدة

قد تُسأل عن سبب اختيار نوع مُحدَّد من الجداول أو المُخطَّطات البيانية. تأكد أنك تعلَّمت إيجابيات وسلبيات كل منها في الجدول.

مُساعَدة

قبل إنشاء التمثيل البياني، قرِّر:

- كم تريد أن يكون قياس التمثيل؟
- ما المقاييس التي ستستخدمها؟ وكيف تُجزِّئها؟
- ما العنوان الذي ستعطيه للتمثيل؟
- هل تحتاج إلى مفتاح أم لا؟

يُلخص الجدول التالي خصائص وإيجابيات وسلبيات كل نوع من أنواع الجداول والتمثيلات والمُخطَّطات البيانية. يمكنك استخدام هذه المعلومات لتساعدك على اتخاذ القرار في النوع الذي سوف تستخدمه.

التمثيل البياني وخصائصه	الإيجابيات	السلبيات
التمثيل بالمُصوَّرات يعرض البيانات باستخدام الرموز أو المُصوَّرات لعرض الكميات. يبيّن المفتاح مقدار كل رمز.	جذّاب ومُناسِب للموضوع. سهل الفهم. يساعد على مقارنة الفئات بسهولة.	يجب أن تُقسّم الرموز لتمثيل 'القيَم الواقعة بين القيَم المعطاة'، وقد لا يكون ذلك واضحًا. يمكن أن يقود إلى سوء فهم لأنه لا يعطي معلومات تفصيلية عن البيانات.
الأعمدة البيانية يعرض البيانات بأعمدة مقاسة بحسب المقاييس على المحورَين. يمكن استخدام الأعمدة المُزدوجة لمجموعتَين من البيانات. يمكن أن تُذكَر البيانات بأي ترتيب. يجب تسمية الأعمدة ووضع مقاييس للمحورَين.	واضح بصريًّا. يُسهِّل مقارنة الفئات ومجموعات البيانات. يمكن تحديد القيَم من خلاله، لأن المقاييس تكون مُعطاة.	يمكن إعادة ترتيب الفئات لتأكيد بعض التأثيرات التي يمكن أن تكون مضللة.
المُخطَّطات الدائرية يعرض البيانات في صورة كسور أو نِسَب مئوية من الدائرة الكاملة. يجب تسمية كل قطاع. يجب إعطاء مفتاح ومجاميع البيانات.	يبدو جميل المظهر وسهل الفهم. يُسهِّل مقارنة البيانات. لا يحتاج إلى مقاييس. يُبيِّن النسبة المئوية لكل فئة.	البيانات العددية ليست دقيقة. تصعب مقارنة مجموعتَي بيانات. قد تسبِّب فئة 'أمور أخرى' بعض المشاكل. المجموع غير معروف ما لم يحدَّد. جيد عندما يكون عدد البيانات من ثلاثة إلى سبعة.

التمثيل البياني وخصائصه	الإيجابيات	السلبيات
التمثيل بالخطوط البيانية تُرسم القيَم على 'خطَّي أعداد' على المحورَين الرأسي والأفقي، ويُسمّى المحوران، ويوضع لكل منهما مقياس.	يعرض معلومات تفصيلية أكثر من التمثيلات الأخرى. يبيّن الأنماط والاتّجاهات بوضوح. يمكن قراءة المعلومات الواقعة بين القيَم المعطاة باستخدام التمثيل البياني. له صيَغ كثيرة مختلفة ويمكن استخدامه بطرق مختلفة (مثل التمثيلات البيانية للتحويلات والمنحنيات).	مفيد فقط مع البيانات العددية. يمكن معالجة مقاييس المحاور لتظهر البيانات بصورة أفضل.

لاحقًا

ستتعامل مع التمثيل بالخطوط البيانية عندما تدرس التوزيعات التكرارية.

تمارين ٢-٣-د

١) ما نوع التمثيل البياني الذي سوف تستخدمه لعرض المعلومات الآتية؟ اذكر السبب.

- أ عدد الباحثين عن عمل في بلدك في كل شهر من هذه السنة.
- ب برامج التلفاز المُفضَّلة لديك، ولدى تسعة من أصدقائك.
- ج عدد الأشخاص الذين يستخدمون صالات الرياضة في أوقات مختلفة من اليوم.
- د المواد الدراسية المُفضَّلة لدى الطلاب في المدرسة.
- هـ الأسباب التي يذكرها الناس لعدم التبرُّع للأعمال الخيرية.
- و اللغات المختلفة التي يتحدّثها الطلبة في مدرستك.
- ز المسافة التي تقطعها بخزّان وقود في سيّارات تختلف سعات مُحركاتها.

طبّق مهاراتك

٢) اجمع عشرة تمثيلات مختلفة من الصحف أو المجلات أو مصادر أخرى، ثم:

- أ ألصق التمثيلات على كرّاستك.
- ب اكتب نوع كل تمثيل.
- ج اكتب فقرة قصيرة تشرح فيها ما يعرضه كل تمثيل.
- د حدِّد أي اتِّجاهات أو أنماط يمكنك ملاحظتها على التمثيل.
- هـ اذكر أي معلومة ناقصة تجعل تفسير التمثيل صعبًا.
- و برأيك، لماذا تم استخدام التمثيل المُحدَّد في كل حالة؟
- ز لو تُرك الأمر لك، هل كنت ستختار نفس التمثيل البياني في كل حالة؟ اذكر السبب.

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- في الإحصاء، البيانات هي معلومات تُجمَع للاجابة عن سؤال محدّد.
- البيانات النوعيّة هي بيانات غير عددية، مثل الألوان والأماكن وبعض الصفات.
- البيانات العددية (الكمّية) تُجمَع في صورة أعداد. قد تكون البيانات العددية مُنفصِلة أو مُتَّصلة. تأخذ البيانات المنفصلة قيمًا مُحدَّدة؛ وتأخذ البيانات المُتَّصلة أي قيمة واقعة ضمن فترة معطاة.
- البيانات الأوَّلية هي بيانات تجمعها بنفسك من مصادر أوَّلية. والبيانات الثانوية هي بيانات تجمعها من مصادر أخرى (تمّ جمعها من قبل شخص آخر).
- تُسمّى البيانات غير المُرتَّبة بالبيانات الخام. يمكن تنظيم البيانات الخام باستخدام جداول العد ومُخطَّطات الساق والورقة والجداول المُزدوِجة، وذلك لعرضها ولتسهيل التعامُل معها.
- يمكن عرض البيانات في الجداول التكرارية في صورة تمثيل بياني، لعرض الأنماط والاتِّجاهات بصريًا.
- التمثيل بالمُصوَّرات هو تمثيل بياني بسيط يستخدم الرموز لعرض الكمّيات.
- تتكوَّن الأعمدة البيانية من أعمدة في صفوف أفقية أو أعمدة رأسية بأطوال مختلفة. يمثّل طول العمود (أو ارتفاعه) كمّية يمكن قراءتها باستخدام مقياس مُعطى على أحد المحورَين.
- يستخدم التمثيل بالأعمدة المُزدوِجة لعرض مجموعتَي بيانات أو أكثر على نفس المحورَين.
- المُخطَّطات الدائرية هي لوحة دائرية قُسِّمت إلى قطاعات لعرض البيانات.
- تعتمد التمثيلات البيانية التي ترسمها على البيانات وما تريد أن تعرضه (الهدف من عرض البيانات).

يجب أن تكون قادرًا على:

- جمع البيانات لتجيب عن سؤال إحصائي.
- تصنيف أنواع مختلفة من البيانات.
- استخدام علامات العد لعد البيانات وتسجيلها.
- رسم جدول تكراري لتنظيم البيانات.
- استخدام الفئات لتجميع البيانات ورسم جدول تكراري ذي فئات.
- إنشاء مُخطَّط الساق والورقة المُنفرِد والمُزدوِج لتنظيم مجموعات من البيانات وعرضها.
- رسم جداول تكرارية مُزدوِجة واستخدامها لتنظيم مجموعتَي بيانات أو أكثر.
- إنشاء تمثيل بالمُصوَّرات وتفسيره.
- إنشاء الأعمدة البيانية المُنفرِدة والمُزدوِجة وتفسيرها.
- إنشاء المُخطَّطات الدائرية وتفسيرها.

تمارين نهاية الوحدة

١) تعمل سلمى في قسم مراقبة ضبط الجودة. اختارت ٤٠ صندوق بسكويت عشوائيًّا من مصنع كبير، ثم قامت بفتح كل صندوق وعدّ حبات البسكويت المكسورة الموجودة بداخله. وسجَّلت النتائج التالية:

٠	٠	٢	١	٣	٠	٠	٢	٣	١
١	١	٢	٣	٠	١	٢	٣	٤	٢
٠	٠	٠	٠	١	٠	٠	١	٢	٣
٣	٢	٢	٢	١	٠	١	٢	١	٢

أ هل تعتبر البيانات التي سجّلتها سلمى أوَّلية أم ثانوية بالنسبة إليها؟ لماذا؟

ب هل البيانات مُنفصِلة أم مُتَّصلة؟ وضِّح إجابتك.

ج انسخ الجدول التكراري التالي، وأكمله لتنظيم البيانات أعلاه.

عدد حبّات البسكويت المكسورة	علامة العد	التكرار
٠		
١		
٢		
٣		
٤		

د ما التمثيل البياني الذي يجب أن ترسمه سلمى لعرض بيانات الجدول أعلاه؟ لماذا؟

٢) يبيّن الجدول التالي عدد رحلات الطيران خلال شهر إبريل ٢٠١٧م من خمسة مطارات رئيسية في إحدى الدول:

المطار	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ)
مجموع الرحلات	٢٣٦٩٦	٣٩٦٦٠	٦٣٨٠	١٠٦٩٧	١٥٣٩٧

أ أي مطار تعامل مع أكثر عدد من الرحلات؟

ب كم رحلة طيران تمّ تنفيذها من المطار (هـ)؟

ج قرِّب كل عدد إلى أقرب ألف.

د استخدم الأعداد المُقرَّبة لترسم التمثيل بالمُصوَّرات لعرض هذه البيانات.

٣) يُبيِّن الجدول التالي النسبة المئوية للأشخاص الذين يملكون حواسيب محمولة وهواتف محمولة في أربع محافظات:

المحافظة	يمتلك حاسوبًا محمولاً	يمتلك هاتفًا محمولاً
(أ)	٪٤٥	٪٨٣
(ب)	٪٣٢	٪٧٢
(ج)	٪٦١	٪٨٥
(د)	٪٢٢	٪٦٨

أ ما نوع هذا الجدول؟

ب إذا وُجد ٦٠٠٠ شخص في المحافظة (أ)، فكم شخصًا منهم يُفترَض أن يمتلك هاتفًا محمولاً؟

ج يوجد في إحدى هذه المحافظات معاهد تقنية وعدد من محلات برمجيات الحاسوب. ما هي المنطقة برأيك؟ لماذا؟

د أنشئ أعمدة بيانية مُزدوِجة لعرض هذه البيانات.

٤) يُبيِّن الجدول التالي الوسيلة المُفضَّلة لدى مجموعة من الأشخاص للانتقال من منازلهم إلى أماكن العمل:

وسيلة النقل	النسبة المئوية
السيّارة	٪٣٦
الحافلة	٪٣١
الدرّاجة	٪١٩
السير على الأقدام	٪١٤

مثّل البيانات في الجدول أعلاه بمُخطَّط دائري.

٥) استخدم المُخطَّط الدائري المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية:

أ ما البيانات التي يعرضها التمثيل البياني؟

ب كم عدد البيانات المختلفة الموجودة في التمثيل؟

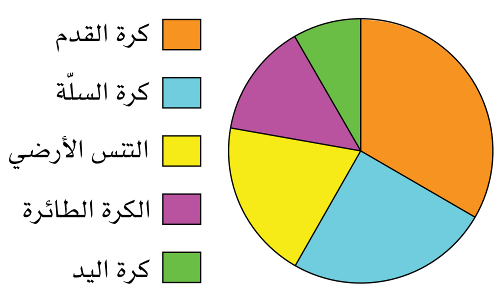
ج ما الرياضة الأكثر شعبية لدى الطلاب؟

د ما الكسر الذي يمثّل الطلاب الذين يلعبون كرة السلة؟

هـ كم طالبًا يلعبون الكرة الطائرة؟

و كم طالبًا يلعبون كرة القدم أو كرة اليد؟

الرياضة المُفضَّلة لدى ٢٠٠ طالب



الوحدة الثالثة: المُعالجة الجبرية

المُفردات

- الكسر الجبري
Algebraic fraction

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تُبسِّط الكسور الجبرية.
- تُجري حسابات تتضمّن كسورًا جبرية.

يحتوي صندوق الأدوات على كثير من الأدوات التي تُستخدم في الحياة اليومية، ومن المفيد أن تعرف آليّة عمل كل أداة لكي تستخدمها عند الحاجة إليها.

وبالمثل، هناك أدوات في الرياضيات يمكن استخدامها في مواقف مختلفة، وفي حل مسائل مُتنوّعة.

وفي هذه الوحدة، سوف تدرس بعض طرق الحل الجبرية الإضافية وكيفية استخدامها بفاعلية ودقة.

٣-١ الكسور الجبرية

٣-١-أ تبسيط الكسور الجبرية

تعلّمت في الصفوف السابقة تقنيات لتبسيط الكسور، فضلاً عن المُعالجات الجبرية، وفي هذا الموضوع سوف تستخدم هذه التقنيات لتبسيط الكسور الجبرية المُركّبة.

كذلك تعلّمت من قبل أن تبسيط الكسور يتمّ بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مُشترَك، ويمكن تنفيذ ذلك أيضًا عند تبسيط الكسور الجبرية.

مثـــال ١

بسِّط كلاًّ من الكسور الجبرية التالية:

أ $\frac{٣س}{٦}$ ب $\frac{ص^{٢}}{ص^{٥}}$ ج $\frac{١٢د^{٣}}{١٦د^{٧}}$ د $\frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س^{٢} - ٧س + ١٢}$

الحـــلّ:

أ	$\frac{٣س}{٦} = \frac{٣س \div ٣}{٦ \div ٣} = \frac{س}{٢}$	العامل المُشترَك الأكبر للعددَين ٣، ٦ هو ٣
ب	$\frac{ص^{٢}}{ص^{٥}} = \frac{ص^{٢} \div ص^{٢}}{ص^{٥} \div ص^{٢}} = \frac{١}{ص^{٣}}$	العامل المشترك الأكبر لـ $ص^{٢}$، $ص^{٥}$ هو $ص^{٢}$
ج	$\frac{١٢د^{٣}}{١٦د^{٧}} = \frac{٣د^{٣}}{٤د^{٧}}$ $\frac{٣د^{٣}}{٤د^{٧}} = \frac{٣}{٤د^{٤}}$	ابدأ أوّلاً بالعوامل. العامل المُشترَك الأكبر للعددَين ١٢، ١٦ هو ٤ لاحظ أن العامل المُشترَك الأكبر لـ $د^{٣}$، $د^{٧}$ هو $د^{٣}$
د	$\frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س^{٢} - ٧س + ١٢} = \frac{(س - ٣)(س - ١)}{(س - ٣)(س - ٤)}$ $= \frac{\cancel{(س - ٣)}(س - ١)}{\cancel{(س - ٣)}(س - ٤)}$ $= \frac{(س - ١)}{(س - ٤)}$	لاحظ أنّك تستطيع تحليل كلّ من البسط والمقام إلى عوامل. لاحظ أن (س − ٣) عامل مُشترَك لكل من البسط والمقام، لذا يمكنك حذفه.

سابقًا

قد تحتاج إلى مراجعة قوانين الأسس التي تعلّمتها في الصف التاسع.

تمارين ٣-١-أ

بسّط كلاً من الكسور الجبرية التالية بقسمة كل من البسط والمقام على العامل المُشترَك الأكبر:

١)
أ $\frac{٢س}{٤}$ ب $\frac{٣ص}{١٢}$ ج $\frac{٥س}{س}$ د $\frac{١٠ص}{ص}$ هـ $\frac{٦ل}{٣٦}$

و $\frac{٩د}{٢٧}$ ز $\frac{٥ل}{٥٠}$ ح $\frac{٤ص}{٨}$ ط $\frac{١٥ع}{٢٠}$ ي $\frac{١٦ل}{١٢}$

٢)
أ $\frac{٥س ص}{١٥}$ ب $\frac{٣س}{١٢ص}$ ج $\frac{١٧أب}{٣٤أب}$ د $\frac{٩س ص}{١٨س}$ هـ $\frac{٢٥س^{٢}}{٥س}$

و $\frac{٢١د^{٢}}{٧د}$ ز $\frac{١٤س^{٢}}{٢١س ص}$ ح $\frac{١٢أب^{٢}}{٤أب}$ ط $\frac{٢٠حـ هـ}{٣٠حـ^{٢}هـ^{٢}}$ ي $\frac{٥أ}{٢٠أب^{٢}}$

٣)
أ $\frac{٧أ^{٢}ب^{٢}}{٣٥أ^{٢}ب^{٣}}$ ب $\frac{(أب)^{٢}}{أب}$ ج $\frac{١٨أب جـ}{٣٦أجـ}$ د $\frac{١٣أ^{٢}ب جـ}{٥٢أب}$

هـ $\frac{١٢أ^{٢}ب^{٢}جـ^{٢}}{٢٤أب جـ}$ و $\frac{٣٦(أب)^{٢}جـ}{١٦أ^{٢}ب جـ^{٢}}$ ز $\frac{(أب جـ)^{٢}}{أب جـ}$ ح $\frac{٩س^{٢}ص^{٣}}{١٢س^{٣}ص^{٢}}$

ط $\frac{٢٠س^{٣}ص^{٢}ع^{٢}}{١٥س ص^{٣}ع}$ ي $\frac{(٣ص)^{٢}}{٣ص^{٣}}$

٤)
أ $\frac{١٨(س ص)^{٢}ع^{٣}}{١٧(س ص ع^{٣})^{٢}}$ ب $\frac{٣٣٤س^{٤}ص^{٧}ع^{٣}}{٦٦٨س ص^{٨}ع^{٢}}$ ج $\frac{٢٤٩س (د ع)^{٣}}{٥٨١س^{٣}د ع^{٧}}$

د $\frac{س^{٢} + ٣س}{س^{٢} + ٤س}$ هـ $\frac{س^{٢} + ٣س}{س^{٢} + ٧س + ١٢}$ و $\frac{ص^{٣} + ص^{٤}}{ص^{٢} + ٢ص + ١}$

ز $\frac{س^{٢} - ٨س + ١٢}{س^{٢} - ٦س + ٨}$ ح $\frac{س^{٢} + ٩س + ٢٠}{س^{٢} + س - ١٢}$ ط $\frac{٢٤س^{٢} + ٨س}{٣س^{٢} + س}$

ي $\frac{٣س^{٢} - ١٠س - ٨}{٣س^{٢} - ١٤س + ٨}$ ك $\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} + ٥س - ٢٤}$ ل $\frac{٢س^{٢} - س - ٣}{س^{٢} + ٢س + ١}$

م $\frac{٧س^{٢} - ٢٩س + ٤}{س^{٢} - ٨س + ١٦}$ ن $\frac{١٠ص^{٢} - ٣ص - ٤}{٢ص^{٢} - ١٣ص - ٧}$ س $\frac{٦س^{٢} - ١١س - ٧}{١٠س^{٢} - ٣س - ٤}$

٥)
أ $\frac{٦س^{٢} - ٣٥س + ٣٦}{١٤س^{٢} - ٦١س - ٩}$ ب $\frac{(س^{٢})^{٢} - (ص^{٢})^{٢}}{(س - ص)(س + ص)}$ ج $\frac{\sqrt{س}}{(\sqrt{س})^{٣}}$

د $\frac{س^{٤} + ٢س^{٢} + ١}{س^{٢} + ١}$ هـ $\frac{(س^{٢} + ٧س + ١٢)(س^{٢} + ٨س + ١٢)}{(س^{٢} + ٩س + ١٨)(س^{٢} + ٦س + ٨)}$

و $\frac{(\sqrt{س^{٣} + ص^{٣}})^{٢}}{س^{٣} + ص^{٣}}$

٣-١-ب ضرب و قسمة الكسور الجبرية

لدينا عملية الضرب الآتية: $\frac{س}{ص^{٢}} \times \frac{ص^{٤}}{س^{٣}}$

أنت تعلم أن عملية الضرب تتمّ بضرب قيَم البسط معًا وقيَم المقام معًا:

$$\frac{س}{ص^{٢}} \times \frac{ص^{٤}}{س^{٣}} = \frac{س\ ص^{٤}}{ص^{٢}س^{٣}}$$

ستجد أن العامل المشترك الأكبر (ع م ك) للبسط والمقام هو س ص^{٢}، فإذا قسمت كل منهما على س ص^{٢} ستحصل على:

$$\frac{س\ ص^{٤}}{ص^{٢}\ س^{٣}} = \frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$$

الأمثلة الآتية ستساعدك على فهم عمليات ضرب وقسمة الكسور الجبرية.

مثـــال ٢

بسِّط كلاًّ من الكسور الجبرية التالية:

أ $\frac{٤}{٣س^{٢}} \times \frac{١٤س^{٣}}{١٦ص^{٢}}$

ب $\frac{٣(س + ص)^{٣}}{١٦ع^{٢}} \times \frac{١٢ع}{٩(س + ص)^{٧}}$

ج $\frac{١٤س^{٤}ص^{٣}}{٩} \div \frac{٧س^{٢}ص}{١٨}$

الحـــلّ:

أ $\frac{٤}{٣س^{٢}} \times \frac{١٤س^{٣}}{١٦ص^{٢}}$

$= \frac{٤ \times ١٤س^{٣}}{٣س^{٢} \times ١٦ص^{٢}} = \frac{٥٦س^{٣}}{٤٨س^{٢}ص^{٢}} = \frac{٧س}{٦ص^{٢}}$

يمكنك أن تضرب قيَم البسط معًا وقيَم المقام معًا، ثم التبسيط

ب $\frac{٣(س + ص)^{٣}}{١٦ع^{٢}} \times \frac{١٢ع}{٩(س + ص)^{٧}}$

$= \frac{٣٦(س + ص)^{٣}ع}{١٤٤(س + ص)^{٧}ع^{٢}} = \frac{١}{٤(س + ص)^{٤}ع}$

اضرب قيَم البسط وقيَم المقام.

بسّط.

ج $\frac{١٤س^{٤}ص^{٣}}{٩} \div \frac{٧س^{٢}ص}{١٨}$

$= \frac{١٤س^{٤}ص^{٣}}{٩} \times \frac{١٨}{٧س^{٢}ص}$

$= \frac{٤س^{٤}ص^{٣}}{س^{٢}ص}$

$= ٤س^{٢}ص^{٢}$

نحتاج إلى إيجاد مقلوب الكسر الثاني قبل إجراء عملية الضرب.

اقسم على العامل المشترك الأكبر بين الأعداد والمُتغيّرات.

اضرب قيَم البسط وقيَم المقام.

بسّط.

تمارين ٣-١-ب

أوجد ناتج ضرب أو قسمة الكسور الجبرية التالية، واكتبه في أبسط صورة:

١) أ $\frac{٢س}{٣} \times \frac{٣س}{٨}$ ب $\frac{٣ص}{٤} \times \frac{٢ص}{٧}$ ج $\frac{٢ع}{٧} \times \frac{٣ع}{٤}$ د $\frac{٦د}{٩} \times \frac{٩د}{١٥}$

هـ $\frac{٢س^{٢}}{٥} \times \frac{٥}{٢س^{٢}}$ و $\frac{٧س^{٢}}{١٢} \times \frac{٤}{١٤س^{٢}}$ ز $\frac{١٢هـ^{٢}}{١١د} \times \frac{٣٣د^{٢}}{٢٤هـ^{٣}}$ ح $\frac{١٨حـ^{٤}}{١٦د^{٢}} \times \frac{د^{٤}}{٣٦حـ^{٣}}$

ط $\frac{٣ص}{٤} \div \frac{٣ص}{٨}$ ي $\frac{٣ص}{٨} \div \frac{٣ص^{٣}}{٤}$ ك $\frac{٤جـد}{٧} \div \frac{١٦جـ^{٢}}{٨}$ ل $\frac{٨عف}{د} \div \frac{٦مع^{٢}ف^{٢}}{د^{٢}}$

٢) أ $\frac{٢٤ع ل^{٢}}{س^{٢}} \div \frac{٨س ل}{ع}$ ب $\frac{٨}{١٢} \times \frac{س^{٣}}{ت^{٢}} \times \frac{ت^{٣}}{س^{٢}}$

ج $\frac{٩}{٢٧} \times \frac{٣س^{٢}}{١٢ص^{٣}} \times \frac{٨١}{٢٧} \times \frac{٩ص^{٢}}{س^{٣}}$ د $\left(\frac{٣}{٨} \times \frac{٦٤ت^{٢}ص^{٢}}{٢٧ت}\right) \div \left(\frac{٣}{٨} \times \frac{ص^{٢}}{ت^{٣}} \times \frac{ت}{ص^{٤}}\right)$

هـ $\frac{(س + ص)^{٢}}{(س - ص)^{٢}} \times \frac{٣٣(س - ص)^{٢}}{٤٤(س + ص)^{٧}}$ و $\frac{٣(أ + ب)(أ - ب)}{(أ + ب)^{٢}} \div \frac{١٢(أ - ب)^{٢}}{(أ + ب)}$

ز $\frac{٣\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}}{٢٤\sqrt{ع^{٢} + ت^{٢}}} \times \frac{(ع^{٢} + ت^{٢})^{٢}}{١٨(\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}})}$

ح $\frac{٣(س + ص)^{١٠}}{١٨(ع - ل)^{١٩}} \times \frac{١٠(س + ص)(ع - ل)^{٤}}{١٢(س + ص)^{٣}(ع - ص)} \times \frac{١٠٨(س + ص)^{٢}(ع - ل)^{٢٠}}{١٥(ع - ل)^{٤}(س + ص)^{١٠}}$

٣-١-ج جمع الكسور الجبرية وطرحها

يمكنك استخدام المقام المُشترَك لجمع الكسور الجبرية، كما استخدمته سابقًا في جمع الكسور العددية.

مثــال ٣

اكتب ناتج: $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص}$ في أبسط صورة.

الحــلّ:

$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{ص}{س ص} + \frac{س}{س ص} = \frac{س + ص}{س ص}$	المُضاعَف المُشترَك الأصغر لـ س، ص هو س ص، وهو المقام المُشترَك.

مثـــال ٤

اكتب ناتج: $\frac{١}{س + ١} + \frac{١}{س + ٢}$ في أبسط صورة.

الحـــلّ:

$\frac{١}{س + ١} + \frac{١}{س + ٢}$

$= \frac{س + ٢}{(س + ١)(س + ٢)} + \frac{س + ١}{(س + ١)(س + ٢)}$

$= \frac{س + ٢ + س + ١}{(س + ١)(س + ٢)}$

$= \frac{٢س + ٣}{(س + ١)(س + ٢)}$

المُضاعَف المُشترَك الأصغر لـ $(س + ١)$، $(س + ٢)$ هو $(س + ١)(س + ٢)$

مثـــال ٥

اكتب ناتج: $\frac{٣س + ٤}{س^٢ + س - ٦} - \frac{١}{س + ٣}$ في أبسط صورة.

الحـــلّ:

$\frac{٣س + ٤}{س^٢ + س - ٦} - \frac{١}{س + ٣}$

قم أوّلًا بتحليل العبارة الجبرية التربيعية $س^٢ + س - ٦$ إلى عوامل.

$= \frac{٣س + ٤}{(س + ٣)(س - ٢)} - \frac{١}{(س + ٣)}$

$= \frac{٣س + ٤}{(س + ٣)(س - ٢)} - \frac{(س - ٢)}{(س + ٣)(س - ٢)}$

يتضمّن المقامان العامل المُشترَك $(س + ٣)$، والمُضاعَف المُشترَك الأصغر للمقامَين هو $(س + ٣)(س - ٢)$

$= \frac{٣س + ٤ - (س - ٢)}{(س + ٣)(س - ٢)}$

$= \frac{٣س + ٤ - س + ٢}{(س + ٣)(س - ٢)}$

$= \frac{٢س + ٦}{(س + ٣)(س - ٢)}$

تحقق دائمًا من إمكانية تحليل البسط النهائي إلى عوامل، إذ يمكن في هذه الحالة القيام بخطوات إضافية تساعدك في الحصول على الناتج النهائي.

$= \frac{٢(س + ٣)}{(س + ٣)(س - ٢)}$ $= \frac{٢}{(س - ٢)}$	يمكنك تبسيط الكسر وذلك بأخذ العامل المُشترَك من البسط، وحذف العوامل المتشابهه بين البسط والمقام.

تمارين ٣-١-ج

أوجد ناتج كلّ ممّا يلي، واكتبه في أبسط صورة:

١)

أ $\frac{ص}{٢} + \frac{ص}{٤}$

ب $\frac{ل}{٣} + \frac{ل}{٥}$

ج $\frac{د}{٥} + \frac{د}{٧}$

د $\frac{ع}{٧} - \frac{ع}{١٤}$

هـ $\frac{(س+ص)}{٣} + \frac{(س+ص)}{١٢}$

و $\frac{٢س}{٣} + \frac{٥س}{٦}$

ز $\frac{٣ص}{٤} + \frac{٥ص}{٨}$

ح $\frac{٢أ}{٥} - \frac{٣أ}{٨}$

ط $\frac{٢أ}{٧} + \frac{٣أ}{١٤}$

ي $\frac{س}{٩} + \frac{٢ص}{٧}$

٢)

أ $\frac{٥(س + ١)^{٢}}{٧} - \frac{٣(س + ١)^{٢}}{٨}$

ب $\frac{١٠س ص د}{١٧} + \frac{٣س ص د}{٨}$

ج $\frac{٣د}{٥} + \frac{٣د}{٧} + \frac{٣د}{١٠}$

د $\frac{٢س}{٣} + \frac{٣س}{٧} - \frac{س}{٣}$

هـ $\frac{٨س^{٢}}{٩} + \frac{٣س^{٢}}{٧} + \frac{س^{٢}}{٣}$

و $\frac{٥ - س}{٢} - \frac{٣ - س}{٣} + \frac{٣ - س}{٩}$

٣)

أ $\frac{س}{أ} + \frac{٣}{أ}$

ب $\frac{٢}{٣أ} + \frac{٥}{٤أ}$

ج $\frac{٣س}{٢ص} + \frac{٥س}{٣ص}$

د $\frac{٣}{أ} + \frac{٢}{أ^{٢}}$

هـ $\frac{٣}{٢س} + \frac{٤}{٣س}$

و $\frac{٥}{٤هـ} + \frac{٣}{٢٠هـ}$

٤)

أ $\frac{١}{س + ١} + \frac{١}{س + ٤}$

ب $\frac{٣}{س - ٢} + \frac{٢}{س - ١}$

ج $\frac{٥}{س + ٢} + \frac{٢}{س + ٧}$

د $\frac{٣}{س} - \frac{١}{٢س}$

هـ $\frac{٥}{٢س ص} - \frac{٤}{٣س ص}$

و $\frac{٢}{س} + س$

ز $\frac{س + ١}{٢} + \frac{٢}{س + ١}$

ح $\frac{٣(س^{٢} - ١)}{٧ص} - \frac{٢(س^{٢} - ١)}{٩ص^{٢}}$

ط $\frac{١}{س^{٢}} - \frac{س}{٢ص}$

ي $\frac{س + ١}{٣ع^{٢}} - \frac{ص + ع}{١٢س ص}$

ك $\frac{١}{(س + ٢)} - \frac{١}{(س + ٣)(س + ٢)}$

ل $\frac{٢}{س + ١} - \frac{٢}{س^{٢} + ٣س + ٢}$

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- يمكن تبسيط الكسور الجبرية بالتحليل إلى العوامل، وتبسيط الحدود المُتشابِهة.
- يمكن جمع وطرح وضرب وقسمة الكسور الجبرية باستخدام نفس الاستراتيجيّات التي استخدمتها في الكسور العددية.

يجب أن تكون قادرًا على:

- تبسيط الكسور الجبرية.
- جمع وطرح وضرب وقسمة الكسور الجبرية.

تمارين نهاية الوحدة

١) اكتب ناتج: $\frac{س + ١}{٢} + \frac{٣س - ٢}{٣} + ٢$ في أبسط صورة.

٢) بسِّطْ كلاًّ من الكسور الجبرية التالية:

أ $\frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س + ٢}$

ب $\frac{س^٢ - ٩س + ٢٠}{س^٢ - ٢س - ١٥}$

ج $\frac{س^٢ + ٧س + ١٢}{س^٢ - س - ١٢}$

د $\frac{س^٢ + ٧س + ٦}{س^٢ + ٢س + ١}$

هـ $\frac{س^٢ + ٤س - ١٢}{س^٢ - ٣٦}$

و $\frac{٤س - ٢٠}{س^٢ - ٤س - ٥}$

٣) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي، واكتبه في أبسط صورة:

أ $\frac{٣}{س + ١} - \frac{٢}{س - ١}$

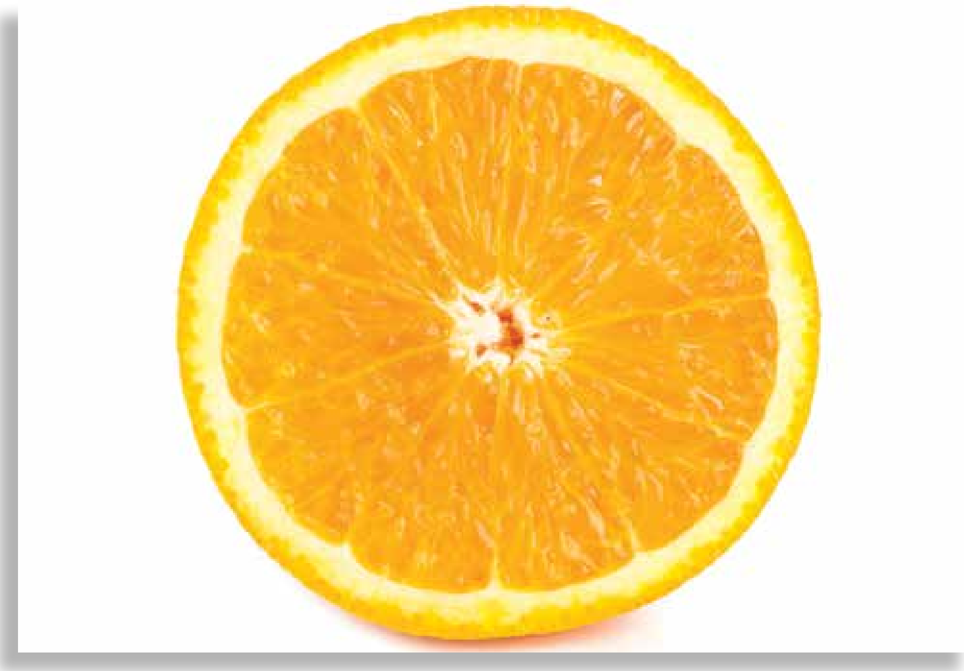
ب $\frac{س + ٢}{٢} \times \frac{٢س + ١}{٥}$

ج $\frac{٣س - ٦}{٥} \div \frac{س^٢ - ٤}{٢}$

الوحدة الرابعة: الدوائر

المُفردات

- المماس Tangent
- المُنصِّف العمودي Perpendicular bisector
- الوتر Chord
- المسافات المُتساوية Equidistant
- المُقابِل Subtend
- القوس Arc
- الشكل الرباعي الدائري Cyclic quadrilateral
- القطعة المُتبادَلة Alternate segment



تُصادفنا في حياتنا اليوميّة دوائر كثيرة، منها دوائر موجودة في الطبيعة ودوائر صنعها الإنسان، فنحن نشاهد الدائرة في المقطع العرضي لأنبوب أسطواني، وفي طوق كرة السلة، وفي شريحة البرتقال.

يدرس الرياضيون الدوائر نظرًا لجمالها، وللارتباطات الناجمة عن قياسات الزوايا المُتكوّنة بين الدوائر والمستقيمات، وسوف تكتشف في هذه الوحدة بعض تلك الارتباطات الرائعة.

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تستخدم الخصائص التالية للتماثُل في الدائرة:
  - تبعد الأوتار المتساوية مسافات متساوية عن مركز الدائرة.
  - يمرّ المُنصِّف العمودي للوتر بمركز الدائرة.
  - يتساوى طولا المماسَّين الخارجَين من نقطة خارج الدائرة إلى الدائرة نفسها.
- تحسب قياسات الزوايا المجهولة مستخدمًا الخصائص الهندسية التالية:
  - قياس الزاوية المحيطية في نصف الدائرة المرسومة على القطر يساوي ٩٠°.
  - قياس الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ونصف قطرها يساوي ٩٠°.
  - قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المقابلة للقوس نفسه.
  - الزوايا المحيطية التي تقابل نفس القوس متساوية في القياس.
  - زوايا القطاعات المتقابلة مُتمِّمة.
  - الأشكال الرباعية الدائرية.
  - نظرية القطعة المستقيمة المُتبادَلة.

٤-١ خصائص التماثُل في الدائرة

٤-١-أ الأوتار والمماسّات

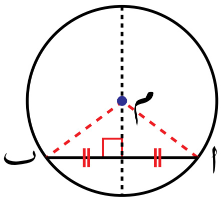
سابقًا

تعرفت على الأوتار في الدائرة في الوحدة ٤ في الصف التاسع.

تتماثُل الدائرة حول أي قطر فيها (تماثُل حول محور) ولها تماثُل دوراني حول مركزها.
يمكن استخلاص مجموعة من النتائج من هاتَين الحقيقتَين:

١. يمر المُنصِّف العمودي للوتر بمركز الدائرة.
٢. تبعد الأوتار المتساوية مسافات متساوية عن مركز الدائرة.
٣. يتساوى طولا **المماسَّين** الخارجَين من نقطة خارج الدائرة إلى الدائرة نفسها.

١. يمرّ المُنصِّف العمودي للوتر بمركز الدائرة



المُنصِّف العمودي للوتر $\overline{\text{أ ب}}$ هو المسار الذي تتحرّك عليه نقطة تبعد **مسافات متساوية** عن النقطتَين أ، ب.
بما أن المركز م يبعد مسافات متساوية عن النقطتين أ، ب
($\overline{\text{م أ}}$، $\overline{\text{م ب}}$ نصفا قطرَين في الدائرة التي مركزها م)،
لذا، يجب أن تقع النقطة م على المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة أ ب.
ويمكن التعبير عن هذه النتيجة بطرق أخرى:

- يتقاطع العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر في نقطة مُنتصَف الوتر.
- يكون المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ونقطة مُنتصَف الوتر عموديًّا على الوتر.

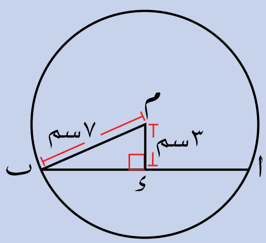
يمكنك استخدام هذه الحقيقة لتجد أطوال الأوتار وأطوال أضلاع المُثلّث قائم الزاوية المرسوم بين المركز والوتر.

مُساعَدة

يُتوقَّع منك أن تذكر جميع التماثُلات وخصائص الزوايا لتكتبها عندما تجيب عن الأسئلة المرتبطة بها.

مثال ١

$\overline{\text{أ ب}}$ وتر في دائرة نصف قطرها ٧ سم.
أوجد طول الوتر مُقرّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين
إذا علمت أن الوتر يبعد مسافة ٣ سم عن مركز الدائرة م.



الحــل:

$(\text{ء ب})^٢ = (\text{م ب})^٢ - (\text{م ء})^٢$	أعد ترتيب نظرية فيثاغورث.
$= ٧^٢ - ٣^٢$	
$= ٤٩ - ٩$	
$= ٤٠$	
$\therefore \text{ء ب} = \sqrt{٤٠}$	
طول الوتر أ ب $= ٢ \times \sqrt{٤٠} = ١٢,٦٥$ سم	

سابقًا

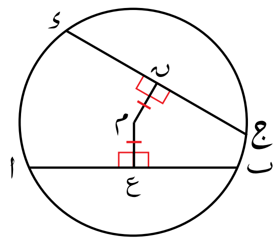
تعرّفت على نظرية فيثاغورث في الصف الثامن.

المسافة بين نقطة ومستقيم هي العمود النازل من النقطة على المستقيم، وهي أقصر مسافة بينهما.

٢. تبعد الأوتار المتساوية مسافات متساوية عن مركز الدائرة، وتكون الأوتار التي تبعد مسافات متساوية عن مركز الدائرة متساوية في الطول

إذا كان للوترَين أب، ع ى الطول نفسه، فإن م ع = م ن

والعكس صحيح.



وهذا صحيح لأن المُثلّثَين م أ ع، م ى ن متطابقان، ولأن للدائرة تماثُلاً دورانيًّا حول المركز م.

فكِّر كيف تثبت تطابق المُثلّثَين م أ ع، م ى ن، تذكَّر أن م أ، م ى أنصاف أقطار في الدائرة.

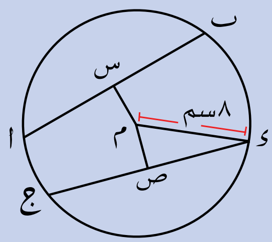
مثـــال ٢

دائرة مركزها م ونصف قطرها ٨ سم.

أب، ع ى وتران في الدائرة، أ ب = ١٤ سم.

إذا كان م س = م ص، فأوجد طول م ص

مُقرّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.



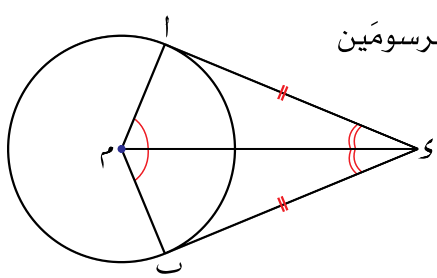
الحـــلّ:

بما أنّ م س = م ص، فإن الوترَين يبعدان نفس المسافة عن المركز. أي، أ ب = ع ى = ١٤ سم	م ص المنصِّف العمودي للوتر ع ى.
ع ص = ص ى = ٧ سم	
ق(م صَ ى) = ٩٠°	
(م ص)^{٢} = (م ى)^{٢} − (ص ى)^{٢}	نظرية فيثاغورث.
= ٨^{٢} − ٧^{٢}	
= ٦٤ − ٤٩	
= ١٥	
∴ م ص = $\sqrt{١٥}$ = ٣,٨٧ سم	

٣. يتساوى طولا المماسَّين الخارجَين من نقطة خارج الدائرة إلى الدائرة نفسها

النقطتان أ، ب هما نقطتا التماسّ بين المماسَّين المرسومَين من النقطة ى إلى الدائرة.

النتيجة هي ى أ = ى ب



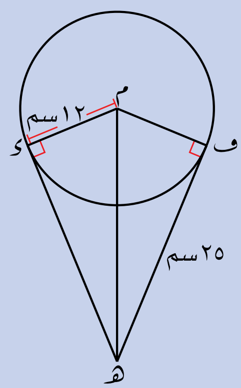
وينتج من ذلك أن:

- المماسَّان **يقابلان** زاويتَين متساويتَين في القياس عند المركز، أي أنّ:
  ق(ى م̂ ا) = ق(ى م̂ ب)
- المستقيم الواصل بين المركز ونقطة تقاطع المماسَّين يُنصِّف الزاوية المحصورة بين المماسَّين، أي أنّ: ق(م ى̂ ا) = ق(م ى̂ ب)

ويتّضح أيضًا أن الشكل مُتماثِل حول المستقيم م ى، كما يمكن إثبات ذلك عبر برهنة تطابُق المُثلّثَين م ا ى، م ب ى. للقيام بذلك، تحتاج إلى استخدام حقيقة أن 'المماس عمودي على نصف القطر عند نقطة التماسّ'.

مثــال ٣

أوجد الطولَين ى هـ، م هـ في الشكل المجاور مُقرَّبَين إلى أقرب منزلتَين عشريتَين عند الحاجة.

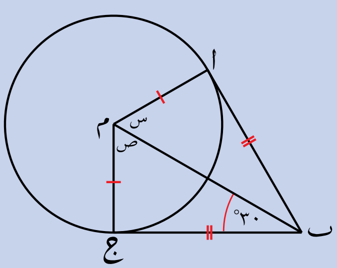


الحـــلّ:

ى هـ = ف هـ = ٢٥ سم	المماسان متساويان.
∴ ى هـ = ٢٥ سم	
(م هـ)^{٢} = (ى هـ)^{٢} + (ى م)^{٢}	نظرية فيثاغورث.
= ٢٥^{٢} + ١٢^{٢}	
= ٦٢٥ + ١٤٤	
= ٧٦٩	
م هـ = $\sqrt{٧٦٩}$ = ٢٧,٧٣ سم	

مثــال ٤

أوجد قيمة س، ص في الشكل المجاور.



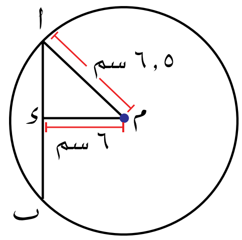
الحـــلّ:

ق(م ج̂ ب) = ٩٠°	$\overline{م ج}$ عمودي على المماس ج ب.
∴ ص = ١٨٠° − ٩٠° − ٣٠°	مجموع قياسات زوايا المُثلّث يساوي ١٨٠°
ص = ٦٠°	
ص = س = ٦٠°	المماسان يقابلان زاويتَين متطابقتَين عند المركز.

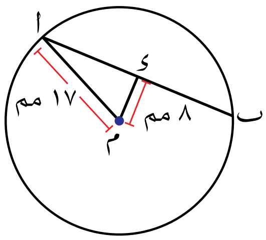
تمارين ٤-١-أ

١) احسب طول الوتر $\overline{\text{اب}}$ في كل من الدوائر التالية، علمًا بأن س هي نقطة مُنتصَف الوتر $\overline{\text{اب}}$:

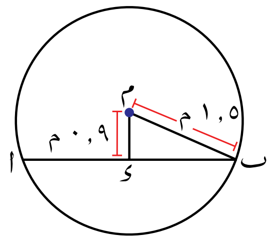
أ



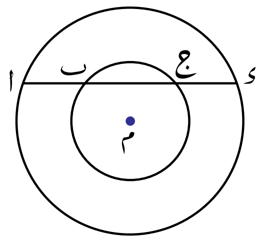
ب



ج



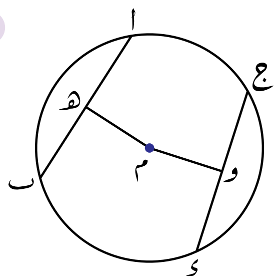
٢) في الشكل المجاور م مركز للدائرتَين، يقطع المستقيم الدائرتَين في النقاط ى، ج، ب، ا على الترتيب.
أثبت أن اب = ج ى.



الدائرتان المتحدتان في المركز لهما نصفا قطرَين مختلفان والمركز نفسه.

٣) طبِّق ما تعلّمته حول خصائص الدائرة لإيجاد طول قطر كل دائرة من الدوائر التالية موضّحًا خطوات الحل، واكتب إجابتك مُقرّبة إلى أقرب عدد مُكوّن من ٣ أرقام معنوية:

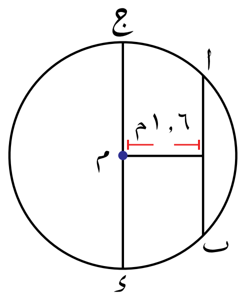
أ



اب = جى = ١١,٤ سم

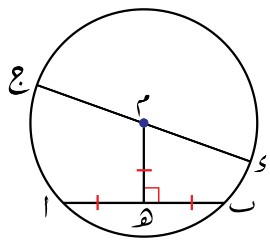
م و = ٦,٥ سم

ب



اب = ٢,٨ م

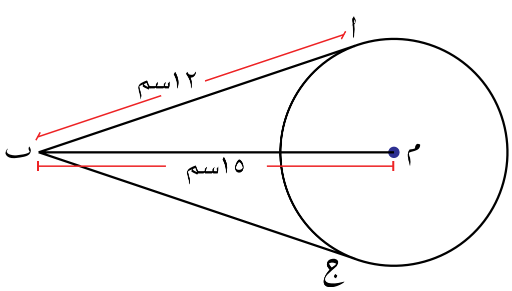
ج

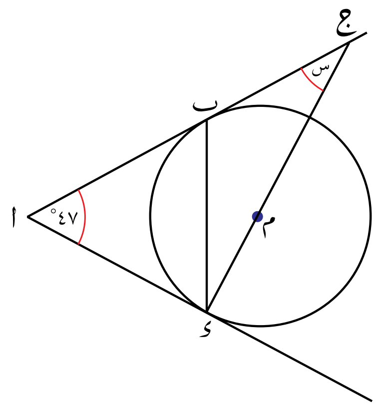


اب = ٢٢ مم

٤) دائرة نصف قطرها ٨,٤ سم، فيها وتر يبعد مسافة ٥ سم عن مركزها. احسب طول الوتر مُقرّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٥) في الشكل المجاور:
أوجد طول $\overline{\text{ام}}$ ومساحة الشكل الرباعي ا م ج ب. حيث $\overline{\text{ب أ}}$، $\overline{\text{ب ج}}$ مماسَّان للدائرة.





٦) في الشكل المجاور:

$\overline{أب}$، $\overline{أء}$ مماسّان للدائرة،

تقع النقاط أ، ب، ج على نفس المستقيم.

احسب قيمة س.

٤-٢ العلاقات بين الزوايا في الدائرة

٤-٢-أ نظريات في الدائرة

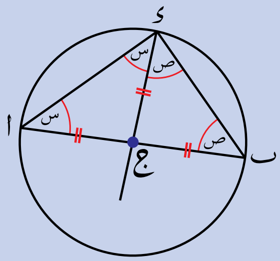
تمتلك الدوائر عدة خصائص للزوايا يمكن توظيفها في حل المسائل.
سوف تكتشف في هذا الدرس الكثير من هذه الخصائص، وسوف تساعدك الأمثلة والنظريات التالية على حل المسائل التي تتضمّن الزوايا والدوائر.

قياس الزاوية المحيطية في نصف الدائرة المرسومة على القطر يساوي ٩٠°.

اقرأ المثال التالي لتعرف كيف تحسب قياس الزاوية في نصف الدائرة.

مثــال ٥

$\overline{\text{ا ب}}$ قطر في دائرة مركزها ع، ى نقطة على محيطها.
احسب ق(ا ىˆ ب).

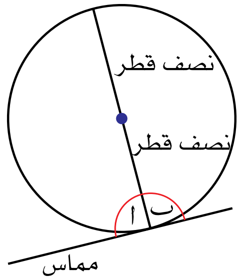


الحــلّ:

ا ع = ع ب = ع ى	أنصاف أقطار في الدائرة.
∴ المثلثان ا ع ى، ب ع ى مُتطابقا الضلعَين.	
أي ق(ع اˆ ى) = ق(ع ىˆ ا) = س	
و ق(ع ىˆ ب) = ق(ع بˆ ى) = ص	
ولكن ٢س + ٢ص = ١٨٠°	مجموع قياسات زوايا المُثلّث ا ب ى يساوي ١٨٠°
فيكون س + ص = ٩٠°	
∴ ق(ا ىˆ ب) = ٩٠°	

قياس الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ونصف قطرها يساوي ٩٠°.

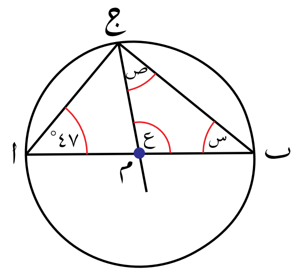
في الشكل المجاور:
بما أن القطر يقسم الدائرة إلى قسمَين متطابقَين.
∴ ا = ب
و ا + ب = ١٨٠° (زاويتان على خط مستقيم).
∴ ا = ب = ٩٠°



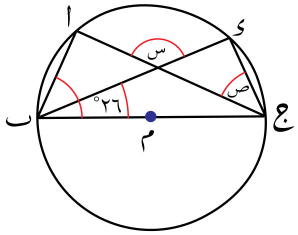
تمارين ٤-٢-أ

١) اوجد قياس كل زاوية من الزوايا المشار إليها بحرف في كل مما يلي. فسِّر إجابتك.

أ

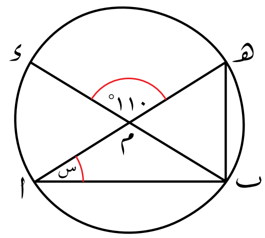


ب

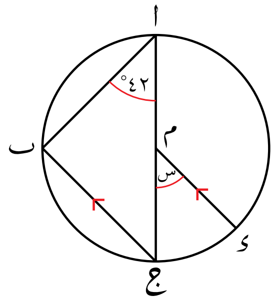


ق(ا ب̂ ج) = ٦٠°

ج

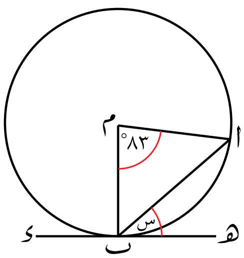


د

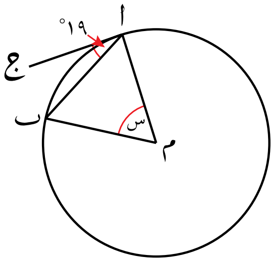


٢) أوجد قيمة س في كل شكل من الأشكال التالية. فسِّر إجابتك.

أ



ب



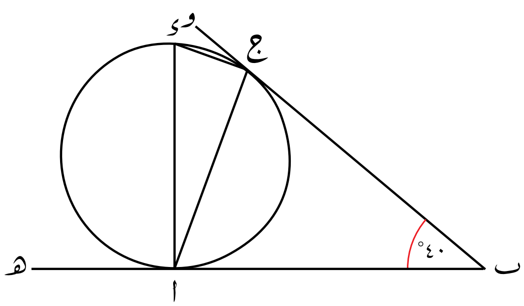
٣) في الشكل المجاور:

$\overline{ب و}$ ؛ $\overline{ب هـ}$ مماسَّان للدائرة

عند النقطتَين ج، ا بالترتيب.

$\overline{ا ى}$ قطر في الدائرة.

ق(ا ب̂ ج) = ٤٠°



أ أثبت أن المُثلّث ا ب ج مُتطابِق الضلعَين.

ب احسب قياس كل من:

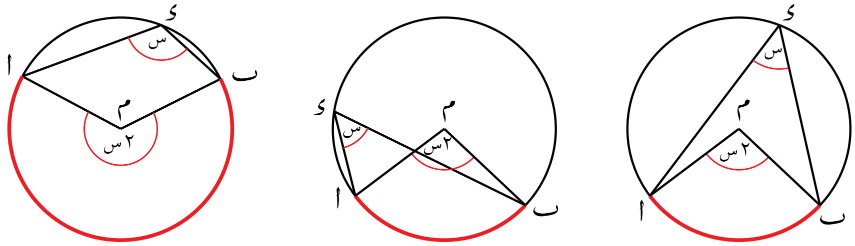
(١) ج أ̂ ب

(٢) ى أ̂ ج

(٣) ا ى̂ ج

٤-٢-ب المزيد من النظريات في الدائرة

قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المقابلة للقوس نفسه.

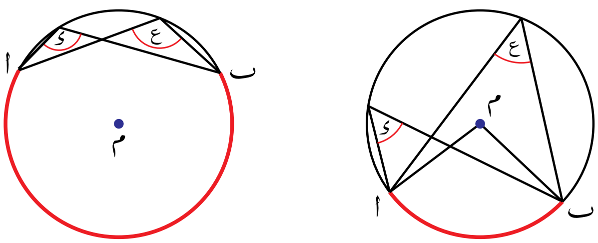


أ⌒ب **قوس** في الدائرة التي مركزها م. والنقطة د تقع على محيطها، وليس على القوس أ⌒ب. تنصّ نظرية الزاوية المركزية على:

ق(أ مَ̂ ب) = ٢ × ق(أ دَ̂ ب)

وكما لاحظت سابقًا، تصحّ هذه النظرية عندما يكون القوس أ⌒ب نصف دائرة. تنصّ نظرية الزاوية المركزية على أن قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قطر يساوي ٩٠°، وسبب ذلك أن الزاوية أ م ب زاوية مستقيمة (قياسها ١٨٠°).

الزوايا المحيطية التي تُقابل نفس الوتر متساوية في القياس

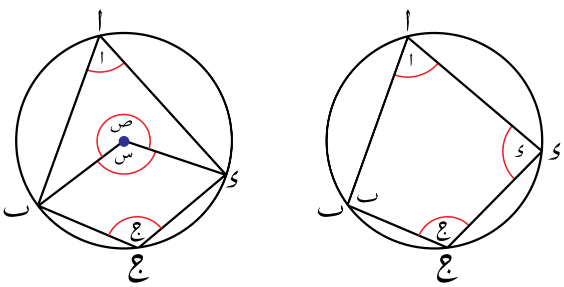


في هذين الشكلَين: ق(دَ̂) = ق(عَ̂)، ويساوي نصف قياس الزاوية المركزية المُقابِلة للقوس أ⌒ب.

مجموع قياسي الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي ١٨٠°.

تقع رؤوس **الشكل الرباعي الدائري** على محيط الدائرة.

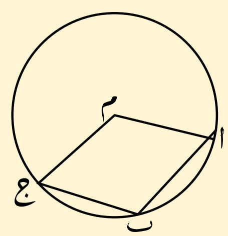
انظر إلى الشكل المجاور:



س = ٢أ (نظرية الزاوية المركزية، تقابل القوس الأصغر ب⌒د)

ص = ٢ج (نظرية الزاوية المركزية، تقابل القوس الأكبر ب⌒أ د)

يذكر الخطأ الشائع أن الشكل الرباعي التالي دائريًا.



يجب أن تتحقق من أن الرؤوس الأربعة تقع على محيط الدائرة حتى يكون شكلًا رباعيًا دائريًا.

فيكون، س + ص = ٢أ + ٢ج

لكن س + ص = ٣٦٠° (زوايا حول نقطة)

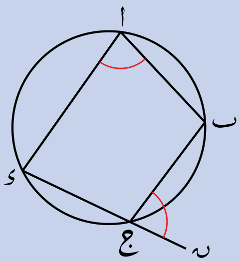
∴ أ + ج = ١٨٠° (مجموع قياسَي الزاويتَين المتقابلتَين في الشكل الرباعي الدائري).

وللسبب نفسه، ب + ى = ١٨٠°

قياس الزاوية الخارجية في الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلية المُقابِلة للزاوية المجاورة لها

مثـــال ٦

استخدم الشكل المجاور لتثبت أن ق(ن ج̂ ب) = ق(ب أ̂ ى)

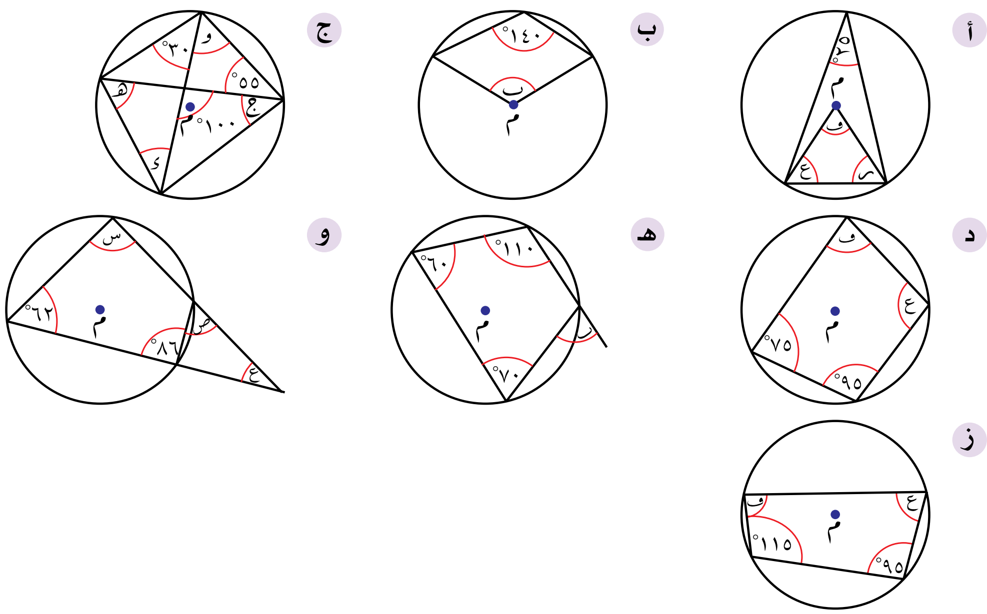


الحـــلّ:

ق(ن ج̂ ب) + ق(ب ج̂ ى) = ١٨٠°	زاوية مستقيمة.
ق(ب أ̂ ى) + ق(ب ج̂ ى) = ١٨٠°	زاويتان مُتقابِلتان في شكل رباعي دائري.
∴ ق(ن ج̂ ب) = ق(ب أ̂ ى)	

تمارين ٤-٢-ب

١) أوجد قياس كل زاوية من الزوايا المشار إليها بحرف في كل مما يلي، حيث م مركز الدائرة:



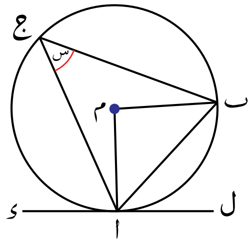
٢) في الشكل المجاور:

$\overline{\text{ى ل}}$ مماس للدائرة عند النقطة ا.

تقع النقطتان ب، ج على المحيط،

م مركز الدائرة. ق (ا $\hat{\text{ج}}$ ب) = س

أوجد بدلالة س قياس كل من الزوايا التالية:



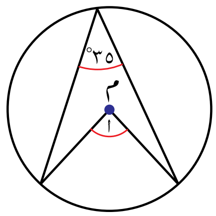
أ (ا $\hat{\text{م}}$ ب)

ب (م $\hat{\text{ا}}$ ب)

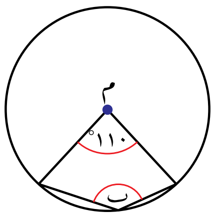
ج (ب $\hat{\text{ا}}$ ل)

٣) أوجد قياس كل من الزوايا المشار إليها بحرف في كل مما يلي، حيث م مركز الدائرة:

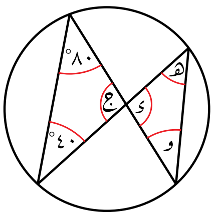
أ



ب



ج



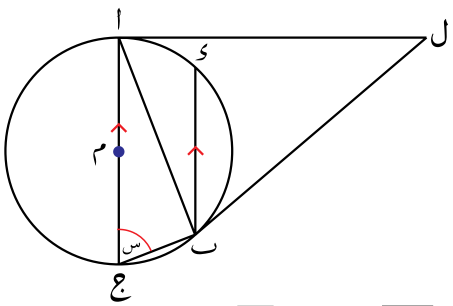
٤) في الشكل المجاور:

دائرة مركزها م.

$\overline{\text{ل ا}}$، $\overline{\text{ل ب}}$ مماسَّان

للدائرة من النقطة ل.

$\overline{\text{ا ج}}$ قطر في الدائرة، ق (ا $\hat{\text{ج}}$ ب) = س.



أ اكتب ق (ج $\hat{\text{ا}}$ ب) بدلالة س

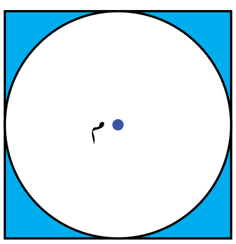
ب اكتب ق (ا $\hat{\text{ل}}$ ب) بدلالة س

ج تقع النقطة ى على محيط الدائرة بحيث يكون $\overline{\text{ب ى}}$ موازيًا لـ $\overline{\text{ج ا}}$.

اكتب ق (ى $\hat{\text{ب}}$ ل) بدلالة س

طبّق مهاراتك

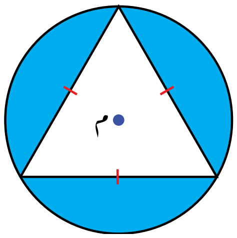
٥) يبيّن الشكل المجاور قرصًا دائريًّا تم قصّه من صفيحة فضّية مُربّعة الشكل، نصف قطر القرص ١٥ مم ومركزه م:



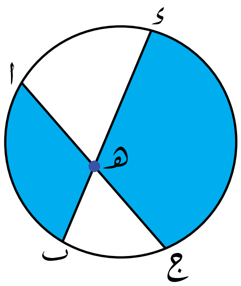
أ احسب طول ضلع الصفيحة المُربّعة ومساحتها قبل القص.

ب احسب مساحة المنطقة المتبقّية من الصفيحة المُربّعة بعد قصّ القرص الدائري منها.

٦) تُصمِّم مريم شعارات، بحيث تُلصق مُثلّثًا مُتطابَق الأضلاع على قرص دائري، كما هو مبيّن في الشكل المجاور.
إذا كان طول ضلع المُثلَّث ١٥ سم، فأوجد طول قطر القرص الدائري.



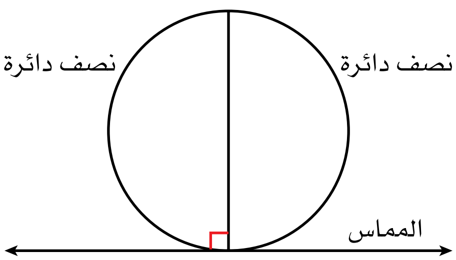
٧) يبيّن الشكل المجاور وترَين $\overline{\text{ا ج}}$، $\overline{\text{ب ى}}$ في دائرة، ويتقاطع الوتران في النقطة هـ:



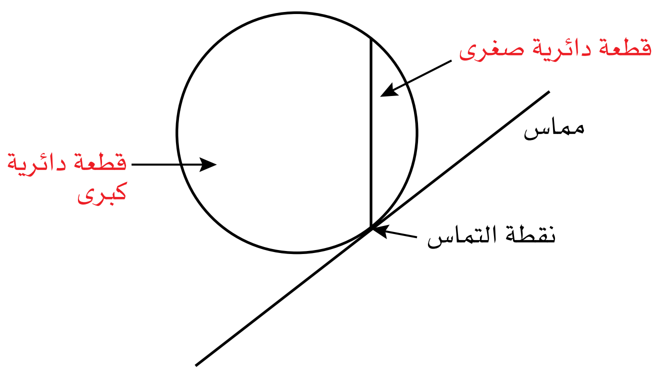
أ استخدم خصائص الزوايا لتبيّن أن المُثلّثَين ا ب هـ، ى ج هـ متشابهان.

ب استخدم حقيقة أن المُثلّثَين متشابهان لتبيّن أن:
ا هـ × ج هـ = ب هـ × ى هـ

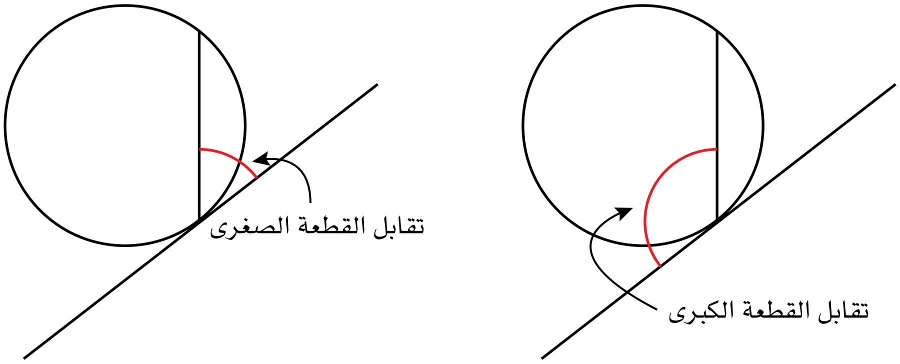
٤-٢-ج نظرية القطعة الدائرية المُتبادَلة



تعلّمت سابقًا أن المماس والقطر يشكّلان زاوية قائمة عند نقطة تقاطعهما، وأن القطر يقسم الدائرة إلى نصفَي دائرة.
تعلّمت أيضًا أن قطر الدائرة هو وتر يمر بمركزها، وأنه عندما يقطع الوتر المماس ولا يمر في المركز، فإنه يقسم الدائرة إلى قطعة كبرى وقطعة صغرى، وأن نقطة تقاطُع الوتر مع المماس تُسمّى نقطة التماس.

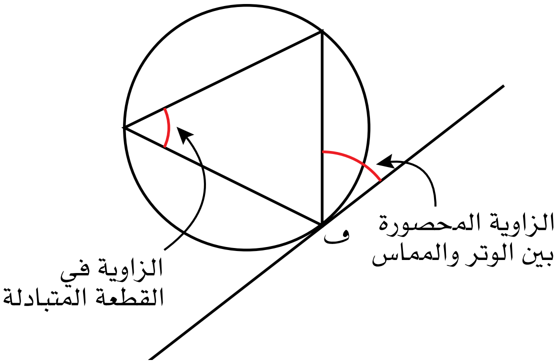


يمكنك أن ترسم زاويتَين بين المماس والوتر، بحيث تكون إحداهما تقابل القطعة الكبرى والأخرى تقابل القطعة الصغرى.



تُسمّى القطعة التي لا تقابل الزاوية **القطعة المُتبادَلة**.

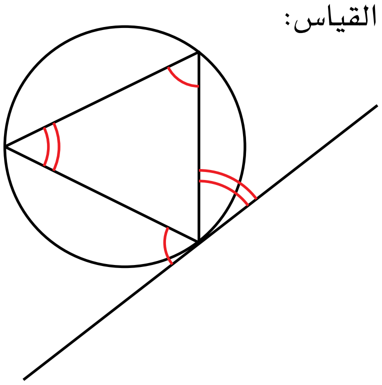
ارسم زاوية في القطعة المُتبادَلة.



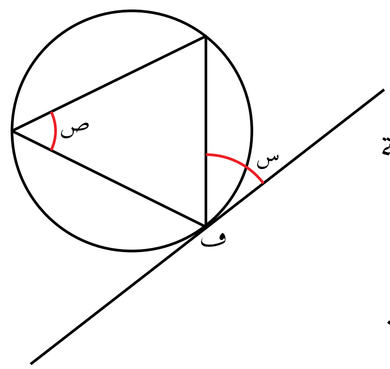
استكشاف

- ارسم ٣ دوائر كبيرة.
- ارسم مماسًّا لكل دائرة بأفضل دقة ممكنة، بحيث يلامس الدائرة مرة واحدة فقط.
- ارسم وترًا يتقاطع مع المماس.
- ارسم زاوية بين الوتر والمماس، يمكنك اختيار إحدى الزاويتَين.
- اختر القطعة المُتبادَلة وارسم فيها زاوية محيطية.
- أوجد، بأفضل دقة ممكنة، قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر وزاوية القطعة المُتبادَلة في الجهة الأخرى.
- ماذا تلاحظ؟

تنصّ نظرية القطعة المُتبادَلة على أن قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة في القطعة المُتبادَلة وتُقابِل القوس نفسه. يبيّن الشكل التالي الزوايا المتساوية في القياس:



برهنة نظرية القطعة المُتبادَلة

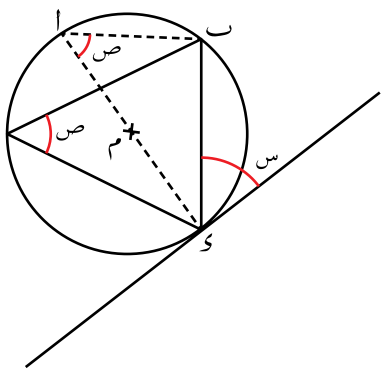


سوف تستخدم في هذا البرهان بعض النظريات التي تعلّمتها سابقًا.

ارسم دائرة ووترًا ومماسًّا وحدِّد الزاوية المحصورة بين المماس والوتر، وسمّها س، وحدِّد زاوية القطعة المُتبادَلة وسمّها ص.

تعرف أن قياسَي الزاويتين المحيطيتَين المرسومتَين في نفس القطعة واللتَين تقابلان نفس القوس متساويان.

هذا يعني أنك تستطيع رسم زاوية أخرى في القطعة المُتبادَلة مستخدمًا القطر كأحد ضلعَي الزاوية، وتعرف أيضًا أن قياسها يساوي ص: في الشكل المجاور:



يمكنك أن تلاحظ أن المُثلّث ى ب ا قائم الزاوية في ب، لأنه مرسوم على قطر الدائرة. هذا يعني أن

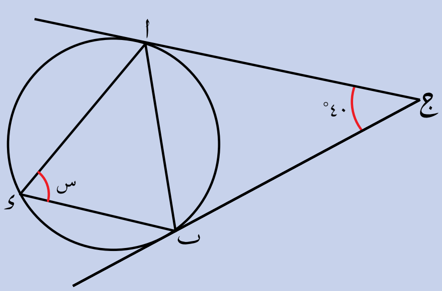
ق(اىَ ب) يساوي ٩٠° − ص

تعلم أيضًا أن قياس الزاوية بين القطر والمماس يساوي ٩٠°، مما يعني أن ٩٠° − ص + س = ٩٠°

وهذا يثبت أن س = ص

مثـــال ٧

أوجد قيمة س في الشكل المجاور.



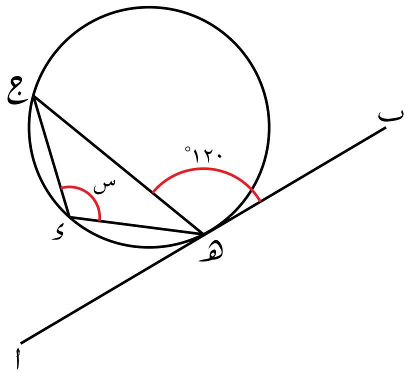
الحــلّ:

ق(اثَ ج) + ق(ب أَ ج) + ٤٠° = ١٨٠°	مجموع قياسات زوايا المُثلّث يساوي ١٨٠°.
∴ ق(اثَ ج) = ق(ب أَ ج) = ٧٠°	المُثلّث ا ب ج مُتطابِق الضلعَين لأن $\overline{\text{ا ج}}$، $\overline{\text{ب ج}}$ مماسّان للدائرة.
وباستخدام نظرية القطعة المُتبادَلة نجد أن:	
ق(اثَ ج) = ق(ا ىَ ب) = ٧٠°	
∴ س = ٧٠°	

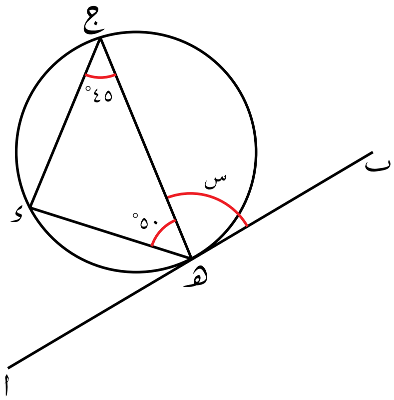
تمارين ٤-٢-ج

١) أوجد قيمة س في كل شكل من الأشكال التالية. فسِّر إجابتك.

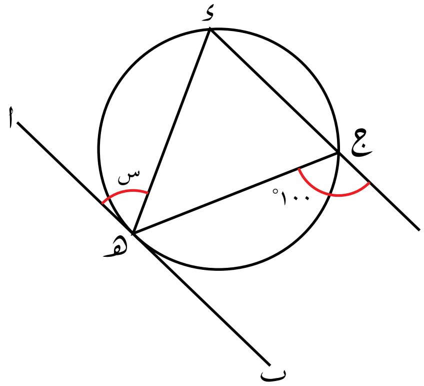
أ



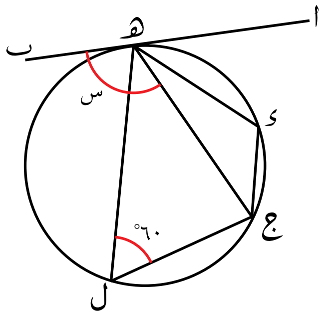
ب



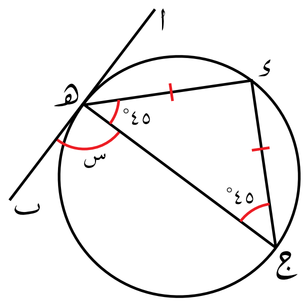
ج



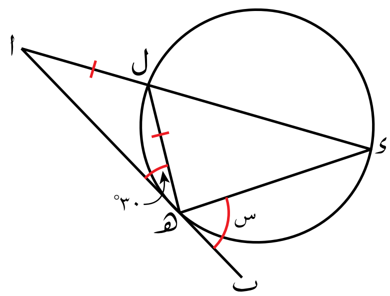
د



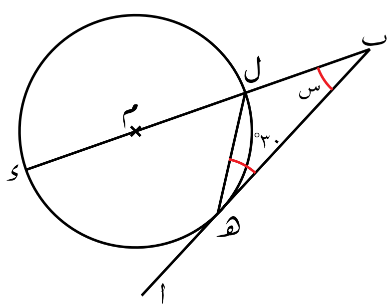
هـ



و

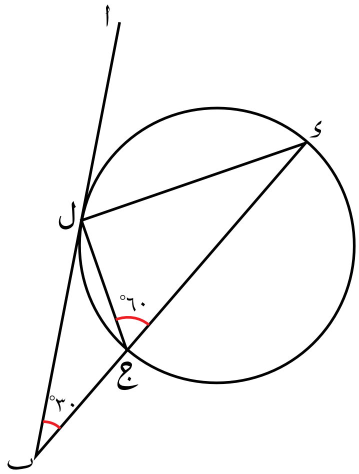


ز

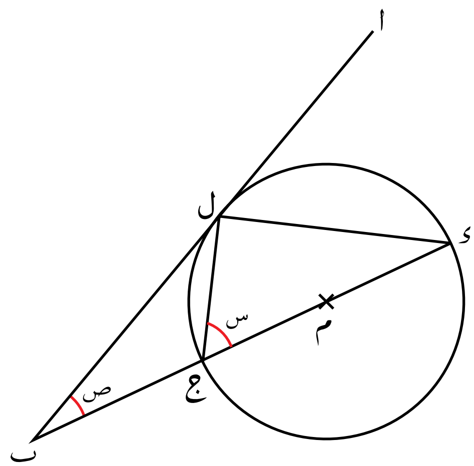


٢) في الشكل المجاور:

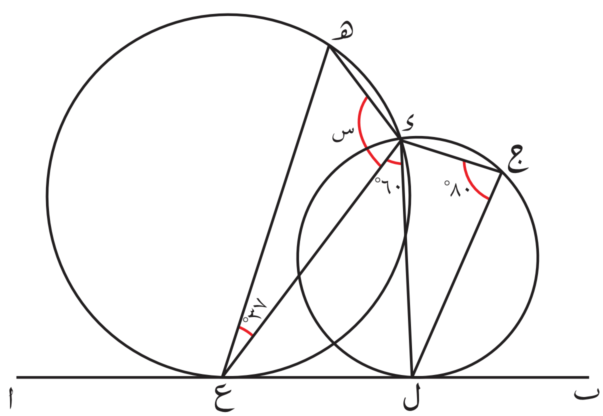
أثبت أن $\overline{\text{ج ى}}$ قطر في الدائرة.



٣) في الشكل التالي: أثبت أن ٢س − ص = ٩٠° علمًا بأن م مركز الدائرة وأن $\overline{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة عند النقطة ل.



٤) أوجد قيمة س في الشكل التالي:



مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

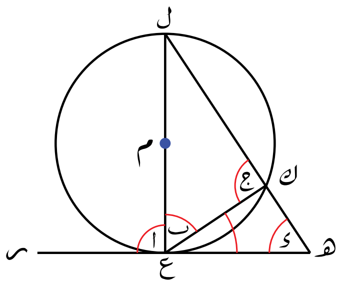
- تنطبق على الدوائر خصائص التماثُل.
- يمرّ المُنصِّف العمودي للوتر بمركز الدائرة.
- تبعد الأوتار المتساوية مسافات متساوية عن مركز الدائرة.
- يتساوى طولا المماسَّين الخارجَين من نقطة خارج الدائرة إلى الدائرة نفسها.
- قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة يساوي ٩٠°.
- قياس الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ونصف قطرها يساوي ٩٠°.
- قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المُقابِلة للقوس نفسه.
- الزوايا المحيطية التي تُقابِل نفس القوس متساوية في القياس.
- مجموع قياسَي الزاويتَين المتقابلتَين في الشكل الرباعي الدائري يساوي ١٨٠°.
- قياس الزاوية الخارجية في الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلية المُقابِلة للزاوية المجاورة لها.
- تنصّ نظرية القطعة المُتبادَلة على أن قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة في القطعة المُتبادَلة.

يجب أن تكون قادرًا على:

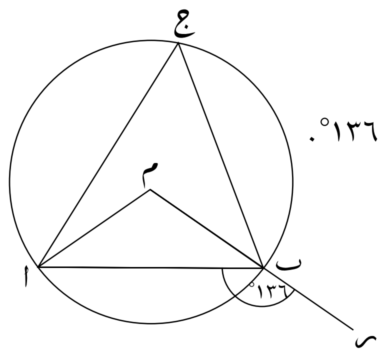
- استخدام خصائص التماثُل في الدائرة:
  - يمرّ المُنصِّف العمودي للوتر بمركز الدائرة.
  - تبعد الأوتار المتساوية مسافات متساوية عن مركز الدائرة.
  - يتساوى طولا المماسَّين الخارجَين من نقطة خارج الدائرة إلى الدائرة نفسها.
- حساب قياس الزاوية المجهولة في الدائرة باستخدام الخصائص التالية للزاوية:
  - قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة يساوي ٩٠°.
  - قياس الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ونصف قطرها يساوي ٩٠°.
  - قياس الزاوية المركزية في الدائرة.
  - الزوايا المحيطية التي تقابل نفس القوس.
  - زوايا القطاعات المُتقابِلة.
  - نظرية القطعة المُتبادَلة.

تمارين نهاية الوحدة

١) في الشكل المجاور: ر هـ مماس لدائرة مركزها م. ل ع قطر في الدائرة.
ك نقطة على المحيط، تقع النقاط ل، ك، هـ على نفس المستقيم.
ق(ك ع^ هـ) = ٣٧°.
احسب قيم كلّ من : ا، ب، ج، ى.



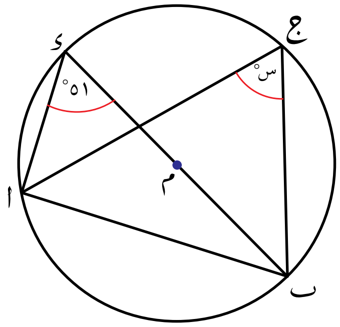
٢) في الشكل المجاور: تقع النقاط ا، ب، ج على محيط الدائرة
التي مركزها م. وتقع النقاط م، ب، ر على نفس المستقيم و ق(ا ب^ ر) = ١٣٦°.
احسب ق(ا ج^ ب).



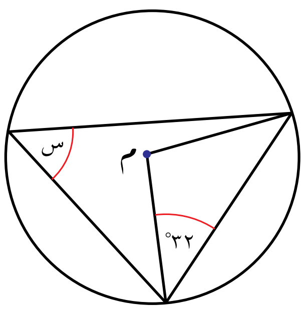
٣) في الشكل المجاور: تقع النقاط ا، ب، ج، ى على محيط
الدائرة، ب ى قطر في الدائرة.

أ) أوجد قيمة س

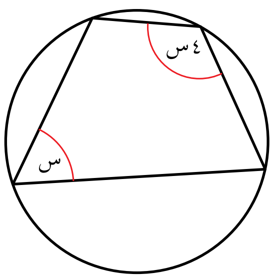
ب) أوجد ق(ب ا^ ى)



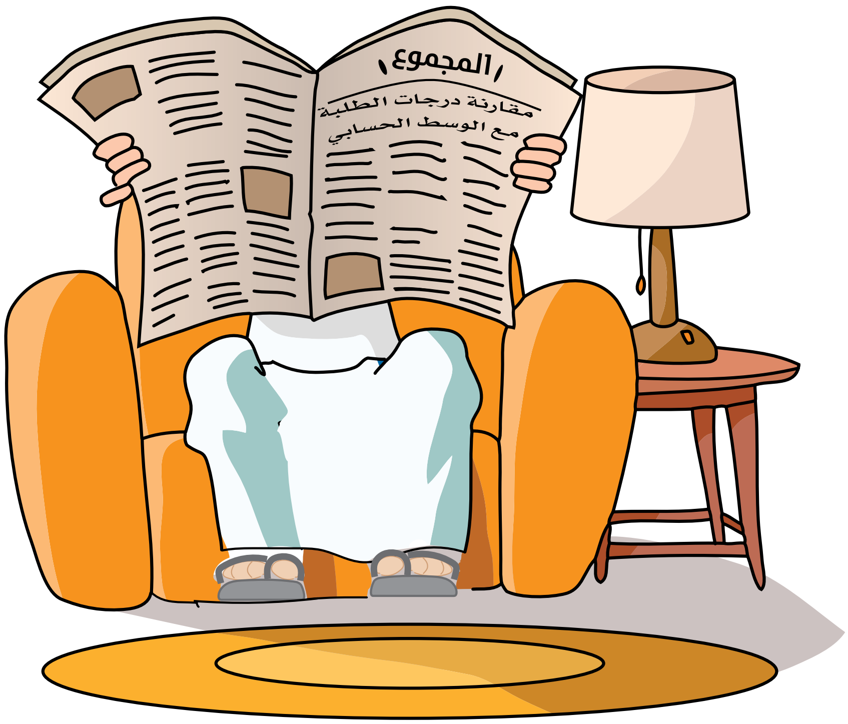
٤) في الشكل المجاور: دائرة مركزها م. أوجد قيمة س.
برهن إجابتك.



٥) أوجد قيمة س في الشكل المجاور. برهن إجابتك.



الوحدة الخامسة: المقاييس الإحصائية والانتشار



المُفردات

- المنوال Mode
- الوسط الحسابي Mean
- الانتشار Spread
- الوسيط Median
- المدى Range
- المُنفصلة Discrete
- المُتّصلة Continuous
- البيانات المُجمّعة Grouped data
- الوسط الحسابي التقديري Estimated mean
- الفئة المنوالية Modal class
- المِئينات Percentiles
- الرُّبَيع الأعلى Upper quartile
- الرُّبَيع الأدنى Lower quartile
- المدى الربيعي Interquartile range
- المُخطّط الصندوقي Boxplot

تمثّل العناوين الرئيسية في الصحف أحد الأمثلة على مواقف يُفهم فيها الإحصاء بطريقة خاطئة. من المهمّ التأكُّد من أنك قد فهمت الإحصاء جيّدًا قبل أن تستخدمه لتُقيم أي نوع من النتائج.

عندما يُطلب إليك تفسير البيانات واستنتاج الأدلة والنتائج منها، فإنك تحتاج إلى التفكير جيّدًا وإلى دراسة أكثر من عنصر واحد في البيانات، فإذا كان الوسط الحسابي لدرجات طالب ما هو ٧٠٪ مثلًا، فسوف تستنتج أن مستوى الطالب جيّد، ولكن إذا حصل هذا الطالب على ٩٠٪ في ثلاث مواد دراسية وعلى ٤٠٪ في مادّتَين أُخرَيَين، فإن استنتاجك لن يشبه الاستنتاج السابق. وفي السياق نفسه، إذا تناقصت حالات التنمُّر في مدرسة ما بعد ندوة عن التنمُّر يقال إنّ نتائج الندوة كانت جيّدة، ولكن يمكن أن يكون عدد الحالات المُسجّلة قد تناقص لسبب آخر (كأن يكون أحد الأسباب أن المُتنمّرين قد هدّدوا بمزيد من التنمُّر في حال تم الإبلاغ عنهم وكتابة التقارير بحقّهم).

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تحسب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة بيانات.
- تحسب المدى وتفسِّره كأحد مقاييس الانتشار.
- تُفسّر معنى كل نتيجة وتقارن البيانات باستخدام هذه المقاييس الإحصائية.
- تُنشئ الجداول التكرارية وتستخدمها في البيانات المُجمّعة.
- تُحدّد الفئة التي تتضمّن الوسيط لبيانات مجمّعة.
- تحسب الرُّبَيعات وتتعامل معها.

- تقسم البيانات إلى رُبَيعات وتحسب المدى الرُّبَيعي.
- تُحدّد الفئة المنوالية لبيانات مُجمّعة في توزيع تكراري.
- تُنشئ المخطّط الصندوقي وتفسّره.

وقد نستخدم أحيانًا البيانات التي تؤكّد تحيُّزنا في بعض الأمور، فمثلاً: إذا سُئلت ما إذا كانت حملة تسوُّق لزيادة عدد المُتابعين على مواقع التواصل الاجتماعي ناجحة، حيث أظهرت البيانات تزايُدهم على موقع شركة ما، وعدم تزايُدهم على موقع شركة أخرى، فقد تستخدم التزايد على الشركة الأولى حجّة لتُبيّن أن الحملة كانت ناجحة، وتتجاهل عدم التزايد على الشركة الثانية، وبخاصّة إذا كنت تعتقد أنها ناجحة.

ولذا قد يختلف الارتباط عن السبب. فمثلاً: إذا زاد متابعو حساب ما في أحد مواقع التواصُل الاجتماعي لشركة ما فجأة وزادت في الوقت نفسه مبيعاتها، فقد يعتقد أصحاب الشركة (مُخطئين) أن أحد الأسباب قد أدّى إلى الآخر.

قد تحتاج أحيانًا إلى تلخيص البيانات لتصبح أكثر منطقية، ويمكن إجراء ذلك بعدّة طرق، غير رسم المخطّطات، حيث يمكنك مثلًا أن تحسب المقاييس الإحصائية والانتشار، ويمكن للملخّصات العددية أن تكون مفيدة للمقارنة بين مجموعات مختلفة من البيانات، ولكن يجب الانتباه عند تفسير النتائج، حيث لا بد أن تكون في ضوء المقياس الإحصائي الذي تم استخدامه.

٥-١ المقاييس الإحصائية

٥-١-أ الأنواع المختلفة من المقاييس الإحصائية

هناك أنواع مختلفة من **المقاييس الإحصائية** التي تُستخدم في الإحصاءات، منها: المنوال والوسيط والوسط الحسابي.

المثال التالي يوضِّح كيفية إيجاد كل منها:

تُبيّن مجموعة البيانات التالية أعمار ١٩ عاملاً في أحد المصانع:

٣٤ ٣٧ ٣٦ ٣٦ ٣٧ ٣٤ ٣٨ ٣٣ ٣٨ ٤١ ٣٦ ٣٨ ٣٦ ٣٣ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٦ ٣٤

مُساعَدة

حدّد دائمًا المقياس الإحصائي الذي تتحدّث عنه: الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال.

كيف يمكنك وصف أعمار العمّال في هذا المصنع؟

إذا جمعت أعداد العمّال الذين تبلغ أعمارهم ٣٤، و ٣٥، وهكذا... ستجد أن العمر ٣٦ هو الأكثر تكرارًا، ويُسمّى هذا المقياس الإحصائي **بالمنوال**.

كما يمكننا أن نوجد ناتج قسمة مجموع أعمار جميع العمال على عددهم:

$$\frac{\text{مجموع أعمار جميع العمّال}}{\text{عدد العمّال}} = \frac{٦٨٥}{١٩} = ٣٦{,}٠٥$$ (مُقرّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريّتَين).

إذا أخذت الوسط الحسابي لـ ن عنصر وضربته في ن فستجد مجموع كل القيَم.

يُسمّى هذا المقياس الإحصائي **بالوسط الحسابي**، ونستدلّ من خلاله أن أعمار العمّال **تنتشر** بطريقة ما حول القيمة ٣٦,٠٥، ويُعطيك انطباعًا جيّدًا عن 'قياس' البيانات بشكل عام. لاحظ أن قيمة الوسط الحسابي في هذه الحالة ليست أحد أعمار العمّال.

رابط

يستخدم علماء الجغرافيا المقاييس الإحصائية لتلخيص النتائج العددية في التعدادات السكانيّة الكبيرة. يوفر ذلك عليهم إظهار كل قيمة عددية في مجموعة البيانات التي تمّ جمعها على حدة.

كما يوجد مقياس آخر من المقاييس الإحصائية، وهو القيمة التي تقع في المُنتصف عند ترتيب أعمار العمّال ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا:

٣٣ ٣٣ ٣٤ ٣٤ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٦ ٣٦ ٣٦ ٣٦ ٣٦ ٣٧ ٣٧ ٣٧ ٣٨ ٣٨ ٣٨ ٤١

إذا فكّرت في أوّل وآخر قيمتَين كزوج واحد، والقيمة الثانية والقيمة ما قبل الأخيرة كزوج آخر، وهكذا... يمكنك أن تحذف هذه الأعداد وتبقى لديك قيمة واحدة تقع في المنتصف:

~~٣٣~~ ~~٣٣~~ ~~٣٤~~ ~~٣٤~~ ~~٣٤~~ ~~٣٥~~ ~~٣٦~~ ~~٣٦~~ ~~٣٦~~ $\boxed{٣٦}$ ~~٣٦~~ ~~٣٦~~ ~~٣٧~~ ~~٣٧~~ ~~٣٧~~ ~~٣٨~~ ~~٣٨~~ ~~٣٨~~ ~~٤١~~

تُسمّى هذه القيمة (٣٦) **بالوسيط**.

إذا كانت البيانات كثيرة تكون عملية حذف الأعداد من كلا الطرفَين مُتعِبة، ولكن ربّما لاحظت وأنت تعدّ القيَم من اليمين أنّ الوسيط هو القيمة العاشرة، وإذا قمت بإضافة ١ إلى عدد العمّال، ومن ثم قسمت الناتج على اثنين ($\frac{١٩ + ١}{٢}$)، تحصل على العدد ١٠، وهو موقع الوسيط.

ماذا لو كان عدد العمّال ٢٠، وأضيف لهم عامل عمره ٤١، ثمّ حُذفت أزواج القيَم؟ سوف نحصل على النتيجة التالية:

~~٣٣~~ ~~٣٣~~ ~~٣٤~~ ~~٣٤~~ ~~٣٤~~ ~~٣٥~~ ~~٣٦~~ ~~٣٦~~ ~~٣٦~~ $\boxed{٣٦\quad ٣٦}$ ~~٣٦~~ ~~٣٧~~ ~~٣٧~~ ~~٣٧~~ ~~٣٨~~ ~~٣٨~~ ~~٣٨~~ ~~٤١~~ ~~٤١~~

تبقى لديك قيمتان في المُنتصف وليس قيمة واحدة، وفي هذه الحالة نقوم بإيجاد الوسط الحسابي لزوج القيَم الموجود في الوسط، أي: $\frac{٣٦ + ٣٦}{٢} = ٣٦$

لاحظ أن موقع القيمة الأولى في زوج القيَم هو $\frac{٢٠}{٢} = ١٠$

إضافة القيمة الإضافية في الموقع ١١ في هذا المثال لم تغيّر قيمة الوسيط أو قيمة المنوال، لكن ماذا سيحدث لقيمة الوسط الحسابي؟

ملخّص:

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات، وقد يكون هناك أكثر من منوال لمجموعة البيانات، ولكن عندما تتساوى تكرارات كل القيَم لا يكون هناك منوال.

الوسط الحسابي هو إيجاد إجمالي كل القيَم لمجموعة من البيانات وقسمتها على عدد تلك القيم $\frac{\text{مجموع قيَم البيانات}}{\text{عدد القيَم}}$، وقد لا يكون الوسط الحسابي إحدى قيَم البيانات.

الوسيط هو القيمة المتوسّطة لمجموعة من القيَم المرتّبة ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا، ولإيجاد الوسيط نتَّبع الخطوات الآتية:

١. رتِّب قيم البيانات ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا.

٢. إذا كان عدد القيَم في البيانات ن، حيث ن عدد فردي، حدّد موقع الوسيط بإيجاد: $\frac{ن + ١}{٢}$.

٣. إذا كان عدد القيَم في البيانات ن، حيث ن عدد زوجي، حدِّد موقع الوسيط الأوَّل بإيجاد: $\frac{ن}{٢}$، وستكون القيمة الأخرى هي القيمة التالية له مباشرة، ومن ثمّ أوجد الوسط الحسابي لهاتَين القيَمتَين.

التعامُل مع القيَم المُتطرّفة

تتضمّن مجموعة البيانات أحيانًا قيَمًا مُتطرّفة، فإذا كنت مثلاً تقيس سرعة السيّارات عند عبورها نقطة ما، قد تجد أن بعضها يتحرّك ببطء أو بسرعة كبيرة، أو قد ترتكب خطأ وتقيس السرعة بصورة غير صحيحة، أو تكتب العدد بطريقة خاطئة!

افترض أن البيانات التالية هي سرعات (بالكيلومتر في الساعة) لسيّارات عبرت عند مفترق ما في فترة زمنية مُدّتها خمس دقائق.

٥٥,٧ ٤٩,٠ ٦٥,٠ ١٢٨,٩ ٥٨,٣ ٦٧,٢

قد تثير اهتمامك إحدى القيَم، ألا وهي ١٢٨,٩ كم/ساعة، التي تُظهر أسرع سيّارة في المجموعة.

كيف تؤثّر هذه القيمة المُتطرّفة على المقاييس الإحصائية؟

ستجد أن الوسط الحسابي لهذه البيانات، بما فيها القيمة المُتطرّفة، هو ٧٠,٧ كم/ ساعة، وهو أكبر من كلّ السرعات عدا القيمة المُتطرّفة، لذا فهو لا يُعدّ مُمثّلاً لتلك البيانات. في هذه الحالة يكون الوسط الحسابي خيارًا ضعيفًا لمعالجة البيانات. وإذا اكتشفت أن القيمة المُتطرّفة كانت نتيجة خطأ ما، يمكنك أن تستثنيها من الحسابات وتحصل على قيمة أكثر واقعية هي ٥٩,٠ كم/ساعة (حاول إيجاد هذه القيمة بمفردك).

أمّا إذا كانت القيمة المُتطرّفة حقيقية ولا يمكن حذفها، فهذا يعني أن استخدام الوسيط أفضل من استخدام الوسط الحسابي لمعالجة البيانات.

مُساعَدة

قد يُطلب إليك تبرير اختيارك للوسط الحسابي أو للوسيط في معالجة البيانات.

اكتب البيانات بالترتيب:

٤٩,٠ ٥٥,٧ ٥٨,٣ ٦٥,٠ ٦٧,٢ ١٢٨,٩

الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتَين ٦٥,٠ و ٥٨,٣ ويساوي ٦١,٧، لاحظ أن الوسيط سوف يتناقص إلى ٥٨,٣ إذا حذفتَ القيمة المُتطرّفة، وهذا لا يغيِّر كثيرًا في الواقع.

لا يوجد منوال في هذه البيانات لعدم وجود قيمة متكرّرة أكثر من باقي القيَم.

بما أن عدد السرعات زوجيّ، فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتَين الثالثة والرابعة.

مثــال ١

إذا كان الوسط الحسابي لدرجات أحمد في ستّة اختبارات ٤٨، وحصل على درجة ٨٣ عندما أجرى اختبارًا سابعًا:

أ ما مجموع درجات أحمد في الاختبارات الستّة؟

ب ما الوسط الحسابي لدرجات أحمد بعد الاختبار السابع؟

الحــلّ:

أ مجموع قيَم البيانات = الوسط الحسابي × عدد القيَم = ٤٨ × ٦ = ٢٨٨	لأن الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع قيَم البيانات}}{\text{عدد القيَم}}$
ب مجموع درجات الاختبارات السبعة = مجموع درجات الاختبارات الستّة + درجة الاختبار السابع = ٢٨٨ + ٨٣ = ٣٧١ الوسط الحسابي $= \frac{٣٧١}{٧} = ٥٣$	

تمارين ٥-١-أ

١) لكل مجموعة بيانات من المجموعات التالية، احسب:

(١) المنوال　(٢) الوسيط　(٣) الوسط الحسابي

أ	١٢	٢	٥	٦	٩	٣	١٢	١٣	١٠	
ب	٥	٩	٧	٣	٨	٢	٥	٨	٨	٢
ج	٢,١	٣,٨	٢,٤	٧,٦	٨,٢	٣,٤	٥,٦	٨,٢	٤,٥	٢,١
د	١٢	٢	٥	٦	٩	٣	١٢	١٣	٤٣	

٢) انظر إلى مجموعتَي البيانات في الجُزئيّتين (أ) و (د) أعلاه. ما الاختلاف بينهما؟ كيف يتغيّر كل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال؟

٣) قرَّر أحمد وسعيد تقصّي نمط متابعة كل منهما لبرامج التلفاز وتسجيل عدد الدقائق التي يقضيها كل منهما في مشاهدة التلفاز لمُدّة ٨ أيام:

أحمد:	٣٨	١٠	٦٥	٤٣	١٢٥	٢٢٥	١٢٨	٤٠
سعيد:	٢٥	١٥	١٠	٦٥	٩٠	٣٠٠	٢٥٤	٣٢

أ أوجد الوسيط للدقائق التي يقضيها كل من أحمد وسعيد في مشاهدة التلفاز.

ب أوجد الوسط الحسابي للدقائق التي يقضيها كل من أحمد وسعيد في مشاهدة التلفاز.

٤) اكتب مجموعة بيانات من خمسة قيَم يكون وسطها الحسابي أكبر من كل القيَم إلا قيمة واحدة.

٥) سجَّل فريق كرة السلّة النقاط التالية في خمس مباريات رياضية:

٩٨　٦٤　١٠٣　١٠٨　١٠٩

حدِّد المقياس الإحصائي (الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال) المناسب لوصف النقاط التي حقّقها فريق كرة السلة؟ فسِّر إجابتك مُبيّنًا كل الحسابات المطلوبة بوضوح.

> **مُساعَدة**
> فكّر في الانحياز، وكيف أن اللاعبين في الفريق يمكن أن يتجاهلوا القيمة التي لا تدعم ادّعاءهم بأنهم فريق ماهر.

٦) إذا كان الوسط الحسابي لأطوال ٣١ طالبًا هو ١٤٣,٦ سم، احسب مجموع أطوال الطلبة.

٧) إذا كان الوسط الحسابي لكتلة ١٢ كيسًا من البطاطس هو ٢,٤ كغم، وإذا كانت كتلة البطاطس في الكيس الثالث عشر هي ٢,٢ كغم ، فما الوسط الحسابي لكتلة الأكياس الـ ١٣؟

٨) إذا كان الوسط الحسابي لدرجات حرارة ١٠ أكواب من القهوة هو ٨٩,٦° س والوسط الحسابي لدرجات حرارة ٢٠ كوبًا آخر هو ٩٢,١° س، فما الوسط الحسابي لدرجات حرارة ٣٠ كوبًا؟

٩) اكتب مجموعة بيانات مكوَّنة من خمسة قيَم يكون وسطها الحسابي ٥ ووسيطها ٤ ومنوالها ٤

١٠) اكتب مجموعة بيانات مكوَّنة من خمسة قيَم تكون أعدادًا كاملة ومختلفة، وسطها الحسابي ٥ ووسيطها ٤

١١) إذا كان الوسط الحسابي لكتل م طالبًا هو س كغم، والوسط الحسابي لكتل ن طالبة هو ص كغم، أوجد الوسط الحسابي لكتل الطلاب والطالبات معًا.

٥-١-ب إجراء مُقارنات باستخدام المقاييس الإحصائية

يمكنك الآن مُقارنة مجموعتَين أو أكثر من البيانات باستخدام إحدى قيَم المقاييس الإحصائية التي وجدتها سابقًا، والتي تُمثّل مجموعة البيانات المعطاة.

وتبدو معرفة **مدى** ثبات البيانات أمرًا مُفيدًا، وذلك من خلال التفكير في كيفية انتشار القيَم، ويمكن إيجاد قيمة المدى كالتالي:

المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة

كلما زادت قيمة المدى زاد انتشار القيم وقلّ ثباتها.

مثـــال ٢

أراد فريقا سباق مقارنة الأزمنة التي قضاها كلٌّ منهما في سباق ١٠٠ م، حيث ركض كل لاعب من كلا الفريقَين مرة واحدة، وسجّل الزمن الذي استغرقه في السباق (بالثواني) كما هو مُبيّن في الجدول التالي:

فريق محمد	١٤,٣	١٦,٦	١٤,٣	١٧,٩	١٤,١	١٥,٧
فريق سالم	١٣,٢	١٦,٨	١٤,٧	١٤,٧	١٣,٦	١٦,٢

أ) احسب الوسط الحسابي لزمن كل فريق.

ب) أي الوسطَين الحسابيَّين أقل؟

ج) قارن بين فريق محمد وفريق سالم مستخدما الوسط الحسابي لكل فريق من الفريقين.

د) احسب مدى الزمن لكل فريق.

هـ) استخدم المدى للتعبير عن أداء كل فريق.

الحـــلّ:

أ) فريق محمد:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{١٤,٣ + ١٦,٦ + ١٤,٣ + ١٧,٩ + ١٤,١ + ١٥,٧}{٦}$$

$$= \frac{٩٢,٩}{٦} = ١٥,٤٨ \text{ ثانية}$$

فريق سالم:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{١٣,٢ + ١٦,٨ + ١٤,٧ + ١٤,٧ + ١٣,٦ + ١٦,٢}{٦}$$

$$= \frac{٨٩,٢}{٦} = ١٤,٨٧ \text{ ثانية}$$

باستخدام صيغة الوسط الحسابي.

ب	الوسط الحسابي لزمن فريق سالم هو الأقل.	
ج	الزمن الأقلّ يدل على أن فريق سالم كان أسرع قليلاً من فريق محمد.	
د	مدى الزمن لفريق محمد = ١٧,٩ − ١٤,١= ٣,٨ ثوانٍ مدى الزمن لفريق سالم = ١٦,٨ − ١٣,٢= ٣,٦ ثوانٍ	
هـ	بما أن الوسط الحسابي لزمن فريق سالم هو الأقلّ (١٤,٨٧ > ١٥,٤٨)، فإن ذلك يدل على أن فريقه كان الفريق الأسرع. وبما أن مدى الزمن لفريقه هو الأقلّ (٣,٦ > ٣,٨)، فإن ذلك يدل على أن فريقه كان أكثر ثباتًا، حيث تحسّن الفريق بشكل جماعي ككل، ولم يكن التحسُّن بسبب نتيجة تحسُّن لاعب واحد أو لاعبَين اثنين. وبالتالي جرى كل لاعبي الفريق بسرعات مُتشابهة إلى حد ما. أمّا فريق محمّد فكان أقلّ ثباتًا، ممّا يدلّ على أن لاعبيه قد تحسّنوا فرديًّا.	

مُساعَدة

عند مقارنة الأوساط الحسابية أو قيَم المدى، تأكّد من أنك ترجع إلى المحتوى الأصلي للسؤال.

تمارين ٥-١-ب

١) يجمع الصديقان سلمان وأمين ثمار التوت في مجموعة من العُلب، وكلّما ملأ أحدهما علبة يُسجِّل كتلتها بالكيلوغرامات، كما هو مُبيّن في الجدول التالي:

سلمان	٠,١٤٥	٠,١٨٢	٠,١٣٥	٠,١٣٢	٠,١١٢	٠,١٥٥	٠,١٨٩	٠,١٣٢	٠,١٤٥	٠,٢٠١	٠,١٣٩
أمين	٠,١٣١	٠,١٤٣	٠,١٣٤	٠,١٤٥	٠,١٣٢	٠,١٢٣	٠,١٨٢	٠,١٣٤	٠,١٢٨		

أ احسب لكل منهما:

(١) الوسط الحسابي لكتل علب التوت التي جمعها

(٢) المدى لكتل علب التوت التي جمعها

ب أي منهما جمع توتًا كتلته أكبر؟

ج أي منهما كان جمعه للتوت أكثر ثباتًا؟

٢) يبيّن الجدول التالي الدرجات التي حصلت عليها شُعبتان في اختبار الرياضيات، علمًا بأن درجات الاختبار من ٢٠ درجة:

الشعبة الأولى	١٢	١٣	٤	١٩	٢٠	١٢	١٣	١٣	١٦	١٨	١٢
الشعبة الثانية	١٣	٦	٩	١٥	٢٠	٢٠	١٣	١٥	١٧	١٩	٣

أ احسب الوسط الحسابي والوسيط لدرجات كل شعبة.

ب أوجد المدى لدرجات كل شعبة.

ج أي الشعبتَين كانت درجاتها أفضل في الاختبار؟

د أي الشعبتَين كانت درجاتها أكثر ثباتًا في الاختبار؟

٣) تبيع ثلاثة محال تجارية مصابيح إنارة، اُخذت عيّنة عددها ١٠٠ مصباح من كل محلّ تجاري وتم قياس عُمّر كل منها بالساعات. يُبيّن الجدول التالي الوسط الحسابي والمدى لمصابيح كل محل:

المحلّ التجاري	الوسط الحسابي (ساعة)	المدى (ساعة)
(أ)	١٣٦	١٨
(ب)	١٤٥	٣٦
(ج)	١٤٣	١٨

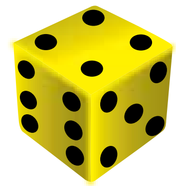
أي محلّ من المحالّ التجارية الثلاثة توصي به شخصًا يريد شراء مصابيح الإنارة؟ ولماذا؟

٥-٢ الجداول التكرارية

٥-٢-أ حساب المقاييس الإحصائية للبيانات التكرارية

درست سابقًا كيفية إيجاد المقاييس الاحصائية لمجموعة بيانات بسيطة، ولكن عندما يكون لديك مجموعة بيانات عدد قيَمها أكبر من ٢٠، يُفضّل أن تعُدّ البيانات التي لها القيمة نفسها معًا وتُسجّلها في جدول، يُسمّى بالجدول التكراري، أو التوزيع التكراري.

البيانات الموضَّحة في جدول توزيع تكراري



إذا رميت حجر نرد سداسي الأوجه ١٠٠ مرّة، سوف يظهر كل رقم من الأرقام الستّة عدّة مرّات. يمكنك أن تُسجِّل عدد مرّات الظهور على النحو التالي:

الرقم الظاهر على الوجه العلوي	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار	١٦	١٣	١٤	١٧	١٩	٢١

الوسط الحسابي

لتجد الوسط الحسابي، تحتاج أوَّلاً إلى إيجاد مجموع الأرقام الظاهرة على وجه حجر النرد عند رميه ١٠٠ رمية. مجموع ظهور الرقم (١) ستّ عشرة مرّة يساوي ١ × ١٦ = ١٦، ومجموع ظهور الرقم (٢) ثلاث عشرة مرة يساوي ٢ × ١٣ = ٢٦ وهكذا. يمكنك أن توسِّع جدولك لتُبيِّن ذلك:

مُساعَدة

يمكنك إضافة أعمدة إلى الجدول المعطى ليساعدك على تنظيم الحسابات بكل وضوح.

الرقم الظاهر على وجه حجر النرد	التكرار	التكرار× الرقم الظاهر على وجه النرد
١	١٦	١ × ١٦ = ١٦
٢	١٣	٢ × ١٣ = ٢٦
٣	١٤	٣ × ١٤ = ٤٢
٤	١٧	٤ × ١٧ = ٦٨
٥	١٩	٥ × ١٩ = ٩٥
٦	٢١	٦ × ٢١ = ١٢٦
المجموع	١٠٠	٣٧٣

نحصل على المجموع الكلّي لـ ١٠٠ رمية من جمع القيَم الموجودة في العمود الثالث:

= ١٦ + ٢٦ + ٤٢ + ٦٨ + ٩٥ + ١٢٦

= ٣٧٣

$$\therefore \text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع الأرقام الظاهرة}}{\text{عدد الرميات}} = \frac{٣٧٣}{١٠٠} = ٣,٧٣$$

الوسيط

تمّ رمي حجر النرد ١٠٠ مرّة، وهذا عدد زوجي. لذا سيكون الوسيط هو الوسط الحسابي لزوج القيَم الذي يقع في المُنتصف. سوف يكون موقع القيمة الأولى هو $\frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$، وموقع القيمة الثانية $\frac{١٠٠}{٢} + ١ = ٥١$

مجموع تكرارات القيمة
(١) يساوي ١٦
ومجموع تكرارات القيمتَين
(١) و(٢) يساوي ٢٩
ومجموع تكرارات القيَم
(١) و(٢) و(٣) يساوي ٤٣
ومجموع تكرارات القيَم
(١) و(٢) و(٣) و(٤) يساوي ٦٠،

الرقم الظاهر على وجه حجر النرد	التكرار
١	١٦
٢	١٣
٣	١٤
٤	١٧
٥	١٩
٦	٢١

٢٩
٤٣
٦٠

وهذا يعني أن القيمة ٥٠ والقيمة ٥١ هما أربعات.

∴ الوسط الحسابي للقيمتَين ٤ و٤ هو ٤، وهذه القيمة هي الوسيط.

المنوال

لتجد المنوال ببساطة تحتاج إلى إيجاد الرقم الظاهر على وجه حجر النرد الأكثر تكرارًا.
الرقم ٦ يظهر ٢١ مرّة فيكون المنوال هو الرقم ٦

المدى

ما دامت أكبر قيمة وأصغر قيمة معروفتَين، يكون المدى ٦ − ١ = ٥

تنظيم البيانات في مُخطّط الساق والورقة

يمكنك أن تُحدّد قيَم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى من مُخطّط الساق والورقة:

الوسط الحسابي

يُبيِّن مُخطّط الساق والورقة جميع قيَم البيانات، لذلك يُحسَب الوسط الحسابي بإيجاد مجموع كل القيَم وقسمته على عدد القيَم، بالطريقة نفسها التي تجد فيها الوسط الحسابي لأي مجموعة بيانات.

الوسيط

يمكنك استخدام مُخطّط الساق والورقة المُرتَّب لتُحدِّد الوسيط، بحيث تكون أوراق كل ساق في مُخطّط الساق والورقة المُرتَّب، مُرتَّبة من الأصغر إلى الأكبر.

المنوال

يسمح مُخطّط الساق والورقة المُرتَّب لك بمعرفة القيَم المُتكرِّرة في كل صف، بحيث يمكنك مُقارنة عدد تلك القيَم لتجد المنوال.

المدى

يمكنك استخدام أوّل قيمة وآخر قيمة في مُخطّط الساق والورقة المُرتَّب لتجد المدى.

مثـــال ٣

يبيّن مُخطّط الساق والورقة التالي عدد الزبائن الذين تمّت خدمتهم في أحد المتاجر كل نصف ساعة، خلال ٨ ساعات:

الساق	الورقة
٠	٢ ٥ ٥ ٦ ٦ ٦ ٦
١	١ ٣ ٣ ٥ ٥ ٦ ٧ ٧
٢	١

المفتاح
٢ | ٠ = ٢ زبون

أ ما مدى عدد الزبائن الذين تمّت خدمتهم؟

ب ما منوال عدد الزبائن الذين تمّت خدمتهم؟

ج أوجد الوسيط لعدد الزبائن الذين تمّت خدمتهم.

د كم زبونًا تمّت خدمتهم خلال هذه الفترة؟

هـ أوجد الوسط الحسابي للزبائن الذين تمّت خدمتهم كل نصف ساعة.

الحـــلّ:

أ المدى ٢١ − ٢ = ١٩ زبونًا

أصغر عدد هو ٢
وأكبر عدد هو ٢١

ب ٦

هذه هي القيمة الأكثر تكرارًا.

ج $\frac{(١١ + ١٣)}{٢} = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$

هناك ١٦ قيمة من البيانات، لذلك يكون الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتَين الثامنة والتاسعة.

د الصف ١: ٢ + ٥ + ٥ + ٦ + ٦ + ٦ + ٦ = ٣٦
الصف ٢: ١١ + ١٣ + ١٣ + ١٥ + ١٥ + ١٦ + ١٧ + ١٧ = ١١٧
الصف ٣: ٢١
٣٦ + ١١٧ + ٢١ = ١٧٤ إجمالي عدد الزبائن

لتحسب ذلك أوجد مجموع كل القيَم. أوجد المجموع لكل صف، ثم ضمّها معًا لتجد المجموع الكلّي.

هـ الوسط الحسابي = $\frac{١٧٤}{١٦}$ = ١٠,٨٧٥ زبائن تمّت خدمتهم كل نصف ساعة.

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع قيَم البيانات}}{\text{عدد القيَم}}$

ملخّص:

- **المنوال** هو القيمة الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات، قد يكون لمجموعة البيانات أكثر من منوال، ولكن عندما تتساوى تكرارات كل القيَم فلا يكون هناك منوال في هذه الحالة.
- **الوسط الحسابي** هو إيجاد إجمالي كل القيَم لمجموعة من البيانات وقسمتها على عدد تلك القيَم: $\dfrac{\text{مجموع قيَم البيانات}}{\text{عدد القيَم}} = \dfrac{\text{مجموع (التكرارات × القيمة)}}{\text{إجمالي التكرارات}}$

  (تذكّر أن توسِّع الجدول لتتمكَّن من زيادة عمود يساعدك على إيجاد التكرار × القيمة في كل حالة).
- **الوسيط** هو القيمة المتوسّطة لمجموعة من القيَم المرتبة ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا، ولإيجاد الوسيط نتَّبع الخطوات الآتية:
  - رتِّب قيَم البيانات ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا.
  - إذا كان عدد القيَم في البيانات ن، حيث ن عدد فردي، أوجد $\dfrac{\text{ن} + ١}{٢}$ لتجد موقع الوسيط.
  - إذا كان عدد القيَم في البيانات ن، حيث ن عدد زوجي، أوجد $\dfrac{\text{ن}}{٢}$ لتحصل على موقع القيمة الأولى، وستكون القيمة الأخرى هي القيمة التالية لها مباشرة. أوجد الوسط الحسابي لهاتَين القيَمتين.
  - اجمع التكرارات بالترتيب حتى تجد القيمة التي تجعلك تتجاوز (أو تعادل) إحدى قيمتَي المُنتصف، فتكون هذه هي قيمة الوسيط.

تمارين ٥-٢-أ

١) أنشئ جدولاً تكراريًّا للبيانات التالية، وأوجد:

أ الوسط الحسابي   ب الوسيط   ج المنوال   د المدى

٣	٤	٥	١	٢	٨	٩	٦	٥	٣	٣	١	٦	٤	٧	٨	١
١	٥	٥	٢	٣	٤	٥	٧	٨	٣	٤	٢	٥	١	٩	٤	٥
٦	٧	٨	٩	٢	١	٥	٤	٣	٤	٥	٦	١	٤	٤	٨	

٢) تمّ في أحد المهرجانات بيع تذاكر الفعاليات على النحو التالي: ١٨٠ تذكرة بسعر ٦,٥٠ ريالات عُمانية للتذكرة الواحدة، و٢١٥ تذكرة بسعر ٨ ريالات عُمانية للتذكرة الواحدة، و١٢٤ تذكرة بسعر ١٠ ريالات عُمانية للتذكرة الواحدة.

أ مثّل هذه البيانات في جدول تكراري.

ب احسب الوسط الحسابي لسعر التذاكر التي تم بيعها، مُقرِّبًا الإجابة إلى أقرب عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية.

٣) تعدّ رقية الرسائل البريدية الإلكترونية التي تصلها يوميًّا لمُدَّة ٦٠ يومًا، وتسجّل عددها في الجدول التالي:

عدد الرسائل في كل يوم	٠	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	٢٨	٢١	٦	٣	١	١

أوجد:

أ المنوال لعدد الرسائل.

ب الوسيط لعدد الرسائل.

ج الوسط الحسابي لعدد الرسائل.

د المدى لعدد الرسائل.

٤) البيانات المُسجّلة في الجدول التالي توضّح الدراسة المسحية لعدد الأطفال في ١٠٠ أُسرة:

عدد الأطفال في الأسرة الواحدة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
عدد الأُسر	٤	٣٦	٢٧	٢١	٥	٤	٢	١

أوجد:

أ المنوال لعدد الأطفال.

ب الوسيط لعدد الأطفال.

ج الوسط الحسابي لعدد الأطفال.

٥) يُبيّن الجدول التالي الدرجات التي حصل عليها مجموعة من طلاب الصف العاشر في أحد اختبارات مادة الفيزياء (الدرجة الكلية للاختبار ١٠ درجات):

الدرجة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الطلبة	١	٠	٣	٢	٢	٤	٣	٤	٦	٣	٢

أوجد:

أ المنوال لدرجات الطلاب

ب الوسيط لدرجات الطلاب

ج الوسط الحسابي لدرجات الطلاب

د ما أفضل مقياس إحصائي يمكن أن يستخدمه المعلّم بحيث يعبِّر من خلاله عن أداء الطلبة؟ ولماذا؟

٦) قاس محمود كُتل ٢٠ لاعب كرة قدم مُقرَّبة إلى أقرب كيلوغرام، وأنشأ مُخطّط الساق والورقة التالي:

الساق	الورقة
٤	٦
٥	٠ ٠ ٤
٥	٥ ٩ ٨ ٧
٦	٢ ٣ ١ ١ ٠ ٣
٦	٩ ٦ ٨ ٦
٧	٠ ٤

المفتاح

٦ | ٤ = ٤٦ كيلوغرامًا

أ) أعد رسم مُخطّط الساق والورقة لتُشكِّل مجموعة بيانات مُرتَّبة.

ب) كم لاعبًا كتلته ٦٠ كغم أو أكثر؟

ج) لماذا لا يُعدّ المنوال مقياسًا إحصائيًّا مفيدًا لهذه البيانات؟

د) ما المدى لكتل اللاعبين؟

هـ) ما الوسيط لكتل اللاعبين؟

٧) سجَّلت ندى عدد القطع الإلكترونية التي تنتجها إحدى الآلات في كل ساعة ولمدة ٢٤ ساعة على النحو التالي:

١٤٣ ١٢٨ ١٢١ ١٢٦ ١٣٤ ١٥٠ ١٢٨ ١٣٢ ١٤٠ ١٣١ ١٤٦ ١٢٨

١٣٣ ١٣٨ ١٤٠ ١٢٥ ١٤٢ ١٢٩ ١٣٦ ١٣٠ ١٣٣ ١٤٢ ١٢٦ ١٢٩

أ) أنشئ مُخطّط الساق والورقة لعرض البيانات.

ب) حدِّد المدى للبيانات.

ج) أوجد الوسيط للبيانات.

٥-٢-ب حساب المقاييس الإحصائية والمدى لبيانات مُتَّصلة مُجمَّعة في فئات

تكون بعض البيانات **مُنفصلة** وتتَّخذ قيَمًا مُحدّدة فقط؛ فإذا رميت حجر نرد مثلاً، فإنك تحصل فقط على أحد الأعداد التالية ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، وإذا حسبت عدد السيّارات الحمراء في مواقف للسيارات، فإن النتيجة ستكون عددًا كاملاً فقط.

وفي المقابل قد تكون بعض البيانات **مُتّصلة** ويمكن أن تتَّخذ أي قيمة في مجال مُحدّد، كأطوال الأشخاص، أو درجة حرارة السوائل.

فإذا قِست مثلاً أطوال ١٠٠ طفل، فقد تخلُص إلى ١٠٠ نتيجة مختلفة، ويمكنك في هذه الحالة تجميع البيانات وتلخيصها في جدول تكراري لتصبح العملية قابلة للتحكُّم، وهذا ما يُسمّى **بالبيانات المُجمّعة**، كما يمكن كتابة المجموعات (أو الفئات) باستخدام رموز المُتباينات، فإذا رغبت مثلاً في إنشاء فئة لأطوال (ل سم) بين ١٢٠ سم و١٣٠ سم، فيمكنك أن تكتبها على النحو التالي:

١٢٠ ≤ ل < ١٣٠

هذا يعني أن ل أكبر من أو تساوي ١٢٠، لكنّها أقلّ من ١٣٠.

وقد تكون الفئة الثانية:

١٣٠ ≤ ل < ١٤٠

لاحظ أن ١٣٠ ليست من الفئة الأولى، بل من الفئة الثانية، وهذا يجنِّبك أي إرباك أو حيرة في تحديد مكان وضع القيَم الحدودية.

يُبيّن المثال التالي كيفية استخدام الجدول التكراري ذي الفئات لإيجاد **الوسط الحسابي التقديري** والمدى، وكذلك لإيجاد **الفئة المنوالية** والفئة الوسيطية (أي الفئات التي يقع فيها المنوال والوسيط).

مثال ٤

يُبيّن الجدول التالي أطوال ١٠٠ طفل (بالسنتيمتر):

الطول (ل (سم))	التكرار (ت)
١٢٠ ≤ ل < ١٣٠	١٢
١٣٠ ≤ ل < ١٤٠	١٦
١٤٠ ≤ ل < ١٥٠	٣٨
١٥٠ ≤ ل < ١٦٠	٢٤
١٦٠ ≤ ل ≤ ١٧٠	١٠

قدّر الوسط الحسابي لأطوال الأطفال، وأوجد الفئة المنوالية والفئة الوسيطية، وقدّر المدى.

مُساعَدة

قد يُطلَب إليك أن تُبرِّر إعطاءك الحسابات كتقديرات للإجابة. تذكَّر أن البيانات المتوفِّرة لديك ليست دقيقة، وما هي إلاّ تكرارات وفئات.

الحـــلّ:

الوسط الحسابي:

وسّع جدولك ليشمل مراكز الفئات ومجموع كل فئة.

الطول (ل (سم))	التكرار (ت)	مراكز الفئات	التكرار × مراكز الفئات
١٢٠ ⩽ ل < ١٣٠	١٢	١٢٥	١٢ × ١٢٥ = ١٥٠٠
١٣٠ ⩽ ل < ١٤٠	١٦	١٣٥	١٦ × ١٣٥ = ٢١٦٠
١٤٠ ⩽ ل < ١٥٠	٣٨	١٤٥	٣٨ × ١٤٥ = ٥٥١٠
١٥٠ ⩽ ل < ١٦٠	٢٤	١٥٥	٢٤ × ١٥٥ = ٣٧٢٠
١٦٠ ⩽ ل ⩽ ١٧٠	١٠	١٦٥	١٠ × ١٦٥ = ١٦٥٠
المجموع	١٠٠		١٤٥٤٠

الوسط الحسابي التقديري لأطوال الأطفال هو:

$$\frac{١٥٠٠ + ٢١٦٠ + ٥٥١٠ + ٣٧٢٠ + ١٦٥٠}{١٢ + ١٦ + ٣٨ + ٢٤ + ١٠}$$

$$= \frac{١٤٥٤٠}{١٠٠} = ١٤٥{,}٤ \text{ سم}$$

الفئة الوسيطية:

الطول (ل (سم))	التكرار (ت)
١٢٠ ⩽ ل < ١٣٠	١٢
١٣٠ ⩽ ل < ١٤٠	١٦
١٤٠ ⩽ ل < ١٥٠	٣٨
١٥٠ ⩽ ل < ١٦٠	٢٤
١٦٠ ⩽ ل ⩽ ١٧٠	١٠

٢٨

٦٦

الفئة الوسيطية هي ١٤٠ ⩽ ل < ١٥٠

الفئة المنوالية:

الفئة المنوالية هي ١٤٠ ⩽ ل < ١٥٠

المدى:

أفضل تقدير للمدى هو ١٧٠ − ١٢٠ = ٥٠ سم

لم يُعرف الطول الحقيقي لأي طفل، لذا استُخدمت مراكز الفئات كأفضل تقدير لطول كل طفل في الفئة المُحدّدة. فمثلاً، تقع أطوال الـ ١٢ طفلاً في فئة ١٢٠ ⩽ ل < ١٣٠ وهي تتراوح بين ١٢٠سم و ١٣٠ سم، وهذا كل ما نعرفه. تقع نقطة المُنتصَف بين ١٢٠ سم و ١٣٠ سم، وهي $\frac{(١٢٠ + ١٣٠)}{٢}$ = ١٢٥ سم.

ويكون أفضل تقدير لأطوال الـ ١٢ طفلًا هو ١٢ × ١٢٥ (التكرار × مركز الفئة).

لتجد الفئة الوسيطية، عليك تحديد موقع الطالبَين الخمسين والحادي والخمسين. لاحظ أن مجموع تكرار أول فئتَين هو ٢٨، مما يعني أن طول الطالب الثامن والعشرين في مجموعة البيانات المُرتَّبة سيكون الأطول في فئة ١٣٠ ⩽ ل < ١٤٠ ومجموع تكرارات الفئات الثلاث الأولى يساوي ٦٦، ممّا يعني أن طول الطالب الخمسين يقع في فئة ١٤٠ ⩽ ل < ١٥٠

تكون الفئة الأكثر تكرارًا هي الفئة المنوالية.

قد يكون طول أقصر طفل ١٢٠ سم وطول أطول طفل ١٧٠ سم.

تمارين ٥-٢-ب

١) يبيّن الجدول التالي أطوال ٥٠ لوحة في معرض فني. أوجد الوسط الحسابي التقديري لأطوال اللوحات:

الطول (ل سم)	التكرار (ت)
١٣٠ < ل ⩽ ١٣٥	٧
١٣٥ < ل ⩽ ١٤٠	١٣
١٤٠ < ل ⩽ ١٤٥	١٥
١٤٥ < ل ⩽ ١٥٠	١١
١٥٠ < ل ⩽ ١٥٥	٤
المجموع	مجـ ت = ٥٠

الرمز مجـ هو الحرف الإغريقي 'سيغما'، وهو يُستخدم ليُمثّل المجموع. لذلك فإن مجـ ت يعني مجموع كل التكرارات.

٢) يبيّن الجدول التالي الفترات الزمنية لـ ١٠٠ مُكالمة هاتفية:

الفترة الزمنية (ن (دقيقة))	التكرار (ت)
٠ < ن ⩽ ١	١٢
١ < ن ⩽ ٢	١٤
٢ < ن ⩽ ٤	٢٠
٤ < ن ⩽ ٦	١٤
٦ < ن ⩽ ٨	١٢
٨ < ن ⩽ ١٠	١٨
١٠ < ن ⩽ ١٥	١٠

أوجد الوسط الحسابي التقديري للفترات الزمنية التي استغرقتها المُكالمات الهاتفية. (اكتب الناتج بالدقائق والثواني، مُقرّبًا إلى أقرب ثانية).

٣) يُبيّن الجدول التالي درجات الحرارة لأنابيب اختبار خلال تجربة كيميائية:

درجة الحرارة (ح (°س))	التكرار (ت)
٤٥ ⩽ ح < ٥٠	٣
٥٠ ⩽ ح < ٥٥	٨
٥٥ ⩽ ح < ٦٠	١٧
٦٠ ⩽ ح < ٦٥	٦
٦٥ ⩽ ح < ٧٠	٢
٧٠ ⩽ ح < ٧٥	١

احسب الوسط الحسابي التقديري لدرجات الحرارة لأنابيب الاختبار.

٤) يتنافس فريقا الصقور والنسور في سباق للجري، ويُبيّن الجدولان التاليان كتل اللاعبين في كل فريق:

فريق الصقور

الكتلة (ك (كغم))	التكرار (ت)
٥٥ ⩽ ك < ٦٥	٢
٦٥ ⩽ ك < ٧٥	٨
٧٥ ⩽ ك < ٨٥	١٢
٨٥ ⩽ ك ⩽ ١٠٠	٣

فريق النسور

الكتلة (ك (كغم))	التكرار (ت)
٥٥ ⩽ ك < ٦٥	١
٦٥ ⩽ ك < ٧٥	٧
٧٥ ⩽ ك < ٨٥	١٣
٨٥ ⩽ ك ⩽ ١٠٠	٤

أ احسب الوسط الحسابي التقديري لكتل اللاعبين في كل فريق.

ب احسب المدى لكتل اللاعبين في كل فريق.

ج فسّر إجابتَي الجُزئيَّتَين (أ) و (ب).

٥) يبيّن الجدول التالي أطوال ٥٠ سلكًا تُستخدم في مختبر الفيزياء مُقرَّبة إلى أقرب سنتيمتر:

الطول (ل)	٢٦–٣٠	٣١–٣٥	٣٦–٤٠	٤١–٤٥	٤٦–٥٠
التكرار (ت)	٤	١٠	١٢	١٨	٦

أوجد الوسط الحسابي التقديري لأطوال الأسلاك.

٦) يبيّن الجدول التالي أعمار المُعلّمين في مدرسة ثانوية مُقرَّبة إلى أقرب سنة:

العمر (سنة)	٢٣–٣٠	٣١–٣٥	٣٦–٤٠	٤١–٤٥	٤٦–٥٠	٥١–٦٥
التكرار (ت)	٣	٦	١٢	١٥	٦	٧

احسب الوسط الحسابي التقديري لأعمار المُعلّمين.

انتبه وأنت تحسب مراكز الفئات. إذا كان عمر أحدهم أصغر بيوم من ٣١ سيبقى ضمن فئة ٢٣ – ٣٠. ما الفرق الناتج من ذلك؟

٥-٣ المِئينات والرُّبَيعات والمُخطّط الصندوقي

٥-٣-أ المِئينات والرُّبَيعات

المِئينات

أعلنت شركة مُتخصِّصة بالحسابات عن حاجتها إلى كادر من الموظّفين الجدد، وصمّمت اختبارًا لفحص قدرة المرشّحين على الإجابة عن أسئلة مُتعلّقة بالإحصاء، كُتبت على طلب التقديم العبارة التالية: 'سيتقدّم كل المرشحين الحاصلين على درجة أعلى من المئيني الثمانين للمقابلة'. ما معنى ذلك؟

الوسيط هو مثال مهم ومفيد على **المِئينات**، يقع في منتصف المسافة تمامًا لمجموعة بيانات مُرتَّبة، بحيث يكون ٥٠٪ من البيانات أقلّ من الوسيط، كما يشغل المئيني العاشر موقعًا بحيث تكون ١٠٪ من قيَم البيانات أقلّ منه، ويشغل المئيني الخامس والسبعون موقعًا بحيث تكون ٧٥٪ من قيَم البيانات أقلّ منه.

الرُّبَيعات

هناك مئينيان مُهمّان، هما **الرُّبَيع الأعلى** و**الرُّبَيع الأدنى**. وهما يقعان على بُعد ٧٥٪ و ٢٥٪ من مجموعة البيانات على الترتيب.

استخدم القواعد التالية لتقدّر موقع كل مئين ضمن مجموعة بيانات مُرتَّبة، عددها ن:

$ر_١$ = الرُّبَيع الأدنى = القيمة الواقعة في الموقع $\frac{١}{٤}$(ن + ١)

$ر_٢$ = الوسيط (تم تفصيل كيفية إيجاده سابقًا في هذه الوحدة).

$ر_٣$ = الرُّبَيع الأعلى = القيمة الواقعة في الموقع $\frac{٣}{٤}$(ن + ١)

إذا لم يكن موقع المئيني عددًا كاملاً، فاوجد الوسط الحسابي لزوج القيمتَين اللتَين تقعان على جانبَي الموقع، فإذا كان موقع الرُّبَيع الأدنى ٥,٢٥ مثلاً، أوجد الوسط الحسابي للقيمتَين الخامسة والسادسة.

لاحقًا

سوف تستخدم الرُّبَيعَين والمدى الرُّبَيعي عندما ترسم المُخطّط الصندوقي لاحقًا في هذه الوحدة.

المدى الرُّبَيعي

تعلّمت سابقًا أن المدى يعتبر مقياسًا إحصائيًّا لمعرفة انتشار البيانات أو ثباتها، وكذلك **المدى الرُّبَيعي**. ويكمن الفرق الوحيد بينهما في أن المدى الرُّبَيعي يتجنّب استخدام القيَم المُتطرِّفة في البيانات، وذلك بإيجاد الفرق بين الرُّبَيعين الأعلى والأدنى، وبالتالي تكون قد قست تشتُّت الـ ٥٠٪ الموجودة في مركز البيانات.

المدى الرُّبَيعي = $ر_٣ - ر_١$

إذا كان المدى الرُّبَيعي لمجموعة من البيانات أقلّ من المدى الرُّبَيعي لمجموعة بيانات أخرى، تكون المجموعة الأولى أكثر ثباتًا وأقلّ انتشارًا، وبذلك يعدّ المدى الرُّبَيعي إحدى الطرق المفيدة للمقارنة.

مثـــال ٥

أوجد الوسيط والرُّبَيع الأعلى والرُّبَيع الأدنى والمدى الربيعي لكل مجموعة من مجموعتَي البيانات التاليتَين:

أ ١٤ ١٠ ٨ ١٩ ١٥ ١٤ ٩

ب ١٣ ١٢ ٨ ٦ ١١ ١٤ ٨ ٥ ١ ١٠ ١٦ ١٢

الحــلّ:

أ البيانات المُرتَّبة هي:

٨ ٩ ١٠ ١٤ ١٤ ١٥ ١٩

الوسيط = $ر_٢$ = ١٤

$ر_١$ = ٩، $ر_٣$ = ١٥

المدى الرُّبَيعي = ١٥ − ٩ = ٦

بما أن عدد البيانات فردي، فإن الوسيط يقع في الموقع $\frac{(٧ + ١)}{٢} = ٤$

هناك سبع قيَم، لذا احسب

$\frac{١}{٤}(٧ + ١) = ٢$

و$\frac{٣}{٤}(٧ + ١) = ٦$

وهي أعداد كاملة، لذلك يقع الرُّبَيع الأدنى في الموقع الثاني والرُّبَيع الأعلى في الموقع السادس.

ب البيانات المُرتَّبة هي:

١ ٥ ٦ ٨ ٨ ١٠ ١١ ١٢ ١٢ ١٣ ١٤ ١٦

الوسيط = $ر_٢$ = $\frac{١٠ + ١١}{٢}$ = ١٠,٥

$ر_١$ = $\frac{٦ + ٨}{٢}$ = ٧

$ر_٣$ = $\frac{١٢ + ١٣}{٢}$ = ١٢,٥

∴ المدى الرُّبَيعي = ١٢,٥ − ٧ = ٥,٥

رتِّب قيَم البيانات تصاعديًّا.

لاحظ أن عدد قيَم البيانات (١٢) عدد زوجيّ، لتجد الوسيط، أوجد الوسط الحسابي للقيمتَين السادسة والسابعة.

لتحسب الرُّبَيعات يتوجّب عليك، أن تحسب القيَم الواقعة في الموقعَين $\frac{١}{٤}(١٢ + ١) = ٣,٢٥$

و$\frac{٣}{٤}(١٢ + ١) = ٩,٧٥$

لاحظ أن هاتَين القيَمتَين ليستا من الأعداد الكاملة، لذلك يكون الرُّبَيع الأدنى هو الوسط الحسابي للقيمتَين الثالثة والرابعة، والرُّبَيع الأعلى هو الوسط الحسابي للقيمتَين التاسعة والعاشرة.

مثــال ٦

تبيع شركتان بذور تبّاع الشمس، حيث أنتجت بذور الشركة (أ) على مدار سنة كاملة نباتات كان الوسيط لارتفاعها ٩٨ سم، والمدى الرُّبَيعي لارتفاعها ١٣ سم، وفي العام نفسه أنتجت بذور الشركة (ب) نباتات فكان الوسيط لارتفاعها ٩٥ سم والمدى الرُّبَيعي لارتفاعها ٤ سم. أي البذور ستشتري إذا رغبت في دخول منافسة للحصول على أطول نبات تبّاع الشمس؟ ولماذا؟

الحــلّ:

سوف تشتري بذورًا من الشركة (أ)، رغم أن بذور الشركة (ب) تنتج نباتات أكثر ثباتًا، لكنّك تريد الأطول منها، والبذور من الشركة (أ) تعطي نباتات أطول.

بذور الشركة (ب) أكثر ثباتًا لأن مداها الرُّبَيعي أقلّ.

مثــال ٧

يُبيّن مخطط الساق والورقة المزدوج التالي تركيز كولسترول البروتين الدهني منخفض الكثافة في الدم LDL (الكولسترول السيّئ) (مليغرام/ ديسيلتر) لدى ٧٠ شخصًا بالغًا، نصفهم من المُدخّنين، ونصفهم الآخر من غير المُدخّنين:

المدخّنون الورقة	الساق	غير المُدخّنين الورقة
	٩	٨ ٠
	١٠	٨ ٨ ٣ ١
٢	١١	٩ ٩ ٨ ٨ ٦ ٥ ٢
١ ٠	١٢	٩ ٩ ٨ ٧ ٧ ٠ ٠
٣ ٢ ٠	١٣	٩ ٦ ٥ ١ ١ ١
٦ ٥ ٣ ١	١٤	٤ ٢ ٢
٩ ٥ ٥ ٤ ٠	١٥	٨ ٢ ١
٩ ٨ ٧ ٤ ١ ٠	١٦	٦ ٥
٨ ٨ ٦ ٣ ٢	١٧	٣
٥ ٤ ٢ ٠	١٨	
٨ ٦ ١	١٩	
١	٢٠	
٥	٢١	

المفتاح

غير المدخّنين ٠ | ٩ = ٩٠

المدخّنون ١١ | ٢ = ١١٢

أ حدِّد الوسيط لكل مجموعة.

ب أوجد المدى لكل مجموعة.

ج حدِّد المدى الرُّبَيعي لكل مجموعة.

د يُعدّ مستوى كولسترول البروتين الدهني (السيّئ) مقبولاً عندما يكون أدنى من ١٣٠، ويكون عند الحد المُرتفع عندما يقع بين ١٣٠ و ١٦٠، ويبلغ الحد الخطر عندما يزيد على ١٦٠ (يحدث ذلك عند الكثير من الأشخاص ذوي الأوضاع الصحّية السيئة). استخدم هذه المقاييس ومُخطَّط الساق والورقة لتفسّر ما تقدّمه هذه البيانات.

الحــلّ:

أ وسيط غير المدخّنين = ١٢٨

وسيط المدخّنين = ١٦٤

البيانات مُرتَّبة وتحتوي كل مجموعة على ٣٥ قيمة في كل مجموعة. يقع الوسيط في الموقع ١٨ لأن $\frac{١}{٢}$ (٣٥ + ١) = ١٨

ب مدى مجموعة غير المدخّنين = ١٧٣ − ٩٠ = ٨٣

مدى مجموعة المدخّنين = ٢١٥ − ١١٢ = ١٠٣

ج المدى الرُّبَيعي لمجموعة غير المدخّنين

= $ر_٣ - ر_١$ = ١٤٢ − ١١٦ = ٢٦

المدى الرُّبَيعي لمجموعة المدخّنين

= $ر_٣ - ر_١$ = ١٨٠ − ١٤٥ = ٣٥

حدِّد موقع $ر_٣$، $ر_١$

بما أن $\frac{١}{٤}$ (٣٥ + ١) = ٩ فإن قيمة الرُّبَيع الأدنى هي القيمة التاسعة.

بما أن $\frac{٣}{٤}$ (٣٥ + ١) = ٢٧ فإن قيمة الرُّبَيع الأعلى هي القيمة السابعة والعشرون.

د تميل البيانات في مجموعة غير المدخّنين نحو المستوى الأدنى في مُخطّط الساق والورقة، ويقع أكثر من نصف القيَم في المستوى المقبول، مع وجود ثلاثة أشخاص فقط في مستوى الخطورة.

تبدو البيانات في مجموعة المدخّنين أكثر انتشارًا، حيث يوجد ثلاثة فقط في المستوى المقبول و ١٢ شخصًا عند مستوى الحد المرتفع و ٢٠ شخصًا عند مستوى الحد الخطر. نستنتج من ذلك أن لدى المدخّنين مستوى مُرتفِع من الكولسترول السيّئ، وبناء على ذلك لا يمكنك الاستنتاج باستخدام مجموعة واحدة فقط من البيانات.

يمكنك القيام ببحث علمي لدراسة الأوضاع الصحيّة في محيطك.

تمارين ٥-٣-أ

١) أوجد الوسيط والرُّبَيعات والمدى الرُّبَيعي لكل مجموعة من مجموعات البيانات التالية، موضِّحًا خطوات الحل:

أ ٥ ٨ ٩ ٩ ٤ ٥ ٦ ٩ ٣ ٦ ٤

ب ١٢ ١٤ ١٢ ١٧ ١٩ ٢١ ٢٣

ج ٤ ٥ ١٢ ١٤ ١٥ ١٧ ١٤ ٣ ١٨ ١٩ ١٨ ١٩ ١٤ ٤ ١٥

د ٤,٨ ٦,١ ٣,٤ ٤,٢ ٢,٥ ٢,٣ ٥,١ ٢,٤ ٣,١

هـ ١٦,٥ ١٢,٠ ٢١,٨ ١٧,٠ ١٣,٧ ١٤,٥ ١٨,٩ ١٦,٧ ١٤,٥ ١٩,٦ ١٤,٨ ١٣,٢

طبّق مهاراتك

حاولْ في كل تمرين أن تُفكِّر بما تدلّك عليه النتائج بخصوص الموقف الذي تُمثِّله.

٢) يصعد المصعد الكهربائي لمبنى تجاري من الطابق الأرضي إلى الطوابق العليا ١٥ مرة خلال ساعة واحدة. تُظهِر البيانات التالية عدد الأشخاص الذين ركبوا المصعد في كل مرة:

٥ ٧ ٥ ٨ ٤

٢ ٩ ٩ ٤ ٧

٦ ٤ ٦ ١٢ ٤

أوجد الوسيط والرُّبَيعات والمدى الرُّبَيعي لهذه البيانات.

٣) يُجري ماجد دراسة مسحية عن حركة السير في طريقه، حيث قام بتسجيل عدد السيّارات التي تمرّ أمام منزله كل يوم اثنين لمدة ثمانية أسابيع في فصل الصيف بين الساعة ٨:٠٠ و ٩:٠٠ صباحًا، ثم كرَّر العملية في فصل الشتاء. حصل ماجد على مجموعتَي البيانات التاليتَين:

الصيف: ١٨ ١٥ ١٩ ٢٥ ١٩ ٢٦ ١٧ ١٣

الشتاء: ١٢ ٩ ١٤ ١١ ١٣ ٩ ١٢ ١٠

أ أوجد الوسيط لعدد السيّارات في كل فصل.

ب أوجد المدى الرُّبَيعي لعدد السيّارات في كل فصل.

ج ماذا تلاحظ؟ فسِّر إجابتك.

مُساعَدة

فكّر بانتباه في القيود الممكنة قبل أن تجيب عن الجُزئيّة ج .

٤) يوجد في المدرسة ناديان للشطرنج: أحدهما للطلاب الذين تبلغ أعمارهم ١٤ عامًا أو أكثر (النادي (أ)) والآخر للطلاب الذين تبلغ أعمارهم ١٣ عامًا أو أقل (النادي (ب)). تعرض البيانات التالية عدد المباريات التي فاز بها كل لاعب من الناديين خلال العام الدراسي:

النادي (أ): ٢٣ ٣١ ١٢ ١٩ ٢٣ ١٣ ٢٤

النادي (ب): ١٩ ١٢ ١٣ ١٦ ١٨ ١٥ ١٨ ٢١ ٢٢

أ أوجد الوسيط لعدد المباريات في كل نادٍ.

ب أوجد المدى الرُّبَيعي لعدد المباريات في كل نادٍ.

ج أي نادٍ تعتقد أن أداء لاعبيه أكثر ثباتًا؟
استخدم إجاباتك عن الجُزئيَّتَين (أ) و (ب) لتوضيح إجابتك.

تفيد مُخطّطات الساق والورقة في تنظيم البيانات لغاية ٥٠ قيمة، لكنَّها عندما تتجاوز ذلك لا تعود ملائمة، وتحتاج إلى وقت أكثر؛ لذا نلجأ إلى المُخطّطات الصندوقية عند تلخيص مجموعات البيانات الكبيرة.

٥) تم اختبار استهلاك السيّارات للوقود (كم/ لتر) لـ ١٨ سيّارة جديدة عند القيادة داخل المدينة، وعلى الطريق السريع، وتم إنشاء مُخطَّط الساق والورقة المُزدوِج التالي:

استهلاك السيّارات للوقود (كم/ لتر)		
القيادة على الطريق السريع		القيادة داخل المدينة
الورقة	الساق	الورقة
٠	٨	
٠ ١ ٢ ٤	٩	
١ ١ ٣ ٥	١٠	
٢ ٣ ٨	١١	٩ ٥ ٥
٤ ٦ ٧	١٢	٧ ٢ ١ ١
١	١٣	٦ ٣
٢ ٥	١٤	٧ ٦ ٥
	١٥	٩ ٧ ٢
	١٦	١ ٠
	١٧	٤

المفتاح

٠ | ٨ = ٨,٠ كم/ لتر

١١ | ٥ = ١١,٥ كم/ لتر

أ أوجد مدى الكيلومترات لكل لتر من الوقود عند القيادة:
(١) داخل المدينة. (٢) على الطريق السريع.

ب أوجد الوسيط لاستهلاك الوقود عند القيادة:
(١) داخل المدينة. (٢) على الطريق السريع.

ج حدِّد المدى الرُّبَيعي لاستهلاك الوقود عند القيادة:

(١) داخل المدينة (٢) على الطريق السريع.

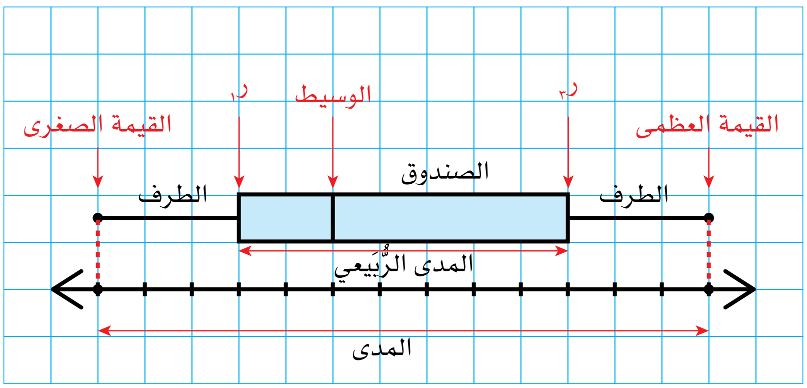
د قارن وفسّر النتائج التي حصلت عليها حول القيادة داخل المدينة والقيادة على الطريق السريع.

٥-٣-ب المُخطَّط الصندوقي

المُخطَّط الصندوقي مُخطَّط يبيّن توزيع مجموعة من البيانات، ويتمّ إنشاؤه باستخدام خمسة مقاييس إحصائية، هي: أصغر قيمة (الصغرى) وأكبر قيمة (العظمى) والرُّبَيع الأول والرُّبَيع الثالث (المدى الرُّبَيعي) والوسيط.

إنشاء المُخطَّط الصندوقي

الشكل التالي يوضِّح مكوِّنات المُخطَّط الصندوقي:



المُخطّط الصندوقي هو طريقة معيارية لعرض المدى والمدى الرُّبَيعي والوسيط.

مثــال ٨

تُبيّن مجموعة البيانات المُرتَّبة التالية كُتل ٢٠ طالبًا مُقرَّبة إلى أقرب كيلوغرام:

٤٨ ٥٢ ٥٤ ٥٥ ٥٥ ٥٨ ٥٨ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٦ ٦٧
٦٩ ٧٠ ٧٢ ٧٩

أنشئ المُخطَّط الصندوقي لتمثيل البيانات.

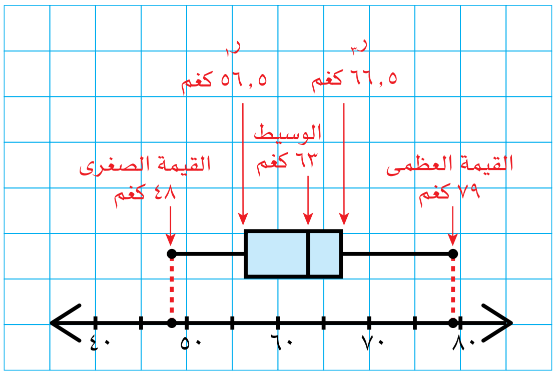
الحـــلّ:

القيمة الصغرى = ٤٨ كغم القيمة العظمى = ٧٩ كغم	يمكنك أن تقرأ القيمة العظمى والقيمة الصغرى من مجموعة البيانات.

الوسيط يساوي ٦٣ كغم.

$\text{ر}_{١} = \frac{٥٥ + ٥٨}{٢} = ٥٦,٥$ كغم

$\text{ر}_{٣} = \frac{٦٦ + ٦٧}{٢} = ٦٦,٥$ كغم



تتضمّن البيانات ٢٠ قيمة، لذا يقع الوسيط بين القيمتَين العاشرة والحادية عشرة. في هذه المجموعة من البيانات، اللتين تساوي كل منهما ٦٣

احسب الرُّبَيع الأدنى والرُّبَيع الأعلى ($\text{ر}_{١}$، $\text{ر}_{٣}$).

$\text{ر}_{١}$ هو الوسط الحسابي للقيمتَين الخامسة والسادسة، و $\text{ر}_{٣}$ هو الوسط الحسابي للقيمتَين الخامسة عشرة والسادسة عشرة.

ولكي ترسم المُخطَّط الصندوقي:

- ارسم خط أعداد مُقسّمًا إلى فترات مُتساوية، ممّا يسمح بإبراز القيمتَين العظمى والصغرى.
- حدّد موقع الوسيط والرُّبَيعين الأدنى والأعلى على خطّ الأعداد.
- ارسم صندوقًا مستطيل الشكل يكون أحد طرفَيه $\text{ر}_{١}$ والطرف الآخر $\text{ر}_{٣}$. ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\text{ر}_{١}$، $\text{ر}_{٣}$ داخل الصندوق لتبيّن موقع الوسيط.
- ارسم قطعتَين مستقيمتَين (من الطرفَين) من جهتَي ($\text{ر}_{١}$، $\text{ر}_{٣}$) إلى القيمة الصغرى والقيمة العظمى.

تُعدّ المُخطَّطات الصندوقية مفيدة جدًّا للمقارنة بين مجموعتَي بيانات أو أكثر؛ فعندما تريد أن تقارن بين مجموعتَي بيانات، ارسم المخطَّط الصندوقي لكل مجموعة بحيث يكون أحدهما فوق الآخر على نفس خط الأعداد.

مثــال ٩

يبيّن الجدول التالي أطوال ١٠ إناث أعمارهن ١٣ سنة، وأطوال ١٠ ذكور أعمارهم ١٣ سنة (مُقرَّبة إلى أقرب سم):

الإناث	١٣٧	١٣٣	١٤١	١٣٧	١٣٨	١٣٤	١٤٩	١٤٤	١٤٤	١٣١
الذكور	١٤٥	١٤٢	١٤٦	١٣٩	١٣٨	١٤٨	١٣٨	١٤٧	١٤٢	١٤٦

أنشئ المخطط الصندوقي لكل مجموعة من البيانات، وقارن بين المدى الرُّبَيعي لكل منهما.

الحـــلّ:

أوّلاً، رتِّب قيَم البيانات ترتيبًا تنازليًّا. ثم احسب المقاييس الإحصائية الخمسة لكل مجموعة من البيانات.

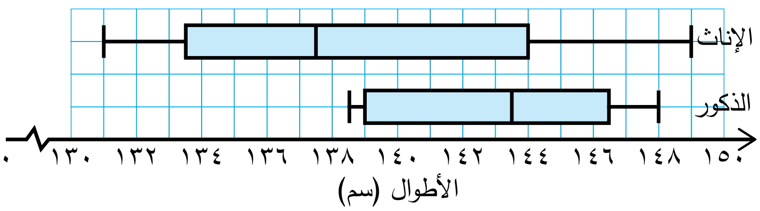
ر٣: (١٤٤ + ١٤٤) ÷ ٢ = ١٤٤   الوسيط: (١٣٨ + ١٣٧) ÷ ٢ = ١٣٧,٥   ر١: (١٣٤ + ١٣٣) ÷ ٢ = ١٣٣,٥

الإناث: ١٤٩ (القيمة العظمى) ١٤٤ ١٤٤ ١٤١ ١٣٨ ١٣٧ ١٣٧ ١٣٤ ١٣٣ ١٣١ (القيمة الصغرى)

الذكور: ١٤٨ (القيمة العظمى) ١٤٧ ١٤٦ ١٤٦ ١٤٥ ١٤٢ ١٤٢ ١٣٩ ١٣٨ ١٣٨ (القيمة الصغرى)

(١٤٧ + ١٤٦) ÷ ٢ = ١٤٦,٥   (١٤٥ + ١٤٢) ÷ ٢ = ١٤٣,٥   (١٣٩ + ١٣٨) ÷ ٢ = ١٣٨,٥

ارسم خط أعداد وقسّمه بحيث تظهر القيَمتان العُظمى والصغرى. ارسم المُخطَّطَين وسمِّهما لتُميِّز بينهما.

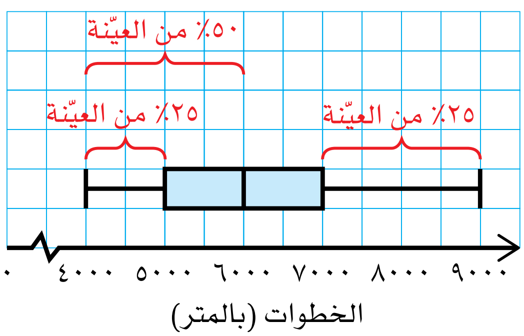


المدى الرُّبَيعي للإناث (١٠ سم) أكبر ممّا هو للذكور (٧ سم) الأمر الذي يعني أن بيانات الإناث أكثر انتشارًا وتغيُّرًا.

تفسير المُخطَّط الصندوقي

تفسيرك للمُخطَّط الصندوقي يعني أن تُفكّر في المعلومات التي يوفِّرها لك عن مجموعة البيانات.

يُبيّن المُخطَّط الصندوقي التالي نتائج دراسة مسحية عن عدد الخطوات التي يمشيها مجموعة من الشباب كل يوم، وهم يحملون أجهزة تتبُّع اللياقة البدنية:



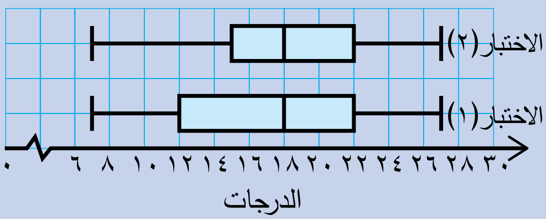
يُبيّن المُخطَّط الصندوقي ما يلي:

- تتراوح عدد الخطوات بين ٤٠٠٠ و٩٠٠٠ خطوة كل يوم.
- بلغ الوسيط لعدد الخطوات ٦٠٠٠ خطوة كل يوم.
- مشى ٥٠٪ من الشباب ٦٠٠٠ خطوة أو أقلّ كل يوم (البيانات الأقلّ من قيمة الوسيط).

- مشى ٢٥٪ من الشباب ٥٠٠٠ خطوة أو أقلّ كل يوم (الطرف الأدنى يُمثّل أدنى ٢٥٪ من البيانات).
- مشى ٢٥٪ من الشباب أكثر من ٧٠٠٠ خطوة كل يوم (الطرف الأعلى يُمثّل أعلى ٢٥٪ من البيانات).
- وُزِّعت البيانات بانتظام، لأن الوسيط يقع في مُنتصف الصندوق (أي على بُعدَين مُتساويَين من ر$_{١}$، ر$_{٣}$).

مثــال ١٠

يبيّن المخطط الصندوقي التالي درجات تحصيل نفس المجموعة من الطلبة في اختبارَين مختلفَين، بحيث أُجري الاختبار الثاني بعد مرور أسبوعَين على الاختبار الأول:



قارن بين أداء الطلبة في الاختبارَين، علمًا بأن الدرجة الكليَّة للاختبارين ٣٠ درجة.

الحــلّ:

وسيط الاختبارين هو نفسه، لذلك حصل الطالب الذي يقع في وسط البيانات على نفس الدرجة في الاختبارَين.

المدى الربيعي في الاختبار (١) أكبر، مما يشير إلى أن الدرجات كانت أكثر انتشارًا.

كانت أعلى الدرجات وأدناها متساوية في الاختبارَين. أي أن الدرجات تراوحت من ٧ إلى ٢٧، وبلغ الفرق ٢٠ درجة.

قيمة ر$_{٣}$ متساوية في الاختبارَين. يعني ذلك أن ٧٥٪ من الطلبة حصلوا على ٢٢ أو أقل في الاختبارَين وهذا يعني أن ٢٥٪ من الطلبة فقط حصلوا على الدرجة ٢٢ أو أكثر.

قيمة ر$_{١}$ في الاختبار الأول تساوي ١٢، يعني ذلك أن ٧٥٪ من الطلبة حصلوا على درجة ١٢ أو أكثر ولكن في الاختبار الثاني ارتفعت قيمة ر$_{١}$ من ١٢ إلى ١٥، وهذا يعني أن ٧٥٪ من الطلبة قد حصلوا على الدرجة ١٥ أو أكثر في الاختبار الثاني، وهذا يدل على ان أداء الطلبة في الاختبار الثاني كان أفضل من أدائهم في الاختبار الأول.

اكتب تفسيرًا واحدًا على الأقلّ مستخدمًا الوسيط، وتفسيرًا آخر مستخدمًا المدى الرُّبَيعي.

تمارين ٥-٣-ب

١) سجَّل سامي كتل خمسة عشر كيسًا مختلفًا من الفستق، وعرضها (مُقرَّبة إلى أقرب غرام) في مجموعة البيانات التالية:

١٤٧   ١٥٠   ١٥٢   ١٥٠   ١٥٠   ١٤٨   ١٥١   ١٤٦

١٤٩   ١٥١   ١٤٨   ١٤٦   ١٥٠   ١٤٥   ١٤٩

أنشئ المُخطَّط الصندوقي لتعرض بيانات كتل أكياس الفستق.

٢) أنشئ المُخطَّط الصندوقي لمجموعة من البيانات علمًا بأن:

المدى: ٧٦ − ٢٨ = ٤٨

ر$_{١}$ = ٤١,٥، ر$_{٢}$ = ٤٦,٥، ر$_{٣}$ = ٥٣,٥

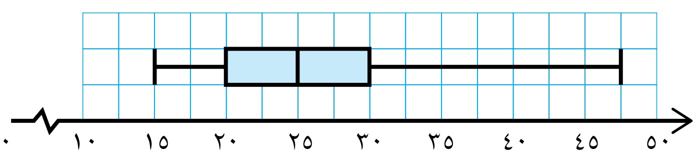
٣) يُبيّن الجدول التالي الدرجات التي حصلت عليها مجموعة مكوَّنة من ١٠ طلاب في ثلاثة اختبارات متتالية:

الاختبار (١)	٣٤	٤٥	٦٧	٨٧	٦٥	٥٦	٣٤	٥٥	٨٩	٧٧
الاختبار (٢)	١٩	٤٥	٨٨	٧٥	٤٥	٨٨	٦٤	٥٩	٤٩	٧٢
الاختبار (٣)	٧٦	٣٢	٦٧	٤٥	٦٥	٤٥	٦٦	٥٧	٧٧	٥٩

أ) أنشئ ثلاثة مُخطَّطات صندوقية على خط الأعداد نفسه، لتعرض هذه المجموعات من البيانات.

ب) استخدم المُخطَّطات الصندوقية لتُقارِن بين أداء الطلبة في الاختبارات الثلاثة.

٤) يُبيّن المُخطَّط الصندوقي التالي المسافة (بالكيلومتر) التي يقطعها عدد من المُعلّمين يوميًّا للوصول إلى مدارسهم:



المسافة إلى المدرسة (كم)

أ) ما الوسيط للمسافة التي يقطعها المُعلّمون للوصول إلى مدارسهم؟

ب) ما أطول مسافة يقطعها أحد المُعلّمين للوصول إلى مدرسته؟

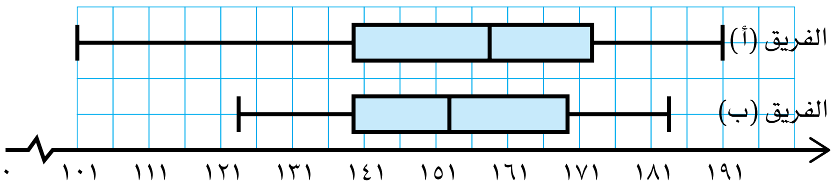
ج) ما النسبة المئوية للمُعلّمين الذين يقطعون مسافة ٣٠ كم أو أقلّ، للوصول إلى مدارسهم؟

د) ما النسبة المئوية للمُعلّمين الذين يقطعون مسافة تتراوح بين ١٥ و ٢٥ كيلومترًا للوصول إلى مدارسهم؟

هـ) ما المدى الرُّبَيعي لمجموعة البيانات؟ إلى ماذا يدل؟

و) إلى ماذا يدلّ موقع الوسيط في المخطَّط الصندوقي بخصوص توزيع البيانات؟

٥) سجّل أعضاء فريقَين رياضيَّين النقاط التي حصلوا عليها في إحدى الألعاب الرياضية، وأنشأوا المخطَّط الصندوقي لنتائج كل منهما:



أ ما المدى الرُّبَيعي للفريق (أ)؟

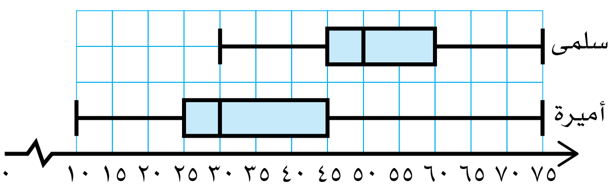
ب ما المدى الرُّبَيعي للفريق (ب)؟

ج أي الفريقَين كانت نقاطه أكثر ثباتًا؟

د لكي يستمر الفريق في اللعبة، عليه تسجيل ١٢٠ نقطة على الأقلّ. أي الفريقَين أكثر ترجيحًا لبقائه في اللعبة؟

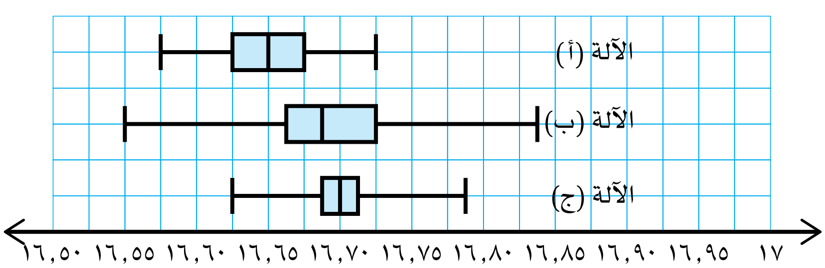
هـ أي الفريقَين حصل على أعلى النقاط؟ فسِّر إجابتك.

٦) يُبيّن المُخطَّط الصندوقي التالي الزمن (بالدقائق) الذي تُنجِز فيه سلمى وأميرة واجباتهما المنزلية كل يوم، على مدار فصل دراسي كامل. إلى ماذا يدلّك المُخطَّط الصندوقي بخصوص سلمى وأميرة؟



طبّق مهاراتك

٧) يُشغّل معمل ثلاث آلات تُنتِج مسامير خاصّة بالطائرات. يجب أن يكون قطر المسمار ١٦,٨٥ مم (مع السماح بخطأ مقداره $^+$٠,١ مم أو $^-$٠,١ مم). تمّ خلال جولة تفقُّدية للجودة، اختبار عيّنة مكوَّنة من ٥٠ مسمارًا أنتجتها كل آلة. تُبيّن المُخطَّطات الصندوقية التالية بيانات الاختبار:



اكتب تقريرًا تقارن فيه بين إنتاج الآلات الثلاث مستخدمًا المقاييس الإحصائية المبيّنة في المُخطّطات الصندوقيّة.

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- تُستخدَم المقاييس الإحصائية (المنوال والوسيط والوسط الحسابي) في المقارنة بين مجموعة من البيانات.
- هناك نوعان أساسيان من البيانات العددية: البيانات المُنفصِلة والبيانات المُتّصلة.
- يمكن تسجيل البيانات المُنفصِلة أو تنظيمها في جداول تكرارية.
- يمكن تسجيل البيانات المُتّصلة أو تنظيمها في فئات.
- يتأثّر الوسط الحسابي بالقيَم المُتطرّفة.
- يُعدّ الوسيط أقلّ تأثُّرًا بالقيَم المُتطرّفة.
- يُعدّ الوسيط مثالاً خاصًّا على المئينات.
- يقع الرُّبَيع الأدنى $ر_{١}$ على بُعد ٢٥٪ من البيانات.
- يقع الرُّبَيع الأعلى $ر_{٣}$ على بُعد ٧٥٪ من البيانات.
- يُعطي المدى الرُّبَيعي ($ر_{٣}$ − $ر_{١}$) مقياسًا لمدى انتشار أو ثبات البيانات وهو مقياس لانتشار الـ ٥٠٪ المركزية من البيانات.
- يُبيِّن المُخطّط الصندوقي توزيع مجموعة البيانات باستخدام خمس قيَم، هي: القيمة العظمى والقيمة الصغرى والرُّبَيع الأدنى والرُّبَيع الأعلى والوسيط.

يجب أن تكون قادرًا على:

- إيجاد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى لمجموعة بيانات.
- إيجاد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى لبيانات في جداول تكرارية ومُخطّط الساق والورقة.
- إيجاد الوسط الحسابي التقديري لبيانات مُجمَّعة.
- إيجاد الفئة الوسيطية لبيانات مُجمَّعة.
- إيجاد الفئة المنوالية لبيانات مُجمَّعة.
- مقارنة مجموعتَي بيانات باستخدام المقاييس الإحصائية.
- إيجاد الرُّبَيع الأدنى والرُّبَيع الأعلى لبيانات مُرتَّبة ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا.
- إيجاد المدى الرُّبَيعي لمجموعة بيانات.
- إنشاء المُخطّط الصندوقي وتفسيره واستخدامه للمُقارنة بين مجموعتَي بيانات أو أكثر.

تمارين نهاية الوحدة

١) أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى لكل مجموعة من مجموعات البيانات التالية:

أ ٨ ٧ ١ ٢ ٥ ٨ ٤

ب ٢١ ٢٧ ٣٢ ٣٤ ٣٠ ٢٠ ٢١ ٢٣

ج ٠,٩ ١,٣ ١,٨ ١,٢ ١,٢ ١,٨ ١,٥ ٠,٩ ١,٢ ١,٣

٢) يبيّن الجدول التكراري التالي أعمار أطفال في حافلة مدرسية:

العمر بالسنوات	التكرار
١١	١٦
١٢	٢٥
١٣	١٧
١٤	١٩
١٥	٢٣

أ ما المنوال لأعمار الأطفال؟

ب ما المدى لأعمار الأطفال؟

ج ما الوسيط لأعمار الأطفال؟

د ما الوسط الحسابي لأعمار الأطفال؟

٣) تتألَّف مجموعة بيانات من أربعة أعداد، إذا علمتَ أن منوالها ٧ ووسيطها ٧,٥ ووسطها الحسابي ٨، فما هي هذه الأعداد الأربعة؟

٤) يُبيّن الجدول التالي ارتفاع (ع (سم)) بعض الأزهار:

الارتفاع (ع (سم))	١٠ < ع ⩽ ١٥	١٥ < ع ⩽ ٢٠	٢٠ < ع ⩽ ٢٥	٢٥ < ع ⩽ ٣٠	٣٠ < ع ⩽ ٣٥
التكرار	٣	٨	١٠	١٣	٦

أ ما الفئة المنوالية لارتفاع الأزهار؟

ب في أي فئة يقع الوسيط؟

ج احسب الوسط الحسابي التقديري لارتفاع الأزهار.

٥) تُبيّن مجموعة البيانات التالية عدد الطلبة الذين حضروا فترة التدريب في رياضة كرة السلّة خلال ستة أيام:

١٢ ١٥ ٨ ١٤ ١٣ ١٣

احسب:

أ الوسيط

ب الرُّبَيع الأدنى

ج الرُّبَيع الأعلى

د المدى

هـ المدى الرُّبَيعي

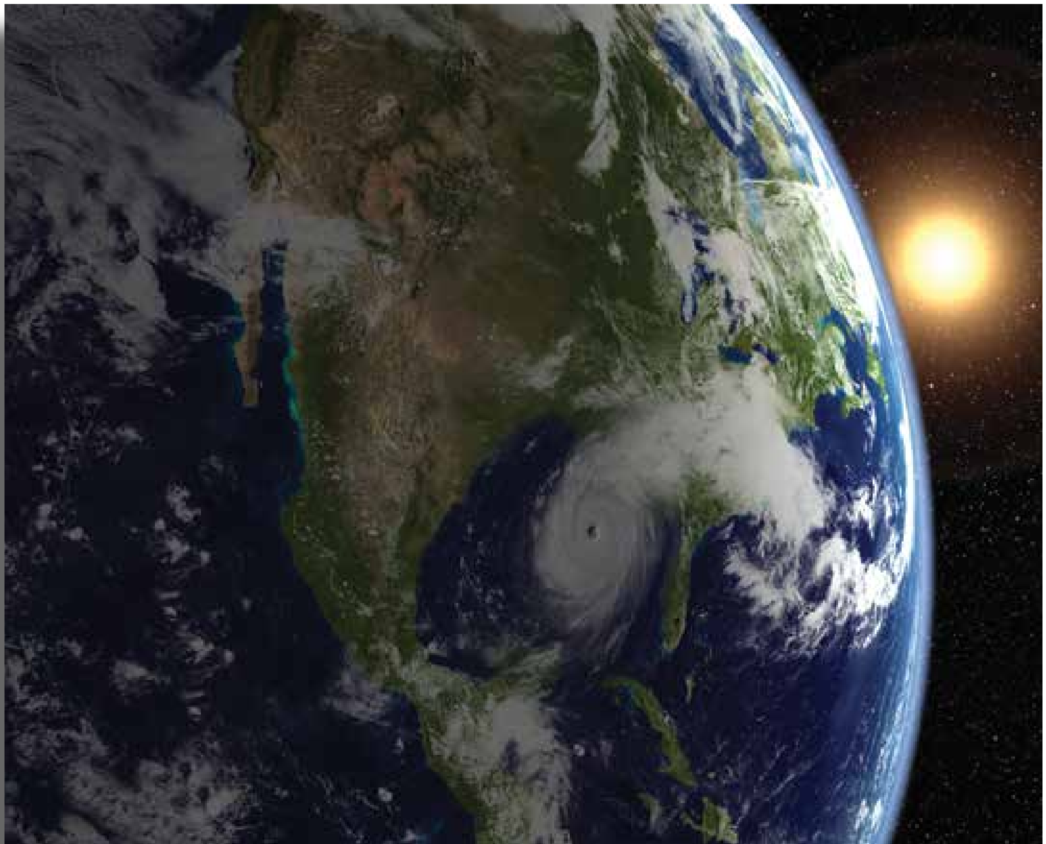
الوحدة السادسة: التناسُب

المُفردات

- التناسُب الطردي
  Direct proportion
- التناسُب العكسي
  Inverse proportion
- ثابت التناسُب
  Constant of proportionality

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تستخدم الجبر للتعبير عن التناسُب الطردي والتناسُب العكسي.



تُعدّ الشمس المصدر الرئيسي للضوء في نظامنا الشمسي.

تختلف كمّية الضوء التي تصل إلى كوكب ما من الشمس باختلاف بعده عنها، غير أنّ العلاقة بين كمّية الضوء والمسافة ليست علاقة بسيطة، فإذا كانت المسافة التي تفصل بين الشمس وكوكب ما تساوي ثلاثة أمثال المسافة بينها وبين كوكب آخر، فإن كمّية الضوء التي تصل إلى الكوكب الثاني تساوي تُسع كمّية الضوء التي تصل إلى الكوكب الأوّل، ويُعدّ ذلك مثالًا على التناسُب العكسي مع مُربَّع المسافة.

سوف تكتشف في هذه الوحدة علاقات مُشابِهة تظهر في مواقف من الحياة اليومية، مثل أمواج الراديو والرادار والتسوُّق المُتكرِّر.

٦-١ التناسُب الطرديّ والتناسُب العكسيّ في الحدود الجبرية

مُساعَدة

قد يُطلَب إليك أن تجد معادلة التناسُب، ثم تجد المجهول بحلّ تلك المعادلة. راجع كيفية حلّ المعادلات.

التناسُب الطردي

يكون التناسُب بين مُتغيّرَين طرديًّا إذا كانت لقيمتَيهما النسبة نفسها دائمًا.

إذا كان المُتغيّران هما س، ص فإنّ علاقة التناسُب بينهما تُكتب في صورة س $\propto$ ص

وتُقرأ على النحو التالي: س تتناسب طرديًّا مع ص.

س $\propto$ ص تعني أن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ مقدار ثابت، أي أن س = ث ص، حيث ث مقدار ثابت يسمّى **ثابت التناسب**.

إذا كان المقدار الثابت يساوي ٢، فإن س = ٢ص، وهذا يعني أن قيمة س تساوي ضعف قيمة ص مهما تكن قيمة ص.

ويمكنك أن تكتب ذلك في صورة $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ٢

التناسُب العكسي

يكون التناسُب بين مُتغيّرَين عكسيًّا إذا كان ناتج ضربهما ثابتًا. إذا كان المُتغيّران هما س، ص، فإن س ص = ث، حيث ث مقدار ثابت.

هذا يعني أن س تتناسب عكسيًّا مع ص

يمكن كتابة س ص = ث في صورة س = $\frac{\text{ث}}{\text{ص}}$

ويمكن التعبير عن أن س تتناسب عكسيًّا مع ص في صورة س $\propto$ $\frac{١}{\text{ص}}$

توصف العلاقة بين الكمّيات عادة بطريقة لفظية، وقد تحتاج إلى إضافة الرمز $\propto$ كما في المثالَين ١ و ٢. لا تُستخدَم كلمة 'طرديًّا' دائمًا. فإذا كان التناسُب بين كمّيتَين عكسيًّا فتجدُر الإشارة إلى ذلك. قد تُصادفك أحيانًا عبارة 'أ تتغيّر مع ن' بدلاً من عبارة 'أ تتناسب مع ن'.

مثــال ١

إذا علمت أن ص تتناسب طرديًّا مع س^٣ وأن ص = ٣٢ عندما س = ٢:

أ اكتب هذه العلاقة في صورة معادلة.

ب أوجد قيمة ص عندما س = ٥

الحــلّ:

أ	ص $\propto$ س^٣ يعني (في صورة معادلة) أن ص = ث س^٣ عندما س = ٢، فإن س^٣ = ٢^٣ = ٨ ∴ ٣٢ = ٨ث ∴ ث = $\frac{٣٢}{٨}$ = ٤، ص = ٤س^٣	اكتب العلاقة في صورة تناسُب، ثم في صورة معادلة، مُستخدِمًا الثابت ث. ثم عوّض عن القيَم المعطاة لتجد قيمة الثابت ث.
ب	إذا كانت س = ٥، فإن ص = ٤س^٣ = ٤ × ٥^٣ = ٥٠٠	عوّض عن قيمة س المعطاة لتحصل على الناتج المطلوب.

مثـــال ٢

إذا علمت أن ف تتناسب عكسيًّا مع $د^٢$ وأن ف = ١٢ عندما د = ٣، أوجد قيمة ف عندما د = ٤

الحـــلّ:

ف ∝ $\frac{١}{د^٢}$ يعني (في صورة معادلة) أن ف = $\frac{ث}{د^٢}$

عندما د = ٣، ف = ١٢، ١٢ = $\frac{ث}{د^٢}$ = $\frac{ث}{٩}$

∴ ث = ١٢ × ٩ = ١٠٨، ف = $\frac{١٠٨}{د^٢}$

عندما د = ٤، فإن ف = $\frac{١٠٨}{د^٢}$ = $\frac{١٠٨}{٤^٢}$ = ٦,٧٥

بما أنّ ف تتناسب عكسيًّا مع مُربَّع د، لذا نحتاج إلى ث على $د^٢$

مثـــال ٣

يبيّن الجدول التالي بعض القيَم المُتناظِرة لقيَم ل، م. هل التناسُب بين قيَم ل، م طرديّ؟

ل	٢,٨	٧	١١,٢	١٦,٨
م	٢	٥	٨	١٢

الحـــلّ:

قارنْ بين كلّ زوج من القيَم:

$\frac{٢,٨}{٢}$ = ١,٤، $\frac{٧}{٥}$ = ١,٤، $\frac{١١,٢}{٨}$ = ١,٤، $\frac{١٦,٨}{١٢}$ = ١,٤

جميع النسب متساوية.

لذلك تكون القيَم مُتناسِبة طرديًّا، ل = ١,٤ م.

إذا كانت القيَم مُتناسِبة طرديًّا، فإن ل = ث م، وهذا يعني أن $\frac{ل}{م}$ = ث

في هذه الحالة، ث = ١,٤

مثـــال ٤

س	٣	٤	٥	٦
ص	١٢			

أكمل الجدول، حيث:

أ) ص ∝ س

ب) ص ∝ $\frac{١}{س}$

الحـــلّ:

أ ص = ث س ١٢ = ٣ ث ∴ ث = ٤، ص = ٤س	اكتب العلاقة في صورة معادلة. حلّ المعادلة لتجد قيمة ث. عوّض عن قيمة ث في المعادلة الأصلية.

س	٣	٤	٥	٦
ص	١٢	١٦	٢٠	٢٤

ب ص ∝ $\frac{١}{س}$، هذا يعني أنّ س ص = ث ∴ ث = ٣ × ١٢ = ٣٦، ص = $\frac{٣٦}{س}$	اكتب العلاقة في صورة معادلة. استخدم قيمة س وقيمة ص المُناظِرة لها لتحلّ المعادلة وتجد قيمة ث.

س	٣	٤	٥	٦
ص	١٢	٩	٧,٢	٦

مثـــال ٥

تُحدَّد سرعة الماء في نهر بمقياس ضغط الماء.
تتناسب السرعة ع (م/ ثانية) طرديًّا مع الجذر التربيعي للارتفاع ل (م) الذي يصل إليه الماء في المقياس. إذا علمت أن ل = ٣٦ عندما ع = ٨، احسب قيمة ع عندما تكون قيمة ل = ١٨

الحـــلّ:

ع ∝ $\sqrt{ل}$ يعني أن ع = ث$\sqrt{ل}$ حيث ث ثابت التناسب.
ل = ٣٦ عندما ع = ٨، فيكون ٨ = ث $\sqrt{٣٦}$
وهذا يعني أن ث = $\frac{٤}{٣}$، وتكون الصيغة التي تربط ع مع ل هي ع = $\frac{٤\sqrt{ل}}{٣}$.
عندما ل= ١٨ فإن ع = $\frac{٤\sqrt{١٨}}{٣}$ = ٥,٦٦ (مُقرّبة إلى أقرب عدد مُكوّن من ٣ أرقام معنوية)

لم يسبق لك أن تعرّفتَ على التناسُب الطردي مع الجذر التربيعي، لكنّه يعمل بالطريقة نفسها التي تعلّمتها.

تمارين ٦-١

١) اكتب معادلة تعبّر عن ص بدلالة س في كلّ ممّا يلي، علمًا بأن ص تتناسب عكسيًّا مع س:

أ ص = ٠,٢٢٥ عندما س = ٢٠

ب ص = ١٢,٥ عندما س = ٥

ج ص = ٥ عندما س = ٠,٤

د ص = ٠,٤ عندما س = ٠,٧

هـ ص = ٠,٦ عندما س = ٨

قد تُصادف أحيانًا كلمة 'يتغيّر' مكتوبة بدلاً من عبارة 'يتناسب طرديًّا مع'. وبالمثل، إذا كانت ص $\propto \frac{١}{س}$، فإن 'ص تتغيّر عكسيًّا مع س'.

٢) إذا علمت أن ص = ٨٠ عندما س = ٤، وأن ص تتناسب عكسيًّا مع $س^٣$، فأوجد:

أ ثابت التناسُب.

ب قيمة ص عندما س = ٨

ج قيمة ص عندما س = ٦

د قيمة س عندما ص = ٢٤

٣) إذا علمت أن ص تتناسب عكسيًّا مع $س^٢$، فأكمل الجدول التالي:

س	٠,١	٠,٢٥	٠,٥	
ص			١	٦٤

٤) إذا علمت أن ص تتناسب عكسيًّا مع $\sqrt{س}$، فأكمل الجدول التالي:

س	٢٥	١٠٠		
ص	١٠		٢٦	٥٠

٥) س، ص متناسبتان. ص = ٥٠ عندما س= ٢٠. أوجد قيمة ثابت التناسب (ث) إذا كانت:

أ ص $\propto$ س

ب ص $\propto \frac{١}{س}$

ج ص $\propto س^٢$

٦) إذا علمت أن م = ٣٦ عندما ر = ٣، وأن م تتناسب طرديًّا مع $ر^٢$، فأوجد قيمة م عندما ر = ١٠

٧) إذا علمت أن ل = ١٠٠ عندما د = ٢، وأن ل تتناسب عكسيًّا مع $د^٣$، فأوجد قيمة ل عندما د = ٥

٨) يُبيِّن الجدول التالي بعض القيَم المُتناظرة لـ (ف)، (ش). هل (ف)، (ش) مُتناسِبتان عكسيًّا؟ برِّر إجابتك.

ف	٢	٥	٨	١٢
ش	٧٥	٣٠	٢٠	١٥

٩) يمرّ تيار كهربائي (ت) خلال مقاومة (م)، بحيث تتناسب (ت) عكسيًّا مع (م)، إذا علمت أن ت = ٥ عندما م = ٣، فأوجد قيمة ت عندما م = ٠,٢٥

١٠) يُبيِّن الجدول التالي القيَم المُتناظِرة لـ (ق)، (ت):

ق	٢	٦	١٠
ت	٠,٤	١٠,٨	٥٠

أي العبارات الآتية صحيحة؟

أ ت $\propto$ ق

ب ت $\propto$ ق^{٢}

ج ت $\propto$ ق^{٣}

١١) يستغرق طلاء جدار أحد الأبنية ١٠ ساعات إذا نفّذه ٤ عُمّال. كم سيستغرق طلاؤه إذا نفّذه ٨ عمّال بالوتيرة نفسها؟

١٢) تبيَّن في تجربة صناعية أن القوة (ق) اللازمة لهدم عمود من الخرسانة تتناسب عكسيًّا مع طول العمود (ل). فإذا لزمنا ٥٠٠٠٠ نيوتن لهدم عمود خرسانة طوله ٢ متر، فكم نيوتن يلزمنا لهدم عمود طوله ٦ أمتار؟

١٣) اكتشف طاقم الغوّاصة أن درجة حرارة الماء ($^{\circ}$س) تتغيّر عكسيًّا مع عمق الماء الذي تبلغه الغوّاصة (بالكيلومترات). فإذا كانت درجة الحرارة ٦$^{\circ}$س عندما كان الطاقم على عمق ٤ كم،

أ فكم ستكون درجة حرارة الماء على عمق ١٢ كم؟

ب ما العمق الذي يجب أن تصل إليه الغوّاصة لتكون درجة حرارة الماء $^{-}$١$^{\circ}$س؟

١٤) إذا علمت أن (ف) تتناسب طرديًّا مع (م)، وتتناسب عكسيًّا مع (ن)، وكانت ف = ٢٤ عندما م = ٣، ن = ٢، فأوجد ف عندما م = ٥، ن = ٨

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- تُستخدَم العبارات الجبرية للتعبير عن التناسُب الطردي والتناسُب العكسي، وحلّ مسائل مُرتبِطة بهذَين المفهومَين. رمز التناسُب هو $\propto$.

يجب أن تكون قادرًا على:

- حلّ مسائل عن التناسُب الطردي والتناسُب العكسي باستخدام الطرق الجبرية.

تمارين نهاية الوحدة

١) تحمل شاشة الكمبيوتر أو شاشة التلفاز عددًا يدل على قياسها، حيث تتناسب مساحة الشاشة طرديًّا مع مُربَّع القياس. فإذا كانت مساحة شاشة جهاز قياسه ١٠٠ تساوي ٤٢٠٠ سم^{٢}:

أ ما مساحة شاشة جهاز قياسه ١٢٠؟

ب ما قياس جهاز تبلغ مساحة شاشته ٧٠٩٨ سم^{٢}؟

٢) يتناسب الزمن اللازم لبناء جدار عكسيًّا مع عدد العمال، فإذا استغرق بناء جدار ما ٦ أيام على يد اثنَين من العمّال، فكم يومًا سيستغرق بناء جدار مُماثل له على يد ٣ عمّال؟

٣) تتناسب المسافة التي تقطعها سيّارة بسرعة ثابتة طرديًّا مع الزمن الذي تستغرقه لذلك. فإذا قطعت مسافة ٥٠٤ كم في ٦ ساعات، فكم كيلومترًا ستقطع في ٧ ساعات؟

٤) يتناسب زمن رحلة ما عكسيًّا مع السرعة، فإذا استغرقت رحلة ما ٤ ساعات بسرعة ٥٠ كم/ ساعة، فكم ساعة ستستغرق الرحلة إذا كانت سرعة المركبة ٨٠ كم/ ساعة؟

٥) تتناسب المسافة التي يقطعها حجر سقط من ارتفاع ما طرديًّا مع مُربَّع الزمن.
فإذا سقط الحجر وقطع مسافة ٢٠ مترًا في ٢ ثانية:

أ ما المسافة التي يقطعها الحجر في ٣ ثوانٍ؟

ب ما الزمن الذي يستغرقه الحجر ليقطع مسافة ٢٠ سم؟

٦) تُقاس سرعة حجر يسقط من ارتفاع ما بوحدة م/ ثانية، وتتناسب هذه السرعة طرديًّا مع الجذر التربيعي للمسافة التي يقطعها بالأمتار. فإذا قطع الحجر مسافة ١٠٠ م عند سقوطه من ارتفاع ما، وكانت سرعته ٤٤ م/ ثانية، فكم ستكون سرعته بعد مرور ٢٥ ثانية على سقوطه؟

الوحدة السابعة: المزيد من التمثيلات الإحصائية

الشكل المبيّن أعلى شاشة آلة التصوير الرقمية يعدّ نوعًا من المُدرّجات التكرارية، وهو يُبيّن توزيع الضوء والظل في الصورة. تبيّن القمّتان أن الصورة (العصفور) قاتمة.

جمعت في السابق مجموعات مختلفة من البيانات وقمت بتنظيمها وتلخيصها وعرضها مستخدمًا التمثيل بالمخطّطات الدائرية والأعمدة البيانية والخطوط البيانية، وفي هذه الوحدة ستتعامل مع بيانات عددية (مجموعات من البيانات تكون فيها الفئات عددية) لتتعلّم كيف ترسم مخطّطات لتوزيعات تكرارية تسمّى المُدرّج التكراري ومنحنيات التكرارات التراكمية.

يفيد المُدرّج التكراري في مشاهدة الأنماط ضمن مجموعات البيانات العددية الكبيرة، كما يتيح لك شكل التمثيل البياني رؤية موقع معظم القياسات ومدى انتشارها.

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- ترسم مخطّط الانتشار لبيانات بمُتغيّرَين.
- تُحدّد ما إذا كان الارتباط بين مُتغيّرَين موجبًا أو سالبًا.
- تُقرّر ما إذا كان الارتباط بين مُتغيّرَين قويًا أو ضعيفًا.
- ترسم المستقيم الأفضل تمثيلًا.
- تستخدم المستقيم الأفضل تمثيلًا لإجراء التوقّعات.
- تُقرّر ثبات التوقّعات التي أجريتها.
- تُميّز الأخطاء الشائعة الناتجة من مُخطّطات الانتشار.
- تنشئ مُدرّجًا تكراريًّا بفئات متساوية وتستخدمه.
- تنشئ مُدرّجًا تكراريًّا بفئات غير متساوية وتستخدمه.
- ترسم جداول تكرارية تراكمية.
- تستخدم الجداول لترسم مخطّطات تكرارية تراكمية.
- تُحدّد الفئة المنوالية في توزيع تكراري.

المُفردات

- الارتباط Correlation
- بيانات بمتغيّرَين Bivariate data
- مخطّط الانتشار Scatter diagram
- المُتغيّر التابع Dependent variable
- الارتباط الموجب Positive correlation
- الاتّجاه Trend
- الارتباط السالب Negative correlation
- لا يوجد ارتباط No correlation
- المستقيم الأفضل تمثيلاً Line of best fit
- استقراء Extrapolation
- المُدرّج التكراري Histogram
- مُتّصل Continuous
- مدى الفئة Class interval
- التكرار Frequency
- المُجمّعة Grouped
- الجداول التكرارية Frequency tables
- كثافة التكرار Frequency density
- الفئة المنوالية Modal class
- التكرار التراكمي Cumulative frequency
- منحنى التكرار التراكُمي Cumulative frequency curve
- الرُّبَيعات Quartiles
- المدى الرُّبَيعي Interquartile range
- المِئينات Percentiles

١-٧ بيانات بمُتغيّرَين

سابقًا

تعلّمت كيف تلخّص البيانات وتقوم بالاستنتاجات حولها في الوحدتَين ٢ و ٥

رابط

يُستخدم الارتباط لتحديد العلاقات بين المُتغيّرات في علوم الحياة، كالتطرُّق إلى العلاقة بين طول عظمة مُعيّنة عند شخص ما، وطوله.

عرفت حتى الآن كيف تلخّص البيانات وتُجري الاستنتاجات اعتمادًا على العمليات الحسابية، وكنت في جميع الحالات تجمع البيانات بمقاييس أو عبر مشاهدات منفردة.
والآن فكّر في المسألة التالية:
يقوم مدير محل المثلّجات بمتابعة التغيُّر في المبيعات اليومية لمنتجاته خلال السنة، وذلك عند ارتفاع درجة الحرارة وانخفاضها. فقرّر اختيار ١٠ أيام بطريقة عشوائية وسجّل درجة الحرارة ومجموع قيمة المبيعات التي يحقّقها في جدول كالتالي:

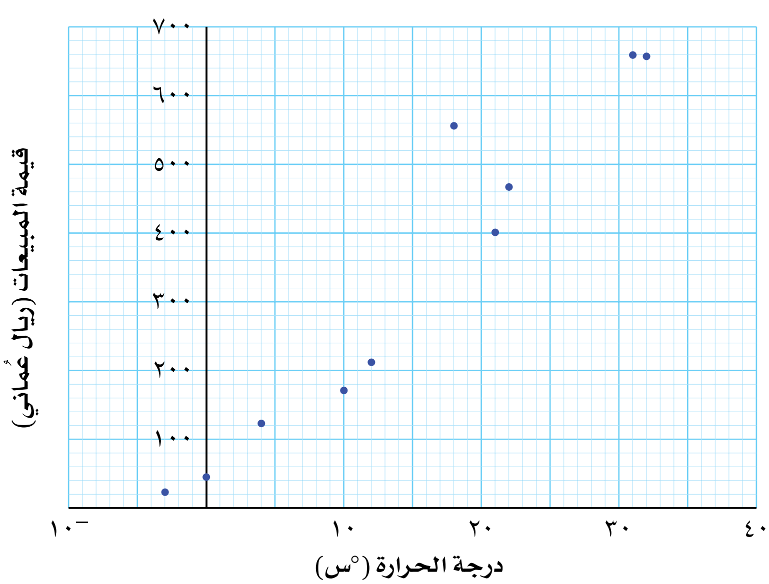
اليوم	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
درجة الحرارة (°س)	٤	١٨	١٢	٣٢	٢١	٣−	٠	١٠	٢٢	٣١
مجموع قيمة المبيعات (ريال عُماني)	١٢٣	٥٥٦	٢١٢	٦٥٧	٤٠١	٢٣	٤٥	١٧١	٤٦٧	٦٥٩

تمّ أخذ قياسَين كلّ يوم كما تُلاحظ، وتم تسجيلهما في صورة زوج مُرتّب، يُعرف هذا النوع من البيانات باسم **البيانات بمُتغيّرَين**، وسترى هذه البيانات بوضوح أكثر عندما تمثّل القيَم في **مخطّط الانتشار**.

رسم مخطّط الانتشار

لترسم مخطّط الانتشار، عليك أوّلاً تحديد **المُتغيّر التابع**، أي المُتغيّر الذي يعتمد على المُتغيّر الآخر، ويبدو منطقيًّا في المثال أعلاه، أن يعتمد مجموع قيمة المبيعات على درجة الحرارة، لأن الناس يميلون إلى شراء المثلّجات أكثر عندما ترتفع درجة الحرارة.
يتضمّن مخطّط الانتشار محورَي إحداثيات كما هو مبيّن أدناه، حيث يتم تمثيل المُتغيّر التابع في المحور الرأسي، وإذا تمّت معاملة بيانات الجدول في صورة إحداثيات، فإن المُخطّط يتم تمثيله كما يلي:

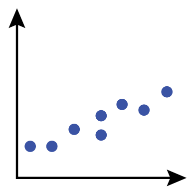
مُخطّط انتشار يعرض العلاقة بين قيمة مبيعات المُثلّجات و درجة الحرارة

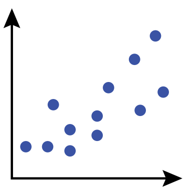


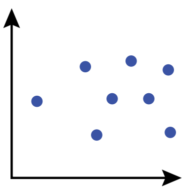
لاحظ وجود علاقة تربط بين قيمة مبيعات المثلّجات ودرجة الحرارة، ففي الواقع، تزداد المبيعات مع ارتفاع درجة الحرارة، ويُسمى هذا الارتباط **بالارتباط الموجب**، كما يُظهر المُخطّط أن **اتِّجاه** النقاط يتحرّك من الأسفل يسار الشكل إلى الأعلى يمينًا، أما إذا كانت النقاط تتحرّك من الأعلى يسارًا إلى الأسفل يمينًا فسوف تستنتج أن قيمة المبيعات تتناقص مع ارتفاع درجات الحرارة، وفي هذه الحالة يكون الارتباط **ارتباطًا سالبًا**.

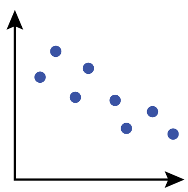
إذا لم تجد نمطًا واضحًا، فهذا يعني أنه لا يوجد ارتباط بين المُتغيّرين، وفي المقابل كلّما كان النمط واضحًا كان الارتباط قويًّا.

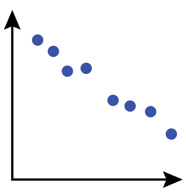
أمثلة على 'قوة' الارتباط بين المُتغيّرَين:


ارتباط موجب قوي


ارتباط موجب ضعيف


لا يوجد ارتباط


ارتباط سالب ضعيف

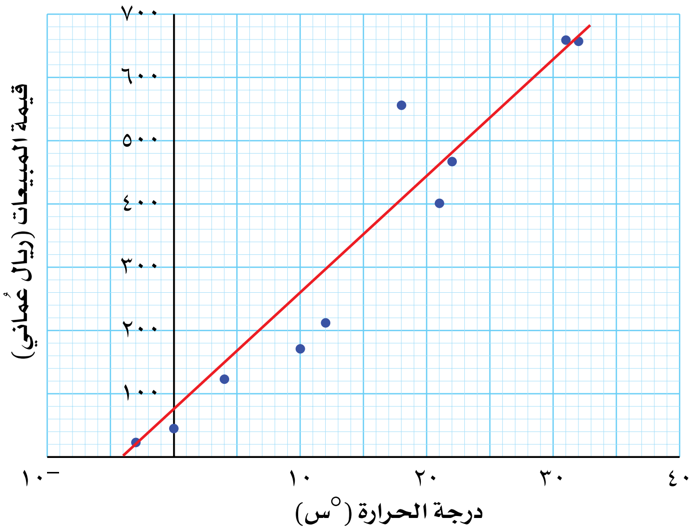

ارتباط سالب قوي

من المهم جدًّا أن تحدّد ما إذا كان الارتباط بين المُتغيّرَين موجبًا أو سالبًا، قويًّا أو ضعيفًا.

لاحظ على مخطّط قيَم مبيعات المُثلّجات في الصفحة السابقة، أن إحدى النقاط تقع بعيدًا عن النمط الشائع، وهي (١٨، ٥٥٦)، ولم يكن متوقّعًا تسجيل قيمة مرتفعة للمبيعات في ذلك اليوم. فقد تكون هناك مناسبة خاصّة في ذلك اليوم أو مجرّد خطأ في تسجيل البيانات، لذا يجب أن تدرس وتستقصي أي نقطة مُشابهة لهذا الموضوع.

يمكنك أن تعرض الاتّجاه العام للمُتغيّرَين من خلال رسم **المستقيم الأفضل تمثيلاً**. لاحظ في المخطّط التالي، أنه تم رسم مستقيم يمرّ بنقاط قريبة قدر الإمكان من أكثر النقاط المعروضة في البيانات.

مُخطّط انتشار يُبيّن العلاقة بين قيمة مبيعات المُثلّجات و درجة الحرارة



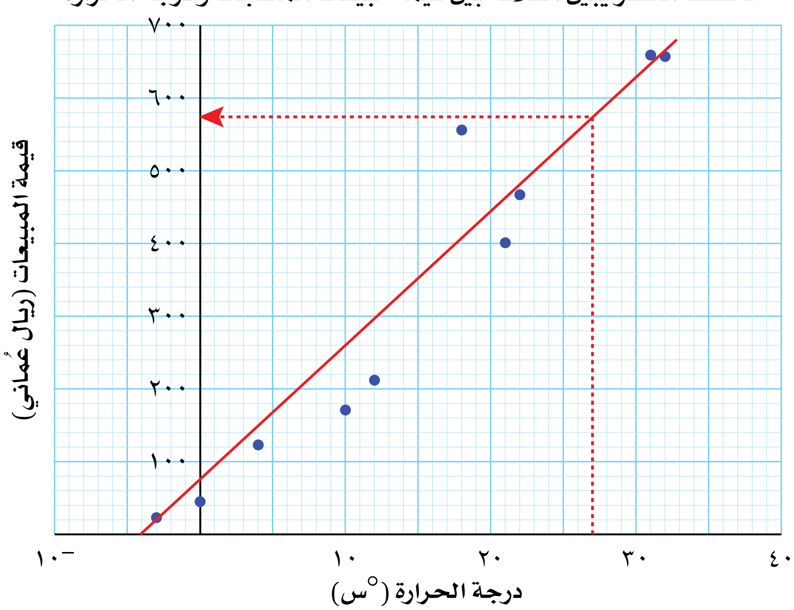
هذا هو المستقيم الأفضل تمثيلاً، ويمكن استخدامه لإجراء التوقُّعات بالاعتماد على البيانات المُجمّعة.

فإذا أردتَ مثلًا أن تتوقّع قيمة مبيعات المثلجات عندما تكون درجة الحرارة ٢٧° س، فعليك تنفيذ الخطوات التالية:

١ عيّن نقطة درجة الحرارة ٢٧° س على محور درجات الحرارة.
٢ ارسم مستقيمًا رأسيًّا من النقطة ليتقاطع مع المستقيم الأفضل تمثيلاً.
٣ ارسم من نقطة التقاطُع الواقعة على المستقيم الأفضل تمثيلاً مستقيمًا أفقيًّا ليتقاطع مع محور قيمة المبيعات.
٤ اقرأ قيمة المبيعات من التمثيل البياني.

يظهر المخطّط الآن كما هو مبيّن أدناه:

مُخطّط انتشار يُبيّن العلاقة بين قيمة مبيعات المُثلّجات و درجة الحرارة



القيمة التقديرية لقيمة المبيعات هنا هي ٥٧٥ ريالاً عُمانيًّا تقريبًا

مثــال ١

يعتقد صانع الأحذية الجلدية أن أطوال الأشخاص بالسنتيمتر تُعطي فكرة معقولة عن أطوال أقدامهم. ليستقصي هذا الاعتقاد، جمع صانع الأحذية أطوال ١٠ أشخاص وأطوال أقدامهم، وسجّل النتائج المُبيّنة في الجدول التالي:

الشخص	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
طول الشخص (سم)	١٥٦,٢	١٨٢,٤	١٦٥,٣	١٥٥,١	١٦٥,٢	١٢٢,٩	١٧٦,٣	١٨٣,٤	١٦٣,٠	١٤٣,١
طول القدم (سم)	٢٨,٢	٣١,١	٢٢,٥	٢٨,٦	٢٥,٤	١٣,٢	٢٩,٩	٣٣,٤	٢٢,٥	١٩,٤

أ ارسم مخطّط انتشار، حيث يمثّل المحور الأفقي أطوال الأشخاص، ويمثّل المحور الرأسي أطوال الأقدام.

ب حدّد نوع الارتباط الذي يُظهره المخطّط.

ج ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً.

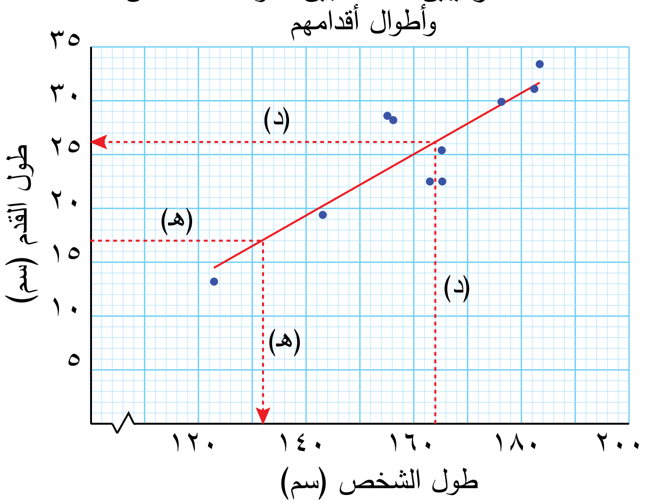
د قدّر طول قدم شخص إذا كان طوله ١٦٤ سم.

هـ قدّر طول شخص إذا كان طول قدمه ١٧ سم.

و فسِّر دقة تقديرك في الجزئيّتَين (د)، (هـ).

الحــلّ:

أ مخطّط انتشار يبيّن العلاقة بين أطوال الأشخاص وأطوال أقدامهم



ارسم المستقيم الأفضل تمثيلًا، تأكّد من أنه يشير إلى الاتّجاه الصحيح ويمر بين جميع النقاط. استخدم المخطّط للإجابة عن كل الأسئلة.

ب الارتباط بين المُتغيّرَين موجب وقوي، لأن طول القدم يزداد مع ازدياد طول الشخص.

عندما توضّح نوع الارتباط، عد إلى استخدام السياق الأصلي المذكور في السؤال.

ج	تم رسم المستقيم الأفضل تمثيلاً على المخطّط.	
د	تم رسم المستقيمات المناسبة على المخطّط. طول الشخص ١٦٤ سم يتوافق مع طول القدم ٢٦ سم تقريبًا.	
هـ	طول القدم ١٧ سم يتوافق مع طول الشخص ١٣٢ سم تقريبًا.	
و	معظم النقاط قريبة من المستقيم الأفضل تمثيلاً، لذلك فإن الارتباط قوي، الأمر الذي يعني أن المستقيم الأفضل تمثيلاً يعطي مستوى مقبولًا من الدقّة عند إجراء التقديرات.	

القاعدة الذهبية

قبل أن تبدأ برسم مخطّط الانتشار، يجب أن تراعي القاعدة التالية:

- لا يمكن استخدام المخطّط لإجراء توقُّعات من خارج مدى البيانات.

نجد مثلاً في المخطّط الذي يمثّل طول الشخص مع طول القدم أعلاه، أنّ البيانات لا تتضمّن أي طول لشخص يزيد على ١٨٣,٤ سم، فقد لا يستمرّ اتّجاه البيانات على النمط نفسه، وقد يتغيّر المخطّط في الأطوال الكبيرة، لذا لا تُجرى التوقّعات لطول قدم شخص يبلغ طوله ١٩٥ سم مثلاً، قبل أن يُجمع المزيد من البيانات.

تسمّى عملية توسيع المستقيم الأفضل تمثيلاً خارج مدى البيانات **بالاستقراء**.

التوقُّع عندما يكون الارتباط ضعيفًا

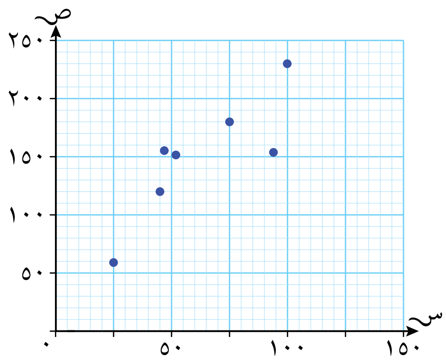
إذا طُلب إليك التعليق على توقُّع أجريته، تذكّر دائمًا قوة الارتباط بين المُتغيّرَين كما هي مُبيّنة في المخطّط، إذا كان الارتباط ضعيفًا، فمن المفيد القول بأن التوقُّع لا يتّصف بالثبات، ويشكّل ذلك أحد القيود على التوقُّعات التي يمكن إجراؤها حول البيانات.

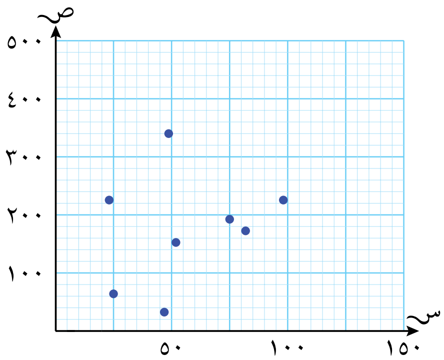
وضع الإجابات في سياقاتها

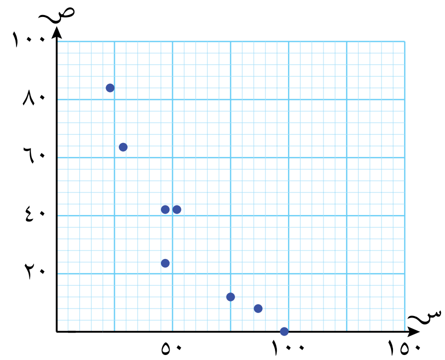
قد يكون من المفيد إسناد التوقُّعات التي تجريها إلى أصل المسألة، فبدلًا من أن تقول: 'إنّ هذا ارتباط موجب قوي' فقط، قل: 'يمكن إجراء توقُّع معقول لطول شخص عندما نعرف طول قدمه'، أو 'يمكن تقدير قيمة مبيعات المُثلّجات من مجموعة البيانات المُعطاة'.

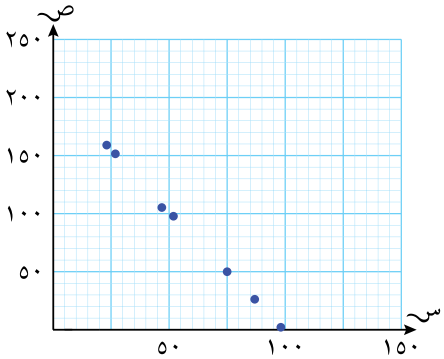
تمارين ٧-١

١) حدّد نوع وقوة الارتباط الموضّح في كل مخطّط من مخطّطات الانتشار التالية:

أ


ب


ج


د


٢) يُبيّن الجدول التالي العرض والطول لأوراق شجرة، قيست بالسنتيمتر:

العرض (سم)	١٤	٢٥	٦٧	٥٦	٢٦	٧٨	٣٣	٣٥	١٤	٣٦	١٣	٣٦	٢٥	٦٢	٢٥
الطول (سم)	٢٢	٦٣	١٧٠	١٤١	٧٦	٢٠١	٩٣	٩١	٢٤	٩١	٢٣	٦٧	٥١	١٥١	٧٩

أ ارسم مخطّط الانتشار لبيانات الجدول، بحيث يمثّل المحور الرأسي أطوال الأوراق.

ب فسّر قوة الارتباط بين عرض الأوراق وطولها.

ج ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه البيانات.

د قدّر طول ورقة عرضها ٢٠ سم.

٣) تُجري أميرة دراسة مسحية لكُتل بعض الرياضيّين، وطول فترة تدريبهم الصباحيّ بالدقائق. سجّلت النتائج في الجدول التالي:

زمن التدريب الصباحيّ (دقيقة)	٢٣	٤٥	١٢	٥	١٨	٦٧	٦٤	١٥	٢٨	٣٩
الكتلة (كغم)	٨٢	٦٥	٧٢	٩٢	٧٣	٨٤	٦٦	٩٨	٨١	٧٢

أ ارسم مخطّط الانتشار الذي يبيّن كتلة كل رياضي مع طول فترة تدريبه الصباحيّ بالدقائق بحيث يمثّل المحور الرأسي الكتلة.

ب ما قوة الارتباط بين كتلة الرياضي وطول فترة تدريبه الصباحيّ؟

ج ماذا تستنتج؟

٤) يستقصي مُبارك العلاقة بين عدد مساعدي المبيعات في المراكز التجارية والفترة الزمنية لانتظار الزبون (بالثواني) حتى يأتي دور خدمته. يُبيّن الجدول التالي النتائج التي حصل عليها مبارك:

عدد مساعدي المبيعات	١٢	١٤	٢٣	٢٨	١٤	١١	١٧	٢١	٢٣	٢١	٢٢	١٣	٧
الفترة الزمنية للانتظار (ثانية)	١٨٣	١٧٩	١٥٤	١٥٠	٢٢٤	٢٣٦	٢٢١	١٩٨	٢٨	٨٧	٧٧	٢٤٤	٢٦٦

أ ارسم مخطّط الانتشار الذي يُبيّن الفترة الزمنية لانتظار الزبون وعدد مساعدي المبيعات في المركز التجاري.

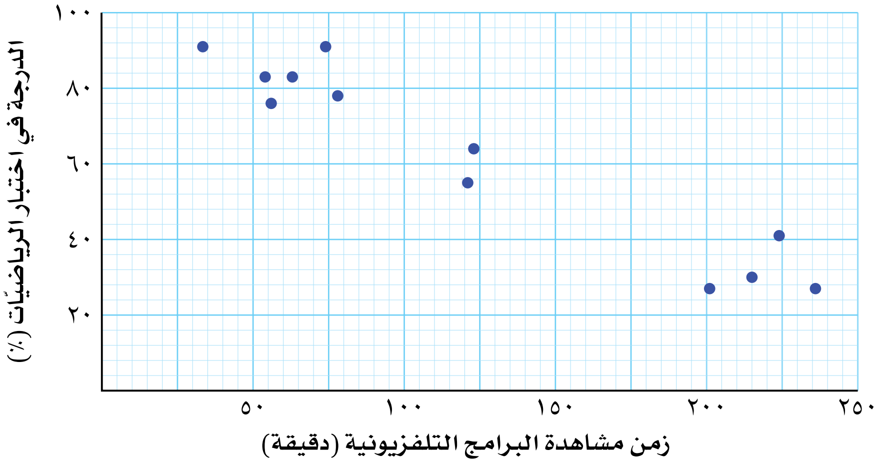
ب صِف الارتباط بين عدد مساعدي المبيعات مع الفترة الزمنية للانتظار.

ج ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه البيانات.

د زار مُبارك مركزًا تجاريًّا كبيرًا، يبلغ عدد مساعدي المبيعات فيه ٤٥ مُساعِدًا. وسّع مخطّط الانتشار واستخدمه لتستقرئ زمن الانتظار في هذا المركز التجاري.

٥) تستقصي سعاد العلاقة بين زمن مشاهدة الطلاب للبرامج التلفزيونية خلال أسبوع والدرجات التي حصلوا عليها في اختبار الرياضيات بعد أسبوع من ذلك. يعرض مخطّط الانتشار التالي نتائج ١٢ طالبًا:

مُخطّط انتشار يُبيّن العلاقة بين زمن مشاهدة الطلاب للبرامج التلفزيونية و درجاتهم في اختبار الرياضيّات



يبيّن الجدول التالي بعضًا من النتائج التي حصلت عليها سعاد:

زمن مشاهدة البرامج التلفزيونية		٣٤	٢١٥	٥٤		٧٨	٢٢٤	٢٣٦	١٢١	٧٤	٦٣	
الدرجة في اختبار الرياضيات (٪)	٦٤		٣٠	٨٣	٧٦	٧٨	٤١		٥٥	٩١	٨٣	٢٧

أ انسخ الجدول، واستخدم مخطّط الانتشار لتملأ الجدول بالقيَم المجهولة.

ب صِفْ الارتباط بين زمن مشاهدة البرامج التلفزيونية والدرجات في اختبار الرياضيات.

ج انسخ المخطّط وارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً.

د حصلت أحلام على درجة ٦٧٪ في اختبار الرياضيات. قدّر زمن مشاهدتها للبرامج التلفزيونية.

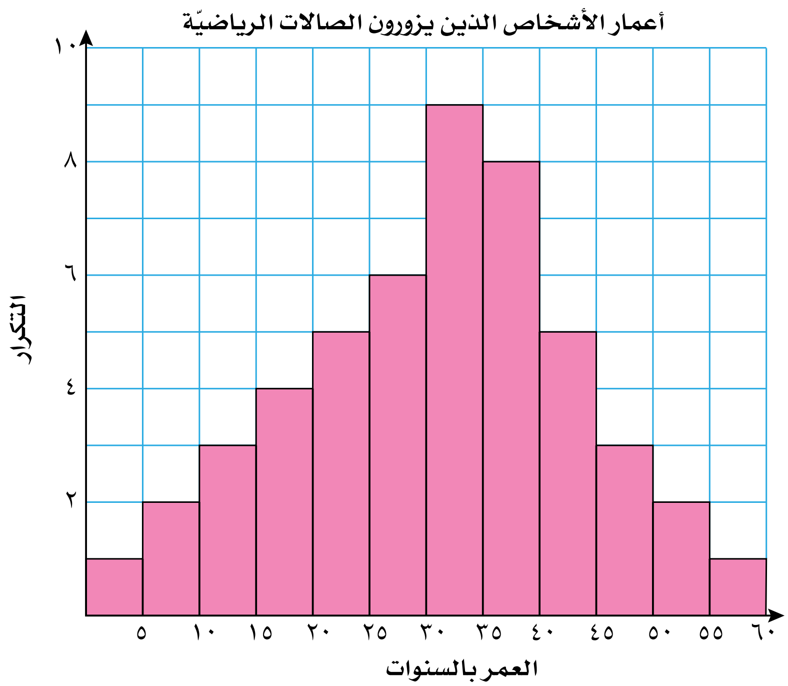
هـ صِفْ مدى دقة تقديرك في الجزئية (د).

٧-٢ المُدرّج التكراري

٧-٢-أ المُدرّج التكراري ذو الفئات المتساوية

المُدرّج التكراري هو تمثيل بياني خاص يشبه الأعمدة البيانية، لكنه يُستخدم ليبيّن توزيعًا متّصلاً أو بيانات مُجمّعة.

انظر إلى المُدرّج التكراري التالي الذي يبيّن أعمار الأشخاص الذين يزورون الصالات الرياضية:



لاحظ أن:

- مقياس المحور الأفقي **متّصل** وأن كل عمود مرسوم فوق **مدى الفئة** المحدّدة.
- يبيّن ارتفاع الأعمدة تكرار البيانات.
- لا يوجد فراغات بين الأعمدة في التمثيل، لأن المقياس الأفقي متّصل (إذا كان **تكرار** فئة ما هو الصفر، فلا يتم رسم عمود أعلى الفئة، وبناء على ذلك ستحدث فجوة بين الأعمدة في هذه الحالة).

عندما تكون أطوال الفئات متساوية، يكون العرض في كل الأعمدة مُتساويًا. رغم أن مساحة العمود هي التي تدلك على تكرار الفئة، إلا أنه من المتعارف عليه استخدام المقياس الرأسي لهذا الغرض عندما تكون الفئات متساوية (لذا تتم تسمية المحور الرأسي 'التكرار' كما مبيّن في المخطط أعلاه).

سابقًا

تم عرض البيانات المتّصلة في الوحدة ٢ ◀

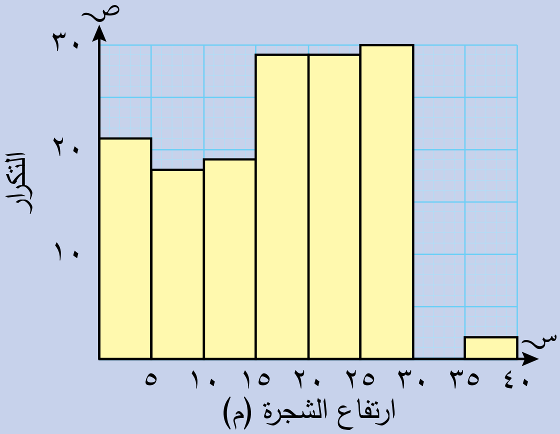
سابقًا

تم عرض تجميع البيانات في فئات في الوحدتَين ٢، ٥ ◀

مثـــال ٢

يبيّن كلّ من الجدول والمُدرّج التكراري التاليَين ارتفاعات عيّنة من الأشجار في إحدى الغابات:

ارتفاع الشجرة (ع (متر))	التكرار
٠ ≤ ع < ٥	٢١
٥ ≤ ع < ١٠	١٨
١٠ ≤ ع < ١٥	١٩
١٥ ≤ ع < ٢٠	٢٩
٢٠ ≤ ع < ٢٥	٢٩
٢٥ ≤ ع < ٣٠	٣٠
٣٠ ≤ ع < ٣٥	٠
٣٥ ≤ ع < ٤٠	٢



أ كم شجرة ارتفاعها أقلّ عن ٥ م؟

ب ما الفئة التي يكون ارتفاع الأشجار فيها هو الأكثر تكرارًا في العيّنة؟

ج كم شجرة يبلغ ارتفاعها ٢٠ م أو أكثر؟

د لماذا تتضمّن الفئات رموز المتباينات؟

هـ لماذا حدثت فجوة بين الأعمدة في الجهة اليمنى من التمثيل البياني؟

الحـــلّ:

أ	٢١	اقرأ التكرار على المحور الرأسي في المُدرّج التكراري للعمود ٠ ≤ ع < ٥
ب	٢٥ ≤ ع < ٣٠ م	أوجد أطول عمود، واقرأ الفئة المُمثّلة له على المحور الأفقي.
ج	٦١	أوجد تكرار كل فئة ارتفاع أعمدتها ٢٠ م أو أكثر، واجمعها معًا.
د	بما أنّ مقياس المحور الأفقي للمُدرّج التكراري متّصل، فإن الفئات متّصلة أيضًا. تمنع رموز المتباينات أن يقع ارتفاع شجرة ما في أكثر من فئة واحدة. يعني ذلك أنّنا إذا لم نستخدم رموز المتباينات، فإن شجرة ارتفاعها ٥ م قد تقع في فئتين، وبناء على ذلك يتمّ عدّها مرّتَين.	
هـ	يبلغ التكرار المقابل للفئة ٣٠ ≤ ع < ٣٥ الصفر (٠)، لذا لا يتم رسم عمود عند هذه الفئة.	

مثــال ٣

تُجري جميلة تجربة في صفّها لإيجاد كتلة الزبيب (بالغرام) والتي يمكن أن يمسكها الطلبة بقبضتهم. سجّلت جميلة النتائج التقريبيّة التي حصلت عليها مقرَّبة إلى أقرب غرام فكانت كالآتي:

١٨	١٨	٢٠	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٣
٢٣	٢٤	٢٤	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥	٢٥
٢٥	٢٦	٢٦	٢٧	٣٠	٣٠	٣١	٣٥

أ استخدم الفئات ١٦–٢٠، ٢١–٢٥، ٢٦–٣٠، ٣١–٣٥ لترسم جدولًا تكراريًّا ذا فئات.

ب ما الفئة المنوالية لهذه البيانات؟

ج ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض النتائج.

الحــلّ:

أ

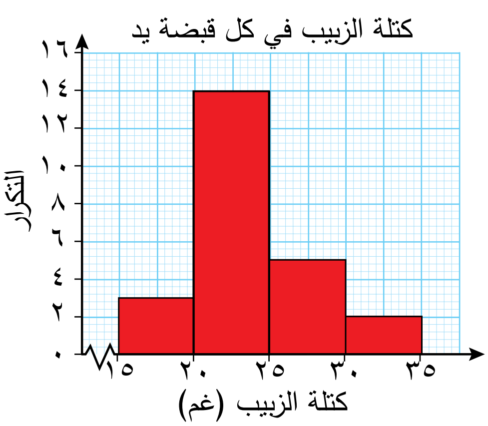
كتلة الزبيب (ك (غم))	التكرار
١٦–٢٠	٣
٢١–٢٥	١٤
٢٦–٣٠	٥
٣١–٣٥	٢

احسب العدد في كل فئة لتملأ الجدول.

ب الفئة المنوالية هي ٢١–٢٥

لا نستطيع إيجاد منوال البيانات المُجمّعة، لأننا لا نعرف القيَم المُنفردة في كل فئة. لذلك نوجِد الفئة الأكثر تكرارًا. تُسمّى هذه الفئة بـ '**الفئة المنوالية**'

ج



رغم أن البيانات مُنفصلة، فإنّ البيانات الرئيسية متّصلة (كتلة الزبيب). عندما جمعت جميلة البيانات، قرّبت كل كتلة إلى أقرب غرام. يعني ذلك أن بعض الكتل الحقيقية للزبيب تقع بين مجموعتَين منفصلتَين. ولمراعاة ذلك، تم رسم كل عمود بناء على الحدَّين الأعلى والأدنى. لذا، ترسم الفئة ١٦–٢٠ من $١٥,٥ \leqslant ك < ٢٠,٥$ وهكذا... حيث أن قبضة واحدة من الزبيب كتلتها ٢٠,٥٦ غم تقع في الفئة ٢١–٢٥، لأن حدود الفئة هي ٢٠,٥–٢٥,٥ غم.

سابقًا

تعلّمت في الوحدة ٢ كيف ترسم **جدولاً تكراريًّا ذا فئات.**

سابقًا

تعلّمت سابقًا في الوحدة ٥ أن المنوال هو القيمة الأكثر تكرارا.

سابقًا

تعلمت الحد الأعلى والحد الأدنى في الصف ٩

تمارين ٧-٢-أ

طبّق مهاراتك

١) الجدول التالي يوضّح كتل الأطفال الذين وُلدوا في شهر واحد:

الكتلة (ك (كغم))	٠,٥ ≥ ك > ١,٥	١,٥ ≥ ك > ٢,٥	٢,٥ ≥ ك > ٣,٥	٣,٥ ≥ ك > ٤,٥	٤,٥ ≥ ك > ٥,٥
عدد الأطفال	١	١٢	٣١	١٦	٠

أ ما الفئة المنوالية لكتل الأطفال؟

ب كم طفلاً كتلته أقلّ من ٢,٥ كغم؟

ج ارسم المُدرّج التكراري لعرض النتائج.

٢) سجّلت أمل طول فترات المكالمات الهاتفية (ن) بالدقائق التي أجرتها على هاتفها المحمول كما هو مُوضَّح في الجدول التالي:

أطوال فترات المكالمات الهاتفية (ن (دقيقة))	التكرار
٠ ≥ ن > ٢	١٥
٢ ≥ ن > ٤	٤٣
٤ ≥ ن > ٦	١٢
٦ ≥ ن > ٨	١٩
٨ ≥ ن > ١٠	١٥
١٠ ≥ ن > ١٢	١٠
١٢ ≥ ن > ١٤	١١
١٤ ≥ ن > ١٦	١٧

أ ما عدد الاتّصالات الهاتفية التي أجرتها أمل؟

ب ما طول المكالمة الأكثر تكرارًا؟

ج ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض النتائج.

د أنشئ جدولاً تكراريًّا جديدًا لهذه النتائج مستخدمًا الفئات المُعطاة في الجدول التالي:

الفئة	٠ ≥ ن > ٤	٤ ≥ ن > ٨	٨ ≥ ن > ١٢	١٢ ≥ ن > ١٦
التكرار				

هـ ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض النتائج في الجزئية (د).

و اكتب عددًا من العبارات لتُقارن بين التوزيعَين الظاهرَين في المُدرّجَين التكراريَّين.

٣) قطعت سميرة ٣٠ قطعة من حبل مُقدّرة طول كل منها بـ ٣٠ سم، ثم قامت أختها بقياس أطوال القطع، وحصلت على الأطوال الحقيقية التالية:

٢٩,١	٣٠,٢	٣٠,٥	٣١,١	٣٢,٠	٣١,٣	٢٩,٨	٢٩,٥	٣١,٦	٣٢,٤
٣٢,١	٣٠,٢	٣١,٧	٣١,٩	٣٢,١	٢٩,٩	٣٢,١	٣١,٤	٢٨,٩	٢٩,٨
٣١,٢	٣١,٢	٣٠,٥	٢٩,٧	٣٠,٣	٣٠,٤	٣٠,١	٣١,١	٢٨,٨	٢٩,٥

أ ارسم جدولاً تكراريًّا مناسبًا لهذه البيانات. استخدم فئات متساوية في الطول.

ب أنشىء مُدرّجًا تكراريًّا لعرض هذه الأطوال.

ج هل كان تقدير سميرة دقيقًا؟ فسّر إجابتك.

٤) سجّلت شرطة مرور مدينة مسقط عدد السيّارات التي تسير على الطريق السريع يوم الجمعة، وسجّلت حدود التجاوز في سرعاتها. ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض هذه البيانات.

السرعة (كم/ ساعة) فوق الحدود المسموحة	١-١٠	١١-٢٠	٢١-٣٠	٣١-٤٠	٤١-٥٠
التكرار	٤٧	٢١	٣٢	٧	٤

قد تجد في كتب أخرى استخدام المُدرّج التكراري لبيانات مُنفصلة. يُعدّ التمرين ٥ مثالاً شائعًا على ذلك. ينبغي لك في هذه الحالات، أن ترسم المُدرّج التكراري بتوسيع حدود كل فئة لتصبح بيانات متّصلة، كأن تُغيّر ٩٥-٩٩، و ١٠٠-١٠٤ إلى ٩٤,٥ ⩽ ح > ٩٩,٥، ٩٩,٥ ⩽ ح > ١٠٤,٥، وهكذا. لترسم الأعمدة البيانية من أجل عرض البيانات، عامل كل مجموعة 'كفئة'، وارسم الأعمدة مع ترك فراغات بينها.

٥) يمثّل الجدول التالي درجات اختبار الذكاء IQ لمجموعة من الطلبة:

درجة اختبار الذكاء	التكرار (ت)
٩٥-٩٩	٣
١٠٠-١٠٤	٨
١٠٥-١٠٩	٢١
١١٠-١١٤	٢٤
١١٥-١١٩	٦
١٢٠-١٢٤	٣
١٢٥-١٢٩	٥
١٣٠-١٣٤	٢
١٣٥-١٤٠	١

ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض هذه البيانات.

٧-٢ب المُدرّج التكراري ذو الفئات غير المتساوية

عندما تكون أطوال الفئات غير متساوية، قد يكون استخدام الارتفاع لإيجاد التكرار مُضلِّلًا. وعندما تكون الفئة التي يبلغ طولها ضعف طول فئة أخرى يكون لهما التكرار نفسه، لذا فإنّها تُغطّي ضعف المساحة، لذلك إذا استُخدِم الارتفاع ليمثّل التكرار، فإن الانطباع الأوّلي الذي يعطيه أنّه يتضمّن قيَمًا أكثر، وليس ضروريًّا أن يكون كذلك (لاحظ المثال ٣). ولكي يتم تجنُّب ذلك عندما تكون أطوال الفئات غير متساوية يُستخدم مقياس جديد للمحور الرأسي يُسمّى **كثافة التكرار**.

$$\text{كثافة التكرار (ك)} = \frac{\text{التكرار (ت)}}{\text{طول الفئة (ل)}}$$

تراعي كثافة التكرار طول الفئة عند حساب التكرار، لتجعله أكثر إنصافًا عند مقارنة فئات بأطوال مختلفة.

مُساعَدة

لاحظ أن:

ت = ك × ل = مساحة العمود.

يمكنك استخدام هذه العلاقة لتقرأ التكرار من المُدرّج التكراري.

هناك الكثير من التمارين التي تعتمد على هذا المفهوم.

مثـــال ٤

يبيّن الجدول التالي ارتفاع ٢٥ نبتة:

أ ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض البيانات.

ب أوجد الفئة المنوالية للبيانات.

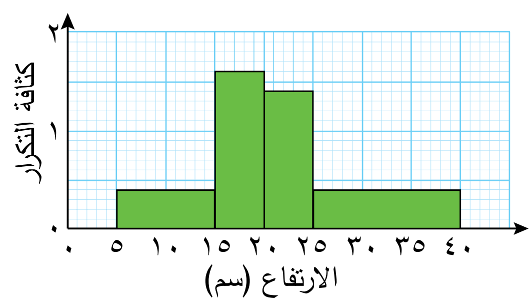
الارتفاع (ع (سم))	عدد النباتات
٥ ≤ ع < ١٥	٤
١٥ ≤ ع < ٢٠	٨
٢٠ ≤ ع < ٢٥	٧
٢٥ ≤ ع < ٤٠	٦

يمثّل ارتفاع النباتات (بالسنتيمتر) طول الفئات. ويمثّل التكرار عدد النباتات في كل فئة.

الحــلّ:

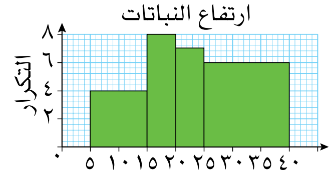
أ

الارتفاع (ع (سم))	عدد النباتات	طول الفئة (ل)	كثافة التكرار (ك = ت ÷ ل)
٥ ≤ ع < ١٥	٤	١٠	$\frac{٤}{١٠}$ = ٠,٤
١٥ ≤ ع < ٢٠	٨	٥	$\frac{٨}{٥}$ = ١,٦
٢٠ ≤ ع < ٢٥	٧	٥	$\frac{٧}{٥}$ = ١,٤
٢٥ ≤ ع < ٤٠	٦	١٥	$\frac{٦}{١٥}$ = ٠,٤



احسب أوّلًا كثافة التكرار بإضافة أعمدة إلى جدول التوزيع. ثم ارسم المحورَين وقرِّر المقياس المناسب لهما. استخدم ١ سم لتمثيل ١٠ سم في المحور الأفقي (الارتفاع)، واستخدم المقياس ٢ سم لكل ١ وحدة على المحور الراسي (كثافة التكرار)، وسمّه كثافة التكرار. ارسم المُدرّج التكراري، مع الانتباه الكبير للمقاييس على المحورَين.

إذا مُثّلت البيانات مع التكرار بدلاً من كثافة التكرار (انظر إلى المدرج التكراري في الأسفل)، سيبدو وكأنّ هناك نباتات في الفئة ٢٥ – ٤٠ أكثر مما هي في الفئة ٥ – ١٥، لكن كثافة التكرار لهما هي في الواقع متساوية. (انظر إلى المُدرج التكراري في المثال ٤). بدا طول الفئة الكبير هُنا مُضلّلًا. لذلك علينا استخدام كثافة التكرار، لأنها طريقة أكثر إنصافاً عند مقارنة التكرارات لفئات مختلفة في الطول.



ب	١٥ ⩽ ع < ٢٠	الفئة المنوالية هي الفئة التي يكون لها أكبر كثافة تكرار.

تمارين ٧-٢-ب

١) تمّ استطلاع ١٤٠ شخصًا حضروا حفلًا مدرسيًّا لجمع التبرُّعات، استهدف معرفة عدد حبات الحلوى الموضوعة في إناء زجاجي. أُجري سحب على أسماء الذين توقّعوا الإجابة الصحيحة ليفوزوا بقطع الحلوى. يبيّن الجدول التالي إجابات المُستطلعين:

عدد حبات الحلوى (ع)	التكرار (ت)
١٠٠ ⩽ ع < ٢٠٠	١٨
٢٠٠ ⩽ ع < ٢٥٠	١٨
٢٥٠ ⩽ ع < ٣٠٠	٣٢
٣٠٠ ⩽ ع < ٣٥٠	٣١
٣٥٠ ⩽ ع < ٤٠٠	٢١
٤٠٠ ⩽ ع < ٥٠٠	٢٠

أ استخدم الجدول لتحسب كثافة التكرار لكل فئة.

ب أنشىء مُدرّجًا تكراريًّا لعرض البيانات. استخدم مقياس الرسم ١ سم = ١٠٠ حبّة حلوى على المحور الأفقي، و١ سم = ٠,٢ وحدة على المحور الرأسي.

ج ما الفئة المنوالية لهذه البيانات؟

٢) يبيّن الجدول التالي كتل الأطفال الذين يراجعون العيادة الصحّية (مُقرَّبة إلى أقرب كغم). ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض البيانات:

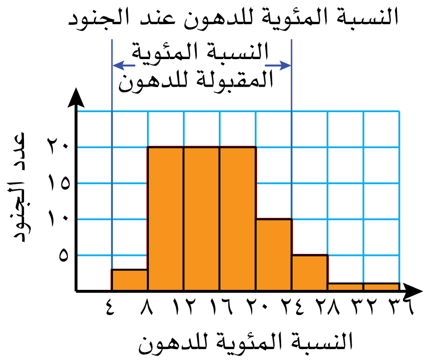
الكتلة (ك (كغم))	التكرار
٦ ⩽ ك < ٩	٩
٩ ⩽ ك < ١٢	١٢
١٢ ⩽ ك < ١٨	٣٠
١٨ ⩽ ك < ٢١	١٥
٢١ ⩽ ك < ٣٠	١٨

٣) يُبيّن الجدول التالي كتل مجموعة من الممثّلين المسرحيين. ارسم مُدرّجًا تكراريًّا لعرض البيانات:

الكتلة (ك (كغم))	التكرار
٦٠ ⩽ ك < ٦٣	٩
٦٣ ⩽ ك < ٦٤	١٢
٦٤ ⩽ ك < ٦٥	١٥
٦٥ ⩽ ك < ٦٦	١٧
٦٦ ⩽ ك < ٦٨	١٠
٦٨ ⩽ ك < ٧٢	٨

طبّق مهاراتك

٤) خضع مجموعة من الجنود لاختبارات اللياقة، حيث حُسبت النسبة المئوية للدهون لدى كل منهم، ثم عُرضت النتائج في المُدرّج التكراري التالي:



أ كم جنديًّا خضعوا للاختبار؟

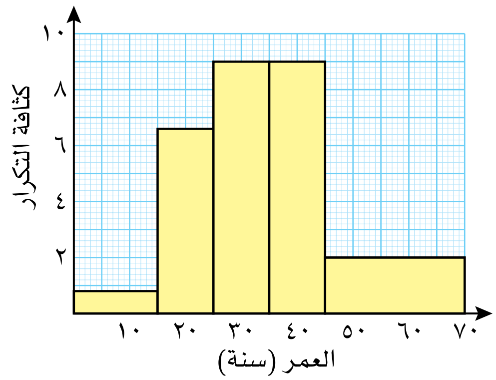
ب كم جنديًّا نسبة الدهون لديه ضمن الحدود الصحّية المقبولة؟

ج كم جنديًّا نسبة الدهون لديه مرتفعة؟

د لماذا لا يوجد عمود على الفترة ٠ – ٤؟

هـ هل تتوقّع توزيعًا مُشابهًا إذا قمت بتطبيق نفس الاختبارات على مجموعة أشخاص من مجتمعك المحلّي عشوائيًّا؟ فسِّر إجابتك.

٥) يبيّن المُدرّج التكراري التالي أعمار الأشخاص الذين يستخدمون مركز اللياقة البدنية في المجمع الرياضي، بعد الساعة ٥ مساءً:

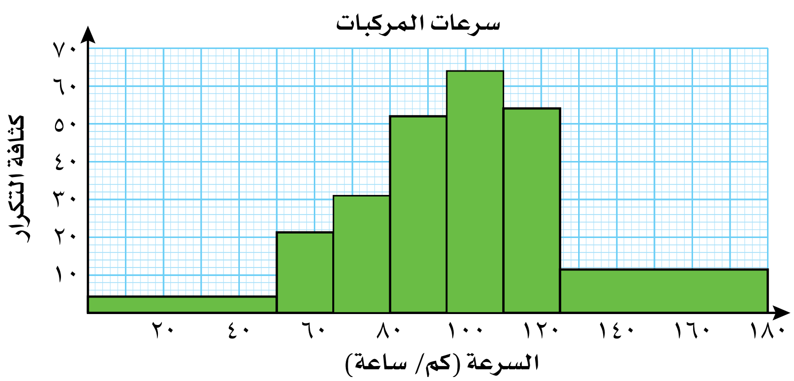


أ أكمل الجدول الآتي:

الكتلة (ك (كغم))	التكرار
٠ ⩽ ك > ١٥	
١٥ ⩽ ك > ٢٥	
٢٥ ⩽ ك > ٣٥	
٣٥ ⩽ ك > ٤٥	
٤٥ ⩽ ك > ٧٠	

ب ما عدد الأشخاص الذين تقع أعمارهم بين ١٥ و ٣٥ من الذين يستخدمون مركز اللياقة بعد الساعة ٥ مساءً؟

٦) يستخدم الضابط أحمد برنامجًا حاسوبيًّا ليرسم مُدرّجًا تكراريًّا يبيّن متوسّط السرعة (كم/ ساعة) لعيّنة من المركبات التي تستخدم الطريق السريع، حيث حُدّدت السرعة الدنيا للطريق بـ ٥٠ كم/ ساعة، والسرعة القصوى بـ ١٢٥ كم/ ساعة:



أ هل من السهل معرفة عدد المركبات التي تسير بسرعة أقلّ من السرعة الدنيا، والمركبات التي تسير بسرعة أكبر من السرعة القصوى؟ فسّر إجابتك.

ب يعتقد الضابط أحمد أن التمثيل البياني يُظهر أن معظم الأشخاص ملتزمون بحدود السرعة المسموح بها. هل اعتقاده صحيح؟ فسّر إجابتك.

ج ساعد زملاء الضابط أحمد في معرفة العدد الحقيقي للمركبات التي تسير بسرعة أقلّ أو بسرعة أكبر من حدود السرعة المُحدّدة، وذلك بالاجابة عن الأسئلة الآتية:

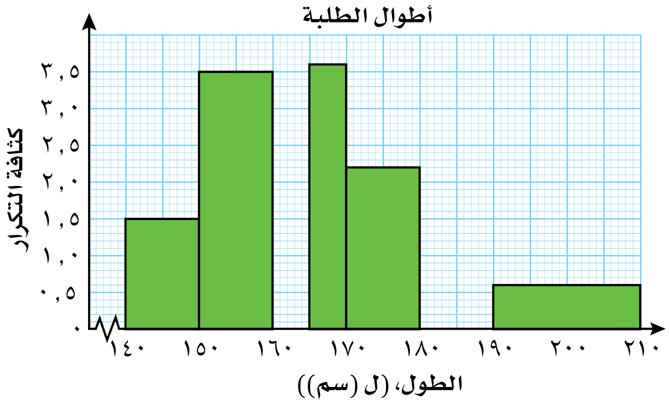
(١) أعد إنشاء الجدول التكراري التالي، مقرّبًا التكرارات إلى أقرب عدد كامل:

السرعة (ع (كم/ ساعة))	التكرار	طول الفئة	كثافة التكرار
٠ ≤ ع < ٥٠			٤,٨
٥٠ ≤ ع < ٦٥			٢١,٣
٦٥ ≤ ع < ٨٠			٣٣,٣
٨٠ ≤ ع < ٩٥			٥٢
٩٥ ≤ ع < ١١٠			٦٤
١١٠ ≤ ع < ١٢٥			٥٤,٦
١٢٥ ≤ ع < ١٨٠			١١,٦

(٢) كم عدد المركبات التي كانت سرعتها أقلّ من الحد الأدنى للسرعة؟

د ما النسبة المئوية في العيّنة للمركبات التي تجاوزت الحد الأقصى للسرعة المسموح بها؟

٧ يعرض كلّ من المُدرّج التكراري والجدول التاليَين – غير المكتملَين – معلومات عن أطوال مجموعة من الطلبة في الصف العاشر:



الطول (ل (سم))	التكرار
١٤٠ ≤ ل < ١٥٠	١٥
١٥٠ ≤ ل < ١٦٠	
١٦٠ ≤ ل < ١٦٥	٢٠
١٦٥ ≤ ل < ١٧٠	
١٧٠ ≤ ل < ١٨٠	
١٨٠ ≤ ل < ١٩٠	١٢
١٩٠ ≤ ل < ٢١٠	

أ استخدم المُدرّج التكراري لتكمل الجدول.

ب استخدم الجدول لتكمل المُدرّج التكراري.

ج حدّد الفئة المنوالية.

د قدّر النسبة المئوية لطلبة الصف العاشر الذين تزيد أطوالهم على ١٥٥ سم.

٧-٣ التكرار التراكُمي

قد تُسأل أحيانًا أسئلة مثل:

- كم شخصًا كتلته أقلّ من ٥٠ كيلوغرامًا؟
- كم سيّارة تسير بسرعة أكثر من ١٠٠ كم/ ساعة؟
- كم طالبًا حصل على درجة تقلّ عن ٥٠٪ في الاختبار؟

التراكُمي تعني 'زيادة مستمرة مع كل إضافة'.

يمكنك في الإحصاء استخدام **الجدول التكراري التراكُمي** أو **المنحنى التكراري التراكُمي** للإجابة عن أسئلة حول البيانات التي تصل إلى حدّ من حدود فئة مُعيّنة، ويمكنك أن تستخدم التكرار التراكُمي لتُقدّر الوسيط وتفسّره، ولتجد قيَم مواقع أخرى في مجموعة البيانات.

٧-٣-أ الجداول والمنحنيات التكرارية التراكُمية

يُعرف التكرار التراكُمي بأنّه 'مجموع مستمر' للدرجات أو النتائج (التكرار في كل فئة). يعطي التكرار التراكُمي عدد النتائج التي تساوي أو تقلّ عن حدّ فئة معيّنة. يُبيّن الجدول التالي درجات الطلبة في اختبار من ١٠ درجات (عدد مرّات تكرار كل نتيجة) إضافة إلى التكرار التراكُمي:

الدرجات من ١٠	التكرار (ت)	التكرار التراكُمي
٣	٤	٤
٤	٥	٤ + ٥ = ٩
٥	٣	٩ + ٣ = ١٢
٦	٣	١٢ + ٣ = ١٥
٧	٥	٢٠
٨	٧	٢٧
٩	٢	٢٩
١٠	١	٣٠
المجموع	٣٠	

- تُحسب القيَم في عمود التكرار التراكُمي بإضافة تكرار الفئة الحاليّة إلى التكرار التراكُمي السابق (أو بإضافة جميع التكرارات السابقة متضمّنة تكرار الفئة الحالية).
- يجب أن تكون آخر قيمة في عمود التكرار التراكُمي مساوية لمجموع التكرارات.

مثـــال ٥

يُبيّن الجدول التالي ارتفاع مجموعة من النباتات خلال تجربة ما:

الارتفاع (ع (سم))	التكرار
٠ < ع ≤ ٥	٢٠
٥ < ع ≤ ١٠	٤٠
١٠ < ع ≤ ١٥	٦٠
١٥ < ع ≤ ٢٥	٨٠
٢٥ < ع ≤ ٥٠	٥٠
المجموع	٢٥٠

أ ارسم جدولاً تكراريًّا تراكُميًّا لهذه البيانات.

ب حدّد الفئة التي تتضمّن وسيط الارتفاعات.

الحـــلّ:

أ

الارتفاع (ع (سم))	التكرار	التكرار التراكُمي
٠ < ع ≤ ٥	٢٠	٢٠
٥ < ع ≤ ١٠	٤٠	٦٠
١٠ < ع ≤ ١٥	٦٠	١٢٠
١٥ < ع ≤ ٢٥	٨٠	٢٠٠
٢٥ < ع ≤ ٥٠	٥٠	٢٥٠
المجموع	٢٥٠	

اجمع التكرارات وأنت تُكمل عمود التكرار التراكُمي.

ب ١٥ < ع ≤ ٢٥

تم إعطاء ارتفاع ٢٥٠ نبتة، لذا فإن وسيط الارتفاعات يساوي الوسط الحسابي لارتفاعَي النبتتَين في المَوقعَين الـ ١٢٥ والـ ١٢٦. إذا نظرت إلى التكرار التراكُمي، ستجد أن هذه الارتفاعات تقع في الفئة الرابعة من الجدول (١٢٥، ١٢٦ وكلتاهما أكبر من ١٢٠ وأقلّ من ٢٠٠).

سابقًا

تمّ في الوحدة ٥ تقديم فئات الوسيط للبيانات المُجمّعة. سترى أن منحنى التكرار التراكُمي سيمكّنك من تقدير الوسيط عندما يكون عدد البيانات كبيرًا.

منحنى التكرار التراكُمي

عندما تعيّن التكرار التراكُمي مع الحد الأعلى لكل فئة، ستحصل على المنحنى التكراري التراكُمي.

تُسمى المنحنيات التراكُمية أيضًا بالمنحنيات القوسية، لأنها تشبه الأقواس المُشيّدة في بعض الجوامع.

مُساعَدة

يجب أن تعيّن التكرار التراكُمي عند نقطة الحد الأعلى للفئة. لا تخلط بين هذا الدرس وحسابات مراكز الفئات التي استخدمتها لتقدير الوسط الحسابي في الجداول التكرارية.

مثـــال ٦

يُبيّن الجدول التالي درجات ٣٠٠ طالب في أحد الاختبارات:

أ ارسم الجدول التكراري التراكُمي للدرجات.

ب أنشئ منحنى التكرار التراكُمي للدرجات.

ج قدّر الوسيط للدرجات.

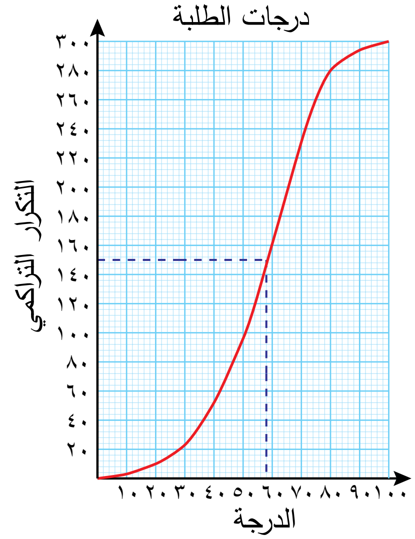
الدرجة	التكرار
١-١٠	٣
١١-٢٠	٧
٢١-٣٠	١٣
٣١-٤٠	٢٩
٤١-٥٠	٤٤
٥١-٦٠	٦٥
٦١-٧٠	٧٠
٧١-٨٠	٤٩
٨١-٩٠	١٤
٩١-١٠٠	٦

الحـــلّ:

أ

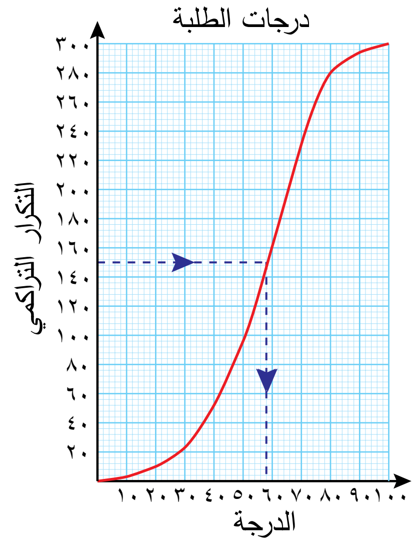
الدرجة	التكرار	التكرار التراكُمي
١-١٠	٣	٣
١١-٢٠	٧	١٠
٢١-٣٠	١٣	٢٣
٣١-٤٠	٢٩	٥٢
٤١-٥٠	٤٤	٩٦
٥١-٦٠	٦٥	١٦١
٦١-٧٠	٧٠	٢٣١
٧١-٨٠	٤٩	٢٨٠
٨١-٩٠	١٤	٢٩٤
٩١-١٠٠	٦	٣٠٠

ب



ارسم المنحنى التراكُمي. تذكّر أن تعيّن النقاط عند الحدود العليا للفئات.

ج



وسيط الدرجات يساوي ٥٨

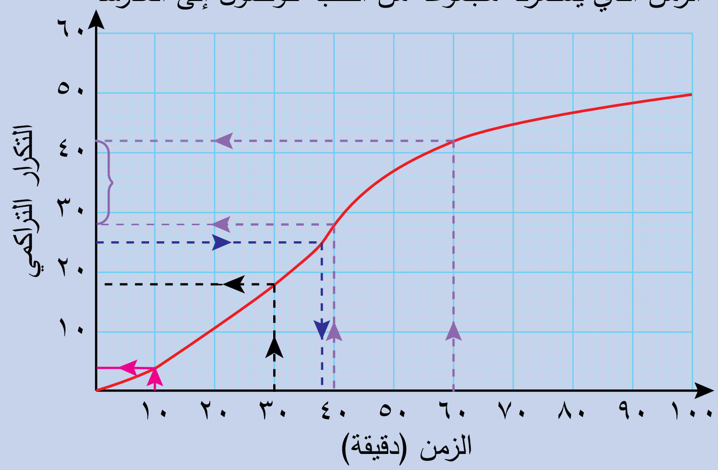
الوسيط هو القيمة التي تقع في المُنتصف. يمكن في البيانات المتّصلة إيجاد قيمة المُنتصف بقسمة مجموع التكرارات على ٢ $\frac{٣٠٠}{٢}$ = ١٥٠، فيكون موقع الوسيط هو ١٥٠ ارسم مستقيمًا من النقطة التي تمثّل الطالب ذا الموقع الـ ١٥٠ (الواقعة على المحور الرأسي) موازيًا لمحور الدرجات (المحور الأفقي). ثم ارسم عمودًا من نقطة تقاطُع هذا المستقيم مع المنحنى على المحور الأفقي. اقرأ القيمة من المحور الأفقي.

سابقًا

تعلّمت في الوحدة ٥ كيف تجد الوسيط لمجموعة بيانات منفصلة. لاحظ أن منحنى التكرار التراكُمي يتيح لك أن تجد تقديرًا للقيمة الحقيقية للوسيط أكثر من تحديد الفئة.

مثـــال ٧

يبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي الزمن الذي يستغرقه مجموعة من الطلبة للوصول إلى المدرسة:



استخدم المنحنى لتجد:

أ العدد الكلّي للطلبة.

ب تقديرًا لوسيط الزمن الذي يستغرقه الطلبة للوصول إلى المدرسة.

ج عدد الطلبة الذين يحتاجون إلى أقلّ من ١٠ دقائق للوصول إلى المدرسة.

د عدد الطلبة الذين يحتاجون إلى أكثر من ٣٠ دقيقة للوصول إلى المدرسة.

هـ عدد الطلبة الذين يحتاجون بين ٤٠ دقيقة وساعة واحدة للوصول إلى المدرسة.

الحــلّ:

أ	٥٠	تقع أعلى نقطة في المنحنى عند العدد ٥٠، وهذا هو مجموع التكرارات.
ب	٣٨	$\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥ وهذه هي النتيجة الـ ٢٥، ارسم مستقيمًا أفقيًّا من النقطة ٢٥، ثم أنزل عمودًا من نقطة تقاطُع المستقيم مع المنحنى على المحور الأفقي.
ج	٤	اقرأ التكرار التراكُمي المُقابل لـ ١٠ دقائق.
د	٥٠ − ١٨ = ٣٢	اطرح التكرار التراكُمي المُقابل لـ ٣٠ دقيقة (أي ١٨) من المجموع الكلّي للتكرارات.
هـ	٤٢ − ٢٨ = ١٤	اطرح التكرار التراكُمي المُقابل لـ ٤٠ دقيقة (أي ٢٨) من التكرار التراكُمي المُقابل لـ ٦٠ دقيقة (أي ٤٢).

مثـــال ٨

تمّت زراعة ٢٠ بذرة فاصوليا لإجراء تجربة علمية. وبعد ثلاثة أسابيع تم قياس ارتفاعات نباتات الفاصوليا وتسجيل النتائج في الجدول التالي:

الارتفاع (ع) (سم)	٠ ⩽ ع < ٣	٣ ⩽ ع < ٦	٦ ⩽ ع < ٩	٩ ⩽ ع < ١٢
التكرار	٢	٥	١٠	٣

أ قدّر الوسط الحسابي لارتفاعات النباتات.

ب ارسم منحنى التكرار التراكمي وقدّر الوسيط لارتفاعات النباتات.

الحـــلّ:

أ

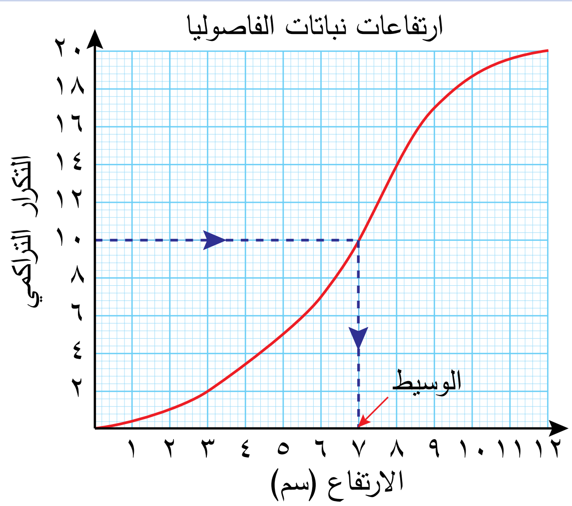
الارتفاع (ع) (سم)	المركز (م)	التكرار (ت)	(ت × م)	التكرار التراكمي
٠ ⩽ ع < ٣	١,٥	٢	٣	٢
٣ ⩽ ع < ٦	٤,٥	٥	٢٢,٥	٧
٦ ⩽ ع < ٩	٧,٥	١٠	٧٥	١٧
٩ ⩽ ع < ١٢	١٠,٥	٣	٣١,٥	٢٠
المجموع		٢٠	١٣٢	

الوسط الحسابي للارتفاع = $\frac{١٣٢}{٢٠}$ = ٦,٦ سم

(الوسط الحسابي = $\frac{\sum (ت \times م)}{\sum ت}$)

تحتاج إلى مراكز الفئات لتساعدك على إيجاد الوسط الحسابي التقديري، كما ستحتاج إلى التكرار التراكُمي لإيجاد تقدير للوسيط، لذا تلزمك إضافة أعمدة إلى الجدول التكراري. لا تنسَ تسمية الأعمدة الجديدة.

ب



وسيط الارتفاعات = ٧,٠ سم

$\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠، لذا يكون وسيط الارتفاعات هو قيمة الارتفاع المناظرة للقيمة العاشرة في التكرار التراكمي.

سابقًا

تعلّمت كيف تجد الوسط الحسابي التقديري لبيانات مُجمّعة في الوحدة ٥

تمارين ٧-٣-أ

١) يعرض الجدول التالي ارتفاع ٢٥ نبتة، مُقرّبًا إلى أقرب سنتيمتر:

الارتفاع (سم)	٦–١٥	١٦–٢٠	٢١–٢٥	٢٦–٤٠
عدد النباتات	٣	٧	١٠	٥

أ ارسم جدول التكرار التراكُمي لهذه البيانات.

ب في أي فئة يقع وسيط الارتفاعات؟

ج ارسم منحنى التكرار التراكُمي واستخدمه لتقدّر ارتفاعات النباتات، مُقرّبًا الناتج إلى أقرب سنتيمتر.

٢) يبيّن الجدول التالي قيمة النقود (بالريال العُماني) التي صرفتها مجموعة من الطلبة على شراء الكتب:

قيمة النقود المصروفة (ريال عُماني)	عدد الطلبة
٠ < س ≤ ١٠	٠
١٠ < س ≤ ٢٠	٤
٢٠ < س ≤ ٣٠	٨
٣٠ < س ≤ ٤٠	١٢
٤٠ < س ≤ ٥٠	١١
٥٠ < س ≤ ٦٠	٥

أ احسب القيمة التقديرية للوسط الحسابي لقيمة النقود التي صُرفت على شراء الكتب.

ب استخدم المعلومات المُبيّنة في الجدول أعلاه لتجد قيمة كل من ف، ق، ر في جدول التكرار التراكُمي التالي:

قيمة النقود (ريال عُماني)	≤ ١٠	≤ ٢٠	≤ ٣٠	≤ ٤٠	≤ ٥٠	≤ ٦٠
التكرار التراكُمي	٠	٤	ف	ق	ر	٤٠

ج ارسم منحنى التكرار التراكُمي مستخدمًا مقياس الرسم ١ سم لتمثّل ١٠ وحدات على كل محور.

د استخدم المنحنى الناتج لتقدّر وسيط قيمة النقود التي صُرفت على شراء الكتب.

٣) يبيّن جدول التكرار التراكُمي التالي كتل الأطفال الذين يزورون عيادة طبيب الأطفال في أحد المراكز الصحّية:

الكتلة (ك (كغم))	التكرار التراكُمي
٠ < ك ⩽ ١٠	١٢
١٠ < ك ⩽ ٢٠	٢٦
٢٠ < ك ⩽ ٣٠	٣٣
٣٠ < ك ⩽ ٤٠	٤١
٤٠ < ك ⩽ ٥٠	٤٦
٥٠ < ك ⩽ ٦٠	٥٠

أ ارسم منحنى التكرار التراكُمي مُستخدمًا المقياس ١ سم = ١٠ كغم على المحور الأفقي، والمقياس ٠,٥ سم = ٥ أطفال على المحور الرأسي.

ب قدّر الوسيط لكتل الأطفال.

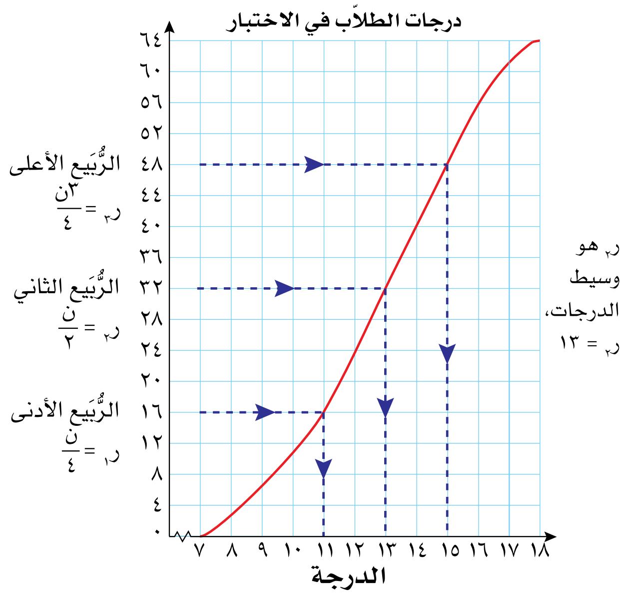
ج كم طفلاً كتلته أكبر من وسيط الكتل؟

٧-٣-ب الرُّبَيعات

درست المدى في الوحدة (٥)، وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة (أكبر قيمة – أصغر قيمة)، واستخدمته لتعرف مدى تشتُّت مجموعات البيانات المختلفة. يتأثر المدى بالقيَم المُتطرّفة، لذلك لا يُعدّ المقياس الأفضل لانتشار البيانات.

يمكن تقسيم البيانات الظاهرة في منحنى التكرار التراكُمي إلى أربع مجموعات تُسمّى **الرُّبَيعات** لتجد مقياس للانتشار يسمى **المدى الرُّبَيعي**، وهو أكثر تمثيلاً من المدى لأنه لا يتأثّر بالقيَم المُتطرّفة.

يُبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي الدرجات التي حصل عليها ٦٤ طالبًا في اختبار ما، وهي معروضة أدناه:



- حصل ٤٨ طالبًا على الدرجة ١٥ أو أقل. ١٥ هي قيمة الرُّبَيع الأعلى أو الرُّبَيع الثالث $ر_{٣}$
- حصل ٣٢ طالبًا على الدرجة ١٣ أو أقل. ١٣ هي قيمة الرُّبَيع الثاني $ر_{٢}$ أو وسيط الدرجات.
- حصل ١٦ طالبًا على أقلّ من ١١ درجة. ١١ هي قيمة الرُّبَيع الأدنى أو الرُّبَيع الأول $ر_{١}$

سابقًا

راجع ما درسته عن الرُّبَيعات والمدى الرُّبيعي في الوحدة ٥ إن احتجت إلى ذلك.

تم استخدام الأعداد الكاملة في هذا المثال لتجعل فهمه أكثر سهولة. يتمّ في العادة تقريب الإجابات حيث تحتوي على أعداد عشرية وكسور.

عندما تجد مواقع الرُّبَيعات من منحنى التكرار التراكُمي، فإنك لن تستخدم القواعد $\frac{(ن + ١)}{٤}$، $\frac{(ن + ١)}{٢}$، $\frac{٣}{٤}(ن + ١)$ التي واجهتها مع البيانات المنفصلة في الوحدة ٥، لكنّك ستستخدم $\frac{ن}{٤}$، $\frac{ن}{٢}$، $\frac{٣ن}{٤}$، بدلاً منها.

المدى الرُّبَيعي

المدى الرُّبَيعي يساوي الفرق بين الرُّبَيع الأعلى والرُّبَيع الأدنى: $ر_٣ - ر_١$

وهذا يساوي مدى الـ ٥٠٪ من الدرجات، أو وسيط النصف الأعلى للقيَم – وسيط النصف الأدنى للقيَم.

يبدو من المثال أعلاه، المدى الرُّبَيعي = ١٥ – ١١ = ٤

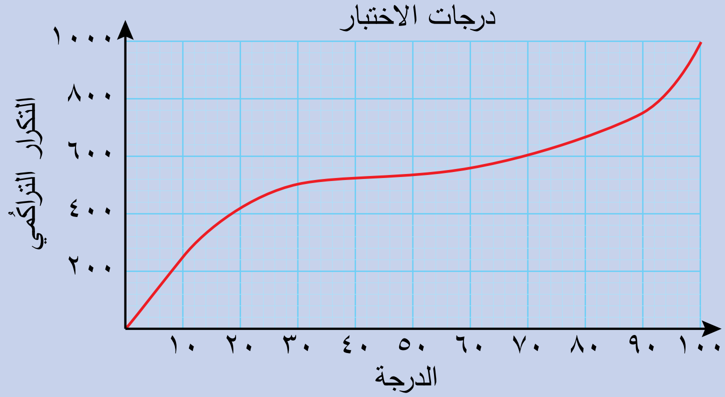
وبما أن المدى الرُّبَيعي لا يستخدم أي قيمة مُتطرّفة، فقد اعتُبر مقياسًا ثابتًا للانتشار أفضل من المدى.

سابقًا

تم استخدام المدى في الوحدة ٥ للمقارنة بين مجموعات البيانات.

مثــال ٩

يبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي درجات ١٠٠٠ طالب في أحد الاختبارات:



استخدم منحنى التكرار التراكُمي لتقدِّر قيمة كلّ من:

أ) الوسيط للدرجات.

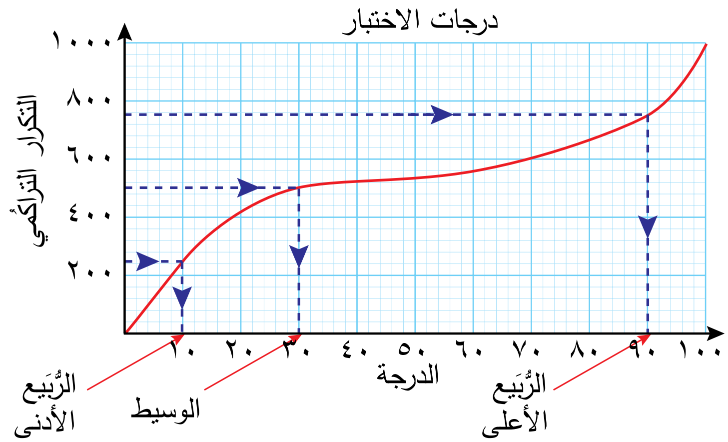
ب) الرُّبَيع الأدنى للدرجات.

ج) الرُّبَيع الأعلى للدرجات.

د) المدى الرُّبَيعي للدرجات.

الحــلّ:

ارسم مستقيمات على منحنى التكرار التراكمي لتجد القيَم:



أ	استخدم المحور الأفقي لتقدّر الوسيط، وهو الدرجة ٣٠	ن = ١٠٠٠ فيكون موقع ر$_{٢}$ على المحور الرأسي هو $\frac{ن}{٢}$ = ٥٠٠ ارسم مستقيمًا يتقاطع مع المنحنى.
ب	استخدم المحور الأفقي لتقدّر الرُّبَيع الأدنى، وهو الدرجة ١٠	ن = ١٠٠٠ فيكون موقع ر$_{١}$ على المحور الرأسي هو $\frac{ن}{٤} = \frac{١٠٠٠}{٤}$ = ٢٥٠
ج	استخدم المحور الأفقي لتقدّر الرُّبَيع الأعلى، وهو الدرجة ٩٠	ن = ١٠٠٠ فيكون موقع ر$_{٣}$ على المحور الرأسي هو $\frac{٣ن}{٤} = \frac{٣ \times ١٠٠٠}{٤}$ = ٧٥٠
د	المدى الرُّبَيعي = ر$_{٣}$ − ر$_{١}$ = ٩٠ − ١٠ = ٨٠ درجة	

سابقًا

تم تقديم المئينات باختصار في الوحدة ٥

المِئينات

عندما تتعامل مع عدد كبير من البيانات، مثل نتائج دبلوم التعليم العام، أو معدّل أطوال وكتل الأطفال في مجموعات مختلفة الأعمار، يكون من المفيد تقسيمها إلى مجموعات أصغر تُسمّى **المِئينات**.

تقسم المئينات البيانات إلى ١٠٠ قسم متساوٍ.

لتجد موقع مئين ما، استخدم الصيغة $\frac{م ن}{١٠٠}$، حيث يمثّل (م) المئيني الذي تبحث عنه، ويمثّل (ن) مجموع التكرارات.

إذا استخدمت مجموعة البيانات الموجودة في المثال (٩):

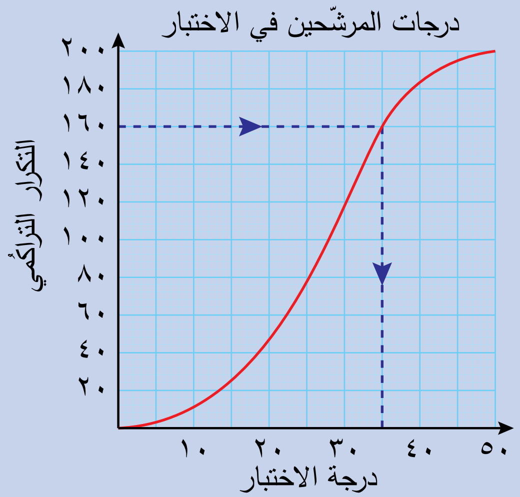
تجد أنّ موقع المئيني العاشر على محور التكرار التراكُمي هو م$_{١٠}$ = $\frac{١٠ \times ١٠٠٠}{١٠٠}$ = ١٠٠

ويكون موقع المئيني الخامس والثمانين على محور التكرار التراكُمي هو م$_{٨٥}$ = $\frac{٨٥ \times ١٠٠٠}{١٠٠}$ = ٨٥٠ (تذكّر أن تتحرّك يمينًا إلى المنحنى، ثم رأسيًّا إلى الأسفل حتى المحور الأفقي، لتجد قيَم المئينات)

يُمثّل المدى المئيني الفرق بين المئينات المعطاة. وهو في المثال السابق، م$_{٨٥}$ − م$_{١٠}$.
تم تقديم المئينات لأوّل مرّة في الوحدة (٥)، ولكن لم يُستخدم سوى المئينيَّين م$_{٢٥}$، م$_{٧٥}$، وذلك لإيجاد المدى الرُّبَيعي. كما طُرح سؤال في بداية الدرس (٥-٣-أ) المئينات والرُّبَيعات، وهو: 'سيتقدّم كل المرشّحين الحاصلين على درجة أعلى من المئيني الثمانين للمقابلة. ما معنى ذلك؟' يبيّن لك المثال التالي كيف تجيب عن هذا السؤال.

مثـــال ١٠

يبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي نتائج اختبار ٢٠٠ مرشّح ممّن تقدّموا حسب الإعلان عن الوظيفة. سيستدعى إلى المقابلة فقط المرشحون الذين حصلوا على درجة أعلى من م$_{٨٠}$. ما أقلّ درجة يمكن أن يحققها المُرشَّح لكي يُستدعى إلى المُقابلة؟

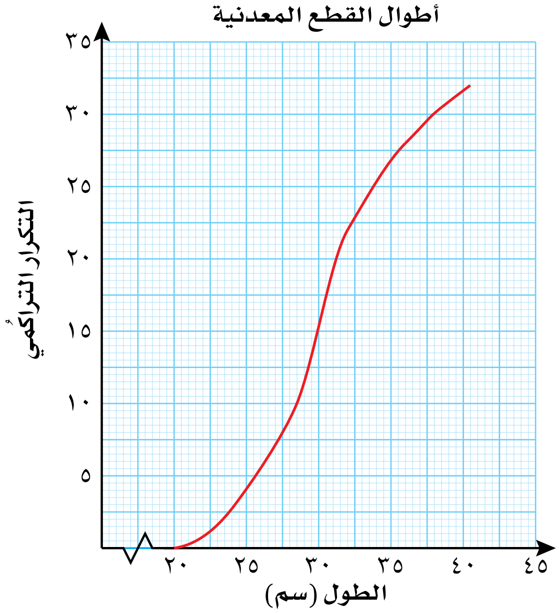


الحـــلّ:

٨٠٪ من الـ ٢٠٠ يساوي ١٦٠ فتكون، قيمة م$_{٨٠}$ في الاختبار ٣٥ درجة. سيُستدعى إلى المُقابلة فقط المرشّحون الذين حصلوا على أكثر من ٣٥ درجة في الاختبار.	حدِّد على محور التكرار التراكمي ١٦٠، ثم حدِّد على المنحنى النقطة التي تقابلها على محور درجة الاختبار.

تمارين ٧-٣-ب

١) يظهر منحنى التكرار التراكمي التالي أطوال ٣٢ قطعة معدنيّة. استخدم المنحنى لتقدّر قيمة كلّ من:



أ الوسيط

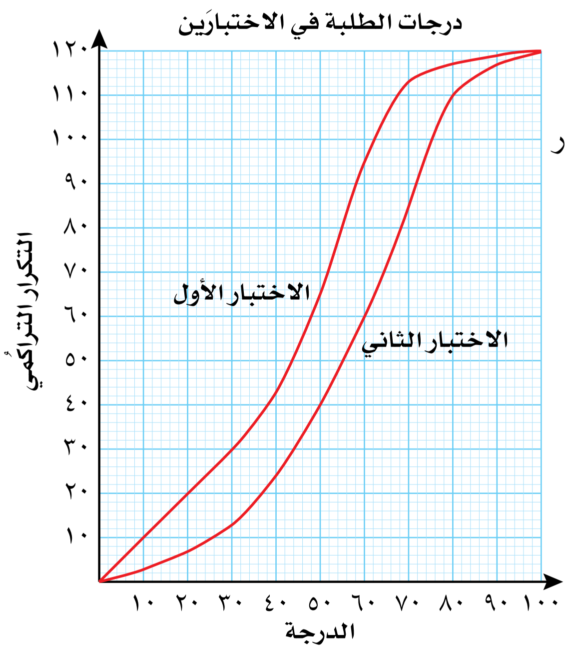
ب م$_{٢٥}$

ج م$_{٧٥}$

د المدى الرُّبَيعي

هـ م$_{٤٠}$

٢) يُوضّح منحنى التكرار التراكُمي التالي النتائج التي حصل عليها ١٢٠ طالبًا في اختبارَين في الرياضيات.



أ استخدم المنحنى لتجد:

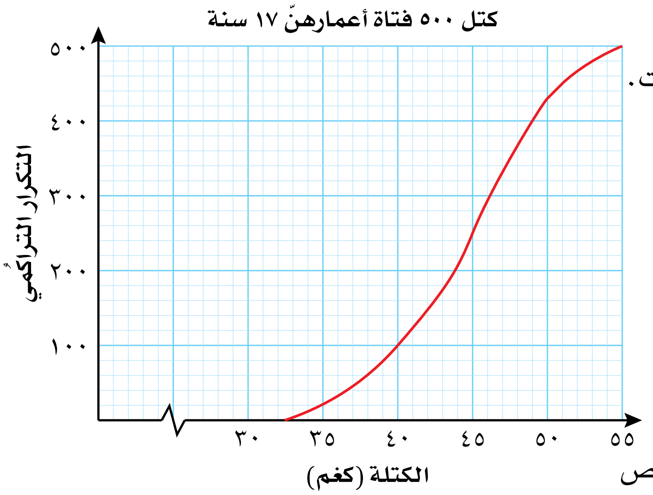
(١) وسيط الدرجات لكل اختبار

(٢) المدى الرُّبَيعي لكل اختبار

(٣) المئيني الستّين

ب ما الدرجة التي ترغب في الحصول عليها لتكون أكبر من المئيني التسعين في الاختبارين؟

٣) يبيّن منحنى التكرار التراكُمي التالي كتل ٥٠٠ فتاة (كغم) أعمارهنّ ١٧ سنة.



أ استخدم المنحنى لتجد:

(١) الوسيط لكتل الفتيات.

(٢) كم فتاة تقع كتلتها بين ٤٠ و ٥٠ كغم؟

ب ما النسبة المئوية للفتيات اللاتي لا يُسمح لهن باللعب في مدينة الألعاب؟ (علمًا بأن الحد الأعلى لكتلة الشخص المسموح له باللعب هو ٥١ كغم).

٤) يُمثِّل جدول التكرار التراكُمي التالي سرعات ٢٠٠ سيّارة على الطريق السريع:

السرعة (ع (كم/ ساعة))	التكرار التراكُمي
ع < ٦٠	٢
٦٠ ≤ ع < ٧٠	٨
٧٠ ≤ ع < ٨٠	٢٤
٨٠ ≤ ع < ٩٠	٤٥
٩٠ ≤ ع < ١٠٠	٩٦
١٠٠ ≤ ع < ١١٠	١٢٣
١١٠ ≤ ع < ١٢٠	١٧١
١٢٠ ≤ ع < ١٣٠	١٩٥
١٣٠ ≤ ع < ١٤٠	٢٠٠
المجموع	٢٠٠

أ ارسم منحنى التكرار التراكُمي لعرض البيانات، مستخدمًا مقياس الرسم ١ سم لكل ١٠ كم/ساعة على المحور الأفقي، ومقياس الرسم ١ سم لكل ١٠ سيّارات على المحور الرأسي.

ب استخدم المنحنى لتُقدّر الوسيط والرُّبَيع الأعلى والرُّبَيع الأدنى لهذه البيانات.

ج قدّر المدى الرُّبَيعي.

د حُدّدت السرعة القصوى على جزء من الطريق السريع بـ ١٢٠ كم/ الساعة. ما النسبة المئوية للسيّارات التي تجاوزت هذه السرعة؟

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- يمكن استخدام مخطّط الانتشار لاختبار قوة العلاقة بين مُتغيّرَين.
- يكون الارتباط موجبًا إذا ازداد أحد المُتغيّرَين مع ازدياد المُتغيّر الآخر.
- يكون الارتباط سالبًا إذا تناقص أحد المُتغيّرَين مع ازدياد المُتغيّر الآخر.
- كلما كانت العلاقة بين المُتغيّرَين واضحة، كان الارتباط أقوى.
- يمكن رسم المستقيم الأفضل تمثيلاً إذا وقعت النقاط قريبة منه.
- يمكن استخدام المستقيم الأفضل تمثيلاً لتقدير قيمة أحد المُتغيّرَين إذا عُرفت قيمة المُتغيّر الآخر.
- يجب أن يتم تقدير قيمة المتغير باستخدام المستقيم الأفضل تمثيلاً الذي تم رسمه ضمن مدى البيانات.
- يُمثّل المُدرّج التكراري حالة خاصة من الأعمدة البيانية ويستخدم لتمثيل بيانات متّصلة ومُجمّعة.
- لا تتخلّل أعمدة المُدرّج التكراري فراغات، لأن مقياس المحور الأفقي متّصل.
- عندما تكون أطوال الفئات متساوية، يكون عرض الأعمدة مُتساويًا، ويبيّن المحور الرأسي التكرارات.
- عندما لا تكون أطوال الفئات متساوية، لا يكون عرض الأعمدة متساويًا، ويبيّن المحور الرأسي كثافة التكرار.
- كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$
- يمثّل التكرار التراكُمي مجموعًا مُستمرًّا لتكرارات الفئات حتّى الحد الأعلى لكل فئة.
- عندما تُعيّن نقاط الحدود العليا للفئات مع التكرار التراكُمي لها، فإنها تكوّن منحنى تكرار تراكمي.
- يمكن استخدام المنحنى لتقدير قيمة الوسيط للبيانات.
- يمكن تقسيم البيانات إلى أربع مجموعات متساوية تُسمى الرُّبَيعات. المدى الرُّبَيعي يساوي الفرق بين الرُّبَيع الأعلى والرُّبَيع الأدنى أي ($ر_٣ - ر_١$)
- يمكن تقسيم البيانات الكثيرة إلى مئينات تقسم البيانات إلى ١٠٠ مجموعة متساوية، وتُستخدم في مقارنة القياسات وترتيبها.

يجب أن تكون قادرًا على:

- رسم مخطّط الانتشار.
- وصف العلاقة بين مُتغيّرَين.
- استخدام مخطّط الانتشار لإجراء التوقُّعات.
- قراءة المُدرّج التكراري ذي الفئات المتساوية وتفسيره.
- إنشاء مُدرّج تكراري ذي فئات متساوية.
- إنشاء مُدرّج تكراري ذي فئات غير متساوية وتفسيره.
- إنشاء جدول لإيجاد كثافة التكرار للفئات المختلفة.
- إيجاد التكرار التراكُمي.
- رسم منحنى التكرار التراكُمي.
- استخدام منحنى التكرار التراكُمي لتقدير الوسيط.
- إيجاد الرُّبَيعات وحساب المدى الرُّبَيعي.
- تقدير المئينات وتفسيرها.

تمارين نهاية الوحدة

١) يبيّن الجدول التالي مساحات بعض الأراضي (بالأمتار المُربّعة) وأسعارها (بالريال العُماني) في مناطق مختلفة في سلطنة عمان:

الأرض	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ)	(و)	(ز)	(ح)	(ط)	(ي)	(ك)	(ل)	(م)	(ن)	(س)
مساحة الأرض (م^{٢})	١٤٠٠	٢٣٠٠	٨٠٠	٥٠٠	٧٠٠	٢٢٠٠	٣٤٠٠	٢٦٠٠	١١٠٠	١٣٠٠	٣٧٠٠	١٥٠٠	٤٠٠	١٩٠٠	٦٠٠
السعر (ريال عُماني)	٢٤٠٠٠٠	٦٥٦٥٠٠	١٨٠٠٠٠	٢٢٥٠٠	٨٦٧٠٠٠	٤٥٦٠٠٠	١٠١٥٠٠٠	٨٩٥٠٠٠	٣٠٢٥٠٠	٤٥٦٠٠٠	١١٢٣٠٠٠	٤٠٥٠٠٠	١٤٥٠٠٠	٥٤٢٠٠٠	١٤٧٥٠٠

أ ارسم مخطّط الانتشار لهذه البيانات، بحيث يمثّل المحور الرأسي السعر.

ب أي أرض كانت الأغلى بشكل غير اعتيادي؟ فسِّر إجابتك.

ج افترض أن الأرض الأغلى بشكل غير اعتيادي ليست من ضمن المجموعة، ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه البيانات.

د أُضيفت أرض جديدة إلى المجموعة مساحتها ٢٢٥٠ م^{٢}. استخدم التمثيل البياني لتقدّر سعر الأرض.

هـ أضيفت أرض أخرى إلى المجموعة مساحتها ٤٤١٠ م^{٢}. اشرح لماذا يجب ألّا تستخدم مخطّط الانتشار لتقدّر سعر هذه الأرض.

٢) بيعت أنواع من الشاحنات التي تحتاج إلى الصيانة والتصليح بشكل منتظم، وتم الطلب إلى عدد من الشركات أن تُزوّد المصنع بمجموعتَي معلومات: (س) عدد ساعات الصيانة التي تمّت في السنة الأولى، و(ص) عدد الدقائق اللازمة لإصلاح الشاحنات في السنة الثانية. يُبيّن الجدول التالي النتائج:

ساعات الصيانة (س)	٤٢	٧١	٢٢	٢	٦٠	٦٦	١٠٢	٧٨	٣٣	٣٩	١١١	٤٥	١٢
الزمن اللازم للصيانة (ص) (بالدقائق)	٤٠٤٠	٢٣٧٠	٤٢٨٠	٤٩٨٠	٤٠٠٠	٣١٧٠	٩٤٠	١٤٢٠	٣٧٩٠	٣٢٧٠	٥٠٠	٣٣٨٠	٤٤٢٠

أ ارسم مخطّط الانتشار الذي يعرض هذه البيانات، بحيث يمثّل المحور الرأسي زمن الصيانة في السنة الثانية (بالدقائق).

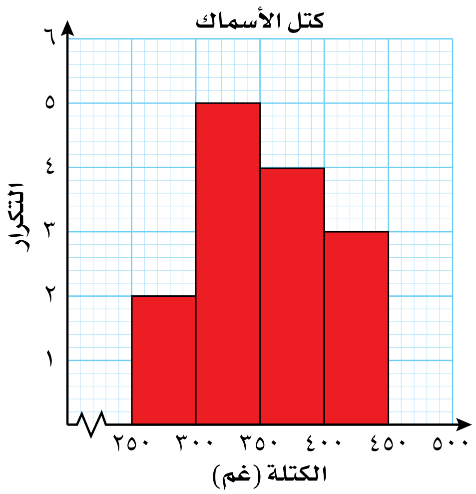
ب صِف الارتباط بين زمن الصيانة في السنة الأولى لاستخدام الشاحنة وزمن الصيانة في السنة الثانية.

ج ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً لمخطّط الانتشار.

د يوفّر برنامج شركة أخرى ٩٠ ساعة صيانة في السنة الأولى لاستخدام الشاحنة. استخدم التمثيل البياني لتقدّر زمن الصيانة اللازم في السنة الثانية.

هـ إذا طلب إليك المدير أن تستهلك زمن الصيانة كلّه في السنة الأولى، بحيث يصبح زمن الصيانة في السنة الثانية صفرًا، استخدم تمثيلك البياني لتقترح مستوى الصيانة، ووضِّح ثبات إجابتك.

٣) قاس خالد كتل الأسماك التي اصطادها صباحًا بالغرامات. ويُبيّن المُدرّج التكراري غير المُكتمل المُقابل النتائج:



أ اصطاد خالد أربع سمكات أخرى كتلها ٢٢٥ غم، ٤٦٦ غم، ٤٧٠ غم، ٤٩٨ غم. أضف هذه البيانات إلى نسخة التمثيل البياني غير المُكتمل.

ب استخدم التمثيل البياني بعد اكتماله لتملأ الجدول التالي:

الكتلة (ك (غم))	عدد السمكات	الوصف
ك < ٣٠٠		صغيرة
٣٠٠ ≤ ك < ٤٠٠		متوسطة
ك ≥ ٤٠٠		كبيرة

ج مثّل المعلومات الواردة في الجدول بالقطاعات الدائرية. بيّن بوضوح تام كيف حسبت قياس زاوية كل قطاع دائري.

٤) أجرى باحث دراسة على ٦٤ عائلة. وسجَّل زمن إنهاء العائلات للاستبانة بالدقائق في الجدول التالي:

الزمن (ن (دقيقة))	عدد العائلات
٠ ≤ ن < ٢	٢
٢ ≤ ن < ٣	١٨
٣ ≤ ن < ٤	٢٥
٤ ≤ ن < ٦	١٢
٦ ≤ ن < ٩	٥
٩ ≤ ن < ١٥	٢

استخدم مقياس الرسم ١ سم لكل ٢ دقيقة على المحور الأفقي في الفترة ٠ ≤ ن < ١٥، ومقياس الرسم ١ سم لكل ٢ وحدة على المحور الرأسي، لعرض هذه البيانات في مُدرّج تكراري.

الوحدة الثامنة: الدوال

المُفردات

- الدالّة Function
- صيغة الدالّة Function notation
- الدالّة المُركّبة Composite function
- الدالّة العكسية Inverse function
- المعكوس Inverse

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تستخدم صيغة الدالّة لتصف الدوال البسيطة ومعكوساتها.
- تُشكِّل الدوالّ المُركّبة.

آلة تحضير العصير

تستخلص هذه الآلة العصير من الفواكه، حيث توضع بعض شرائح الفواكه داخل الآلة، التي تقوم باستخلاص العصير منها، ويرتبط ما تحصل عليه منها بما تضعه فيها، فإذا وضعت فيها بُرتقالًا، فسوف تحصل على عصير برتقال، وإذا وضعت أناناسًا ستحصل على عصير الأناناس، وكذلك الأمر بالنسبة للتفّاح، وتستمرّ العملية نفسها في كلّ مرّة حتّى وإن اختلف الناتج.

تعمل الدوال الرياضية بطريقة مشابهة، حيث تُطبّق الدالّة الرياضية الخطوات نفسها على الأعداد المُدخَلة، لكن النتيجة تختلف، باختلاف المُدخَلات.

٨-١ الدوال وصيغة الدالّة

الدالّة هي قاعدة أو مجموعة من التعليمات، هدفها تغيير عدد ما (المُدخَلة) إلى عدد آخر (المُخرَجة)، فإذا كانت ص معطاة بدلالة س (ص دالّة في س)، فإن قيمة ص تعتمد على القيمة التي تستخدمها لـ س.

٨-١-أ صيغة الدالّة

في صيغة الدالّة، نستبدل ص بالصيغة المعروفة د(س). فإذا كانت 'د' الدالّة و'س' المُدخَلة، فإن د(س) ستكون المُخرَجة عند تطبيق د على س.

تُعدّ صيغة الدالّة طريقة رياضية لكتابة المعادلات (الدوال). وهي تُستخدم استخدامًا واسعًا في تطبيقات الحاسوب، وفي مجالات التكنولوجيا أيضًا.

فكّر في المعادلة ص = س + ٢

عندما تكتبها بصيغة الدالّة تصبح هكذا د(س) = س + ٢

تقرأ د(س) على النحو 'دالّة س' أو 'دال س'.

إذا كانت د(س) = س + ٢، فإن د(٥) تعني قيمة الدالّة عندما س = ٥

بمعنى آخر، د(٥) = ٥ + ٢ = ٧

كما أن د(⁻٢) = ⁻٢ + ٢ = ٠

يمكن أن تُكتب الدالّة أيضًا في صورة د: س ← ٦ − ٣س.

وتُقرأ 'د دالّة تحوُّل س إلى ٦ − ٣س'

يُسمّى المقدار (٦ − ٣س) أحيانًا صورة س (بالدالّة د).

فيما يلي ثلاث طرق مختلفة لكتابة الدالّة نفسها باستخدام حروف مختلفة:

د: س ← ٣س − ١

د: م ← ٣م − ١

د: ب ← ٣ب − ١

عندما ترد في مسألة ما دالّتان أو أكثر، فإننا نستخدم حروفًا مختلفة لتمثيلها. مثلاً، قد ترد:

هـ(س) = س^{٢} − ٢س + ٣، ع(س) = ٥س − ٣

يمكن أن نعرض خطوات إيجاد قيمة الدالّة د(س) في مُخطّط التدفّق. فمثلاً، يمكن تمثيل الدالّة د(س) = ٢س + ٥ في صورة:

س ← $\boxed{\times ٢}$ ← $\boxed{+٥}$ ← ٢س + ٥

ويمكن تمثيل الدالّة هـ(س) = ٢(س + ٥) في صورة:

س ← $\boxed{+٥}$ ← $\boxed{\times ٢}$ ← ٢(س + ٥)

لاحظ أن مُخطَّطَي التدفّق يعرضان العمليات الحسابية نفسها، ولكن بترتيب مختلف، لذا جاءت النواتج مختلفة.

مثــال ١

إذا كانت د(س) = س^{٢} − ٣س، هـ(س) = ٤س − ٦، فأوجد قيمة:

أ د(٦) ب د(−٣) ج هـ($\frac{١}{٢}$) د هـ(٦)

الحــلّ:

أ	د(٦) = (٦)^{٢} − ٣(٦) = ٣٦ − ١٨ = ١٨	استخدم د(س) = س^{٢} − ٣س عوّض عن س بـ ٦
ب	د(−٣) = (−٣)^{٢} − ٣(−٣) = ٩ + ٩ = ١٨	عوّض عن س بـ −٣ في الدالة د(س)؛ انتبه عند تربيع −٣، لأنّ عليك أن تحصل على ٩
ج	هـ($\frac{١}{٢}$) = ٤($\frac{١}{٢}$) − ٦ = ٢ − ٦ = −٤	عوّض عن س بـ $\frac{١}{٢}$ في الدالّة هـ(س) = ٤ س − ٦
د	هـ(٦) = ٤(٦) − ٦ = ٢٤ − ٦ = ١٨	عوّض عن س بـ ٦ في الدالة هـ(س)

مثــال ٢

إذا كانت ع: س ← ٩ − س^{٢}

أ اكتب العبارة التي تُبيّن ع(س) بدلالة س

ب أوجد:

(١) ع(٠) (٢) ع(٣) (٣) ع(٩) (٤) ع(−٩)

الحــلّ:

أ	ع(س) = ٩ − س^{٢}	هذه طريقة بديلة لكتابة الدالّة.
ب (١)	ع(٠) = ٩ − (٠)^{٢} = ٩ − ٠ = ٩	عوّض س = ٠
(٢)	ع(٣) = ٩ − (٣)^{٢} = ٩ − ٩ = ٠	عوّض عن س بـ ٣
(٣)	ع(٩) = ٩ − (٩)^{٢} = ٩ − ٨١ = −٧٢	عوّض عن س بـ ٩
(٤)	ع(−٩) = ٩ − (−٩)^{٢} = ٩ − ٨١ = −٧٢	عوّض عن س بـ −٩

مثـــال ٣

أوجد قيمة س إذا علمت أن د(س) = ٣ + ٢ س، د(س) = ٦

الحـــلّ:

٣ + ٢س = ٦	الدالتان مُتكافئتان.
٢س = ٦ − ٣	
٢س = ٣	
س = ١,٥	

مثـــال ٤

إذا كانت الدالّتان د(س) = س^{٢}، هـ(س) = س + ٢

أ حلّ المعادلة د(س) = هـ(س)

ب حلّ المعادلة ٤هـ(س) = هـ(س) − ٣

الحـــلّ:

أ

د(س) = هـ (س)	الدالتان مُتكافئتان.
∴ س^{٢} = س + ٢	
س^{٢} − س − ٢ = ٠	
(س − ٢)(س + ١) = ٠	حلّل إلى العوامل.
فيكون، س = ٢، س = $^{-}$١	

ب

٤هـ (س) = هـ (س) − ٣	
∴ ٣هـ(س) = $^{-}$٣	اطرح هـ(س) من الطرفَين.
هـ(س) = $^{-}$١	اقسم الطرفَين على ثلاثة.
س + ٢ = $^{-}$١	استبدل هـ (س) بـ س + ٢
س = $^{-}$٣	

تمارين ٨-١-أ

١) لكلّ دالّة من الدوال التالية، احسب:

(١) د(٢) (٢) د(-٢) (٣) د(٠,٥) (٤) د(٠)

أ د(س) = ٣س + ٢ ب د(س) = ٥ س − ٢

ج د(س) = ٢س − ١ د د(س) = ٢س^{٢} + ٣

هـ د(س) = س^{٢} − ٢س و د(س) = س^{٣} − ٢

٢) إذا كانت د(س) = ٤س − ١؛ أوجد:

أ د(-١) ب د(٠) ج د(١,٥) د د(-٤)

٣) إذا كانت د: س ← س^{٢} − ٤؛ أوجد:

أ د(٢) ب د(٠) ج د(-٣) د د(٠,٢٥)

٤) إذا كانت د(س) = س^{٣} − ٨، هـ(س) = ٣ − س^{٢}؛ أوجد قيمَة كل ممّا يلي:

أ د(٢) ب د(-١) ج هـ(٥) د هـ(-٢)

٥) إذا كانت ع: س ← ٤س^{٢}، أوجد:

أ ع(٢) ب ع(-٢) ج ع($\frac{١}{٢}$)

٦) أوجد قيمة س إذا كانت د(س) = ٣س − ١، د(س) = ٣ د(س) − ٣.

٧) أوجد قيمة س إذا كانت هـ(س) = $\frac{١}{س}$ + ١، هـ(س) = ٤.

٨) أوجد قيمة س إذا كانت ع(س) = $\sqrt{٤س + ١}$، ع(س) = ٥.

٩) إذا كانت الدالتان د(س) = س^{٢} − س، ع(س) = س^{٢} − ٣س − ١٢:

أ حلّ المعادلة د(س) = ٦

ب حلّ المعادلة د(س) = ع(س)

١٠) إذا كانت د: س ← ٢س، أوجد:

أ د(أ) ب د(أ + ٢) ج د(٤أ) د ٤د(أ)

١١) إذا كانت د(س) = $\frac{٤ + س}{س}$، س ≠ ٠:

أ احسب د($\frac{١}{٢}$) وبسّط الناتج.

ب حلّ المعادلة د(س) = ٣

١٢) إذا كانت د(س) = (٢س + ١)(س + ١)، أوجد قيمة:

أ د(٢) ب د(-٢) ج د(٠)

٨-١-ب الدوال المُركَّبة

> يُعدّ ترتيب الحروف في الدالّة المُركّبة مهمًّا لأن (د ∘ ع)(س) ≠ (ع ∘ د)(س). تعني (ع ∘ د)(س) تطبيق د أولاً، ثم ع. بينما تعني (د ∘ ع)(س) تطبيق ع أولاً، ثم د. وبناء على ذلك، فإن الدالّة الأقرب إلى س تُطبّق أولاً.

الدالّة المُركَّبة هي دالّة الدالّة. تجد الدالّة المُركَّبة عندما تُطبّق دالّة على عدد ما، ثم تُطبّق دالّة أخرى على الناتج.

انظر إلى الدالتَين: د(س) = ٢س + ١، ع(س) = س^{٢}

د(٤) = ٢(٤) + ١ = ٩ (٩ هي ناتج التطبيق في الدالّة الأولى)

ع(٩) = ٩^{٢} = ٨١ (يطبّق الناتج في الدالة ع)

لاحظ أنه تم تركيب الدالتين د(س)، ع(س) لتكوين دالة واحدة، حيث يمكنك أن تكتب ذلك في صورة ع [د(٤)] = ٨١؛ ويمكنك أن تُهمل القوس الكبير وتكتب فقط (ع∘د)(٤) = ٨١، تُسمّى (ع∘د)(س) الدالّة المُركَّبة، وتقرأ ع بعد د.

مثـــال ٥

إذا كانت د(س) = س^{٢} − ٢س، ع(س) = ٣ − س، أوجد قيمة:

أ (ع∘د)(٤) ب (د ∘ ع)(٤) ج (د∘د)(⁻١) د (ع ∘ ع)(١٠٠)

الحـــلّ:

أ	(ع∘د)(٤) = ع [د(٤)] = ع(١٦ − ٨) = ع(٨) = ٣ − ٨ = ⁻٥	أوجد د(٤) أوّلاً.
ب	(د ∘ ع)(٤) = د [ع(٤)] = د(٣ − ٤) = د(⁻١) = (⁻١)^{٢} − ٢(⁻١) = ٣	أوجد ع(٤) أوّلاً.
ج	(د∘د)(⁻١) = د [د(⁻١)] = د(١ + ٢) = د(٣) = ٩ − ٦ = ٣	أوجد د(⁻١)، ثم طبِّق الناتج في د(س).
د	(ع ∘ ع)(١٠٠) = ع [ع(١٠٠)] = ع(٣ − ١٠٠) = ع(⁻٩٧) = ٣ − (⁻٩٧) = ١٠٠	أوجد ع(⁻١٠٠)، ثم طبِّق الناتج في ع(س).

يمكنك أيضًا تركيب دالّتَين جبريًّا .

مثــال ٦

إذا كان د(س) = ٢س + ٥، ع(س) = س^{٢} − س، أوجد دالّة مُنفرِدة تساوي:

أ (د ∘ ع)(س)   ب (ع ∘ د)(س)   ج (د ∘ د)(س)

الحــلّ:

أ (د ∘ ع)(س) تعني د(ع(س)) = د(س^{٢} − س) ∵ د(س) = ٢س + ٥ ∴ د(س^{٢} − س) = ٢(س^{٢} − س) + ٥ (د ∘ ع)(س) = ٢س^{٢} − ٢س + ٥	ابدأ باستخدام الدالّة ع(س) = س^{٢} − س، ثم عوِّض عن الناتج في د(س). استبدل كل س بـ (س^{٢} − س). بسِّط.
ب (ع ∘ د)(س) تعني ع(د(س)) = ع(٢س + ٥) ∵ ع(س) = س^{٢} − س ∴ ع(٢س + ٥) = (٢س + ٥)^{٢} − (٢س + ٥) (ع ∘ د)(س) = ٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥ − ٢س − ٥ = ٤س^{٢} + ١٨س + ٢٠	ابدأ باستخدام الدالّة د(س) = ٢س + ٥، ثم عوِّض عن الناتج في ع(س) استبدل كل س بـ (٢س + ٥) بسِّط.
ج (د ∘ د)(س) تعني د(٢س + ٥) ∵ د(س) = ٢س + ٥ ∴ د(٢س + ٥) = ٢(٢س + ٥) + ٥ (د ∘ د)(س) = ٤س + ١٠ + ٥ (د ∘ د)(س) = ٤س + ١٥	ابدأ باستخدام الدالّة د(س) = ٢س + ٥، ثم عوِّض عن الناتج في د(س). استبدل كل س بـ (٢س + ٥) بسِّط.

مثــال ٧

إذا كانت د(س) = س^{٢} − ٢س، ع(س) = ٣ − س

أ أوجد دالّة مُنفرِدة تساوي (ع ∘ د)(س).

ب استخدم هذه الدالّة لتجد قيمة (ع ∘ د)(٤).

الحــلّ:

أ (ع ∘ د)(س) تعني ع(د(س)) = ع(س^{٢} − ٢س) ∵ ع(س) = ٣ − س ∴ ع(س^{٢} − ٢س) = ٣ − س^{٢} + ٢س	ابدأ باستخدام الدالّة د(س) = س^{٢} − ٢س، ثم عوِّض عن الناتج في ع(س). استبدل كل س بـ (س^{٢} − ٢س)

ب (ع ∘ د)(٤) = ٣ − (٤)^{٢} + ٢(٤) (ع ∘ د)(٤) = ٣ − ١٦ + ٨ = −٥	استخدم ع(د(س)) = ع(س^{٢} − ٢س) = ٣ − س^{٢} + ٢س، ثمّ عوّض عن س = ٤ ويكون هذا هو الناتج نفسه الذي حصلت عليه بطريقة مختلفة في الجزئية (أ) من المثال (٥)

تمارين ٨-١-ب

١) لكلّ زوج من الدوال التالية، أوجد قيمة (د ∘ ع)(س)، (ع ∘ د)(س):

أ د(س) = س + ٦
ع(س) = س − ٣

ب د(س) = ٢س^{٢} − ٣س + ١
ع(س) = ٥ س

ج د(س) = ٣س^{٢} − ٤س + ٢
ع(س) = ٣س − ٢

د د(س) = $\frac{٤س}{٣}$
ع(س) = س^{٢} − ٩

٢) إذا كانت د(س) = ٢س، ع(س) = −س، أوجد:

أ (د ∘ ع)(س) **ب** (د ∘ ع)(٢) **ج** (د ∘ د)(٤) **د** (ع ∘ د)(١)

٣) إذا كانت د(س) = ٣س + ١، هـ(س) = ٦س^{٢}، أوجد:

أ (د ∘ د)(س) **ب** (د ∘ هـ)(س) **ج** (هـ ∘ هـ)(−٢)
د (هـ ∘ د)(−٢) **هـ** (هـ ∘ د)($\frac{٢}{٥}$)

٤) إذا كانت ع(س) = س^{٢} + ١، هـ(س) = ٢س + ٣؛ أوجد:

أ (ع ∘ هـ)(١) **ب** (هـ ∘ ع)(١) **ج** (ع ∘ ع)(٢) **د** (هـ ∘ هـ)(٥)

٥) أوجد (ع ∘ هـ)(٤)، (هـ ∘ ع)(٤) إذا كانت ع(س) = $\frac{١}{س}$، هـ(س) = $\frac{١}{س + ١}$.

٦) إذا كانت د(س) = ٨ − س^{٢}، ع(س) = س^{٢} − ٨، أوجد:

أ (د ∘ ع)(س) **ب** (ع ∘ د)(س) **ج** (د ∘ د)(س) **د** (ع ∘ ع)(س)

٧) إذا كانت د(س) = ٢س − ٥، هـ(س) = $\frac{١}{س}$، أوجد قيمة:

أ د(−١٠) **ب** هـ($\frac{٢}{٣}$) **ج** (هـ ∘ د)($\frac{٥}{٧٠}$)
د (هـ ∘ د)(٤) **هـ** (د ∘ د)(٠)

٨) إذا كانت د(س) = س^{٤}، ع(س) = $\sqrt{(س^{٢} + ٣٦)}$، أوجد قيمة:

أ (د ∘ ع)(س) **ب** (ع ∘ د)(س) **ج** (د ∘ د)(٠) **د** (ع ∘ ع)(−٢)

لإيجاد تركيب ثلاث دوال، ابدأ أولا بإيجاد د(١)، ثم أوجد ع(د(١))، وأخيراً أوجد هـ(ع(د(١)))

٩) إذا كانت د(س) = −س، ع(س) = س − ١، هـ(س) = $\frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٢}}$، بيّن لماذا ليس مُمكنًا إيجاد قيمة (هـ ∘ ع ∘ د)(١).

١٠) إذا كانت الدالّة د(س) = $\frac{\text{س} + \text{١}}{\text{س} - \text{١}}$، أثبت أن (د ∘ د)(س) = س

٨-١-ج الدوال العكسية

معكوس أي دالّة (د) هو الدالّة التي تعمل عكس عمل الدالّة د بمعنى آخر، الدالّة التي تلغي تأثير الدالّة د، فإذا كانت الدالّة د تُحوِّل ٤ إلى ١٣، فإن معكوس الدالّة د يُحوِّل ١٣ إلى ٤

حقيقة الأمر أنّك، إذا طبّقت الدالّة د على عدد، ثم طبّقت معكوس الدالّة د على الناتج، فسوف تحصل على العدد الذي بدأت به.

يمكنك في الحالات البسيطة إيجاد معكوس الدالّة بالاستقصاء. مثلاً، معكوس س ← س + ٥ هو س ← س − ٥ لأن الطرح هو معكوس الجمع؛ ولكي تلغي زيادة خمسة، عليك أن تطرح خمسة.

وعلى نحو مُماثِل، يكون معكوس س ← ٢ س هو س ← $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$، لأن معكوس الضرب في اثنَين هو القسمة على اثنَين.

يُكتب معكوس الدالّة د في صورة د^{-1}

فإذا كانت د(س) = س + ٥ فإن د^{-1}(س) = س − ٥

وإذا كانت ع(س) = ٢س فإن ع^{-1}(س) = $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$

غير أنّ بعض الدوال ليس لها معكوس. فكّر في الدالّة س ← س^{2}، في هذه الدالّة كل قيمة لـ س تُقابلها قيمة وحيدة لـ س^{2}، وذلك لأن المعكوس (أي الجذر التربيعي) ليس دالّة، لأن للعدد الموجب جذرَين تربيعيَّين، أحدهما موجب والآخر سالب.

إيجاد معكوس الدالّة

هناك طريقتان لإيجاد معكوس الدالّة:

- الطريقة ١: استخدام مُخطّط التدفّق.

تستدعي هذه الطريقة، أن ترسم مُخطّطًا للدالّة، ثم توجِد معكوسها، وذلك 'بعكس' التدفّق من خلال إلغاء العمليات الحسابية التي نفّذتها.

- الطريقة ٢: عكس التحويل

تستدعي هذه الطريقة، أن تستخدم الحقيقة التالية: إذا حوّلت الدالّة د العدد س إلى ص، فإن الدالّة د^{-1} تُحوّل العدد ص إلى س، ولكي تجد د^{-1}، يجب أن تجد قيمة لـ س تتناظر مع قيمة معطاة لـ ص

تُبيّن الأمثلة من ٨ إلى ١١ كيفية إيجاد معكوس بعض الدوال بالطريقتَين المعروضتَين أعلاه.

مثـــال ٨

أوجد معكوس الدالّة د(س) = ٣س − ٤

أ باستخدام مُخطّط التدفّق.

ب باستخدام طريقة عكس التحويل.

الحــلّ:

أ **مُخطّط التدفّق:**

لتكن س المُدخَلة في $د^{-1}$

$\frac{س + ٤}{٣} \leftarrow \boxed{÷٣} \leftarrow \boxed{+٤} \leftarrow$ س

∴ $د^{-1}(س) = \frac{س + ٤}{٣}$

استخدم الطريقة (١)، مُخطّط التدفّق، لتحصل على:

د: المُدخَلة ← $\boxed{×٣}$ ← $\boxed{-٤}$ ← المُخرَجة

$د^{-1}$: المُخرَجة ← $\boxed{÷٣}$ ← $\boxed{+٤}$ ← المُدخَلة.

ب **طريقة عكس التحويل:**

ص = ٣س − ٤

ص + ٤ = ٣س

س = $\frac{ص + ٤}{٣}$

تعرف أن $د^{-1}$ تُحوّل قيَم ص إلى س، $د^{-1}(ص) = \frac{ص + ٤}{٣}$

ويُكتب ذلك عادة بدلالة س

فتكون $د^{-1}(س) = \frac{س + ٤}{٣}$

استخدم الطريقة (٢)، طريقة عكس التحويل.

افترض أن الدالّة تُحوّل س إلى ص (ص هو موضوع الصيغة).

اجعل س موضوع الصيغة بحيث تتحوّل ص إلى س.

مثـــال ٩

أوجد $ع^{-1}(س)$ علمًا بأن ع(س) = ٥ − ٢س

أ باستخدام مُخطّط التدفّق.

ب باستخدام طريقة عكس التحويل.

الحــلّ:

أ **مُخطّط التدفّق:**

لتكن س المُدخَلة في $ع^{-1}$

$\frac{س - ٥}{-٢} \leftarrow \boxed{÷(-٢)} \leftarrow \boxed{-٥} \leftarrow$ س

∴ $ع^{-1}(س) = \frac{س - ٥}{-٢} = \frac{٥ - س}{٢}$

استخدم الطريقة (١)، مُخطّط التدفّق، لتحصل على:

ع: المُدخَلة ← $\boxed{×(-٢)}$ ← $\boxed{+٥}$ ← المُخرَجة

$ع^{-1}$: المُخرَجة ← $\boxed{÷(-٢)}$ ← $\boxed{-٥}$ ← المُدخَلة.

ب **طريقة عكس التحويل:**	
لتكن $\text{ص} = ٥ - ٢\text{س}$	هذا يعني أن ع تُحوّل س إلى ص.
$٢\text{س} = ٥ - \text{ص}$	اجعل س موضوع الصيغة بحيث تتحوّل ص إلى س.
$\text{س} = \frac{٥ - \text{ص}}{٢}$	
$\text{ع}^{-١}$ تُحوّل قيَم ص إلى س،	
$\text{ع}^{-١}(\text{ص}) = \frac{٥ - \text{ص}}{٢}$	
ويُكتب ذلك بدلالة س، فيكون	
$\text{ع}^{-١}(\text{س}) = \frac{٥ - \text{س}}{٢}$	

تمارين ٨-١-ج

أوجد معكوس كل دالّة من الدوال التالية:

١) أ $\text{د}(\text{س}) = ٧\text{س}$ ب $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٧\text{س}^{٣}}$ ج $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$

د $\text{د}(\text{س}) = ٤\text{س} + ٣$ هـ $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س} + ٥$ و $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{٢}$

ز $\text{د}(\text{س}) = ٣(\text{س} - ٢)$ ح $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٩}{٢}$ ط $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س} + ١)}{٤ - \text{س}}$

ي $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٥$ ك $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٣\text{س} + ٨}$ ل $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$

٢) لكلّ زوج من الدوال التالية، حدِّد ما إذا كانت ع(س) دالّة عكسية للدالّة د(س):

أ $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س} - ٦$
$\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{٢} + ٣$

ب $\text{د}(\text{س}) = ١٢\text{س}$
$\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{١٢}$

ج $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س} + ٢$
$\text{ع}(\text{س}) = \text{س} + \frac{٣}{٢}$

د $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٢$
$\text{ع}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س} + ٢}$

٣) إذا كانت $\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{٣} - ٤٤$، أوجد $\text{ع}^{-١}(\text{س})$

٤) لكلّ دالّة من الدوال التالية، أوجد:

(١) $\text{د}^{-١}(\text{س})$ (٢) $(\text{د} \circ \text{د}^{-١})(\text{س})$ (٣) $(\text{د}^{-١} \circ \text{د})(\text{س})$

أ $\text{د}(\text{س}) = ٥\text{س}$ ب $\text{د}(\text{س}) = \text{س} + ٤$ ج $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س} - ٧$

د $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢$ هـ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س} - ١}$ و $\text{د}(\text{س}) = \frac{٩}{\text{س}}$

ز $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ١$

٥) إذا كانت هـ(س) = ٢(س − ٣)، أوجد:

أ هـ$^{-١}$(١٠) ب (هـ ∘ هـ$^{-١}$)(٢٠) ج (هـ$^{-١}$ ∘ هـ$^{-١}$)(٢٦)

٦) إذا علمتَ أن د(س) = $\frac{١}{٢}$س، ع(س) = ٤س − $\frac{٢}{٥}$:

أ حلّ المعادلة د(س) = ٠

ب أوجد ع$^{-١}$(س)

ج حلّ المعادلة د(س) = ع(س) مُقرِّبًا الإجابة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

د أوجد قيمة:

(١) (ع ∘ د)$^{-١}$(−٢) (٢) (د$^{-١}$ ∘ د)(٣) (٣) (د$^{-١}$ ∘ ع$^{-١}$)(٤)

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- الدالّة هي قاعدة تُحوّل كل مُتغيّر إلى مُتغيّر آخر.
- تُكتب الدوال باستخدام رموز مألوفة مثل

  د (س) = س + ٢، د: س ⟵ ٢ − ٣س
- يمكنك أن تستخدم مُخطّط التدفّق لتُمثّل الخطوات في الدالّة.
- الدالّة المُركَّبة هي دالّة الدالّة. ويُعد الترتيب في الدالّة المُركّبة أمرًا مُهمًّا. ذلك أنّ (د ∘ ع) (س) يعني تطبيق ع أوّلاً، ثم د، وتُقرأ د بعد ع.
- الدالّة العكسية دالّة تلغي الدالّة الأصلية، وهي معكوس الدالّة.

يجب أن تكون قادرًا على:

- قراءة واستيعاب واستخدام رمز الدالّة لوصف دوال بسيطة.
- تكوين دوالّ مُركّبة مثل (ع ∘ د) (س) و (د ∘ د) (س).
- إيجاد الدالّة العكسية باستخدام مُخطّط التدفّق.
- إيجاد الدالّة العكسية باستخدام طريقة عكس التحويل.

تمارين نهاية الوحدة

١) د (س)، ع (س)، حيث د : س ← س − ٥، ع: س ← ٥ − س. أيٌّ مّما يلي صواب، وأيُّها خطأ؟

أ د$^{-١}$ = ع

ب ع$^{-١}$: س ← ٥ − س

ج (د ∘ ع): س ← −س

د (د ∘ ع)(س) = (ع ∘ د)(س)

٢) إذا كانت د (س) = ٣س^{٢} − ٣س − ٤، ع (س) = ٤ − ٣س

أ أوجد قيمة د (−٢)

ب حلّ المعادلة د (س) = −٣

ج حلّ المعادلة د (س) = ٠، اكتب إجابتك مُقرّبة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

د حلّ المعادلة ع (س) = ٢ع (س) − ١

هـ أوجد ع$^{-١}$ (س)

٣) إذا كانت د : س ← ٣ − ٤س

أ أوجد د (−١)

ب د$^{-١}$ (س)

ج أوجد (د ∘ د$^{-١}$)(٤)

٤) أوجد قيمة س إذا علمت أن د (س) = $\frac{٥}{٢س - ١}$، د (س) = −٢

مصطلحات علمية

أ

الاتّجاه Trend: هو الاتّجاه العام للمستقيم الأفضل تمثيلًا لمجموعتَي بيانات بمُتغيّرَين. (ص ١٥٣)

الارتباط Correlation: علاقة بين بيانات بمُتغيّرَين. (ص ١٥٣)

الارتباط السالب Negative correlation: اتّجاه في بيانات بمُتغيّرَين حيث تتناقص قيَم أحدهما بتزايُد قيَم المُتغيّر الآخر. (ص ١٥٣)

الارتباط الموجب Positive correlation: اتّجاه في بيانات بمُتغيّرين حيث تتزايد قيَم أحدهما بتزايُد الآخر. (ص ١٥٣)

الاستقراء Extrapolation: قيمة تجدها بتوسيع المستقيم الأفضل تمثيلًا خارج مدى البيانات. (ص ١٥٦)

الأعمدة البيانية Bar graph: تمثيل يُستخدم لعرض البيانات المُنفصِلة باستخدام سلسلة من أعمدة لها العرض نفسه. (ص ٦٩)

الانتشار Spread: مقياس مثل المدى أو المدى الرُّبَيعي. (ص ١١٢)

ب

البرمجة الخطّية Linear programming: طريقة لإيجاد منطقة في المستوى الإحداثي تُحقّق مجموعة من الشروط المُعرّفة بمُتباينات خطّية. (ص ٢٦)

البيانات الأوّلية Primary data: بيانات يجمعها الشخص الذي يريد استخدامها من مصادر أوّلية. (ص ٤٩)

البيانات الثانوية Secondary data: بيانات تُستخدم لأغراض إحصائية، ولا يكون الشخص الذي يقوم بتحليلها هو الذي جمعها. (ص ٤٩)

البيانات العددية Numerical data: بيانات على صورة أعداد. (ص ٤٨)

البيانات الكمّية Quantitative data: اسم آخر للبيانات العددية. (ص ٤٨)

البيانات المُجمّعة Grouped data: تجميع قيَم البيانات الفردية في فئات مناسبة. تُستخدم عادة في البيانات المُتّصلة. (ص ١٢٥)

البيانات المُتّصلة Continuous data: نقول عن البيانات إنّها مُتّصلة عندما تأخذ أي قيمة في الفئة، مثل الطول أو الكتلة. (ص ٤٩)

البيانات المُصنّفة data Categorical: بيانات غير عددية. (ص ٤٨)

البيانات المنفصلة Discrete data: نقول عن البيانات إنّها مُنفصِلة عندما تأخذ بعض القيَم فقط (أعدادًا صحيحة، في العادة). (ص ٤٩)

البيانات النوعية Qualitative data: اسم آخر للبيانات المُصنّفة. (ص ٤٨)

بيانات بمُتغيّرَين Bivariate data: مجموعتا معلومات حول موضوع واحد، مثل أطوال مجموعة من الأشخاص وكتلهم. (ص ١٥٢)

ت

التحويل Conversion: تغيير كمّية ما أو وحدة قياس ما إلى ما يُعادلها في وحدة أخرى. (ص ١٦)

التكرار Frequency: عدد مرّات حدوث قيمة مُحدّدة. (ص ١٦٠)

التكرار التراكُمي Cumulative frequency: مجموع مُستمرّ للتكرارات. (ص ١٧٠)

التمثيل بالمُصوّرات Pictogram: مُخطّط يستخدم الرموز أو المُصوّرات الصغيرة لتمثيل البيانات. (ص ٦٦)

التناسُب الطردي Direct proportion: تزايُد كمّيتَين أو تناقُصهما بالمُعدّل نفسه. (ص ١٤٤)

التناسُب العكسي Inverse proportion: تناقُص كمّية ما بمُعدّل تزايُد كمّية أخرى. (ص ١٤٤)

ث

ثابت التناسُب Constant of proportionality: عدد يربط بين جزأين في علاقة تناسُب. (ص ١٤٤)

ج

الجبري Algebraic: ما يتضمّن الجبر. (ص ٨٤)

الجداول المُزدوجة Two-way table: جدول يلخّص البيانات من مجموعتَي بيانات أو أكثر. (ص ٦١)

الجدول التكراري Frequency table: طريقة لتلخيص البيانات عندما تظهر القيَم أو الفئات أكثر من مرّة. (ص ١٦٢)

د

الدالّة Function: قاعدة أو مجموعة من التعليمات هدفها تغيير عدد ما (المُدخَل) إلى عدد آخر (المُخرَج). (ص ١٨٨)

الدالّة العكسية Inverse function: دالّة تعمل عكس عمل الدالة الأصلية. (ص ١٩٥)

الدالّة المُركّبة Composite function: هي دالّة الدالّة. وتجدها عندما تُطبِّق دالّة على عدد ما، ثم تُطبّق دالّة أخرى على الناتج. (ص ١٩٢)

ر

الرُّبَيع Quartile: قيمة من البيانات تقع عند ربع أو ثلاثة أرباع البيانات، بعد ترتيبها تصاعُديًا. (ص ١٧٧)

الرُّبَيع الأدنى Lower quartile: قيمة المئيني الخامس والعشرين في مجموعة البيانات. (ص ١٢٩)

الرُّبَيع الأعلى Upper quartile: قيمة في مجموعة البيانات تقع عند المئيني الخامس والسبعين. (ص ١٢٩)

ش

الشكل الرباعي الدائري Cyclic quadrilateral: شكل رباعي تقع رؤوسه على محيط الدائرة. (ص ١٠١)

ص

صيغة الدالّة Functionnotation: طريقة رياضية رديفة لكتابة المعادلات (الدوال). (ص ١٨٨)

ف

الفئة المنوالية Modal class: الفئة ذات التكرار الأكبر في البيانات المُتّصلة. (ص ١٦٢)

الفرق بين مُربّعَين Difference between two squares: طريقة لتحليل حد مُربّع مطروح من حد مُربّع آخر إلى عوامل. (ص ٨٥)

ق

القطعة المُتبادلة Alternate segment: هي القطعة التي لا تُقابل الزاوية المرسومة بين مماس ووتر في دائرة. (ص ١٠٥)

القوس Arc: جزء من محيط الدائرة. (ص ١٠١)

ك

كثافة التكرار Frequency density: ناتج قسمة تكرار الفئة على طول الفئة. وهي تظهر على المحور الصادي للمُدرّج التكراري. (ص ١٦٥)

الكسر الجبري Algebraic fraction: كسر يحتوي على عبارات جبرية. (ص ٨٤)

ل

لا يوجد ارتباط No correlation: عدم وجود ارتباط واضح بين قيَم مجموعتَين من البيانات. (ص ١٥٣)

م

المئيني Percentile: قيمة من البيانات تتّخذ موقعًا مُحدّدًا عند تقسيم البيانات إلى ١٠٠ قسم متساوٍ (يجب ترتيب البيانات تصاعُديًا). المئيني الخامس والعشرون، مثلًا، يقع عند ٢٥٪ من البيانات، ويسمى أيضًا بالرُّبَيع الأدنى. (ص ١٢٩)

المُتغير التابع Dependent variable: مُتغيّر تعتمد قيمته على قيمة مُتغيّر آخر. (ص ١٥٢)

مُخطّط الانتشار Scatter diagram: مُخطّط يعرض أزواج بيانات بمُتغيّرَين، حيث يساعد على تحديد وجود ارتباط بين المُتغيّرَين أو عدمه. (ص ١٥٢)

المُخطّط الدائري Pie chart: مُخطّط يستخدم القطاعات الدائرية لعرض البيانات. (ص ٧٣)

مُخطّط الساق والورقة Stem-and-leaf diagram: نوع من الجداول مُرتبط بالتمثيل بالأعمدة البيانية. يقوم على تنظيم البيانات العددية في جدول، حيث يُمثّل رقم الآحاد لكل قيمة الورقة، وتُمثّل الأرقام المتبقّية الساق. (ص ٥٧)

المُخطّط الصندوقي Boxplot: مُخطّط يعرض الوسيط والرُّبَيعات والمدى، ويعطي انطباعًا بصريًا عن توزيع مجموعة البيانات. (ص ١٣٥)

المُدرّج التكراري Histogram: تمثيل بياني يُستخدم لعرض البيانات المُتّصلة، حيث يتمثّل التكرار بالمساحة. (ص ١٥١)

المدى Range: أحد مقاييس الانتشار. الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في قيَم البيانات. (ص ١١٦)

المدى الرُّبَيعي Interquartile range: الفرق بين الرُّبَيعَين الأعلى والأدنى. (ص ١٧٧)

المسافات المتساوية Equidistant: مسافات تبعد المسافة نفسها عن جسم ما. (ص ٩٤)

المستقيم الأفضل تمثيلاً Line of best fit: خط يعرض الاتّجاه في مخطط الانتشار، ويكون قريبًا من أكبر عدد ممكن من النقاط. (ص ١٥٣)

مُعدّل الصرف Exchange rate: قيمة للتحويل من عُملة إلى عُملة أخرى. (ص ١٧)

المعكوس Inverse: معكوس الدالة د هو دالة تعمل عكس عمل الدالة د. (ص ١٩٥)

المُقابل subtend: زاوية تتشكّل عند تقاطُع قطعتَين مستقيمتَين. (ص ٩٦)

المماس Tangent مستقيم يلامس المنحنى في نقطة واحدة فقط. (ص ٢٩)

المنحنى التكراري التراكُمي Cumulative frequency curve: منحنى يتشكّل باستخدام التكرارات التراكمية كقيَم على المحور الرأسي. (ص ١٧٠)

المُنصّف العمودي Perpendicular bisector: مستقيم يتقاطع مع القطعة المستقيمة عند منتصفها ويتعامد معها. (ص ٩٤)

المنطقة Region: مساحة في التمثيل البياني ثنائي الأبعاد، تحقّق مجموعة من المُتباينات الخطّية. (ص ١٩)

المنوال Mode: مقياس إحصائي قيمته هي القيمة الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات. (ص ١١٢)

و

الوتر Chord: قطعة مستقيمة طرفاها نقطتان على محيط الدائرة. (ص ٩٤)

الوسط الحسابي Mean: مقياس إحصائي يشارك قيَم البيانات بالتساوي. وهو يستخدم كل قيَم البيانات. (ص ١١٢)

الوسط الحسابي التقديري Estimated mean: تقدير الوسط الحسابي لبيانات مُجمّعة. (ص ١٢٥)

الوسيط Median: مقياس إحصائي قيمته تقع في منتصف مجموعة البيانات عند ترتيبها تصاعُديًّا أو تنازليًّا. (ص ١١٢)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم في الإعراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Prisma/UIG/Getty Images; Rolfo Rolf Brenner/Getty Images; andersr/Getty Images; bogdanhoda/Shutterstock; Dominic Dudley/Pacific Press/LightRocket via Getty Images; David Burrows/Shutterstock; MARWAN NAAMANI/AFP via Getty Images; GIUSEPPE CACACE/AFP via Getty Images; Angyalosi Beata/Shutterstock; Foodpics/ Shutterstockr uzanna/Shutterstock; Arocha Jitsue/Shutterstock; Tom Dulat/Getty Images; Microgen/Shutterstock; Ministry of Education, Oman; S. Borisov/Shutterstock; Ministry of Education, Oman; Ministry of Education, Oman; Adisa/Shutterstock; TongRo Images / Alamy Stock Photo; ImageFlow/Shutterstock; KARIM JAAFAR / AFP) (Photo by KARIM JAAFAR/AFP via Getty Images; Carlos andre Santos/Shutterstock; Rolf Richardson / Alamy Stock Photo;S_E/Shutterstock; mauritius images GmbH / Alamy Stock Photo; Littlebloke/iStock/Getty Images Plus/Getty Images;Axel Heizmann/ EyeEm/Getty Images; DEA PICTURE LIBRARY/De Agostini/Getty Images; TERRY MCCORMICK/GI; "KTSDESIGN/Science Photo Library/Getty Images; akiyoko/ Shutterstock; Beata Tabak/Shutterstock; Panoramic Images/Getty Images; Image Source/GI; Rathna Thamizhan/Shutterstock; Fat Jackey/Shutterstock; Vitoria Holdings LLC/Shutterstock; Mahmoud Ghazal/Shutterstock; Richard Sharrocks/GI;Philip Lange/ Shutterstock; JOSEPH EID/AFP via Getty Images; JohnFScott DeAgostini/Getty Images; MOHAMMED MAHJOUB/AFP via Getty Images; Oman Ministry of Education; Stefan Cioata/Moment/Getty Images; Nick Brundle Photography/Moment/Getty Images; Pearl-diver/Shutterstock; Natali _ Mis/Shutterstock; PROFFIPhoto/Shutterstoc

مزون للطباعة والنشر والتغليف (ش.م.م) - ٢٤٨١٥٦٩٣

الرياضيات

كتاب الطالب ١٠

يزخر كتاب الطالب بالعديد من الموضوعات مع شرح واضح وسهل لكل المفاهيم المتضمنة في هذه الموضوعات، تليها تمارين تطبيقية لاختبار مدى فهم الطالب وللسماح له بتعزيز وممارسة المهارات الرياضية المطلوبة.

يتضمن كتاب الطالب:

- أقسام تذكر للمعرفة السابقة والتحقق من التعلم السابق
- تمارين في نهاية كل موضوع لتعزيز الفهم.
- أسئلة في نهاية كل وحدة من شأنها تأهيل الطلاب لخوض الاختبارات.
- قاموس للمصطلحات يرد في آخر الكتاب.
- تمارين ومسائل عامة تتناول جميع الموضوعات التي تم تغطيتها في كل وحدة.
- إرشادات لمساعدة الطلاب على حل التمارين، بما في ذلك الأمثلة المحلولة والملاحظات المفيدة.

يشمل منهج الرياضيات للصف العاشر من هذه السلسلة:

- كتاب النشاط
- دليل المُعلِّم

www.moe.gov.om