سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات

كتاب الطالب

٩

الفصل الدراسي الثاني

الطبعة التجريبية ١٤٤٢هـ - ٢٠٢٠م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

كتاب الطالب

٩

الفصل الدراسي الثاني

الطبعة التجريبية ١٤٤٢هـ - ٢٠٢٠م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٠ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف التاسع – من سلسلة
كامبريدج للرياضيات الأساسية والمُوسَّعة IGCSE للمؤلفَين كارين مورّيسون ونيك هامشاو.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج رقم ٤٠ / ٢٠٢٠ .

تمَّت مواءمة الكتاب

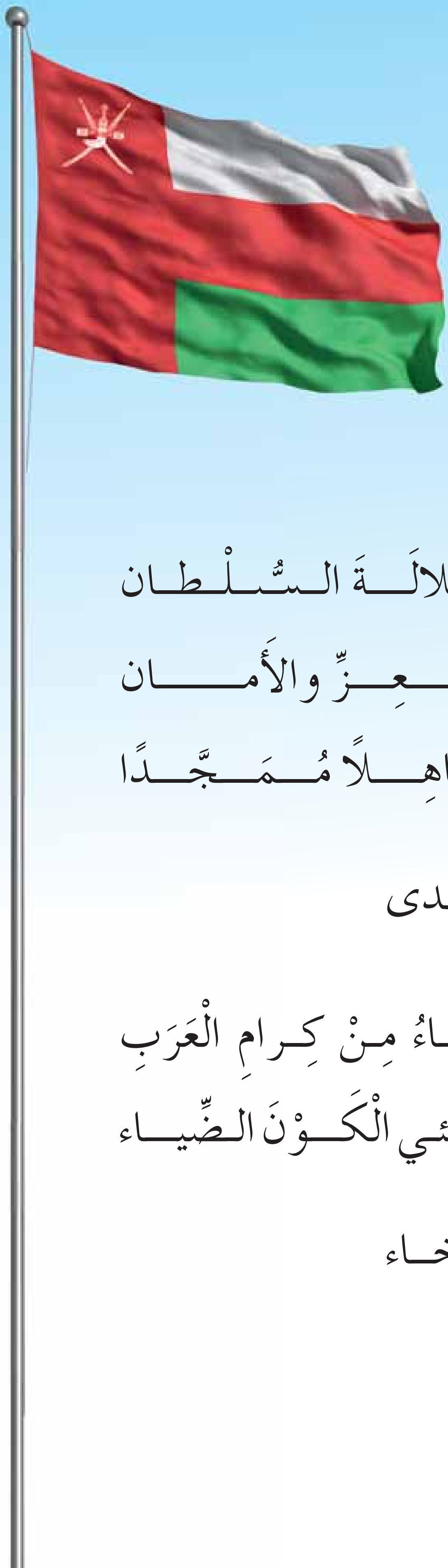
بموجب القرار الوزاري رقم ٣٠٢ / ٢٠١٩ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد -طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالـة
السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم

سلطنة عُمان

الجمهورية الإسلامية الإيرانية
مضيق هرمز
الخليج العربي
الإمارات العربية المتحدة
بحر عُمان
المملكة العربية السعودية
الجمهورية اليمنية
بحر العرب
محافظة مسندم
خصب
بخاء
دبا
مدحاء
(سلطنة عمان)
شناص
لوى
صحار
ميناء صحار
مطار صحار
صحم
الخابورة
السويق
المصنعة
جزر الديمانيات
بركاء
السيب
مطار مسقط الدولي
ميناء السلطان قابوس
مطرح
مسقط
بوشر
العامرات
قريات
محافظة مسقط
محافظة البريمي
البريمي
محضة
محافظة شمال الباطنة
محافظة جنوب الباطنة
السنينة
ضنك
ينقل
عبري
محافظة الظاهرة
الرستاق
العوابي
نخل
وادي المعاول
سمائل
بدبد
الحمراء
بهلاء
نزوى
إزكي
منح
أدم
محافظة الداخلية
دماء والطائيين
محافظة شمال الشرقية
إبراء
المضيبي
القابل
وادي بني خالد
بدية
صور
محافظة جنوب الشرقية
الكامل والوافي
جعلان بني بو حسن
جعلان بني بو علي
محوت
مصيرة
محافظة الوسطى
هيماء
الدقم
ميناء الدقم
مطار الدقم
مقشن
الجازر
محافظة ظفار
شليم وجزر الحلانيات
جزر الحلانيات
المزيونة
ثمريت
حبروت
صلالة
مطار صلالة
ميناء صلالة
طاقة
مرباط
سدح
رخيوت
ضلكوت
52° شرقا
54° شرقا
56° شرقا
58° شرقا
60° شرقا
26° شمالا
24° شمالا
22° شمالا
20° شمالا
18° شمالا
أنتجت بالهيئة الوطنية للمساحة ، وزارة الدفاع، سلطنة عُمان 2018 م .
حقوق الطبع © محفوظة للهيئة الوطنية للمساحة، وزارة الدفاع، سلطنة عُمان 2018م .
لا يعتد بهذه الخريطة من ناحية الحدود الدولية .
عاصمة ....
ميناء ....
مطار ....
طريق مرصوف.......
طريق ممهد..........
الحدود الدولية.........
0
50
100
150
200 Km



النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لَنا   جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان   بِالْعِزِّ والأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا   عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي   أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء   وَامْلَئي الْكَوْنَ الضِّياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد للّه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّه ورعاه.

واللّه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

الوحدة السادسة عشرة: المساحة والحجم

الوحدة السابعة عشرة: النقود

المقدمة

يرتكز هذا الكتاب المدرسي على كتاب معروف وناجح تمَّت كتابته للمرة الأولى بالاستناد إلى منهج كامبريدج IGCSE في الرياضيات (٠٥٨٠ / ٠٩٨٠). وهو يُغطّي المنهج الدراسي بأكمله ضمن مجموعة متكاملة تُعطى لجميع الطلاب والمعلمين.

تمّ تأليف الكتاب، بحيث تستطيع العمل فيه بالتدرُّج من البداية إلى النهاية. تعتمد جميع الوحدات على المعرفة والمهارات التي تعلّمتها في السنوات السابقة، وتُبنى بعض الوحدات اللاحقة على المعرفة التي تم تطويرها في الكتاب من قبل. وسوف تُساعدك فقرات 'فائدة' و'سابقًا' 'ولاحقًا' على ربط محتوى الوحدات بما تعلَّمته سابقًا، والإضاءة على المكان الذي ستستخدم فيه تلك المعرفة مرّة أخرى في الدروس اللاحقة.

المسار المقترح للعمل في الكتاب هو:

الفصل الدراسي الأول للصفّ التاسع: الوحدات من ١ إلى ٩

الفصل الدراسي الثاني للصفّ التاسع: الوحدات من ١٠ إلى ١٧

فائدة

يجب أن تكون معظم مفاهيم الأعداد مألوفة لديك. سوف تُساعدك هذه الوحدة على مراجعة المفاهيم والتحقُّق من تذكُّرها.

سابقًا

من المهم أن تتذكر قواعد ترتيب العمليات الحسابية قبل البدء بهذا الدرس. ◀

لاحقًا

لاحقًا، ستتعامل مع ضرب وقسمة وجمع وطرح الكسور مرة ثانية عند التعامل مع المقادير الجبرية. ◀

ميزات رئيسية

تُفتتَح كل وحدة بقائمة مُفردات رياضية رئيسية وقائمة أهداف ستتعلَّمها في الوحدة، ومُقدِّمة تعرض نظرة عامَّة عن كيفية استخدام الرياضيات في الحياة الواقعية.

ويُشار إلى **المفردات الرياضية الرئيسية** في متن الدروس باللون الأزرق، حيث يتمّ استخدامها وشرحها.

تقسم الوحدات إلى أقسام (دروس)، يُغطّي كل منها موضوعًا مُعيَّنًا، ويتم تقديم وشرح المفاهيم في كل موضوع، وإعطاء أمثلة لتقديم طرائق مختلفة للعمل بطريقة عملية وسهلة المُتابَعة.

تُقدِّم **التمارين** الخاصّة بكل موضوع أسئلة مُتنوِّعة، وبمستويات مختلفة، تسمح للطالب بالتدرُّب على الأساليب التي تم تقديمها في الدرس، وتتراوح هذه التمارين بين الأنشطة البسيطة والتطبيقات وحل المسائل.

يرد مُلخّص لكل وحدة تُعرَض فيه المعارف والمهارات التي يجب أن تمتلكها عند الانتهاء من العمل في الوحدة، حيث يمكنك استخدام هذا المُلخَّص كقائمة عند المراجعة، للتحقّق من تغطية المطلوب معرفته في الوحدة.

ترد بعض التمارين الموجزة في نهاية كل وحدة.

مُميّزات في الهامش

تتضمّن الإرشادات المُفيدة في هوامش الكتاب ما يلي:

مفاتيح: وهي تعليقات عامّة تُذكِّرك بمعلومات مُهمَّة أو أساسية مُفيدة للتعامُل مع تمرين ما، فهي توفِّر معلومات إضافية أو دعمًا إضافيًا في موضوعات قد تكون مُلتبِسة.

تذكر أن 'المعامل' هو العدد الذي يقع إلى جانب المتغير في الحد.

مساعدة: تُغطّي الأخطاء الشائعة بناءً على تجارب المعلّمين مع طلبتهم، وتمنحك أشياء يجب أن تتذكّرها أو أن تكون حذرًا منها.

مُساعَدة

انتبه للأعداد السالبة التي تسبق الأقواس لأنها تحتاج دائمًا إلى اهتمام مضاعف.

مساعدات في حل المسائل: أثناء عملك في العام الدراسي، سوف تُطوِّر 'صندوق الأدوات' الخاص بك والمُتعلِّق بمهارات واستراتيجيات حل المسائل، وسوف يُذكِّرك هذا الصندوق بإطار حل المسائل ويحثّك على اقتراح طرائق لمعالجة أنواع مختلفة من المسائل.

يعتبر تحويل المعلومات من صيغ لفظية إلى مخططات أو معادلات من الاستراتيجيات المفيدة لحل المسائل.

روابط مع موضوعات أخرى: لا يتمّ تعلُّم مادة الرياضيات بمعزل عن المواد الأخرى، وسوف تستخدم وتُطبّق ما تتعلَّمه في الرياضيات على العديد من المواد الدراسية الأخرى، وتُشير هذه النوافذ إلى كيفية الاستفادة من المفاهيم الرياضية في موضوعات أخرى.

مصادر إضافية

دليل المعلم: هذا الكتاب متوفر لمُعلّميك، وهو يتضمَّن، إضافة إلى الأشياء الأخرى، بطاقات مراجعة لكل وحدة، بالإضافة إلى إجابات جميع التمارين وتمارين نهاية الوحدة.

كتاب النشاط: يتبع هذا الكتاب وحدات ودروس كتاب الطالب، ويُقدِّم تمارين إضافية هادفة لمن يرغب منكم في المزيد من التدريبات، ويتضمّن أيضًا مُلخَّصًا للمفاهيم الأساسية، إضافة إلى 'المفاتيح' و'المساعدات' بهدف توضيح الموضوعات المرتبطة بها.

الوحدة العاشرة: النِّسب المِئويَّة والنسبة والتناسُب

اشتُهر العمانيّون مُنذ القِدم بصناعة البخور واستخدامه، واشتهروا أيضًا بصناعة المباخر، وتُبيّن الصورة أعلاه مُجسَّمًا لمبخرة في حديقة ريام بمحافظة مسقط، وهو يُمثّل نسبة ١:١٠٠ من المبخرة الأصليَّة، أي أنَّه أكبر منها بمئة مرَّة.

تُعرَف النسبة بأنها مُقارَنة بين كمّيتَين بترتيب مُحدَّد، ويُعبَّر عن الكمّيتَين بنفس الوحدات، وتُسمّيان حدَّي النسبة، وتُكتَب النسبة عادة في صورة أ : ب، ولكن لا تُعطى القياسات الحقيقية في النسبة، فالمُهمّ هو التناسُب بين الكمّيتَين، وتُستخدَم النسبة عند التعامُل مع مقياس الرسم على الخرائط والنماذج والمُخطَّطات.

المُفردات

- النسبة المئوية للزيادة Percentage increase
- النسبة المئوية للنقصان Percentage decrease
- النسبة المئوية العكسية Reverse percentage
- النسبة Ratio
- مقياس الرسم Scale drawing
- التناسُب الطردي Direct proportion
- طريقة الوحدة Unitary method
- طريقة النسبة Ratio method
- التناسُب العكسي Inverse proportion

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تحسب النسبة المئوية للزيادة والنسبة المئوية للنقصان.
- تجد الزيادة أو النقصان بمعلومية نسبة مئوية معطاة.
- تتعامل مع النسبة المئوية العكسية.
- تكتب العلاقات باستخدام صيغة النسبة.
- تجد إحدى الكمّيتَين بمعلومية الكمّية الأخرى.
- تقسم الكمّيات بنسبة مُعطاة.
- تتحقَّق من منطقيَّة مقياس الرسم على الخريطة والنماذج والمُخطَّطات.
- تفهم المقصود من التناسُب الطردي والتناسُب العكسي.
- تحل مسائل تتضمَّن كمّيات مُتناسبة.
- تزيد كمّيات وتُنقصها بنسبة مُعطاة.

١٠-١ النسب المئوية

١٠-١-أ النسبة المئوية للزيادة أو النقصان

افترض أن تكلفة كتاب قد ازدادت من ٤ ريالات عُمانيّة إلى ٥ ريالات عُمانيّة، بمعنى أن قيمة الزيادة الفعلية تساوي ١ ريالاً عُمانيًّا، ويُعبّر عن هذه الزيادة في صورة كسر من القيمة الأصلية: $\frac{١}{٤}$، ويمكنك كتابة هذا الكسر على صورة ٢٥٪. وهذا يعني أن سعر الكتاب ازداد بنسبة ٢٥٪ من قيمته الأصلية، وهو ما يُسمّى **بالنسبة المئوية للزيادة**، ولكن إذا انخفض السعر (مثلاً إذا تمّ خصم سعر إحدى السلع في المتجر)، يُسمّى ذلك **النسبة المئوية للنقصان**.

انتبه وأنت تكتب الزيادة أو النقصان في صورة نسبة مئوية، بحيث تكون نسبة مئوية من القيمة الأصلية.

مثال ١

ارتفع سعر منزل من ٥٠٠٠٠ ريال عُماني إلى ٥٢٠٠٠ ريال عُماني خلال الفترة من شهر أغسطس إلى شهر ديسمبر. ما النسبة المئوية للزيادة؟

الحـــلّ:

٥٢٠٠٠ − ٥٠٠٠٠ = ٢٠٠٠ ريال عماني	احسب أوّلاً مقدار الزيادة.
النسبة المئوية للزيادة = $\frac{\text{مقدار الزيادة}}{\text{السعر الأصلي}}$ × ١٠٠٪	اكتب النسبة المئوية للزيادة في صورة كسر من السعر الأصلي، ثمّ اضرب في ١٠٠
= $\frac{٢٠٠٠}{٥٠٠٠٠}$ ×١٠٠٪ = ٤٪	نفّذ العمليات الحسابية (إمّا ذهنيًّا أو باستخدام الآلة الحاسبة).

تمارين ١٠-١-أ

طبّق مهاراتك

في التمارين التالية اكتب إجابتك في صورة نسبة مئوية مُقرَّبة إلى أقرب عدد كامل، إن أمكن ذلك:

١) خلال خمس سنوات، نقص عدد سكّان إحدى الدول من ٤٤٦٨٩٧٦ نسمة إلى ٤٢٨٧٧٦٨ نسمة. أوجد النسبة المئوية للنقصان في عدد سكّان هذه الدولة.

٢) اشترى سامي ٣٨ قرصًا مضغوطًا في إحدى السنوات، واشترى ٤٦ قرصًا مضغوطًا في السنة اللاحقة. أوجد النسبة المئوية للزيادة في عدد الأقراص المضغوطة التي اشتراها.

٣) يتّسع مسرح لـِ ٤٥٠ مُشاهدًا ويُتوقّع بعد تجديده أن يتّسع لـ ٤٨٠ مُشاهدًا. أوجد النسبة المئوية للزيادة في عدد مُشاهدي المسرح.

٤) تعمل سميرة في قسم الأدوات الكهربائية بأحد المصانع. جمّعت يوم الأحد ٣٦٣ قطعة كهربائية وجمّعت يوم الاثنين ٤٣٢ قطعة كهربائية. أوجد النسبة المئوية للزيادة في عدد القطع التي جمّعتها يوم الاثنين عن يوم الأحد.

٥) وصل عدد المسافرين بين مطارَي مسقط الدولي وصلالة في عام ٢٠١٨م إلى ١٢٥٠٧٨٨٥ مُسافرًا، بينما كان عدد المُسافرين بين المطارَين في عام ٢٠١٧م ١١٦٠٠٧٦٠ مُسافرًا. أوجد النسبة المئوية للزيادة في عدد المسافرين بين عامَي ٢٠١٧م و ٢٠١٨م.

٦) نقصت كتلة سائل في دورق مختبر من ٠,٣٢ كغم إلى ٠,١٨ كغم. احسب النسبة المئوية للنقصان في كتلة السائل.

١٠-١-ب الزيادة أو النقصان بمعلومية نسبة مئوية مُعطاة

إذا عرفتَ النسبة المئوية التي ترغب في استخدامها لزيادة كمّية ما أو نقصانها، يمكنك إيجاد مقدار الزيادة الفعلية أو مقدار النقصان الفعلي بإيجاد النسبة المئوية للكمّية الأصلية، فإذا رغبت في معرفة الكمّية الجديدة، أضف مقدار الزيادة إلى الكمّية الأصلية، أو اطرح مقدار النقصان منها.

تذكّر دائمًا بأنك تحسب النسبة المئوية من القيمة الأصلية.

مثـال ٢

أوجد قيمة العدد ٥٦ بعد زيادته بنسبة: أ ٤٪ ب ١٠٪ ج ١٥٪

الحـلّ:

أ	٤٪ من ٥٦ = $\frac{٤}{١٠٠}$ × ٥٦ = $\frac{١}{٢٥}$ × ٥٦ = ٢,٢٤ ٥٦ + ٢,٢٤ = ٥٨,٢٤	أوّلاً، عليك إيجاد ٤٪ من ٥٦ لإيجاد مقدار الزيادة. لمعرفة قيمة العدد ٥٦ بعد زيادته بنسبة ٤٪، تحتاج إلى إضافة مقدار الزيادة إلى ٥٦ يمكنك حل السؤال بطريقة أخرى دون الحاجة إلى إيجاد مقدار الزيادة: إذا اعتبرت أن القيمة الأصلية هي ١٠٠٪، أضف ٤٪ إليها لتصبح ١٠٤٪ من القيمة الأصلية. اضرب ٥٦ في $\frac{١٠٤}{١٠٠}$، لتحصل على ٥٨,٢٤
ب	$\frac{١١٠}{١٠٠}$ × ٥٦ = ٦١,٦	زيادة ١٠٪ تُعطي ١١٠٪ من القيمة الأصلية.
ج	$\frac{١١٥}{١٠٠}$ × ٥٦ = ٦٤,٤	زيادة ١٥٪ تُعطي ١١٥٪ من القيمة الأصلية.

مثـــال ٣

في موسم التخفيضات، تمّ خفض أسعار كل السلع بنسبة ١٥٪. احسب سعر بيع درّاجة هوائية سعرها الأصلي ٤٠ ريالاً عُمانيًّا.

الحـــلّ:

١٠٠ − ١٥ = ٨٥ $\frac{٨٥}{١٠٠}$ × ٤٠ = ٣٤ ريالاً عُمانيًّا	عند تخفيض قيمة ما بنسبة ١٥٪ يبقى ٨٥٪ من القيمة الأصلية؛ لذا أوجد فقط ٨٥٪ من القيمة الأصلية.

تمارين ١٠-١-ب

١) أوجد قيمة العدد ٤٠ بعد زيادته بنسبة:

أ ١٠٪ ب ١٥٪ ج ٢٥٪ د ٥٪ هـ ٤٪

٢) أوجد قيمة العدد ٥٣ بعد زيادته بنسبة:

أ ٥٠٪ ب ٨٤٪ ج ١٣,٦٪ د ١١٢٪ هـ $\frac{١}{٢}$٪

٣) أوجد قيمة العدد ١٢٤ بعد نقصانه بنسبة:

أ ١٠٪ ب ١٥٪ ج ٣٠٪ د ٤٪ هـ ٧٪

٤) أوجد قيمة العدد ٣٦,٢ بعد نقصانه بنسبة:

أ ٩٠٪ ب ٣٥,٤٪ ج ٠,٣٪ د ١٠٠٪ هـ $\frac{١}{٢}$٪

طبِّق مهاراتك

٥) يعمل ماجد ٣٠ ساعة في الأسبوع، لكنَّه قرَّر أن يزيد ساعات عمله بنسبة ١٠٪ ليوفر مبلغًا كافيًا للإجازة. ما العدد الإجمالي للساعات التي يجب أن يعمل بها ماجد في الأسبوع؟

٦) تبلغ ضريبة المبيعات في محل تجاري ١٢٪ على جميع الملابس. إذا كان سعر القميص في هذا المحل قبل الضريبة ٤ ريالات عُمانية، فكم سيكون سعره بعد إضافة الضريبة؟

٧) أعلن القائمون على أحد الملاعب الرياضية عن خطّة لزيادة استيعابه لعدد من المقاعد بنسبة ٢٣٪ هذا العام. إذا كان عدد المقاعد في الملعب ٢١٣٠٠ مقعد، فكم يكون عدد المقاعد بعد تنفيذ الخطة؟

٨) عدد سُكّان ولاية صحار ١٠٣٠٠٠ نسمة. إذا انتقل ١٧٪ منهم إلى العاصمة مسقط، فكم سيصبح عدد سُكّان ولاية صحار؟

٩) إذا كانت نوال تُشاهِد التلفاز ١٢ ساعة في الأسبوع وقرَّرت تخفيض ذلك بنسبة ١٢٪ في الأسبوع القادم، فكم ساعة ستشاهد التلفاز خلال الأسبوع القادم؟ اكتب إجابتك بالساعات والدقائق مُقرَّبة إلى أقرب دقيقة.

١٠-١-ج النسب المِئويَّة العكسية

تُعطى أحيانًا قيمة لسلعة ما بعد أن تُطبَّق عليها النسبة المئوية للزيادة أو النسبة المئوية للنقصان، وترغب في معرفة القيمة الأصلية لها. لحلّ هذا النوع من أسئلة **النسبة المئوية العكسية**، تذكّر أنك دائمًا تتعامل مع النسبة المئوية للقيمة الأصلية.

الطريقة التي استُخدمت في الجزئيَّتين (ب)، (ج) من المثال (٢) تساعدنا على حلّ هذا النوع من الأسئلة.

مثــال ٤

قرَّر محل تجاري إجراء تخفيض على أسعار جميع السلع بنسبة ١٠٪. بيعت إحدى السلع بعد التخفيض بمبلغ ٤٥ ريالاً عُمانيًّا. ما سعرها الأصلي؟

الحــلّ:

إذا فرضنا أن س هو السعر الأصلي للسلعة

إذا خُفِّض سعر سلعة ما بنسبة ١٠٪ ستكون التكلفة الجديدة ٩٠٪ من القيمة الأصلية (١٠٠ − ١٠).

إذن $\frac{٩٠}{١٠٠}$ × س = ٤٥

إذا تمثَّل السعر الأصلي للسلعة بالمُتغيِّر س، يمكنك أن تكتب الصيغة باستخدام السعر الجديد.

س = $\frac{١٠٠}{٩٠}$ × ٤٥

للتخلُّص من الكسر اضرب طرفَي المعادلة في مقلوب $\frac{٩٠}{١٠٠}$، أي في $\frac{١٠٠}{٩٠}$

السعر الأصلي = ٥٠ ريالاً عمانيًّا.

حلّ آخر:

$\frac{١٠}{١٠٠}$ × س = س − ٤٥

$\frac{١٠}{١٠٠}$ س − س = −٤٥

− $\frac{٩٠}{١٠٠}$ س = −٤٥

$\frac{٩٠}{١٠٠}$ س = ٤٥ اضرب الطرفَين في العدد −١

س = ٥٠ ريالاً عمانيًّا.

إن استخدام نسبة مئوية عكسية مقدارها ١٠٪ لا يُساوي ازديادًا في القيمة المُخفَّضة بنسبة ١٠٪ في المثال(٤). إذا زاد سعر البيع ٤٥ ريالاً عُمانيًّا بنسبة ١٠٪، ستحصل على $\frac{١١٠}{١٠٠}$ × ٤٥ = ٤٩,٥٠٠ ريالاً عُمانيًّا، وهي إجابة مختلفة عن الإجابة الصحيحة وهي ٥٠ ريالاً عُمانيًّا.

تمارين ١٠-١-ج

١) إذا كانت ٢٠٪ من كمّية ما تُساوي ٣٥، فما قيمتها الكلّية؟

٢) إذا كانت ٣٥٪ من كمّية ما تُساوي ١٢٧، فما قيمتها الكلّية؟

٣) إذا كان العدد ٢٤٥ يُمثّل ١٢,٥٪ من كمّية ما، فما قيمتها الكلّية؟

٤) يُبيِّن الجدول التالي سعر البيع بعد التخفيض والنسبة المئوية (٪) التي خُفِّض بها السعر لعدد من السلع. انسخ الجدول وأكمله بحساب السعر الأصلي.

سعر البيع بعد التخفيض (بالريال العُماني)	النسبة المئوية للتخفيض	السعر الأصلي (بالريال العُماني)
٥٢,٠٠٠	٪١٠	
١٨٥,٠٠٠	٪١٠	
٤٧٠٠,٠٠٠	٪٥	
٢,٩٠٠	٪٥	
٢٤,٥٠٠	٪١٢	
١٠,٠٠٠	٪٨	
١٢,٥٠٠	٪٧	
٩,٧٥٠	٪١٥	
١٩٩,٥٠٠	٪٢٠	
٩٩,٠٠٠	٪٢٠	

٥) حدَّد صاحب متجر نسبة ربح مقدارها ٢٢٪ قبل البيع، يُعرض أدناه سعر البيع (بالريال العُماني). أوجد سعر التكلفة (السعر قبل إضافة نسبة الربح) لكل سلعة.

أ ٢٥,٠٠٠ ب ٢٠٠,٠٠٠ ج ١٤,٥٠٠ د ٢٣,٩٩٠ هـ ١٥,٨٠٠

و ٤٥,٨٠٠ ز ٢٩,٧٥٠ ح ١٢٩,٢٠٠ ط ٠,٩٩٠ ي ٠,٨٠٠

٦) تغيَّب ٧ طلّاب عن أحد الفصول يوم الاثنين، فإذا كانت نسبة المُتغيِّبين ١٧,٥٪ من العدد الكلّي لطلاب الفصل:

أ فما العدد الكلّي لطلاب الفصل؟

ب وما عدد الطلاب الذين حضروا يوم الاثنين؟

٧) أعلن محل لبيع الكمّة العمانيَّة تخفيضًا بنسبة ١٠٪. اشترى عبدالرحيم كمّة بمبلغ ٧ ريالات عُمانية في فترة التخفيضات. ما سعر الكمّة قبل التخفيض؟

٨) يتدرَّب نصر لمسابقة في السباحة، فخفّض وزنه بنسبة ٥٪ في ثلاثة أشهر. إذا أصبح وزن نصر الآن ٧٦ كغم، فكم كان وزنه قبل البدء بالتدريب على السباحة؟

٩) يتبخّر ماء بركة بمُعدَّل ١٢٪ كلّ أسبوع. إذا احتوت البركة الآن على ١٨٥ لترًا من الماء، فكم لترًا تقريبًا من الماء كان في البركة قبل أسبوع؟

١٠) قام متجر ما بتخفيض أسعار جميع السلع بنسبة مئوية مقدارها ١٥٪. أوجد السعر الأصلي بالريال العماني إذا كان السعر الجديد: (يمكنك استخدام دالة الذاكرة في الآلة الحاسبة).

أ ٥٩,٥٠٠ ب ٤٢,٥٠٠ ج ٢١,٢٥٠ د ٣٠,٦٠٠ هـ ٢٢,٩٥٠ و ٩,٣٥٠

يمكنك إيجاد العدد الذي ستقسم عليه في كل مرَّة وإدخاله في ذاكرة الآلة الحاسبة. بعد ذلك، يمكنك القسمة على M لإيجاد الإجابة في كل جزئية من جزئيات التمرين ١٠

١٠-٢ التعامُل مع النسبة

النسبة مُقارَنة عدديَّة بين كمّيتَين، والترتيب الذي تُكتب فيه النسبة مُهِمّ، فمثلاً، إذا وجِدَ مُعلِّم واحد لكلّ ٢٥ طالبًا في مدرسة، تكون نسبة المُعلّمين إلى الطلاب ١:٢٥

عندما تكتب كمّيتَين في صورة نسبة، يجب أن تتأكّد أن لهما نفس وحدات القياس قبل أن تبدأ، مثلاً، النسبة بين ٢٠ بيسة و١ ريال عُماني ليست ٢٠ : ١، بل هي ٢٠:١٠٠٠، لأن الريال الواحد يساوي ١٠٠٠ بيسة.

عندما تتحدَّث عن النسبة، استخدم الحرف 'إلى'. وبناء على ذلك فإن ٢:٥ تقرأ '٥ إلى ٢'

١٠-٢-أ كتابة النسبة في أبسط صورة

تكون النِّسب في أبسط صورها عندما تُكتب باستخدام أصغر أعداد كاملة مُمكنة (عندما يكون العامل المُشترَك الأكبر بين العددَين هو الواحد)، ويمكنك أن تُبسِّط النِّسب بنفس الطريقة التي تُبسِّط بها الكسور، فمثلاً: $\frac{٢٠}{١٠٠٠} = \frac{٢}{١٠٠} = \frac{١}{٥٠}$ وعليه ٢٠:١٠٠٠ = ١:٥٠

سابقًا

إذا نسيت كيف تُبسِّط الكسور، عُد إلى الوحدة ٢

مثــال ٥

يمزج سعيد ثمانية لترات من الطلاء الأبيض مع ثلاثة لترات من الطلاء الأحمر ليحصل على طلاء زهري اللون. ما نسبة كلّ ممّا يلي:

أ الطلاء الأحمر إلى الطلاء الأبيض؟

ب الطلاء الأبيض إلى الكمّية الكلّية للطلاء في المزيج؟

ج الطلاء الأحمر إلى الكمّية الكلّية للطلاء في المزيج؟

الحــلّ:

أ	٣ لترات إلى ٨ لترات = ٣:٨	
ب	٨ لترات بيضاء : ١١ لترًا = ٨:١١	كمّية المزيج الكلّية = ٨ + ٣ = ١١ لترًا
ج	٣ لترات حمراء : ١١ لترًا = ٣:١١	كمّية المزيج الكلّية = ٨ + ٣ = ١١ لترًا

رابط

النِّسب مُهمَّة جدًا، وخاصَّة عند اعتماد المُكوِّنات المختلفة للأطعمة. فمثلاً معرفة نسبة الماء: الملح: السكر التي يحتاجها الجسم، تساعدنا على فهم تأثيرها على صحة الإنسان.

مثــال ٦

للحصول على خلطة خرسانة، عليك أن تخلط الإسمنت والرمل والحصى بنسبة ١:٢:٤ على الترتيب:

أ ما نسبة الإسمنت إلى الحصى؟

ب ما نسبة الرمل إلى الحصى؟

ج ما نسبة الحصى إلى كمّية الخرسانة الكلّية؟

د ما الكسر الذي يدلّ على كمّية الإسمنت في الخرسانة؟

الحــلّ:

أ	نسبة الإسمنت إلى الحصى ١:٤	
ب	نسبة الرمل إلى الحصى ٢:٤ = ١:٢	ضع النسبة في أبسط صورة دائمًا.
ج	نسبة الحصى إلى كمّية الخرسانة الكلّية ٤:٧	الخرسانة = ١ + ٢ + ٤ = ٧ أجزاء يُشكِّل الحصى ٤ أجزاء من ٧
د	الكسر الذي يدلّ على كمية الإسمنت في الخرسانة = $\frac{١}{٧}$	

تمارين ١٠-٢-أ

١) اكتب كلاًّ من العلاقات الآتية في صورة نسبة:

أ تسع نسوة إلى تسعة رجال. ب لتر واحد إلى خمسة لترات.

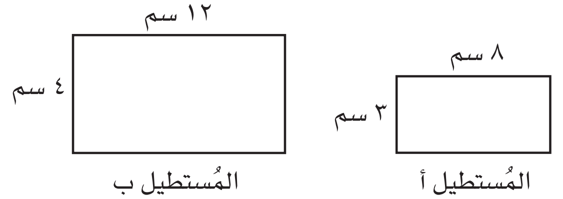
ج ٢٥ دقيقة إلى ٣ دقائق. د ١٨ ثانية لكل دقيقة.

هـ ١٥ بيسة لكل ١ ريال. و ملّيمتران لكلّ سنتيمتر واحد.

٢) يحتوي كيس حلوى على قطع حلوى مُلوَّنة: ١٢ قطعة حمراء، و٥ قطع صفراء. ما نسبة:

أ قطع الحلوى الحمراء إلى الصفراء؟ ب قطع الحلوى الصفراء إلى الحمراء؟

٣) انظر إلى المُستطيلَين أدناه:



عبّر عن العلاقات الآتية في صورة نسب:

أ طول المُستطيل أ إلى طول المُستطيل ب.

ب عرض المُستطيل أ إلى عرض المُستطيل ب.

ج مُحيط المُستطيل أ إلى مُحيط المُستطيل ب.

د مساحة المُستطيل أ إلى مساحة المُستطيل ب.

٤) يعرض الجدول الآتي مُتوسِّط الأعمار المُتوقَّعة (بالسنوات) لبعض الحيوانات الأفريقية:

اسم الحيوان	مُتوسِّط العُمر المُتوقَّع
السُّلَحْفاة	١٢٠
الببغاء	٥٠
الفيل	٣٥
الغوريلا	٣٠
الأسد	١٥
الزرافة	١٠

أوجد نسبة مُتوسِّط الأعمار المُتوقَّعة لكل ممّا يلي:

أ الزرافة إلى السُّلَحْفاة
ب الأسد إلى الغوريلا
ج الأسد إلى السُّلَحَفاة
د الفيل إلى الغوريلا
هـ الببغاء إلى الأسد
و الببغاء إلى السُّلَحَفاة

٥) أوجد نسبة كلّ ممّا يلي:

أ المليّمتر الواحد إلى السنتيمتر الواحد
ب السنتيمتر الواحد إلى المتر الواحد
ج المتر الواحد إلى السنتيمتر الواحد
د الغرام الواحد إلى الكيلوغرام الواحد
هـ اللتر الواحد إلى المليّلتر الواحد
و الدقيقة الواحدة إلى الساعة الواحدة

٦) عبّر عن كل علاقة فيما يلي بنسبة في أبسط صورة:

أ ٢٥ لترًا إلى ٥٠ لترًا
ب ٢٥ بيسة إلى ٢ ريال
ج ٧٥ سم إلى ٢ م
د ٦٠٠ غرام إلى خمسة كيلوغرامات
هـ ١٥مم إلى متر واحد
و ٢,٥ غرام إلى ٥٠ غرامًا
ز ٤ سم إلى ٢٥ مم
ح ٤٠٠ مل إلى ٣ ل

سابقًا

قد تفيدك مُراجعة العوامل المُشترَكة في الوحدة ١

١٠-٢-ب النِّسب المُتكافِئة

النِّسب المُتكافِئة هي في الأصل كسور مُتكافِئة، فإذا ضربتَ حدود النسبة في عدد موجب أو قسمتها على عدد موجب، فإنك سوف تحصل على نسبة مُكافِئة لها.

مثال ٧

أوجد القيمة المجهولة في كلّ نسبة من النسب الآتية:

أ ١:٤ = س:٢٠

ب ٤:٩ = ٢٤: ص

الحـل:

الطريقة الأولى: الضرب في عامل مُشترَك.

أ ١:٤ = س:٢٠ ١:٤ = ٥:٢٠ إذن س = ٥	٢٠ ÷ ٤ = ٥، فيكون ٢٠ = ٤ × ٥ يجب أن تضرب ١ × ٥ أيضًا.
ب ٤:٩ = ٢٤: ص ٤:٩ = ٢٤:٥٤ إذن ص = ٥٤	٢٤ ÷ ٤ = ٦، فيكون ٤ × ٦ = ٢٤ يجب أن تضرب ٩ × ٦ أيضًا.

الطريقة الثانية: الضرب التبادُلي للكسور.

أ $\frac{١}{٤} = \frac{س}{٢٠}$ ٤س = ٢٠ س = $\frac{١ \times ٢٠}{٤}$ إذن س = ٥	اكتب كل نسبة في صورة كسر. اضرب الكسرين تبادليًّا حلّ المعادلة بقسمة كلا الطرفَين على ٤
ب $\frac{٤}{٩} = \frac{٢٤}{ص}$ $\frac{٩}{٤} = \frac{ص}{٢٤}$ $\frac{٩ \times ٢٤}{٤} = ص$ $\frac{٢١٦}{٤} = ص$ إذن ص = ٥٤	اكتب كل نسبة في صورة كسر. خذ مقلوب الكسرَين (بدّل البسط مع المقام) لتجعل ص في البسط، وذلك لتبسيط حلّ المُعادَلة. حُلّ المُعادَلة بقسمة كلا الطرفَين على ٤

سابقًا

تعلَّمت مقلوب الكسر في الوحدة ٢

تُعتبَر النِّسب المُتكافِئة مفيدة، عندما تحتاج إلى حلّ مسائل تتضمَّن قيَمًا مجهولة.

تمارين ١٠-٢-ب

١) أوجد القيمة المجهولة في النسب المُتكافِئة التالية. استخدم الطريقة الأسهل لك:

أ ٢ : ٣ = ٦ : س — ب ٦ : ٥ = ص : ٢٠ — ج ١٢ : ٨ = ٣ : ص

د ٢٧ : س = ٩ : ٢ — هـ ٣ : ٨ = ٦٦ : س — و ١ : ٥ = ١٣ : ص

ز س : ٢٥ = ٧ : ٥ — ح ٤٠ : ٩ = ٨٠٠ : ص — ط ٣ : ٧ = ٦٠٠ : ص

ي ٢ : ٧ = ٣٠ : س — ك ١,٥ : س = ٦ : ٥ — ل $\frac{١}{٦}$: $\frac{١}{٣}$ = ٢ : ص

٢) استخدم طريقة الضرب التبادُلي للكسور (حلّ المُعادلَة) لتجد القيَم المجهولة في النِّسب المُتكافِئة التالية:

أ س : ٢٠ = ٣ : ٤ — ب ١٢ : ٢١ = س : ١٤ — ج ٢ : ٥ = ٨ : ص

د ٣ : ٥ = س : ٤ — هـ ١ : ١٠ = س : ٦ — و ٨ : ١٣ = ٢ : ص

ز ٤ : ٥ = س : ٧ — ح ٥ : ٤ = ٩ : ص

٣) أيُّ العبارات التالية صحيحة؟ وأيها خاطئة؟ إذا كانت العبارة خاطئة، وضّح سبب ذلك.

أ النِّسبة ١ : ٦ هي نفسها النِّسبة ٦ : ١

ب النِّسبة ١ : ٦ مُكافِئة للنسبة ٣ : ١٨

ج يمكن التعبير عن النِّسبة ٢٠ : ١٥ في صورة ٣ : ٤

د إذا كان نسبة عُمْر الأم إلى عُمْر ابنتها ٨ : ١، فيكون عُمْر الابنة ٩ عندما يكون عُمْر الأم ٤٨

هـ إذا كان أَجر سمير يُساوي $\frac{٥}{٨}$ أَجر ماجد، فإن النسبة بين أجرَيْهما ٢٠ : ٣٢

طبّق مهاراتك

٤) السبيكة خليط من عدَّة معادن، ومن المعروف أن مُعظَم الذهب المُستخدَم في الحلي هو سبائك من الذهب الصافي ومعادن أخرى تُضاف إليه لتجعله صلبًا، بحيث يبلغ عيار الذهب الصافي ٢٤ قيراطًا، وبالتالي، فإن الذهب عيار ١٨ هو سبيكة من الذهب ومعادن أخرى بنسبة ١٨ : ٦، أي أن هناك $\frac{١٨}{٢٤}$ جُزءًا من الذهب، و$\frac{٦}{٢٤}$ معادن أخرى:

أ يصنع مُصمِّم جواهر قطعة من الذهب عيار ١٨ قيراطًا مُستخدِمًا ثلاثة غرامات من الذهب. ما كُتلة المعادن الأخرى المُضافة إلى القطعة؟

ب تحتوي سلسلة ذهبية من عيار ١٨ قيراطًا على ٤ غرامات من الذهب الصافي. كم غرامًا من المعادن الأخرى تحتوي؟

ج ما نسبة الذهب إلى المعادن الأخرى في قطعة ذهبية من عيار ١٤ قيراطًا؟

د ما نسبة الذهب إلى المعادن الأخرى في قطعة ذهبية من عيار ٩ قيراطات؟

٥) تحتوي سبيكة الذهب من عيار ٩ قيراطات على ذهب ونحاس وفضّة بنسبة ٩:١٢,٥:٢,٥

أ) اكتب هذه النسبة في أبسط صورة.

ب) كم غرامًا من الفضّة تحتاج قطعة ذهبية تحتوي على ٦ غرامات من الذهب الصافي؟

ج) كم غرامًا من النحاس تحتاج لتصنع قطعة ذهبية من عيار ٩ قيراطات، مُستخدمًا ثلاثة غرامات من الذهب الصافي؟

٦) أراد أحمد و رقية مزج أنبوبَيْن من الألوان الزيتية، أحدهما أحمر والآخر أسود بنسبة ١ : ٤

أ) إذا استخدم أحمد ٥ مل من الأنبوب الأحمر، فكم ملّيلترًا يجب أن يستخدم من الأنبوب الأسود؟

ب) كم ملّيلترًا من الأنبوب الأحمر تستخدم رقيَّة، إذا استخدمت ١٠ ملّيلترات من الأنبوب الأسود؟

٧) يحتوي نوع من الطعام على اللحم والحبوب بنسبة ٢ : ٩، استخدم أحد الطهاة ٣٥٠٠ غرام من اللحم في إعداد هذا النوع من الطعام. كم غرامًا من الحبوب استخدم الطاهي؟

١٠-٢-ج قسمة كمّية بنسبة مُعطاة

يمكن استخدام النِّسب لتقسيم الكمّيات، أو لمُشاركتها، ولها طريقتان:

- الطريقة الأولى: إيجاد قيمة أحد الأجزاء، وتُسمّى هذه الطريقة **طريقة الوحدة**:
  (١) اجمع القيَم في النسبة لتجد العدد الكلّي للأجزاء المُتضمَّنة.
  (٢) اقسم الكمّية على العدد الكلّي للأجزاء، كي تجد الكمّية في كل جزء (قيمة جزء واحد).
  (٣) اضرب قيَم النسبة في الكمّية في كل جزء لتجد قيمة كلّ جزء.
- الطريقة الثانية: كتابة الأجزاء في صورة كسور، وتُسمّى هذه الطريقة **طريقة النسبة**:
  (١) اجمع القيَم في النسبة لتجد العدد الكلّي للأجزاء المُتضمَّنة.
  (٢) اكتب كلّ جزء من النسبة في صورة كسر من العدد الكلّي للأجزاء.
  (٣) اضرب الكمّية في الكسر لتجد قيمة كلّ جزء.

مثـــال ٨

قسِّم ٢٤ ريالاً عُمانيًّا بين جاسم وسعاد بنسبة ٣: ٥

الحـــلّ:

الطريقة الأولى:

٣ + ٥ = ٨	يوجد ٨ أجزاء في النسبة.
٢٤ ÷ ٨ = ٣	هذه قيمة الحصَّة الواحدة.
يحصل جاسم على ٩ ريالات عُمانيّة	يحصل جاسم على ٣ حصص: ٣ × ٣ = ٩
وتحصل سعاد على ١٥ ريالاً عُمانيًّا.	تحصل سعاد على ٥ حصص: ٥ × ٣ = ١٥

الطريقة الثانية:

٣ + ٥ = ٨ نصيب جاسم يساوي $\frac{٣}{٨}$ من ٢٤ ريالاً عُمانيًّا = $\frac{٣}{٨}$ × ٢٤ = ٩ ريالات عُمانيّة. نصيب سعاد يساوي $\frac{٥}{٨}$ من ٢٤ ريالاً عُمانيًّا = $\frac{٥}{٨}$ × ٢٤ = ١٥ ريالاً عُمانيًّا.	يوجد ٨ أجزاء في النسبة. اكتب كل جزء في صورة كسر من العدد الكلّي للأجزاء، ثم اضرب في الكمّية.

تمارين ١٠-٢-ج

١) قسِّم:

أ ٢٠٠ بنسبة ١:٤
ب ١٥٠٠ بنسبة ١:٤
ج ٥٠ بنسبة ٣:٧
د ٦٠ بنسبة ٣:١٢
هـ ٦٠٠ بنسبة ٣:٩
و ٣٨ بنسبة ١١:٨
ز ٣٠٠ بنسبة ١١:٤
ح ٢٣٠٠ بنسبة ١:٢:٧

٢) للحصول على نوع من أنواع العصائر، يُخلط عصير الفواكه المُركَّز مع الماء بنسبة ١:٣، كم لترًا من عصير الفواكه المُركَّز تحتاج للحصول على ١,٢ لتر من العصير؟

٣) عند عُمَر ٤٥ كُرة زجاجية، تشاركَها مع صديقه أحمد بنسبة ٣:٢، كم عدد الكرات الزجاجية التي سيأخذها كل منهما؟

٤) يُراد تقسيم مبلغ ٢٠٠ ريال عُماني بين الإخوة أمين وأكرم وأمينة بنسبة ٣:٤:٥، ما حصّة كل منهم؟

٥) تمّ تقسيم قطعة مُستقيمة طولها ١٦ سم بنسبة ٣:٥، ما طول كلّ جزء منها؟

الحروف N:P:K على أكياس السماد هي رموز العناصر الكيميائية. دائمًا تُذكَر نسبة العناصر الكيميائية على عُبوات الأسمدة.

٦) كيس أسمدة N:P:K يحتوي على النيتروجين والفوسفور والبوتاسيوم بنسبة ٢:٣:٣ أوجد كتلة كلّ مُكوِّن، إذا كانت كتلة الأكياس تساوي:

أ كيلوغرامًا واحدًا
ب خمسة كيلوغرامات
ج ٢٠ كيلوغرامًا
د ٢٥ كيلوغرامًا

٧) مُثلَّث مُحيطه يساوي ٥٫٤ م، والنسبة بين أطوال أضلاعه هي ٣:٥:٤، احسب طول كل ضلع من أضلاعه.

٨) مُستطيل مُحيطه ١٢٠ سم، إذا كانت النسبة بين طوله وعرضه هي ٥:٣، ارسم المُستطيل، واكتب طول كل ضلع فيه.

٩) مجموعة من المُسنّين تضمّ ٣٢٠٠ شخص، إذا كانت نسبة الرجال إلى النساء ٣:٥، احسب عدد الرجال في المجموعة.

١٠) أ بيّن أن نسبة مساحة الدائرة إلى مُحيطها هي نق: ٢، حيث نق هو نصف قطر الدائرة.

ب كُرة نصف قطرها نق، أوجد نسبة حجمها إلى مساحتها السطحية. اكتب إجابتك في أبسط صورة ممكنة.

١٠-٣ النسبة ومقياس الرسم

تمتلك النماذج كنموذج مبخرة حديقة ريام (المُدرج في مُقدّمة الوحدة) نفس الأشكال الحقيقية للأجسام التي تُمثِّلها، ولكن قد تكون أصغر منها أو أكبر منها بشكل كبير، ويستخدم **مقياس الرسم** للتعبير عن العلاقة بين النموذج والاشكال الحقيقية، والذي يكون في صورة نسبة بين الأبعاد الحقيقية والأبعاد في النموذج كالآتي:

مقياس الرسم = الطول في الرسم: الطول الحقيقي

يُعطى مقياس رسم الخريطة أو المُخطَّط أو النموذج عادة في صورة نسبة على شكل ١:ن، حيث ن عدد حقيقي. فالمهندس المعماري الذي صمَّم مبخرة ريام استخدم مثلاً نموذجًا للمبخرة ارتفاعه ٢٥ م، ليُظهِر جماليَّة المبخرة العُمانية بشكل واضح، حيث يبلغ مقياس رسم هذا النموذج ١:١٠٠

مقياس الرسم ١:١٠٠ يعني أن وحدة القياس في النموذج يجب أن تُقسَم على العدد ١٠٠ للحصول على الارتفاع (بنفس وحدة القياس) الحقيقي للبناء، فإذا كان ارتفاع المبخرة في النموذج ٢٥ م، فإن الارتفاع الحقيقي للمبخرة سيكون ٢٥ م ÷ ١٠٠ = ٠,٢٥ م أو ٢٥ سم.

تكون بعض رسومات المُخطَّط أشبه بالخلايا في علم البيولوجيا أي أنها أكبر من الأجسام التي تُمثِّلها. في حالة التكبير، يُعطى مقياس الرسم في صورة ن: ١ (حيث ن > ١).

١٠-٣-أ كتابة نسبة في صورة ١:ن

يجب التعبير عن كل نِسَب مقاييس الرسم في صورة ١:ن أو ن: ١؛ ولتغيير نسبة ما بحيث يكون أحد أجزائها مُساويًا للعدد ١، تحتاج إلى قسمة كل جزء في النسبة على العدد الذي تريد تحويله إلى ١

مثـــال ٩

اكتب ٥:١٠٠٠ في صورة ١: ن

الحـــلّ:

٥:١٠٠٠	
$= \frac{٥}{٥} : \frac{١٠٠٠}{٥}$	اقسم كلا الطرفَين على ٥، أي على العدد الذي تريد تحويله إلى ١
= ١:٢٠٠	

مثـــال ١٠

اكتب ٤ مم : ٥٠ سم في صورة نسبة مقياس رسم.

الحـــلّ:

٤ مم : ٥٠ سم	أوّلاً: عبّر عن الكمّيتَين بنفس وحدة القياس.
= ٤ مم : ٥٠٠ مم	اكتب ٥٠ سم في صورة ٥٠٠ مم لأن ١ سم = ١٠ مم
= ٤ : ٥٠٠	
$= \frac{٤}{٤} : \frac{٥٠٠}{٤}$	اقسم كلا الطرفَين على ٤ لكتابتهما في صورة ١:ن
= ١ : ١٢٥	

مثـــال ١١

اكتب النسبة ٢٢ : ٤ في صورة ن : ١

الحــلّ:

٢٢ : ٤ = $\frac{٢٢}{٤}$: $\frac{٤}{٤}$ = ٥,٥ : ١	اقسم كلا الطرفَين على ٤، أي على العدد الذي تُريد تحويله إلى ١ في هذا المثال حصلنا على عدد عشري في أحد الطرفَين.

١٠-٣-ب حل مسائل تتضمَّن مقياس رسم

يوجد نوعان من المسائل التي تتضمَّن مقياس الرسم:

١) حساب الطول الحقيقي للأجسام (البعد الحقيقي) باستخدام رسم المُخطَّط أو نموذج:

البُعد الحقيقي = البُعد في الرسم ÷ مقياس الرسم

٢) حساب طول الجسم في المخطط (البعد في الرسم) بمعلومية مقياس الرسم:

البُعد في الرسم = البُعد الحقيقي × مقياس الرسم

مثـــال ١٢

إذا كان مقياس الرسم المستخدم في خريطة ما هو ١ : ٢٥٠٠٠ أجب عمّا يلي:

أ) ما المسافة الحقيقية بين نقطتَين تبعد إحداهما عن الأخرى مسافة ٥ سم على الخريطة؟

ب) أوجد المسافة الحقيقية بالكيلومترات.

الحــلّ:

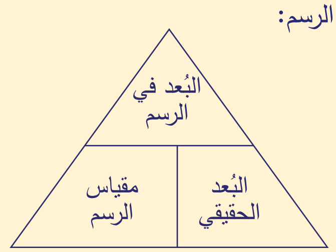
أ	المسافة على الخريطة = ٥ سم مقياس الرسم = ١ : ٢٥٠٠٠ ∴ المسافة الحقيقية = ٥ سم × ٢٥٠٠٠ = ١٢٥٠٠٠ سم المسافة الحقيقية هي ١٢٥٠٠٠ سم	اقسم المسافة على الخريطة في مقياس الرسم (أو اضرب في مقلوب مقياس الرسم $\frac{٢٥٠٠٠}{١}$ = ٢٥٠٠٠). ستكون وحدة القياس الناتج هي وحدة قياس الطول على الخريطة.
ب	١ كم = ١٠٠٠٠٠ سم $\frac{١٢٥٠٠٠ \text{ سم}}{١٠٠٠٠٠}$ = ١,٢٥ كم	من الجزئية (أ)، تعرف أن المسافة الحقيقية = ١٢٥٠٠٠ سم. تعرف أن ١ كم = ١٠٠٠٠٠ سم. لذا حوِّل المسافة الحقيقية إلى كيلومتر.

الصورة ١ : ن أو ن : ١ لا تُعطي نسبة حدَّيها أعدادًا كاملة دائمًا.

لكتابة النسبة أ : ب في صورة ١ : ن، اقسم طرفَي النسبة على أ، هذا يُعطي ١ : $\frac{ب}{أ}$

لكتابة النسبة أ : ب في صورة ن : ١، اقسم طرفَي النسبة على ب، هذا يُعطي $\frac{أ}{ب}$: ١

إليك مُثلَّثًا يُبين العلاقة بين البُعد الحقيقي والبُعد في الرسم ومقياس الرسم:



مثــال ١٣

جدارُ سدّ طوله ٤٨٠ مترًا. كم سيكون طوله بالسنتيمترات على خريطة مقياس رسمها ١:١٢٠٠٠؟

الحــلّ:

مقياس الرسم = ١:١٢٠٠٠	يُبيِّن مقياس الرسم طول السدّ في الخريطة : الطول الحقيقي للسدّ، ويُكتب عادة في صورة ١ : ن
الطول على الخريطة = الطول الحقيقي × مقياس الرسم = ٤٨٠ ÷ ١٢٠٠٠ = ٠,٠٤ م سوف يكون طول السد في الخريطة ٤ سم.	بما أن المُعطى هو الطول الحقيقي للسدّ، اقسم على ن للحصول على طول السدّ في الخريطة.

تمارين ١٠-٣-(أ، ب)

١) اكتب كلاًّ من مقاييس الرسم الآتية على صورة كل من النسبتَين التاليتَين:
(١) ١:ن (٢) ن:١

أ ١ سم إلى ٢ م ب ٢ سم إلى ٥ م ج ٤ سم إلى ١ كم
د ٥ سم إلى ١٠ كم هـ ٣,٥ سم إلى ١ م و ٩ مم إلى ١٥٠ كم

٢) تمّ رسم مُخطَّط لمركز تسوُّق بمقياس رسم ١:٤٠٠، أوجد المسافة الحقيقية بالأمتار للأطوال التالية في المركز، علمًا بأن الأطوال المُعطاة تمّ قياسها على المُخطَّط:

أ ١ سم ب ١٥ مم ج ٣,٥ سم د ١٢ سم

٣) خريطةٌ مقياس رسمها ١:٥٠٠٠٠، احسب الطول على الخريطة لكل طول من الأطوال الحقيقية التالية:

أ ٦٠ م ب ١٥ كم ج ١٢٠ كم د ٧٥,٥ كم

٤) قاعة مُستطيلة الشكل طولها ٥٠ م وعرضها ٢٠ م. ارسم مُخطَّطين لها مُستخدِمًا مقياسَي الرسم:

أ ١:٢٠٠ ب ٤ مم إلى ١ م

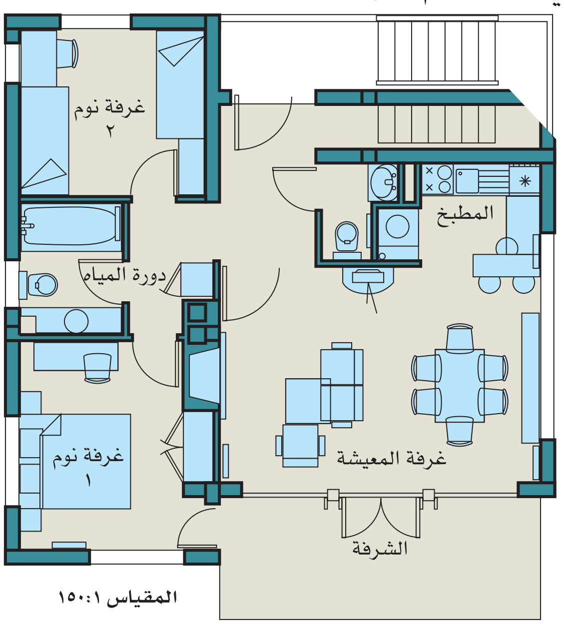
طبِّق مهاراتك

٥) استخدم الخريطة التالية لإيجاد البعد الحقيقي (المسافة المستقيمة) بين كل ممّا يلي:

أ مسقط وأبوظبي   ب عدن والرياض   ج جدَّة والكويت

٦) يُمثِّل الرسم التالي مُخطَّطًا لمنزل مقياس رسمه يساوي ١ : ١٥٠

أ ما المسافة الحقيقية بالأمتار التي تُمثّل ١ سم على المُخطَّط؟



ب احسب، مُستخدِمًا المسطرة والعمليات الحسابية، الطول الحقيقي بالأمتار لـ:

(١) طول غرفة المعيشة
(٢) عرض غرفة المعيشة
(٣) طول دورة المياه
(٤) عرض الشرفة

تذكَّر أن تقيس المسافة داخل الجدارَين.

ج ما المساحة الحقيقية لـ:

(١) غرفة النوم (١)
(٢) غرفة النوم (٢)
(٣) الشرفة

د احسب مساحة الفراغ الموجود في أرض دورة المياه (بالمتر المُربّع، مُتضمِّنًا كُرسيّ دورة المياه).

أوجد القياس الحقيقي لكل طول قبل أن تجد المساحة.

هـ احسب تكلفة تبليط دورة المياه، إذا كانت تكلفة المتر المُربَّع الواحد من البلاط ٩,٥ ريالات عُمانيَّة وأجرة عامِل التبليط ٤,٢٥ ريالات عُمانيَّة للمتر المُربَّع الواحد.

١٠-٤ التناسُب

التناسُب في الرياضيات هو معادَلة أو علاقة بين نسبتَين، وهو بشكل عام، أ : ب = ج : د

تزداد الكمّيات أو تنقص في التناسُب إذا أدّت نتيجة ضرب (أو قسمة) إحدى الكمّيتَين بقيمة ما إلى ضرب (أو قسمة) الكمّية الأخرى بنفس القيمة. بمعنى آخر توجد نسبة ثابتة بين العناصر المُتناظِرة في الكمّيتَين.

١٠-٤-أ التناسُب الطردي

عندما تكون الكمّيتان **مُتناسبتَين طرديًا**، فإنَّهما تزدادان أو تتناقصان بنفس النسبة. بمعنى آخر، تكون نسبة الكمّيتَين مُتكافئتَين، فإذا حدثت زيادة أو نقصان في إحدى الكمّيتين، فإن الكمّية الأخرى تزداد أو تنقص بنفس التناسُب.

رابط

يستخدم الطُهاة التناسُب لخلط المُكوِّنات أو التحويل بين الوحدات أو حساب تكلفة طبق الطعام.

إليك بعض الأمثلة على كمّيات يكون التناسُب بينها طرديًا:

المسافة = السرعة × الزمن. لذا كلما أسرعت في القيادة خلال مُدّة ما، تقطع مسافة أكبر في تلك المُدّة:

السرعة (كم/ساعة)	٤٥	٦٠	٧٥	٩٠	١٢٠
المسافة المقطوعة في الساعة (كم)	٤٥	٦٠	٧٥	٩٠	١٢٠

إذا كانت كتلة القطعة الواحدة من سلعة ما تساوي ٢ كغم، فإن كُتلة قطعتَين من نفس السلعة تساوي ٤ كغم وهكذا، حيث أنه كلما ازداد عدد القطع من نفس السلعة، تزداد الكتلة:

عدد القطع	١	٢	٣	٤
الكتلة (كغم)	٢	٤	٦	٨

كلما ازداد عدد ساعات العمل، يزداد الدخل:

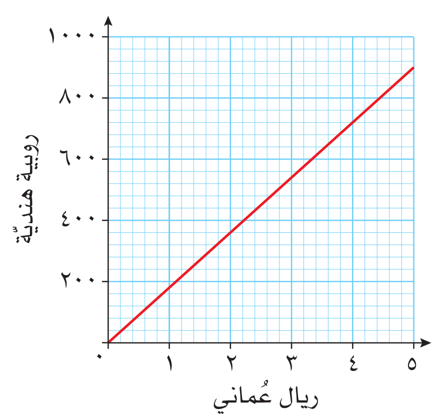
عدد ساعات العمل	١	٢	٣
الدخل المُكتَسب (ريال عُماني)	٤	٨	١٢

التمثيلات البيانية لعلاقات التناسُب الطردي

التمثيل البياني لعلاقة التناسُب الطردي هو مستقيم يمرّ بنقطة الأصل.

وعندما يكون التمثيل البياني مُستقيمًا يمر بنقطة الأصل، فإن الكمّيتَين تتناسبان طرديًا.

ويُبيّن التمثيل البياني المجاور قيمة الروبيات الهندية مُقابِل قيمة الريالات العُمانية، بناء على أن مُعدَّل الصرف يساوي ١ ريال : ١٩٠روبية



يُعتَبر مُعدَّل الصرف مثالاً جيدًا على التناسُب الطردي بين الكمّيات، فإذا أردت تحويل الريال العُمانيّ إلى الروبية الهندية، يمكنك تخزين مُعامِل الصرف (هنا يساوي ١٩٠) في ذاكرة الآلة الحاسبة.

تمارين ١٠-٤-أ

١) أيٌّ من الحالات التالية يمكن أن يكون مثالًا على التناسُب الطردي؟

أ طول ضلع المُربَّع ومساحته.

ب أعمار الطلّاب وأطوالهم.

ج عدد الكيلومترات التي تقطعُها، إذا قطعت ٢ كيلومتر في الدقيقة.

د الزمن الذي تستغرقه لقطع مسافات مختلفة بنفس السرعة.

هـ ارتفاع الأجسام وأطوال ظلالها.

و كمّية الوقود المُستهلَكة لقطع مسافات مُختلِفة.

ز عدد الدجاج الذي يمكن أن تُطعِمه باستخدام ٢٠ كغم من الطعام.

ح ارتفاع الشجرة وعدد السنوات منذ زراعتها.

ط مساحة القطاع الدائري وقياس الزاوية المركزية.

١٠-٤-ب طريقة الوحدة

طريقة الوحدة مفيدة لحلّ مجموعة من المسائل المُتعلِّقة بالتناسُب.

في هذه الطريقة، تجد قيمة وحدة واحدة من الكمّية، فمثلاً: ثمن قطعة واحدة من الحلوى، أو قيمة الروبيات التي تحصل عليها مُقابل ريال عُماني واحد، وهكذا.

مثــال ١٤

إذا كان ثمن خمس زجاجات عطر ٢٠٠ ريال عُماني. فما ثمن ١١ زجاجة؟

الحــلّ:

طريقة الوحدة: ثمن ٥ زجاجات ٢٠٠ ريال ثمن ١ زجاجة = ٢٠٠ ÷ ٥ = ٤٠ ريالاً عُمانيًّا ثمن ١١ زجاجة = ١١ × ٤٠ = ٤٤٠ ريالاً عُمانيًّا	هذا ما يُسمّى بطريقة الوحدة. أوجد ثمن الوحدة الواحدة.
طريقة النسبة: $\frac{٥}{٢٠٠} = \frac{١١}{س}$ $\frac{٢٠٠}{٥} = \frac{س}{١١}$	افترض أن س هو ثمن ١١ زجاجة. اكتب كلّ جزء في صورة كسر. خذ مقلوب كلتا النسبتَين لتسهيل عملية حل المعادلة.

<table>
<tr><td>

$\frac{٢٠٠ \times ١١}{٥} =$ س

س = ٤٤٠ ريالاً عُمانيًّا

</td><td></td></tr>
<tr><td>

طريقة النسبة والتناسب:

عدد الزجاجات	الثمن
٥	٢٠٠
١١	س

س $= \frac{٢٠٠ \times ١١}{٥}$

س = ٤٤٠ ريالًا عُمانيًّا

</td><td>

ارسم جدولاً يُبيّن عدد الزجاجات والثمن.

اكتب تناسُبًا وأوجد قيمة س.

</td></tr>
</table>

تمارين ١٠-٤-ب

١) إذا كان ثمن أربعة صناديق من عُبوات العصير ٩ ريالات عُمانية، فكم ريالاً عُمانيًّا ستدفع ثمن ثلاثة صناديق من نفس عبوات العصير؟

٢) تقطع سيّارة مسافة ٣٠ كم في ٤٠ دقيقة. ما الزمن الذي تستغرقه لتقطع مسافة ٤٥ كم بنفس السرعة؟

٣) تعطَّلت ساعة يد بحيث أصبحت تتقدَّم ٢٠ ثانية كل أربعة أيام، فكم ثانية ستتقدَّم في أسبوعَين بنفس المُعدّل؟

٤) إذا كانت كتلة ستّ علب زيت ٩٠ كغم، فكم ستكون كتلة ١١,٥ علبة زيت من نفس النوع؟

٥) يقطع عدّاء مسافة ٤,٥ كم في ١٥ دقيقة. كم كيلومترًا يقطع في ٣٥ دقيقة بالسرعة نفسها؟

حاول أن تتآلف مع اللغة المُستخدمَة في المسائل اللفظية التي تتضمَّن تناسُبًا. يساعدك ذلك على تمييز مسائل التناسُب في سياقات أخرى.

طبِّق مهاراتك

٦) لتصنع ١٢ قطعة حلوى تحتاج إلى:

٢٤٠ غم من الطحين
٤٨ غم من الزبيب
٦٠ غم من السمن
٧٤ غم من الحليب
٢٤ غم من السكَّر
١٢غم من الملح

أ كم تحتاج من كلّ مُكوّن لتصنع ١٦ قطعة حلوى؟

ب اكتب مقدار الطحين إلى السمن في هذه الوصفة في صورة نسبة.

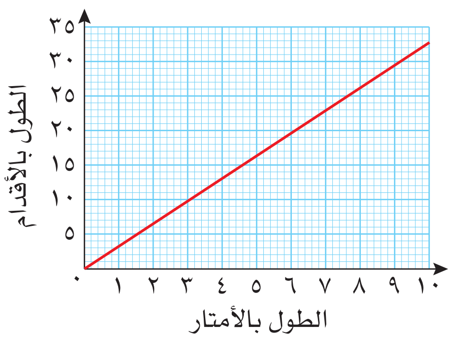
٧) تطبع سعاد ٥٠٠ كلمة في ٧ دقائق وتطبع ليلى ٣٠٠ كلمة في ٤ دقائق. أيُّهما أسرع في الطباعة؟

٨) تستهلك سيّارة ٤٥ لترًا من الوقود لتقطع مسافة ٤٩٥ كم:

أ ما المسافة التي تقطعها السيّارة إذا استهلكت ٥٠ لترًا من الوقود بالمُعدّل نفسه؟

ب كم لترًا من الوقود ستستهلك السيّارة لتقطع مسافة ١٩٠ كم بالمُعدّل نفسه؟

٩) يعرض التمثيل البياني المُقابِل تناسُبًا طرديًّا بين الأطوال بالأمتار والأطوال بالأقدام:



أ استخدم التمثيل البياني لتجد عدد الأقدام في أربعة أمتار.

ب إذا علمت أن ١ م = ٣,٢٨ قدم، وطول القدم الواحدة = ٠,٣٠٥ م، احسب كم قدمًا في ٤ أمتار.

ج أيُّهما أطول: (١) ٤ أمتار أم ١٢ قدمًا؟ (٢) ٢٠ قدمًا أم ٦,٥ متر؟

د مع سعود حبل طوله ٩ م:

(١) ما طول الحبل مُقرّبًا إلى أقرب قدم؟

(٢) باع سعود قطعة من الحبل طولها ١,٥ م لجميل، وقطعة طولها ٣ أقدام لموسى. كم مترًا من الحبل بقي مع سعود؟

هـ طريق خاص طوله ١٨ قدمًا، وتمّ تمديده ليصبح أطول بمتر واحد. كم مترًا أصبح طول الطريق بعد التجديد؟

١٠-٤-ج التناسُب العكسيّ

في **التناسُب العكسي**، تتناقص إحدى الكمّيتَين بنفس التناسُب الذي تتزايد به الكمّية الأخرى. مثلاً، نقول إننا نستطيع إنجاز عمل ما في زمن أقلّ إذا ازداد عدد الأشخاص، وهذا يعني أنه. كلما ازداد عدد الأشخاص في العمل، يقلّ الزمن اللازم لإنجازه.

ويمكنك أن تحلّ مسائل تتضمَّن تناسُبًا عكسيًّا باستخدام طريقة النسبة أو طريقة الوحدة.

مثـــال ١٥

يحتاج سالم إلى ٢٤ دقيقة للوصول إلى بيته إذا قاد سيّارته بسرعة ٣٠ كم/ساعة. ما الزمن الذي يحتاج إليه للوصول إلى بيته إذا قاد سيّارته بسرعة ٣٦ كم/ساعة؟

الحـــلّ:

إذا قاد بسرعة ٣٠ كم/ساعة، يحتاج إلى ٢٤ دقيقة فإذا قاد بسرعة ١ كم/ساعة، يحتاج إلى ٣٠ × ٢٤ دقيقة ∴ إذا قاد بسرعة ٣٦ كم/ساعة يحتاج إلى $\frac{٣٠ \times ٢٤}{٣٦}$ = ٢٠ دقيقة.	التناسُب هنا عكسي، أي إذا قاد ببطء، فستستغرق وقتًا أطول. بما أننا قسمنا السرعة على ٣٠، يجب ضرب الزمن المُستغرَق في ٣٠ بما أننا ضربنا السرعة في ٣٦، فعلينا قسمة الزمن على ٣٦

مثـــال ١٦

إذا علمت أن منى تعمل ٤,٥ ساعات في اليوم لتستطيع أن تُنجِز عملها في أربعة أيام، فكم ساعة يجب أن تعمل في اليوم لتُنجِز العمل نفسه في ثلاثة أيام؟

الحــلّ:

لتُنجِز العمل في ٤ أيام، تحتاج إلى ٤,٥ ساعات في اليوم	
∴ لتُنجِز العمل في يوم واحد، تعمل لمُدَّة ٤ × ٤,٥ ساعات = ١٨ ساعة في اليوم	اضرب عدد ساعات اليوم في ٤
لتُنجِز العمل في ٣ أيام، تعمل لمُدَّة $\frac{١٨}{٣}$ = ٦ ساعات في اليوم.	اقسم عدد ساعات العمل المطلوب على ٣

تمارين ١٠-٤-ج

١) تلقّى مصنع للملابس طلبية كبيرة، حيث يعتمد عدد الأيام التي يستغرقها صنع جميع الملابس على عدد العمال. أكمل الجدول أدناه:

عدد العمّال	١٢٠	١٥٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠
عدد الأيام	٤٠	٣٢			

٢) يحتاج ٦ عمّال إلى ١٢ يومًا لطلاء مبنى. احسب عدد الأيام المطلوب لطلاء المبنى بنفس المُعدّل بواسطة:

أ ٩ عمّال　　　ب ٣٦ عاملاً

٣) مع سمير حبل طوله ٥٠ مترًا:

أ كم جُزءًا يمكن أن يقسمه إذا كان طول كل جزء:

(١) ٥٠ سم؟　　(٢) ٢٠٠ سم؟　　(٣) ٦٢٥ سم؟

ب قسّم الحبل إلى ٢٠ قطعة مُتساوية في الطول. ما طول كلّ قطعة؟

٤) تستغرق رحلة الطيران من المدينة (أ) إلى المدينة (ب) ١١ ساعة، بمُعدَّل سرعة ٩٢٠ كم/ساعة، وتستغرق نفس الرحلة في الطقس الرديء ١٤ ساعة. ما السرعة المُتوسِّطة لهذه الطائرة في هذه الرحلة؟

٥) تستغرق رحلتك ٣ ساعات عندما تقود سيّارتك بسرعة ٦٠ كم/ساعة. كم تستغرق رحلتك إذا قدت سيّارتك بسرعة ٥٠ كم/ساعة؟

٥-١٠ زيادة أو نقصان الكمّية بنسبة مُعطاة

في المثال (١٤)، وجدت ثمن ١١ زُجاجة عطر بمعلومية ثمن ٥ زُجاجات عطر. هذا مثال على زيادة الكمّية بنسبة مُعطاة. يمكن أن تُسأل عن زيادة مبلغ ٢٠٠ ريال عُماني بنسبة ١١:٥

مثــال ١٧

زِد المبلغ ٢٠٠ ريال بنسبة ١١:٥

الحــلّ:

القيمة الجديدة: القيمة الأصلية = ١١:٥	اكتب النسبة (القيمة الجديدة : القيمة الأصلية) في صورة كسر.
القيمة الجديدة: ٢٠٠ = ١١:٥	
$\frac{\text{القيمة الجديدة}}{٢٠٠} = \frac{١١}{٥}$	اكتب النسبة ١١ :٥ في صورة $\frac{١١}{٥}$
القيمة الجديدة = $\frac{١١ \times ٢٠٠}{٥}$ = ٤٤٠ ريالاً عُمانيًّا	اضرب كلا الطرفَين في ٢٠٠

مثــال ١٨

أنقص ٤٥ م بنسبة ٢:٣

الحــلّ:

القيمة الجديدة: القيمة الأصلية = ٢:٣	اكتب نسبة (القيمة الجديدة : القيمة الأصلية) في صورة كسر.
القيمة الجديدة: ٤٥ = ٢:٣	
$\frac{\text{القيمة الجديدة}}{٤٥} = \frac{٢}{٣}$	اكتب النسبة ٢:٣ في صورة كسر
القيمة الجديدة = $\frac{٢ \times ٤٥}{٣}$ = ٣٠ م	

تمارين ١٠-٥

١) زِد القيمة ٤٠ بنسبة ٧:٥

٢) أَنْقُصْ القيمة ٤٥ بنسبة ٣:٤

٣) زِد القيمة ٨٤ بنسبة ٥:٤

٤) أَنْقُصْ القيمة ٥٧ بنسبة ٢:٣

٥) زادت كتلة حامد بنسبة ١١:١٠، فإذا كانت كتلته السابقة تساوي ٨٠ كغم، فكم ستكون كتلته الجديدة؟

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- النسبة المئوية للزيادة أو للنقصان هي نسبة مئوية من القيمة الأصلية.
- يمكن استخدام النسبة المئوية العكسية لإيجاد القيمة الأصلية.
- النسبة مُقارَنة بين كمّيتَين أو أكثر في مجموعة مُرتَّبة. يمكن التعبير عن النسبة في صورة أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$. لا يوجد وحدة قياس للنسبة.
- يمكن تبسيط النِّسبة بضرب أو قسمة الكمّيتَين على العدد نفسه. ينتج عن هذه الطريقة نِسَب مُتكافِئة.
- مقاييس رسم الخريطة أمثلة جيدة على النِّسَب في مواقف من الحياة اليومية. يُكتَب مقياس رسم الخريطة في صورة ١ : ن. يساعدك ذلك على تحويل المسافة على الخريطة إلى المسافة الحقيقية باستخدام نسبة المقياس.
- التناسُب نسبة ثابتة بين العناصر المُتناظِرة في مجموعتَين.
- عندما يكون التناسُب بين الكمّيات طرديًّا، فإنها تزداد أو تتناقص بنفس المُعدَّل.
- عندما يكون التناسُب بين الكمّيات عكسيًّا، تزداد إحداهما عندما تتناقص الأخرى.
- يمكنك أن تزيد أو تنقص كمّيات بنسبة مُعطاة.

يجب أن تكون قادرًا على:

- إيجاد النسبة المئوية للزيادة أو للنقصان.
- إيجاد القيمة الأصلية باستخدام النسبة المئوية العكسية.
- تبسيط النسبة وإيجاد القيَم المجهولة في النِّسَب المُتكافِئة.
- تقسيم كمّيات بنسبة مُعطاة.
- تحويل القياسات على الخرائط والتصميمات ورسوم المُخطَّطات إلى قياسات حقيقية، وبالعكس.
- حلّ مسائل تتضمَّن تناسُبًا طرديًّا أو عكسيًّا.
- التعبير عن التناسُب الطردي والعكسي جبريًّا.
- زيادة وإنقاص المقادير بنسبة مُعطاة.

تمارين نهاية الوحدة

١) وصل عدد السيّاح الصيف الماضي إلى ٢٧٥٠٠ سائح في إحدى المدن، وازداد عددهم هذا الصيف بنسبة مئوية مقدارها ٩٪. أوجد عدد السيّاح في المدينة هذا الصيف.

٢) كان طول عبداللّه ١٦٠ سم في ذكرى ولادته الخامسة عشرة، وأصبح طوله ١٧٢ سم في ذكرى ولادته السادسة عشرة. ما النسبة المئوية للزيادة في طول عبداللّه؟

٣) ازداد عدد السكّان في قريتي خلال هذا العام بنسبة مئوية مقدارها ٥٪، حيث يعيش في القرية الآن ٢٩٤ شخصًا. كم شخصًا كان في القرية في العام السابق؟

٤) إذا تشاركت سميرة وآمنة سلَّة فيها ٣٠ بيضة بنسبة ٣:٢. فكم سيكون عدد البيض الذي ستحصل عليه سميرة؟

٥) باع جاسم وسلمان مجموعة من الأدوات الحرفية بمبلغ ٦٩ ريالاً عمانيًّا، وتقاسما المبلغ بنسبة ٥:٧. فكم ستكون حصّة سلمان؟

٦) أنجزت سهام رسم مُخطَّط لغرفتها باستخدام مقياس رسم ١:٢٥، إذا كان طول أحد الجدران ١٢ سم على المُخطَّط، فما طوله الحقيقي؟

٧) استخدمت فاطمة الزبيب والجزر والتمر بنسبة ٣:٥:٤ لصنع قالب حلوى. فإذا كانت كتلة المُكوِّنات الثلاثة بعد خلطها معًا ٤,٨ كيلوغرامات، احسب كتلة:

أ الزبيب

ب التمر

٨) خلال فترة الانتخابات، كانت نسبة أصوات الإناث إلى الذكور في إحدى الولايات ٣:٢، إذا كان عدد الأصوات الكلّي ٢٤٠٠ صوت، فكم عدد الناخبين الذكور؟

٩) استُخدِم في وصفة لعجينة الكعك ثلاثة مكاييل من دقيق القمح الكامل لكل أربعة مكاييل من الدقيق الأبيض. كم مكيالاً يلزم من دقيق القمح الكامل إذا استُخدِم ١٢ مكيالاً من الدقيق الأبيض؟

الوحدة الحادية عشرة: التحليل وحلّ المُعادلات التربيعية

عند تتبُّع مسار كرة السلة التي يرميها اللاعب نجد أنها تتبِّع مسارًا مُنحنيًا، يمكن وصفه رياضيًّا باستخدام معادلة من الدرجة الثانية؛ وسوف تستكشف الجبر المُرتبِط بهذا الموضوع خلال دراسة هذه الوحدة.

وتُعبِّر المُعادلات التربيعية المختلفة عن مسارات منحنية، ويمكن استخدامها لتوقُّع الزمن المُستغرَق لسقوط جسم ما، ولتحديد موقعه بعد زمن معيّن... وهكذا.

المُفردات

- فكّ الأقواس Expand
- الحد الثابت Constant term
- العبارة التربيعية Quadratic expression
- التحليل إلى عوامل Factorisation
- الفرق بين مُربَّعَين Difference between two squares
- المُعادلة التربيعية Quadratic equation
- حل المُعادلة التربيعية Solving the quadratic equation
- التجميع Grouping
- العامِل المُشترَك Common factor
- المُربَّع الكامل Perfect square

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تفكّ ناتج ضرب عبارات جبرية.
- تُحلِّل العبارات التربيعية إلى عوامل.
- تحلّ المعادلات التربيعية بالتحليل إلى عوامل.
- تُحلِّل عبارات تربيعية إلى عوامل مُعامِل س^{٢} فيها لا يساوي ١

١١-١ فكّ أكثر من مجموعتَي أقواس

تعلَّمت سابقًا كيف تفكّ مجموعتَي أقواس مثل (س + ٣)(س + ٥).

عندما تتخلَّص من الأقواس وتُعيد كتابة العبارة الجبرية، تكون قد **فككت** الأقواس. تتضمَّن العبارة الجبرية الناتجة حدًّا يحتوي على س^{٢}، وحدًّا يحتوي على س، **وحدًّا ثابتًا**. تُسمّى هذه الأنواع من العبارات **بالعبارات التربيعية**.

والآن عليك أن تكون قادرًا على فكّ ثلاث مجموعات من الأقواس، يمكنك القيام بذلك من خلال تنفيذ عدَّة خطوات. قد يتضمَّن الناتج حدودًا مرفوعة إلى الأس ٣ (عبارات تكعيبية).

لفكّ عبارات مثل (س + ٣)(س + ٥)(س − ١٠)، ابدأ بفك (س + ٣)(س + ٥).

يمكنك استخدام الشبكة للقيام بذلك:

×	س	٣
س	س^{٢}	٣س
٥	٥س	١٥

∴ (س + ٣)(س + ٥) = س^{٢} + ٣س + ٥س + ١٥ والتي تُبسِّط بدورها إلى س^{٢} + ٨س + ١٥

والآن، اضرب الناتج في (س − ١٠):

×	س^{٢}	٨س	١٥
س	س^{٣}	٨س^{٢}	١٥س
−١٠	−١٠س^{٢}	−٨٠س	−١٥٠

يصبح الناتج بعد تجميع الحدود المُتشابِهة س^{٣} − ٢س^{٢} − ٦٥س − ١٥٠

مثـــال ١

فكّ وبسِّط كلاًّ ممّا يلي:

أ (س + ٢)(س + ٩)(س + ١)

ب (س − ٧)(س + ٦)(س − ٢)

الحــلّ:

أ (س + ٢)(س + ٩)(س + ١)

(س + ٢)(س + ٩)

س^{٢} + ٩س + ٢س + ١٨

= س^{٢} + ١١س + ١٨

الطريقة هنا مُشابهة للطريقة التي استخدمتها سابقًا.

تحتاج إلى اختيار الطريقة التي تراها سهلة، لكن تأكّد من إجراء جميع الخطوات المناسبة ليكون عملك واضحًا.

(س^{٢} + ١١س + ١٨)(س + ١)	والآن، اضرب الناتج في (س + ١) يجب ضرب كل حد في مجموعة الأقواس الأولى بكلّ حد في مجموعة الأقواس الثانية.
س^{٣} + ١١س^{٢} + ١٨س + س^{٢} + ١١س + ١٨	اجمع الحدود المُتشابهة
= س^{٣} + ١٢س^{٢} + ٢٩س + ١٨	بسِّط.

ب (س − ٧)(س + ٦)(س − ٢)

الحل باستخدام طريقة الشبكة مع وجود إشارة السالب.

×	س	−٧
س	س^{٢}	−٧س
+٦	٦س	−٤٢

س^{٢} − ٧س + ٦س − ٤٢ — اجمع الحدود المُتشابهة.

= س^{٢} − س − ٤٢ — بسِّط.

والآن، اضرب الناتج في (س − ٢).

×	س^{٢}	−س	−٤٢
س	س^{٣}	−س^{٢}	−٤٢س
−٢	−٢س^{٢}	٢س	٨٤

س^{٣} − ٣س^{٢} − ٤٠س + ٨٤ — بسِّط للحصول على الناتج.

رابط

تفيد العبارات التربيعية والصيَغ في نمذجة مواقف الحركة التي تتضمَّن التسارُع ومسافة التوقُّف والسرعة والمسافة المقطوعة. تُدرس هذه المواقف في الفيزياء، لكن لها تطبيقات في الحياة اليومية، مثل الطرق أو التحقيقات في حوادث الطيران.

مثــال ٢

فكّ وبسِّط: (٣س + ٢) (٢س + ١) (س − ١)

الحــلّ:

أوّلاً: نفكّ أقواس المجموعتَين الأولى والثانية:

(٣س + ٢)(٢س + ١)(س − ١)

= (٦س^{٢} + ٤س + ٣س + ٢)(س − ١) — اضرب مجموعتَي الأقواس الأولى والثانية.

= (٦س^{٢} + ٧س + ٢)(س − ١) — جمّع الحدود المُتشابهة.

ثانيًا: نضرب الناتج من أوّلاً في مجموعة الأقواس الثالثة:

اضرب كلّ حدّ من مجموعة الأقواس الأولى في كلّ حدّ من مجموعة الأقواس الثانية.

= ٦س^{٣} + ٧س^{٢} + ٢س − ٦س^{٢} − ٧س − ٢

= ٦س^{٣} + س^{٢} − ٥س − ٢ — جمّع الحدود المُتشابِهة لتُبسّطها.

تمارين ١١-١

١) فكّ وبسِّط كلاًّ من العبارات الجبرية التالية:

أ (س + ٣)(س + ١)(س + ٢)

ب (س + ٦)(س + ٤)(س + ٥)

ج (س + ٩)(س + ١٠)(س + ١)

د (س + ٣)(س + ١٢)(س − ١)

هـ (س + ١)(س + ١)(س − ٣)

و (س + ٥)(س + ٤)(س − ٢)

ز (س + ٤)(س − ٧)(س + ٢)

ح (س − ٣)(س + ٨)(س − ١)

ط (س − ١)(س + ١)(س + ٢)

ي (س − ٩)(س + ٨)(س − ٥)

ك (س − ٦)(س − ٧)(س − ٨)

٢) فكّ وبسِّط كلاًّ من العبارات الجبرية التالية:

أ (٥س + ٢)(٣س − ٣)(س + ٢)

ب (س − ٥)(س − ٥)(س + ٥)

ج (٤س − ١)(س + ١)(٣س − ٢)

د (س + ٤)(٢س + ٤)(٢س + ٤)

هـ (٢س − ٣)(٣س − ٢)(٢س − ١)

و (٣س − ٢)(٣س − ٢)(٢س − ١)

ز (س + ٢)(س + ٢)(س + ٢)

ح (٢س − ٢)(٢س − ٢)(٢س − ٢)

٣) يتمّ إيجاد حجم متوازي المستطيلات باستخدام الصيغة ح = ط ض ع، حيث ط: الطول، ض: العرض، ع: الارتفاع. إذا علمت أن متوازي المُستطيلات طوله (٢س + $\frac{١}{٢}$) م وعرضه (س − ٢) م وارتفاعه (س − ٢) م:

أ اكتب عبارة جبرية تُمثِّل حجم متوازي المستطيلات مُستخدِمًا الأبعاد المُعطاة.

ب فكّ العبارة الجبرية.

ج أوجد حجم مُتوازي المستطيلات عندما س = ٢,٢ م.

١١-٢ تحليل العبارات الجبرية إلى عوامل

في هذا الدرس، سوف تقوم بتحليل عبارات جبرية مُحدَّدة إلى عوامل، وسوف تتعلَّم كيف تُحلِّل المُربَّع الكامل إلى عوامل، وكيف تستخدم التجميع والعامل المُشترَك في التحليل إلى عوامل، وسوف تتعلَّم أيضًا كيف تُحلِّل العبارات التربيعية الثُلاثية إلى عوامل، وكيف تستخدم الفرق بين مُربَّعين لتُحلِّل عبارة جبرية إلى عوامل.

١١-٢-أ فكّ المُربَّع الكامل

(س + ص)^{٢} تعني (س + ص)(س + ص)

لتجد ناتج الضرب، يمكنك أن تستخدم الطريقة التي تعلَّمتها من قبل.

(س + ص)(س + ص) = س^{٢} + س ص + س ص + ص^{٢} = س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}

وبالتالي، يمكن القول أن: س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} = (س + ص)^{٢}

ستكون قادرًا على فكّ هذه الأنواع من العبارات الجبرية إلى عوامل بالاستقصاء.

انظر إلى الناتج. هل تلاحظ أن:

- الحدّ (س^{٢}) هو مُربَّع الحدّ الأوَّل؟
- الحدّ (٢س ص) هو ضعف ناتج ضرب الحدّ الأوَّل في الحدّ الثاني؟
- الحدّ (ص^{٢}) هو مُربَّع الحدّ الثاني؟

مثــال ٣

فكّ وبسط كلاً ممّا يلي:

أ (س + ٦)^{٢} ب (٢أ + ٣ب)^{٢} ج (٤س – ٧)^{٢}

الحــلّ:

أ (س + ٦)^{٢}

= (س + ٦)(س + ٦)

= س^{٢} + ٦س + ٦س + ٣٦

= س^{٢} + ١٢س + ٣٦

الطريقة هنا مشابهة للطريقة التي تعلمتها من قبل يمكن هنا استخدام طريقة الاستقصاء لإيجاد المفكوك:

(س + ٦)^{٢} أوجد مربع الحد الأول ومربع الحد الثاني: الناتج: س^{٢}، ٣٦

أوجد ضعف ناتج ضرب الحد الأول في الحد الثاني:

الناتج: ٢ × ٦ × س = ١٢س

١٢س هو الحد الأوسط في الناتج.

ب	(٢أ + ٣ب)^{٢} (٢أ)^{٢} = ٤أ^{٢} (٣ب)^{٢} = ٩ب^{٢} ٢ × ٢أ × ٣ب = ١٢أب ∴ (٢أ + ٣ب)^{٢} = ٤أ^{٢} + ١٢أب + ٩ب^{٢}	أوجد مُربَّع الحد الأوَّل، ثمّ أوجد مُربَّع الحد الثاني أوجد بعد ذلك ضعف ناتج ضرب الحد الأول في الحد الثاني، يمكنك التحقُّق من الناتج بفك القوسَين مستخدمًا الطريقة التي تعلمتها من قبل.
ج	(٤س − ٧)^{٢} = (٤س)^{٢} + ٢ × ٤س × (−٧) + (−٧)^{٢} = ١٦س^{٢} − ٥٦س + ٤٩	انتبه عند التعامل مع الأعداد السالبة. لاحظ أن الإشارة السالبة تظهر فقط في الحد الأوسط من الناتج.

تحليل المُربَّع الكامل إلى عوامل

إذا كانت العبارة الجبرية في صورة س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}، يمكنك القول إنها مُربَّع كامل، ويمكن كتابتها في صورة (س + ص)^{٢}. للحصول على مُربَّع كامل:

- يجب أن يكون الحدّان الأوَّل والثالث في العبارة الجبرية مكتوبَين في صورة مُربَّع كامل (س^{٢}، ص^{٢})
- يجب أن يكون الحدّ الأوسط في العبارة الجبرية مُساويًا لضعف ناتج ضرب الجذرَين التربيعيَّين للمُربَّعَين الكاملَين (٢ س ص أو −٢ س ص)

مثـــال ٤

حلِّل كلاً من العبارات الجبرية التالية إلى عوامل:

أ س^{٢} + ١٤س + ٤٩

ب أ^{٢} − ٦أب + ٩ب^{٢}

ج $\frac{٩}{١٦}$س^{٢} + $\frac{٣}{٢}$س ص + ص^{٢}

د س^{٤} − ٨ س^{٢}ص + ١٦ص^{٢}

الحــلّ:

أ	س^{٢} + ١٤س + ٤٩ = س^{٢} + ٢ × س × ٧ + ٧^{٢} = (س + ٧)^{٢}	س^{٢}، ٤٩ مُربَّعان كاملان ١٤س = ٢ × $\sqrt{س^{٢}}$ × $\sqrt{٤٩}$
ب	أ^{٢} − ٦ أب + ٩ب^{٢} = أ^{٢} − ٢ × أ × ٣ب + (٣ب)^{٢} = (أ − ٣ب)^{٢}	لأن الحدّ الأوسط يتضمَّن إشارة سالبة، سيتضمَّن القوس إشارة سالبة (إشارة الحد الثاني ستكون سالبة).

ج	$\frac{٩}{١٦}\text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢}\text{س ص} + \text{ص}^{٢}$ حاول مع $(\frac{٣}{٤}\text{س} + \text{ص})^{٢}$ $(\frac{٣}{٤}\text{س} + \text{ص})^{٢}$ $= \frac{٩}{١٦}\text{س}^{٢} + ٢ \times \frac{٣}{٤}\text{س ص} + \text{ص}^{٢}$ $= \frac{٩}{١٦}\text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢}\text{س ص} + \text{ص}^{٢}$ $\therefore \frac{٩}{١٦}\text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢}\text{س ص} + \text{ص}^{٢} = (\frac{٣}{٤}\text{س} + \text{ص})^{٢}$	هنا ليس من السهل تحديد الحد الأوسط من الحدَّين الأول والثالث. حاول استخدام الجذرين التربيعيِّين للحدَّين الأوَّل والأخير وتحقَّق من صحّتِهما.
د	$\text{س}^{٤} - ٨\text{س}^{٢}\text{ص} + ١٦\text{ص}^{٢}$ $= (\text{س}^{٢})^{٢} - ٢ \times \text{س}^{٢} \times ٤\text{ص} + (٤\text{ص})^{٢}$ $= (\text{س}^{٢} - ٤\text{ص})^{٢}$	العبارة الجبرية ليست تربيعية، ولكن تذكَّر أن $\text{س}^{٤}$ مُساوية لـ $(\text{س}^{٢})^{٢}$

تمارين ١١-٢-أ

١) فكّ المُربَّع الكامل في كلّ ممّا يلي:

أ $(\text{س} - \text{ص})^{٢}$ ب $(\text{أ} + \text{ب})^{٢}$ ج $(٢\text{س} + ٣\text{ص})^{٢}$

د $(٣\text{س} - ٢\text{ص})^{٢}$ هـ $(\text{س} + ٢\text{ص})^{٢}$ و $(\text{ص} - ٤\text{س}^{٢})^{٢}$

ز $(\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢})^{٢}$ ح $(٢ + \text{ص}^{٣})^{٢}$ ط $(-٢\text{س} - ٤\text{ص}^{٢})^{٢}$

ي $(\frac{١}{٢\text{س}} - \frac{١}{٤\text{ص}})^{٢}$ ك $(\frac{٣\text{س}}{٤} - \frac{\text{ص}}{٢})^{٢}$ ل $(\text{أ} + \frac{١}{٢}\text{ب})^{٢}$

م $(-\text{أب} - \text{جـ}^{٤})^{٢}$ ن $(٣\text{س}^{٢}\text{ص} - ١)^{٢}$ س $(\frac{٢\text{س}}{٣} + ٤\text{ص})^{٢}$

ع $[-(\text{س} - ٣)]^{٢}$

٢) حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التالية إلى عوامل:

أ $\text{أ}^{٢} + ١٠\text{أ} + ٢٥$ ب $\text{ب}^{٢} - ٢٠\text{ب} + ١٠٠$

ج $\text{جـ}^{٢} + ٤\text{جـ} + ٤$ د $\text{د}^{٢} - ٤\text{د} + ٤$

هـ $٩\text{س}^{٢} + ٦\text{س ص} + \text{ص}^{٢}$ و $٤\text{ص}^{٢} - ٢٠\text{ص} + ٢٥$

ز $١٦\text{س}^{٢} + ٨\text{س} + ١$ ح $\text{أ}^{٢} + ١٢\text{أب} + ٣٦\text{ب}^{٢}$

ط $\text{س}^{٢} - ١٤\text{س ص} + ٤٩\text{ص}^{٢}$ ي $٤\text{جـ}^{٢} + ١٢\text{جـ د} + ٩\text{د}^{٢}$

ك $٤\text{جـ}^{٢} - ١٢\text{جـ د} + ٩\text{د}^{٢}$ ل $٩\text{جـ}^{٢} + ١٢\text{جـ د} + ٤\text{د}^{٢}$

م $\frac{٤}{٩}\text{س}^{٢} + \frac{٢٠}{٣}\text{س} + ٢٥$ ن $\frac{\text{س}^{٢}}{٣٦} + \frac{٧}{٣}\text{س} + ٤٩$

س $\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} - ٢\text{س ص}^{٣} + \text{ص}^{٤}$ ع $\frac{١}{٩}\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٩$

١١-٢-ب التحليل إلى عوامل بالتجميع وأخذ العامل المُشترَك

لقد تعلمت سابقًا كيفية إيجاد العوامل المشتركة لعبارة جبرية ما، ولكن إذا كان لديك أربعة حدود مختلفة، مثلاً:

أجـ + أد + ب جـ + ب د، فإنَّك تستطيع أن تُحلِّلها من خلال التعامل مع الحدود الأربعة كزوجَين من الحدود، بحيث يجب أن يتضمَّن كل زوج عاملاً مشتركًا:

أجـ + أد + ب جـ + ب د

= أ(جـ + د) + ب(جـ + د)

= (أ + ب)(جـ + د)

مثــال ٥

حلِّل كلاً مما يأتي بالتجميع وأخذ العامل المشترك:

أ س ص − ٣س + ص − ٣

ب س ص + س + ٢ص + ٢

الحــلّ:

أ	س ص − ٣س + ص − ٣	
	= (س ص − ٣س) + (ص − ٣)	قسّم العبارة إلى قوسَيْن.
	= س(ص − ٣) + (ص − ٣)	حلّل كل قوس بأخذ عامل مُشترَك.
	= (ص − ٣)(س + ١)	حلّل بأخذ عامل مُشترَك (ص − ٣).
ب	س ص + س + ٢ص + ٢	
	= (س ص + س) + (٢ص + ٢)	قسّم العبارة إلى قوسَيْن.
	= س(ص + ١) + ٢(ص + ١)	حلّل كل قوس بأخذ عامل مُشترَك.
	= (ص + ١)(س + ٢)	حلّل بأخذ عامل مُشترَك (ص + ١).

تمارين ١١-٢-ب

١) حلِّل كلاً ممّا يلي بالتجميع وأخذ العامل المُشترَك:

أ س ص − ٣س + ٧ص − ٢١ ب ١٠أ^{٢} + ٥ أب − ٢أجـ − ب جـ

ج ٦ ب جـ + ٣جـ + ١٠ ب د + ٥ د

١١-٢-ج تحليل العبارة التربيعية الثُّلاثية التي في صورة: س^{٢} + ب س + جـ

عند فكّ الأقواس في العبارة الجبرية (س + ٢)(س + ٩)، نحصل على:

س^{٢} + ١١س + ١٨

انظر إلى العبارة الجبرية الناتجة، وحدِّد ماذا تُلاحظ بين:

- مُعامِل س في العبارة الجبرية الناتجة والحدود الثابتة في القوسَين.
- الحدّ الثابت في العبارة الجبرية الناتجة والحدود الثابتة في القوسَين.

نستنتج أنَّه عند تحليل العبارة الجبرية الثُّلاثية س^{٢} + ب س + جـ إلى عوامل، نجد أن

س^{٢} + ب س + جـ = (س + م)(س + ن)

حيث ب = م + ن ، جـ = م × ن

مثـــال ٦

حلِّل كل عبارة تربيعية فيما يلي إلى عوامل تحليلاً كاملاً:

أ س^{٢} + ٧س + ١٢ ب س^{٢} − ٦س − ١٦ ج س^{٢} − ٨ س + ١٥

الحـــلّ:

أ س^{٢} + ٧س + ١٢ ١٢ = ١ × ١٢ ١٢ = ٢ × ٦ ١٢ = ٣ × ٤ ، ٣ + ٤ = ٧ ∴ س^{٢} + ٧س + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤)	تحتاج إلى عددَين ناتج ضربهما يساوي ١٢ ومجموعهما يساوي ٧ مجموع ١، ١٢ لا يُساوي ٧ مجموع ٦، ٢ لا يُساوي ٧ ناتج ضرب ٣، ٤ يُساوي ١٢ ومجموعهما يساوي ٧
ب س^{٢} − ٦س − ١٦ $^{-}$١٦ = ١ × $^{-}$١٦ $^{-}$١٦ = $^{-}$٤ × ٤ $^{-}$١٦ = $^{-}$٨ × ٢، $^{-}$٨ + ٢ = $^{-}$٦ ∴ س^{٢} − ٦س − ١٦ = (س − ٨)(س + ٢)	تحتاج إلى عددَين ناتج ضربهما يساوي $^{-}$١٦ ومجموعهما يساوي $^{-}$٦؛ بما أن ناتج ضرب العددَين سالب، سيكون أحدهما سالبًا والآخر موجبًا. (بما أن مجموعهما سالب، فإن العدد الأكبر سيكون سالبًا). ناتج ضرب $^{-}$٨، ٢ يساوي $^{-}$١٦ ومجموعهما يساوي $^{-}$٦

اكتب أزواج عوامل العدد ١٢ (إذا حدَّدت زوج العوامل الذي يصحّ مباشرة، فلن تحتاج إلى كتابة جميع أزواج العوامل الأخرى).

عند البحث عن زوج من الأعداد الصحيحة، فكِّر في عوامل الحدّ الثابت أوّلًا. ثم اختر عددَين يكون مجموعهما مساويًا لمُعامِل الحد س بطريقة صحيحة.

ج) س^{٢} − ٨ س + ١٥ ١٥ = $^{-}$٥ × $^{-}$٣ $^{-}$٨ = $^{-}$٥ + $^{-}$٣ ∴ س^{٢} − ٨ س + ١٥ = (س − ٣)(س − ٥)	تحتاج إلى عددَين ناتج ضربهما يساوي ١٥ ومجموعهما يساوي $^{-}$٨؛ بما أن ناتج ضربهما موجبٌ ومجموعهما سالبٌ، فإن كليهما سالبان. ناتج ضرب $^{-}$٥، $^{-}$٣ يساوي ١٥ ومجموعهما يساوي $^{-}$٨

تمارين ١١-٢-ج

١) حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التالية إلى عوامل:

أ) س^{٢} + ١٤س + ٢٤   ب) س^{٢} + ٣س + ٢   ج) س^{٢} + ١١س + ٢٤

د) س^{٢} + ١٢س + ٣٥   هـ) س^{٢} + ١٢س + ٢٧   و) س^{٢} + ٧س + ٦

ز) س^{٢} + ١١س + ٣٠   ح) س^{٢} + ١٠س + ١٦   ط) س^{٢} + ١١س + ١٠

ي) س^{٢} + ٨ س + ٧   ك) س^{٢} + ٢٤س + ٨٠   ل) س^{٢} + ١٣س + ٤٢

٢) حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التالية إلى عوامل:

أ) س^{٢} − ٨س + ١٢   ب) س^{٢} − ٩س + ٢٠   ج) س^{٢} − ٧س + ١٢

د) س^{٢} − ٦س + ٨   هـ) س^{٢} − ١٢س + ٣٢   و) س^{٢} − ١٤س + ٤٩

ز) س^{٢} − ٨س − ٢٠   ح) س^{٢} − ٧س − ١٨   ط) س^{٢} − ٤س − ٣٢

ي) س^{٢} + س − ٦   ك) س^{٢} + ٨س − ٣٣   ل) س^{٢} + ١٠س − ٢٤

٣) حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التالية إلى عوامل:

أ) ص^{٢} + ٧ص − ١٧٠   ب) د^{٢} + ٨ د − ٨٤   ج) د^{٢} − ٢٤د + ١٤٤

د) د^{٢} + ١٦د − ٣٦   هـ) ع^{٢} + ٢٠ع + ٧٥   و) س^{٢} + ٥س − ١٥٠

١١-٢-د تحليل العبارة التربيعية الثلاثية التي في صورة: أس^{٢} + ب س + جـ، حيث أ ≠ ١

عندما يكون مُعامِل س^{٢} لا يساوي ١، يكون التحليل إلى عوامل مُختلفًا قليلاً عن تحليل العبارة التربيعية الذي درسته في الدرس السابق، ولكن تتوفَّر بعض الإرشادات لمساعدتك في تحليلها بالطريقة الصحيحة.

مثـــال ٧

حلِّل كل عبارة من العبارات الجبرية التالية الى عوامل:

أ ٢س^{٢} + ٣س + ١   ب ٣س^{٢} − ١٤س + ٨   ج ١٠س^{٢} + ١١س − ٨

الحـــلّ:

أ ٢س^{٢} + ٣س + ١ ٢س^{٢} + ٣س + ١ = (٢س)(س) حاول مع كلّ من (−١، −١) أو (١، ١): (٢س − ١)(س − ١) = ٢س^{٢} − ٣س + ١ (٢س + ١)(س + ١) = ٢س^{٢} + ٣س + ١ ∴ ٢س^{٢} + ٣س + ١ = (٢س + ١)(س + ١)	٢س^{٢} تُحلَّل إلى ٢س × س، ضع هَذَين الحدَّين في بداية كلّ مجموعة أقواس. اترك مكانَين فارغَين في مجموعتَي الأقواس لقيمتَين مجهولتَين، توجد مفاتيح الحل في الحد الثابت. بما أن الحد الثابت $^{+}$١، فإن القيمتَين المجهولتَين هما إما $^{-}$١، $^{-}$١ أو $^{+}$١، $^{+}$١ مُعامِل س لا يصحّ لأن إشارته سالبة. مُعامِل س صحيح.
ب ٣س^{٢} − ١٤س + ٨ ٣س^{٢} − ١٤س + ٨ = (٣س)(س) (٣س − ٢)(س − ٤) = ٣س^{٢} − ١٢س − ٢س + ٨ =٣س^{٢} − ١٤س + ٨ ∴ ٣س^{٢} − ١٤س + ٨ = (٣س − ٢)(س − ٤)	اكتب العبارة الجبرية في صورة ناتج ضرب لعاملَين. يجب أن يكون ناتج ضرب الحدّين المجهولَين ٨، وبما أن الحد الثابت موجب، يجب أن يكون للقيمتَين المجهولتَين الإشارة نفسها. الأزواج الممكنة هي: ٨، ١ أو ٢، ٤ أو $^{-}$٨، $^{-}$١ أو $^{-}$٢، $^{-}$٤ لأن مجموع العددَين سالب، فإن العددَين الموجبَين مُستثنيان.

ج

١٠س^{٢} + ١١س − ٨	هنا يوجد أكثر من عبارتَين جبريَّتَين ناتج ضربهما ١٠س^{٢} = ١٠س × س أو ٢س × ٥س حاول مع كل زوج من الزوجَين أعلاه.
الزوج الأوَّل لعوامل ١٠س^{٢} هما: ١٠س، س	
١٠س^{٢} + ١١س − ٨ = (١٠س)(س)	
في هذه العبارة التربيعية ستجد أن كل عوامل العدد ٨ لا تصحّ!	
الزوج الثاني لعوامل ١٠س^{٢} هما: ٢س، ٥س	٥س × ٢س = ١٠س^{٢}
١٠س^{٢} + ١١س − ٨ = (٥س)(٢س)	
٨، $^{-}$١ يحققان العبارة التربيعية:	٨ × $^{-}$١ = $^{-}$٨
١٠س^{٢} + ١١س − ٨	٥س × $^{-}$١ = $^{-}$٥س
= (٥س + ٨)(٢س − ١)	٨ × ٢س = ١٦س
	$^{-}$٥س + ١٦س = ١١س، حيث يساوي الحد الموجود في الوسط.

في الجُزئية ج من المثال ٧، تظهر العملية طويلة، لكن مع التدريب ستجد طُرقًا تسرّع هذه العملية. يُبيِّن المثال ١١ ذلك.

تمارين ١١-٢-د

١) حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التالية إلى عوامل:

أ ٣س^{٢} + ١٤س + ٨

ب ٢س^{٢} + س − ٣

ج ٦س^{٢} + س − ٢

د ٣س^{٢} + ١٤س + ١٦

هـ ٢س^{٢} − س − ١٠

و ١٦س^{٢} + ٣٢س − ٩

ز ٣س^{٢} + ١٦س + ٥

ح ٨س^{٢} + ٢س − ١

ط ٢س^{٢} − س − ٦

ي ٢س^{٢} + ٩س + ٩

ك ٣س^{٢} + ٢س − ١٦

ل ١٠س^{٢} − س − ٣

م ٥س^{٢} + ٦س + ١

ن ٢س^{٢} − ١٩س + ٩

س ١٢س^{٢} + ٨س − ١٥

١١-٢-هـ تحليل الفرق بين مُربَّعين

انظر ماذا سيحدث إذا كان لدينا نفس الحدود في مجموعتَي الأقواس، مع اختلاف في الإشارة بينهما:

(أ + ب)(أ − ب)

بعد فكّ القوسَين نحصل على أ^{٢} − أب + أب − ب^{٢} والحدود التي تتضمَّن أب يُلغي بعضها بعضًا، ويبقى فقط أ^{٢} − ب^{٢}، ويُسمّى **بالفرق بين مُربَّعَين**.

مثـــال ٨

فكّ العبارة الجبرية: (س + ٥)(س − ٥)

الحـــلّ:

(س + ٥)(س − ٥) = س^{٢} − ٥س + ٥س − ٢٥ = س^{٢} − ٢٥	−٥س + ٥س = ٠ الناتج هو مُربَّع الحدّ الأوَّل مطروحًا منه مُربَّع الحدّ الثاني (الفرق بين مُربَّعَين).

لتحليل س^{٢} − ١٠٠ إلى عوامل. لاحظ أن س^{٢} − ١٠٠ = س^{٢} + ٠ س − ١٠٠

١٠ × −١٠ = −١٠٠، −١٠ + ١٠ = ٠، وعليه س^{٢} + ٠س − ١٠٠ = (س − ١٠)(س + ١٠)

والآن فكّر في حالة عامَّة تُساعدك على تحليل س^{٢} − أ^{٢} إلى عوامل.

لاحظ أن س^{٢} − أ^{٢} = س^{٢} + ٠س − أ^{٢}

بما أن أ × −أ = −أ^{٢} و أ + −أ = ٠، فإنَّ س^{٢} − أ^{٢} = (س − أ)(س + أ)

مثـــال ٩

حلِّل كلاً من العبارات الجبرية التالية، مُستخدِمًا تحليل الفرق بين مُربَّعَين:

أ س^{٢} − ٤٩ ب س^{٢} − $\frac{١}{٤}$ ج ١٦ص^{٢} − ٢٥ ق^{٢}

الحـــلّ:

أ س^{٢} − ٤٩ = س^{٢} − ٧^{٢} = (س − ٧)(س + ٧)	استخدم صيغة الفرق بين مُربَّعَين: س^{٢} − أ^{٢} = (س − أ)(س + أ). تعرف أن $\sqrt{٤٩}$ = ٧، لذا يمكنك كتابة ٤٩ في صورة ٧^{٢}. هذا يعطي أ^{٢}. عوّض ٧^{٢} في صيغة الفرق بين مُربَّعَين.

ب	س^{٢} − $\frac{١}{٤}$ = س^{٢} − $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = (س − $\frac{١}{٢}$)(س + $\frac{١}{٢}$)	$\sqrt{\frac{١}{٤}}$ = $\frac{١}{٢}$ لذا يمكنك أن تكتب $\frac{١}{٤}$ في صورة $(\frac{١}{٢})^{٢}$ وتُعوِّضها في صيغة الفرق بين مُربَّعَين.
ج	١٦ص^{٢} − ٢٥ق^{٢} = (٤ص)^{٢} − (٥ق)^{٢} = (٤ص − ٥ق)(٤ص + ٥ق)	١٦ص^{٢} = (٤ص)^{٢} ٢٥ق^{٢} = (٥ق)^{٢} عوّض (٤ص)^{٢}، (٥ق)^{٢} في صيغة الفرق بين مُربَّعَين.

تمارين ١١-٢-هـ

١) فكّ وبسِّط كلاً ممّا يلي:

أ (س − ص)(س + ص)

ب (أ + ٧)(أ − ٧)

ج (٢ب + ٥)(٢ب − ٥)

د (٥ب − ٢)(٥ب + ٢)

هـ (٣س + ٢ص)(٣س − ٢ص)

و (٤أ + ٧ب)(٤أ − ٧ب)

٢) فكّ وبسِّط كل عبارة من العبارات الجبرية التالية:

أ (س − ٢)^{٢} − (س − ٤)^{٢}

ب (س + ٢)(س − ٢) − (٣ − س)(٥ + س)

ج (ص + ٢س)^{٢} + (٢س − ص)(−ص + ٢س)

د ($\sqrt{٢}$س − ص)($\sqrt{٢}$س + ص) − (٤س − ص)^{٢}

هـ (س + ٤)(س − ٤) − ٢(س − ١)^{٢}

و (٢س − ص)^{٢} + (س − ٢ص)(س + ٢ص) − (س + ٤ص)^{٢}

ز −٢س(س + ١)^{٢} − (س − ٥)(−٣س)

ح (٣ + ٢س)^{٢} −٥(٥س + ٢)

٣) حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التالية (قد تحتاج إلى أخذ عامل مُشترَك قبل البدء باستخدام الفرق بين مُربَّعَين):

- **أ** س^{٢} − ٣٦
- **ب** ف^{٢} −٨١
- **ج** ق^{٢} − ١٦
- **د** ع^{٢} − ٩
- **هـ** ك^{٢} − ٤٠٠
- **و** ت^{٢} − ١٢١
- **ز** س^{٢} − ص^{٢}
- **ح** ٨١ح^{٢} − ١٦ل^{٢}
- **ط** ١٦ف^{٢} − ٣٦ع^{٢}
- **ي** ١٤٤ر^{٢} − جـ^{٢}
- **ك** ٦٤ح^{٢} − ٤٩ل^{٢}
- **ل** ٢٧س^{٢} − ٤٨ص^{٢}
- **م** ٢٠٠ك^{٢} − ٩٨ن^{٢}
- **ن** ٢٠د^{٢} − ١٢٥م^{٢}
- **س** س^{٤} − ص^{٤}
- **ع** س ص^{٢} − س^{٣}

٤) حلِّل ٣٦^{٢} − ٣٥^{٢}، وبسِّط العبارة دون استخدام الآلة الحاسبة.

٥) حلِّل $(٦\frac{١}{٤})^{٢} - (٥\frac{٣}{٤})^{٢}$، وبسِّط العبارة دون استخدام الآلة الحاسبة.

١١-٣ حلّ المُعادلات التربيعية

تعلَّمت في الدرس السابق كيف تُحلِّل العبارات الجبرية التربيعيَّة إلى عوامل باستخدام أكثر من طريقة، وفي هذا الدرس، ستستخدم ما تعلَّمته لحلّ المُعادلات التربيعية.

حل المُعادلات التربيعية باستخدام التحليل إلى عوامل

يمكنك الآن استخدام التحليل إلى عوامل لحلّ بعض **المُعادلات التربيعية**.

المُعادلة التربيعية هي مُعادلة في صورة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

الأمثلة التالية ستوضِّح كيفية حلّ المُعادلات التربيعيَّة باستخدام التحليل إلى عوامل.

مثـــال ١٠

حلّ كلاً من المُعادلات التربيعية التالية بدلالة س:

أ س^{٢} − ٣س = ٠

ب س^{٢} − ٧س + ١٢ = ٠

ج س^{٢} + ٦س − ٤ = ١٢

د س^{٢} − ٨س + ١٦ = ٠

الحــلّ:

أ س^{٢} − ٣س = ٠

يمكنك أن تأخذ عاملاً مُشتركًا بين الحدَّين س^{٢}، ٣س وهو س.

س(س − ٣) = ٠

إما س = ٠ أو س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣

∴ س = ٠، س = ٣ حلّ للمعادلة

تحقَّق من الإجابات:

٠^{٢} − ٣ × ٠ = ٠ (صحيحة)

٣^{٢} − ٣ × ٣ = ٩ − ٩ = ٠ (وهذه صحيحة أيضًا)

ب س^{٢} − ٧س + ١٢ = ٠

استخدم التحليل إلى عوامل للطرف الأيمن من المُعادلة.

(س − ٤)(س − ٣) = ٠

إما س − ٤ = ٠ ⇐ س = ٤

أو س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣

∴ س = ٤، س = ٣ حلّ للمعادلة.

تحقَّق من الإجابات:

٤^{٢} − ٧ × ٤ + ١٢ = ٠ (صحيحة)

٣^{٢} − ٧ × ٣ + ١٢ = ٠ (صحيحة)

إذا ضُرِبت كمّيتان أو أكثر وكان الناتج صفرًا، تكون إحدى الكمّيات على الأقلّ صفرًا.

عند حل معادلة تربيعية يجب إعادة ترتيبها لتصبح المعادلة في صورة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

ج س^{٢} + ٦س − ٤ = ١٢	اطرح ١٢ من كلا الطرفَين.
⇐ س^{٢} + ٦س − ١٦ = ٠	
(س + ٨)(س − ٢) = ٠	حلِّل إلى عوامل.
	تحقَّق من الإجابات:
إما س + ٨ = ٠ ⇐ س = ⁻٨	(⁻٨)^{٢} + ٦ × (⁻٨) − ٤ = ١٢ (صحيحة)
أو س − ٢ = ٠ ⇐ س = ٢	٢^{٢} + ٦ × ٢ − ٤ = ١٢ (صحيحة)
∴ س = ⁻٨، س = ٢ حلّ للمعادلة.	
د س^{٢} − ٨ س + ١٦ = ٠	
(س − ٤)(س − ٤) = ٠	حلِّل إلى عوامل.
	تحقَّق من الإجابات:
إما س − ٤ = ٠ ⇐ س = ٤	٤^{٢} − ٨ × ٤ + ١٦ = ٠ (صحيحة)
أو س − ٤ = ٠ ⇐ س = ٤	
∴ س = ٤ حلّ للمعادلة.	

في (د) يوجد حلان للمعادلة، ولكنهما متساويان.

والآن سوف نتعلَّم كيف نحل معادلة تربيعية حيث مُعامِل س^{٢} لا يساوي العدد ١

مثـــال ١١

لحل هذه المعادلة، يمكنك استخدام التحليل من الجزئية (ج) في المثال (٧)

حلّ المُعادَلة ١٠س^{٢} + ١١س − ٨ = ٠

الحــلّ:

١٠ × ⁻٨ = ⁻٨٠	اضرب مُعامِل س^{٢} في الحد الثابت.
⁻١ ، ٨٠ (مجموعهما لا يساوي ١١)	اذكر أزواج عوامل العدد ⁻٨٠ حتى تحصل على زوج مجموعه يُساوي مُعامِل س (١١) (لاحظ الآتي: بما أن ١١ موجب و ⁻٨٠ سالب، فإن العدد الأكبر من زوج العوامل يجب أن يكون موجبًا والآخر سالبًا).
⁻٢ ، ٤٠ (مجموعهما لا يساوي ١١)	
⁻٤ ، ٢٠ (مجموعهما لا يساوي ١١)	
⁻٥ ، ١٦ (مجموعهما يساوي ١١)	
١٠س^{٢} − ٥س + ١٦س − ٨ = ٠	
٥ س (٢س − ١) + ٨ (٢س − ١) = ٠	حلِّل بالتجميع وأخذ العامل المُشترَك بين كل حدَّين.
∴ (٥ س + ٨)(٢س − ١) = ٠	
إما ٥س + ٨ = ٠ ⇐ ٥س = ⁻٨ ⇐ س = $\frac{-٨}{٥}$	
أو ٢س − ١ = ٠ ⇐ ٢س = ١ ⇐ س = $\frac{١}{٢}$	
∴ س = $\frac{-٨}{٥}$، س = $\frac{١}{٢}$ حلّ للمعادلة.	

تمارين ١١-٣

١) حلّ كلاًّ من المعادلات التربيعية الآتية باستخدام التحليل إلى عوامل:

أ $س^٢ - ٩س = ٠$ ب $س^٢ + ٧س = ٠$ ج $س^٢ - ٢١س = ٠$

د $س^٢ - ٩س + ٢٠ = ٠$ هـ $س^٢ + ٨س + ٧ = ٠$ و $س^٢ + س - ٦ = ٠$

ز $س^٢ + ٣س + ٢ = ٠$ ح $س^٢ + ١١س + ١٠ = ٠$ ط $س^٢ - ٧س + ١٢ = ٠$

ي $س^٢ - ٨س + ١٢ = ٠$ ك $س^٢ - ١٠٠ = ٠$ ل $د^٢ + ١٦د - ٣٦ = ٠$

م $ص^٢ + ٧ص - ١٧٠ = ٠$ ن $د^٢ + ٨د - ٨٤ = ٠$ س $د^٢ - ٢٤د + ١٤٤ = ٠$

٢) حلّ كلاًّ من المعادلات التالية:

ثلاثية الحدود هي عبارة جبرية تتكوّن من ثلاثة حدود غير مُتشابِهة.

أ $٦س^٢ - ٥س - ٢١ = ٠$ ب $^-٢س^٢ - ١٣س - ١٥ = ٠$

ج $س^٤ - ١٣س^٢ + ٣٦ = ٠$ د $٦س^٢ = ٠$

هـ $٦س^٢ + ٧س + ٢ = ٠$ و $٣س^٢ - ١٣س + ١٢ = ٠$

ز $٣س^٢ - ٣٨س + ١٢٠ = ٠$ ح $(س + ١)^٢ - ٥(س + ١) + ٦ = ٠$

ط $(٢س + ١)^٢ - ٨(٢س + ١) + ١٥ = ٠$

ي $٣(٢س + ٥)^٢ - ١٧(٢س + ٥) + ١٠ = ٠$

١١-٤ مسائل تطبيقية على حل المُعادلات التربيعية

لحل المسائل اللفظية، يجب ترجمتها أوَّلاً إلى مُعادلات تربيعيَّة، وقد تحتاج إلى الصيَغ الهندسية وحقائق الأعداد والاحتمالات، أو أية علاقات أخرى ترتبط بموضوع المسألة التطبيقية.

مثــال ١٢

عددان صحيحان مُتتاليان ناتج ضربهما ٤٢؛ اكتب مُعادلة تربيعية وحلَّها لتجد زوجَي الأعداد الصحيحة الممكنَين.

الحــلّ:

افترض أن العدد الأوَّل ن	استخدم العدد ن ليدلّ على العدد الأصغر من العددَين. وبالتالي يكون العدد الثاني الأكبر هو (ن + ١)
والعدد الذي يليه ن + ١	
ن(ن + ١) = ٤٢	اكتب مُعادلة تترجم ناتج ضرب عددَين هو ٤٢
⇐ ن^{٢} + ن = ٤٢	فكّ الأقواس.
⇐ ن^{٢} + ن − ٤٢ = ٠	أعد كتابة المُعادلة بحيث يكون الصفر وحيدًا في الجهة اليسرى.
⇐ (ن + ٧)(ن − ٦) = ٠	حلّل إلى عوامل.
⇐ ن = −٧ أو ن = ٦	
إذا كان ن = −٧، فإن ن + ١ = −٦	أوجد العددَين عندما ن = −٧
−٧ و−٦ عددان صحيحان مُتتاليان و−٦ × −٧ = ٤٢	تحقَّق من الزوج −٧، −٦
إذا كان ن = ٦، فإن ن + ١ = ٧	أوجد العددَين عندما ن = ٦
٦ و٧ عددان صحيحان مُتتاليان و٦ × ٧ = ٤٢	تحقَّق من الزوج ٦، ٧
∴ زوجا الأعداد الصحيحة هما ٦، ٧ و−٧، −٦	

مُساعَدة

قد تجد العددَين ٦، ٧ دون استخدام الجبر، لكن كتابة المعادلة التربيعية تمكّنك بالتأكيد من إيجاد جميع الحلول.

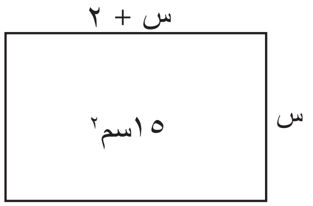
مثـــال ١٣

مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٢ سم. إذا كانت مساحة المستطيل ١٥ سم^{٢}، أوجد مُحيط المستطيل.

الحـــلّ:

ارسم رسمًا توضيحيًّا لتُبيّن المعطيات.

استخدم س لتمثيل عرض المستطيل، هذا يعني أن طول المستطيل س + ٢



المساحة = الطول × العرض

١٥ = س(س + ٢)

⇐ ١٥ = س^{٢} + ٢س

اكتب المُعادلة التربيعية، بحيث يكون الصفر وحيدًا في الطرف الأيسر.

⇐ س^{٢} + ٢ س − ١٥ = ٠

حلِّل المعادلة التربيعية إلى عوامل.

⇐ (س + ٥)(س − ٣) = ٠

⇐ س = −٥ أو س = ٣

∵ س تُمثِّل عرض المستطيل، لذا لا يمكن أن تكون عددًا سالبًا، وهذا يعني أن س = ٣

أوجد محيط المستطيل.

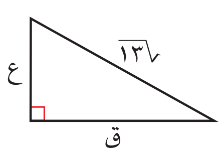
∴ أبعاد المستطيل هي ٣ سم، ٥ سم

المُحيط = ٣ + ٥ + ٣ + ٥ = ١٦ سم

مثـــال ١٤

مُثلَّث قائم الزاوية ارتفاعه ع سم وطول قاعدته ق سم. إذا علمت أن طول الوتر يساوي $\sqrt{١٣}$سم، فأوجد القيَم المُمكنة لـ ع، ق إذا كانت مساحة المُثلَّث ٣ سم.

الحـــلّ:



باستخدام صيغة المساحة:

$\frac{١}{٢}$ع ق = ٣

⇐ ع ق = ٦

⇐ ع = $\frac{٦}{ق}$ (١)

مُساعَدة

حاول أن تجعل المُعادَلة بدلالة متغيِّر واحد إن أمكن، حتى تتمكَّن من التعويض به في أية مُعادلة تُكوّنها.

والآن باستخدام نظرية فيثاغورث	
ومعلوميّة طول الوتر = $\sqrt{١٣}$ سم،	
يكون:	
$ق^٢ + ع^٢ = ١٣$ (٢)	
عوّض (١) في (٢):	
$ق^٢ + \left(\frac{٦}{ق}\right)^٢ = ١٣$	بسّط بتربيع القوسَين.
$\Leftarrow (ق^٤) + ٣٦ = ١٣ق^٢$	اضرب طرفَي المعادلة في $ق^٢$
$\Leftarrow (ق^٢)^٢ - ١٣ق^٢ + ٣٦ = ٠$	أعد كتابة $ق^٤$ في صورة $(ق^٢)^٢$
$\Leftarrow (ق^٢ - ٩)(ق^٢ - ٤) = ٠$	
$\Leftarrow$ ق = ٣ أو ٢	القيَم السالبة لـ ق غير ممكنة.
$\Leftarrow$ ع = ٢ أو ٣	عوّض في المعادلة (١) لتجد ع

تمارين ١١-٤

١) يزيد عدد على عدد آخر بمقدار ٣، وناتج ضرب العددَين ٤٠؛ أوجد الأزواج المُمكنة لهذَين العددَين.

٢) بدأت كرة بالتدحرُج إلى أسفل المُنحدر. إذا أصبحت الكرة على بُعد مسافة ف متر من نقطة البدء بعد ن ثانية وكانت $ف = ن^٢ + ٣ن$، أوجد الزمن اللازم ليكون بُعد الكرة ١٠ م عن نقطة البدء.

٣) إذا علمت أن الحدّ النوني في المُتتالية: ١ ٣ ٦ ١٠ ١٥ .... يساوي $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ حيث ن رتبة كلّ حدّ في المُتتالية، استخدم الجبر لتجد رتبة الحدّ الذي قيمته ٧٨

سابقًا

هذه مُتتالية الأعداد المُثلَّثة.

٤) عددَان صحيحان مجموعهما ١١ وناتج ضربهما ٢٨؛ ما العددان؟

٥) يزيد طول قاعدة مُثلَّث عن ارتفاعه بمقدار ٢ سم. إذا كانت مساحته تساوي ٢٤سم^٢، فكم ارتفاعه؟

٦) شبه مُنحرف مساحته ٧٦ سم^٢، والفرق بين طولَي الضلعَين المتوازيَين فيه يساوي ٣ سم، وطول الضلع الأصغر يساوي ارتفاعه. أوجد المسافة العمودية بين الضلعَين المُتوازيَين (الارتفاع).

٧) مُضلّع مُحدَّب عدد أضلاعه ن وعدد أقطاره يساوي $\frac{١}{٢}ن(ن - ٣)$.

أ) ما عدد أضلاع مُضلَّع عدد أقطاره ٥٤؟

ب) أثبت أنه من غير الممكن أن يكون لمُضلَّع مُحدَّب ٣٣ قطرًا.

٨) ثلاثة أعداد صحيحة مُتتالية ناتج ضربها يساوي ٣٠ مثلاً من أصغر هذه الأعداد. أوجد الأعداد الصحيحة التي تُحقِّق الشرط.

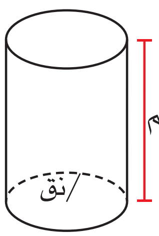
٩) مُربَّع عدد يزيد على ٥ أمثاله بمقدار ١٤. أوجد العددَين المُمكنَين اللذَين يُحقِّقان هذا الشرط.

١٠) بُعدا مستطيل س سم و ص سم. إذا كان مُحيطه ٢٢ سم ومساحته ٢٤ سم^{٢}، استخدم الجبر لتجد أبعاده.

١١) رُمي حجر إلى الأعلى من مستوى سطح الأرض. إذا كان ارتفاع الحجر ١٦ن − ٥ ن^{٢}، فكم من الزمن يلزم ليكون الحجر على ارتفاع ١١ م عن سطح الأرض؟

١٢) مُربَّع عدد يزيد على مُربَّع عدد آخر بمقدار ١٥٢، ويقلّ العدد الآخر عنه بمقدار ٢. ما العددان المُمكنان اللذان يُحقِّقان الشرط؟

١٣) يُبيّن المُخطَّط المجاور أسطوانة مفتوحة من الأعلى نصف قطر قاعدتها نق سم وارتفاعها ١٢ سم، أوجد نصف قطر الأسطوانة إذا كانت مساحتها السطحية الخارجية ٢٨ π سم^{٢}



١٤) يزيد ناتج ضرب عددَين صحيحَين مُتتاليَين عن ٣ أمثال مجموعهما بمقدار ١١. أوجد العددَين.

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- توجد أكثر من طريقة لفكّ الأقواس.
- يمكن حلّ المعادلات التربيعية بتحليلها إلى عوامل.
- يتوفَّر في العادة حلاّن للمُعادلات التربيعية، وقد يكون هذان الحلاّن متساويَين.

يجب أن تكون قادرًا على:

- فكّ ثلاث مجموعات أو أكثر من الأقواس.
- تحليل المُربَّع الكامل إلى عوامل.
- تحليل عبارة جبرية إلى عوامل باستخدام التجميع وأخذ العامل المُشترَك.
- تحليل العبارات الجبرية التربيعية الثلاثية إلى عوامل.
- تحليل العبارة الجبرية التربيعية إلى عوامل باستخدام الفرق بين مُربَّعَين.
- حلّ المُعادلة التربيعية بالتحليل إلى عوامل.

تمارين نهاية الوحدة

١) فكّ وبسّط كلاًّ من العبارات الجبرية التالية:

أ (س + ١)(س + ٣)(س − ١)   ب (٢س + ٣)(٢س − ٣)   ج (٤ص^{٢} − ٣)(٣ص^{٢} + ١)

٢) أ حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التربيعية التالية إلى عوامل:

(١) ١٢س^{٢} − ٦س   (٢) ص^{٢} − ١٣ص + ٤٢   (٣) د^{٢} − ١٩٦

ب حلّ كلاًّ من المُعادَلات التربيعية التالية:

(١) ١٢س^{٢} − ٦س = ٠   (٢) ص^{٢} − ١٣ص + ٣٠ = ‾١٢   (٣) د^{٢} − ١٩٦ = ٠

٣) حلِّل كل عبارة جبرية فيما يلي إلى عوامل تحليلاً كاملاً:

أ أ^{٢} + أ ب − ب جـ − أ جـ   ب ٥س^{٢} + ١٧س + ٦   ج ٦س^{٢} + ١١س − ٣٥

٤) طول مستطيل يزيد على عرضه بمقدار ٤ سم، إذا علمت أن مساحة المستطيل ٤٥ سم^{٢}، احسب محيطه.

الوحدة الثانية عشرة: التطابُق والتشابُه

المُفردات

- مُتطابق Congruent
- الضلعُ المحصور Included side
- الزاوية المحصورة Intercept angle
- مُتشابه Similar
- الأضلاعُ المُتناظرة Corresponding sides
- الزوايا المُتناظرة Corresponding angles
- مُعامِل تشابُه الأطوال Scale factor of lengths
- مُعامِل تشابُه الحجوم Scale factor of volumes
- مُعامِل تشابُه المساحات Scale factor of areas
- مقياس الرّسم Scale drawing

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تُقرِّر ما إذا كان شكلان هندسيّان مُتطابقَين أم لا.
- تستخدم شروط التطابُق الأساسية في المُثلّثات.
- تُقرِّر ما إذا كان مُثلّثان مُتشابهَيْن رياضيًّا أم لا.
- تستخدم خصائص التشابُه في حلّ المسائل.
- تجد أطوالاً مجهولة في أشكال مُتشابهة.
- تستخدم العلاقة بين أطوال أضلاع الأشكال المُتشابهة ومساحاتها، لتجد قيَمًا مجهولة.
- تُميِّز المُجسَّمات المُتشابهة
- تحسب حجوم المُجسَّمات المُتشابهة ومساحاتها السطحيّة.
- تُنشئ مُخطَّطًا للأشكال.
- تُفسِّر مُخطَّط الأشكال.

تجد في الصورة أعلاه مُتسلِّق جبال ينظر إلى خريطة لمنطقة ريفيّة، والخريطة رُسِمَت بمقياس مُصغَّر لمساحات وأماكن واقعية، تبدو الطرقات والمسارات والجداول المائية والتلال جميعها في نفس المواقع، ولكن بمقياس مُصغَّر.

ويتناسب الجانب الرياضيّ المُتعلِّق بهذا الموضوع مع مواقف مُتعدِّدة، نذكر منها:

- رسم المُخطَّطات لبيوت ومبانٍ جديدة.
- تصميم المُنتجات الجديدة (مثل السيّارات أو اللوحات الكهربائية).
- رسم الخرائط.
- تكبير الأشكال.

سوف تدرس في هذه الوحدة هذه الأفكار الرياضيّة ومفهوم التطابُق.

١٢-١ التطابُق

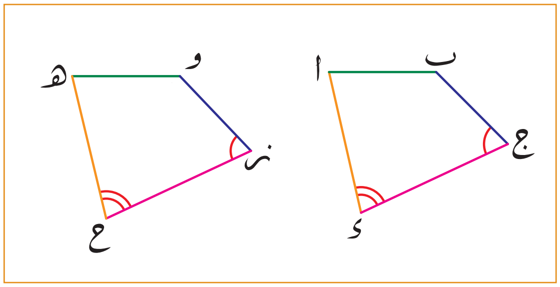
١٢-١-أ تطابُق الأشكال

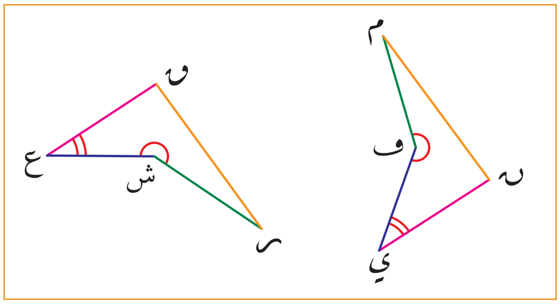
إذا كان لشكلَين هندسيَّين الشكل نفسه والقياسات نفسها، فهذا يعني أنهما مُتطابقان، فقد يكونان قد خضعا لتدوير أو انعكاس أو انسحاب.

فإذا تطابق شكلان، فهذا يعني أن:

- الأضلاع المُتناظِرة مُتساوية في الطول.
- الزوايا المُتناظِرة مُتساوية في القياس.
- الشكلان لهما نفس المساحة.

انظر إلى الأزواج التالية من الأشكال المُتطابِقة، فقد تم تمييز الأضلاع المُتناظِرة والزوايا المُتناظِرة، في كل من الشكلَيْن بنفس اللون:





عند تسمية الأشكال المُتناظِرة لا بدّ أن تكون الرؤوس المُتناظِرة للشكلَين المتطابقَين مكتوبة بالترتيب نفسه.

فمثلاً يُمكِننا القول بخصوص أزواج الأشكال السابقة، أن:

- ا ب ج ى مُتطابِق مع هـ و ز ع
- م ں ي ف مُتطابِق مع ر ں ع ش

تمارين ١٢-١-أ

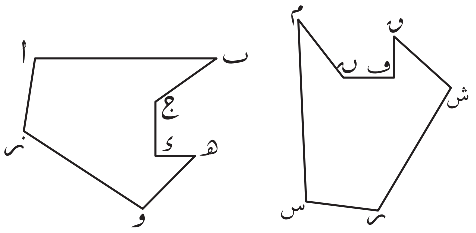
١) إذا كان الشكلان المُجاوران مُتطابقَين، فأجب عمّا يلي:

أ حدِّد الضلع الذي يتساوى طوله مع الضلع:

(١) ا ب

(٢) هـ و

(٣) م ن



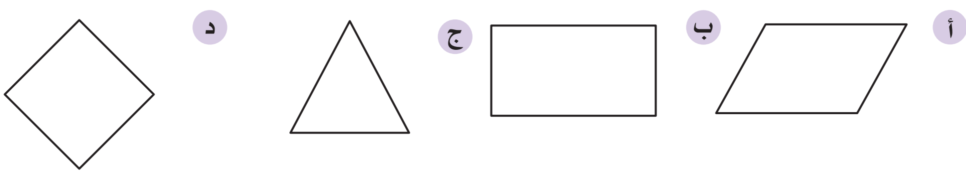
ب حدّد الزاوية التي تُناظِر:

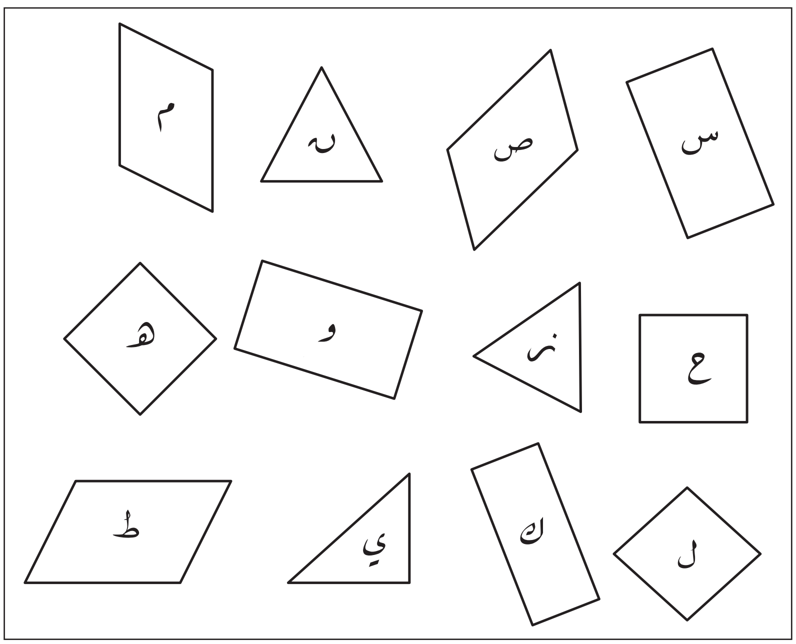
(١) ب اَ ز

(٢) ق شَ ر

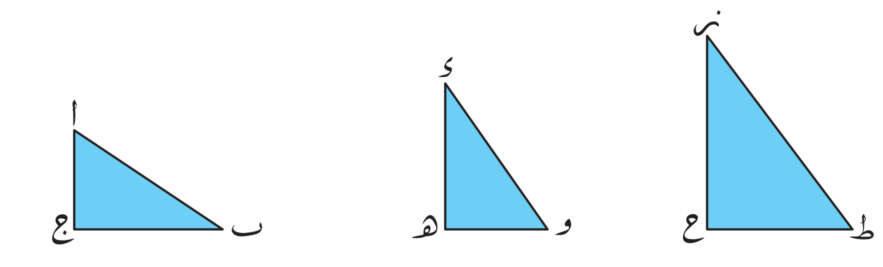
(٣) ك هَـ و

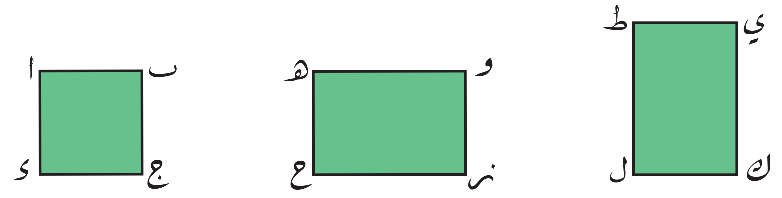
٢) أيّ من الأشكال المرسومة داخل الإطار أدناه تُطابِق شكلاً من الأشكال التالية؟ قس الأطوال والزوايا عند الحاجة.

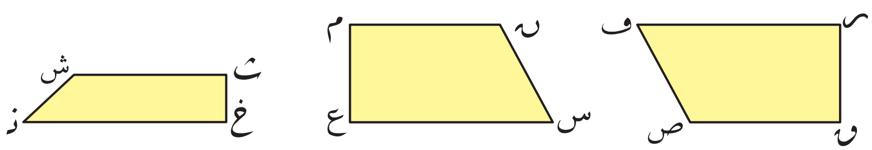


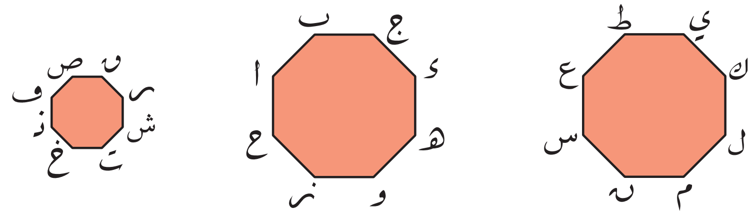


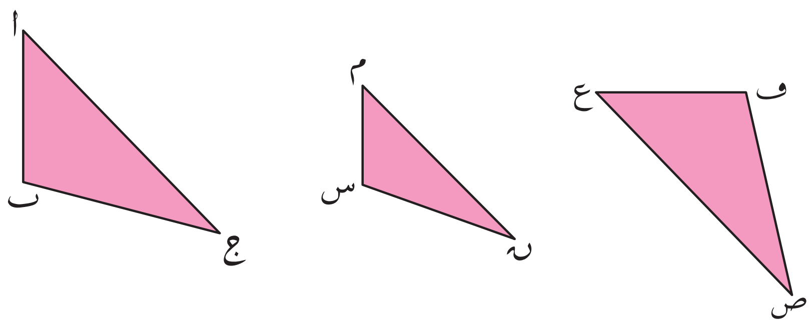
٣) في كلّ مجموعة من الأشكال التالية، حدِّد الأشكال المُتطابِقة:

أ


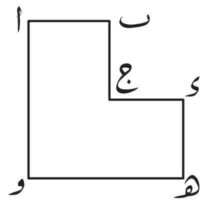
ب


جـ


د


هـ


٤) في الشكل المُجاوِر ا ب ج ى هـ و، طول ا ب = طول ب ج = طول ج ى = طول ى هـ:
أعد رسم الشكل، وبيّن كيف تقسمه إلى:



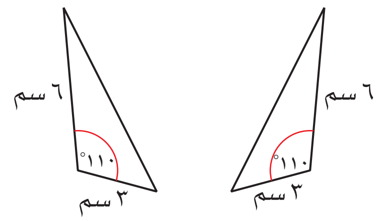
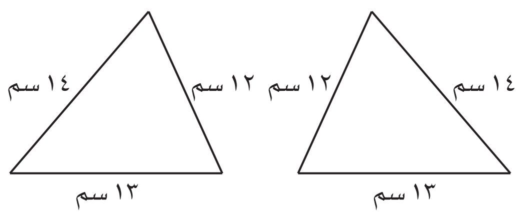
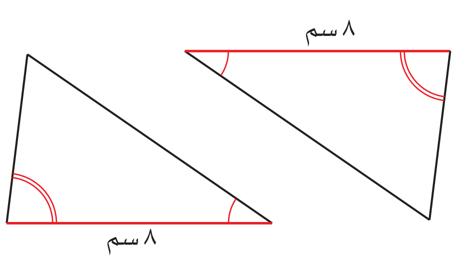
أ شكلَيْن مُتطابقَين.

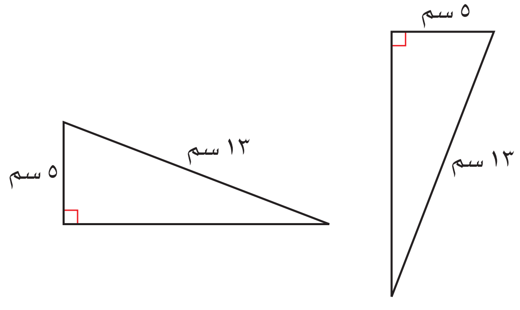
ب ثلاثة أشكال مُتطابِقة.

ج أربعة أشكال مُتطابِقة.

١٢-١-ب تطابُق المُثلّثات

يكون المُثلَّثان مُتطابقَين إذا تحقَّقت إحدى الحالات أو أحد الشروط الآتية:

الحالة	رسم توضيحي	الرمز
١. طولا ضلعَين في المُثلَّث الأوَّل مُتساويان مع طولَي ضلعَين في المُثلَّث الثاني، وقياس **الزاوية المحصورة** بينهما يساوي قياس الزاوية المُناظرة لها في المُثلَّث الآخر.		ض ز ض: ضلع زاوية ضلع
٢. أطوال ثلاثة أضلاع من المُثلَّث الأوَّل مُساوية لأطوال الأضلاع المُناظرة لها في المُثلَّث الثاني.		ض ض ض: ضلع ضلع ضلع
٣. قياسا زاويتَين في المُثلَّث الأوَّل مُتساويان مع قياسَي الزاويتَين المُناظرتَين لهما في المُثلَّث الثاني، وقياس **الضلع المحصور** بينهما (الضلع الواصل بين الزاويتَين المتساويتَين) يساوي الضلع المُناظِر له في المُثلَّث الآخر.		ز ض ز: زاوية ضلع زاوية

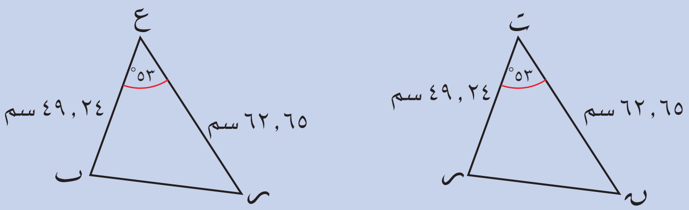
٤. يتطابق مُثلَّثان قائما الزاوية، إذا تطابق في أحدهما وتر وضلع مع نظائرهما في المُثلَّث الآخر.		ق ض و: زاوية قائمة ضلع وتر

إذا تحقَّقت أيّ من الحالات أو الشروط السابقة، فإن المُثلَّثين يتطابقان.

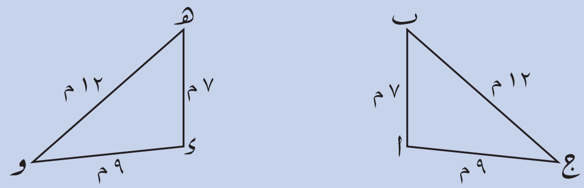
مثـــال ١

بيّن أن كل من أزواج المُثلَّثات الآتية هي مُثلَّثات متطابقة:

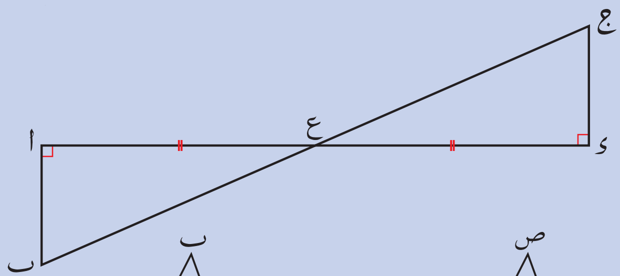
أ



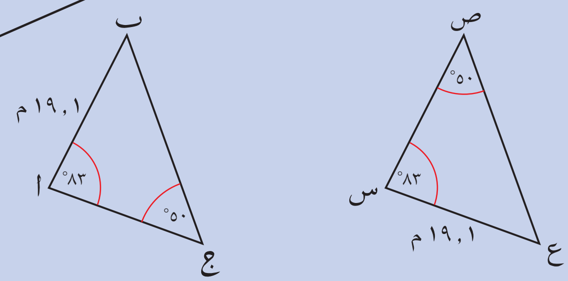
ب



ج



د



الحــلّ:

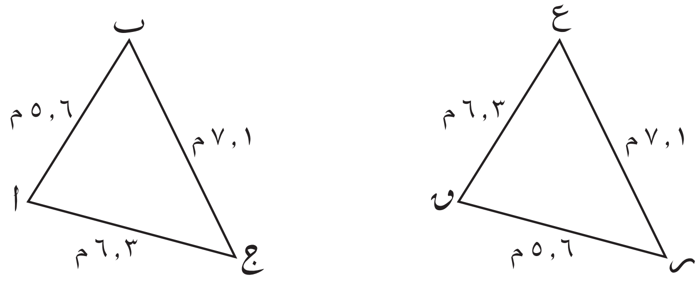
أ طول ت ر = طول ع ب (معطى على الشكل) ق(ر تَ ن) = ق(ب عَ ر) (معطى على الشكل) طول ت ن = طول ع ر (معطى على الشكل) ∴ يتحقَّق الشرط ض ز ض، ويكون المُثلَّثان مُتطابقَين.	نحتاج إلى كتابة رموز الأضلاع والزوايا المُتساوية في المُثلَّثين بشكل واضح وتدوين التعليل في كل خطوة.

ب	طول ا ب = طول ى هـ = ٧ طول ا ج = طول ى و = ٩ طول ب ج = طول هـ و = ١٢ ∴ يتحقَّق الشرط ض ض ض، ويكون المُثلَّثان مُتطابقَين.	
ج	ن(ب أ ع) = ق(ج ى ع) (زاويتان قائمتان) طول ا ع = طول ى ع (مُعطى على الشكل) ن(ا ع ب) = ن(ى ع ج) (مُتقابلتان بالرأس) ∴ يتحقَّق شرط ن ض ن، ويكون المُثلَّثان مُتطابقين.	يمكنك أن تستخدم حقائق هندسية أخرى (الزوايا المُتقابِلة بالرأس مُتساوية في القياس) كجزء من التوضيح.
د	ن(ع س ص) = ن(ب أ ج) = ٨٣° ن(ع ص س) = ن(ب ج ا) = ٥٠° ن(س ع ص) = ن(ا ب ج) = ٤٧° (مجموع قياسات زوايا المُثلَّث = ١٨٠°) طول س ع = طول ا ب ∴ يتحقَّق شرط ن ض ن، ويكون المُثلَّثان مُتطابقَين.	لاحظ أن زوجَي الزوايا المستخدمَين في إثبات تطابُق المُثلَّثين هما (ا، س) و (ب، ع).

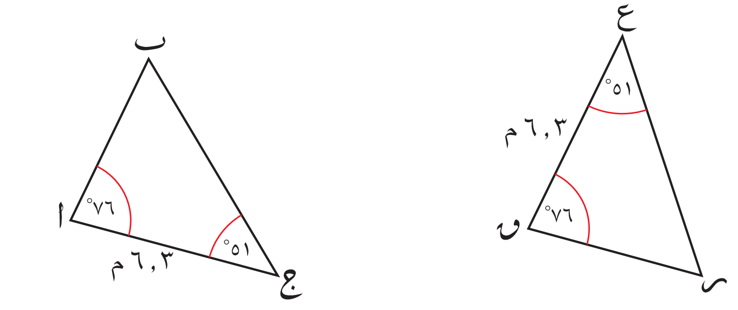
تمارين ١٢-١-ب

١) حدِّد حالة تطابُق المُثلَّثَين في كل جُزئية في ما يلي من بين: ض ن ض، ض ض ض، ن ض ن، ن ض و. وضِّح خطوات عملك.

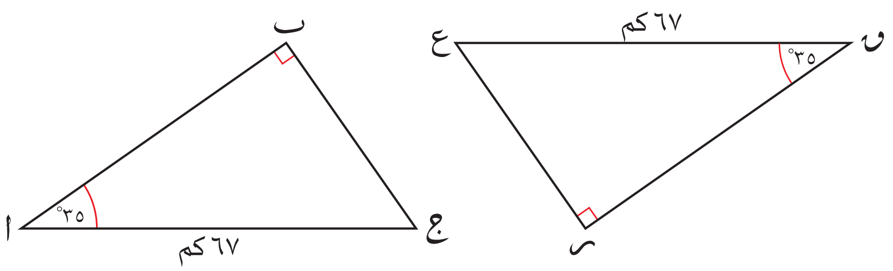
أ



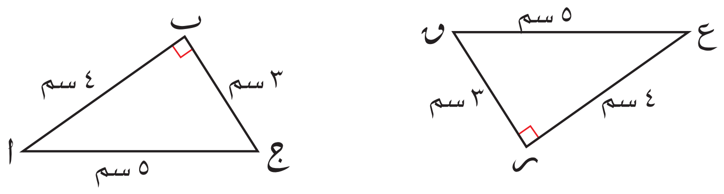
ب


ع
٥١°
٦,٣ م
٧٦°
ن
ر
ب
٧٦°
أ
٥١°
٦,٣ م
ج

ج


ع
٦٧ كم
٣٥°
ن
ر
ب
أ
٣٥°
٦٧ كم
ج

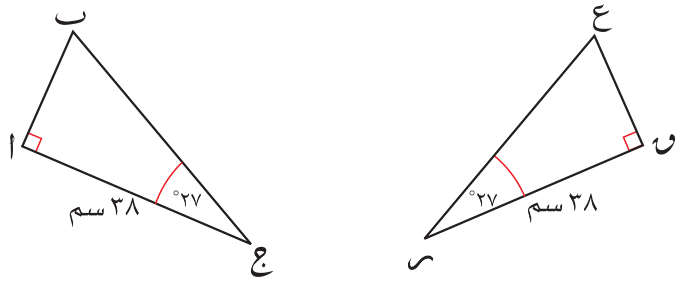
د

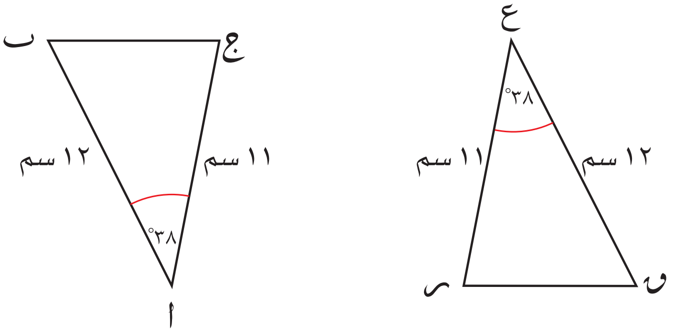

ن
٥ سم
ع
٣ سم
٤ سم
ر
ب
٤ سم
٣ سم
أ
ج
٥ سم

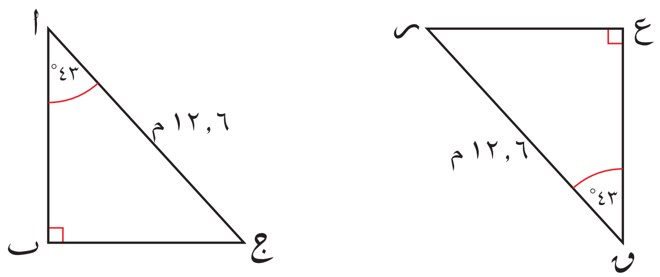
هـ


٦,٤٤ م
٧٥°
٢,١٨ م
٦,٤٤ م
٧٥°
٢,١٨ م

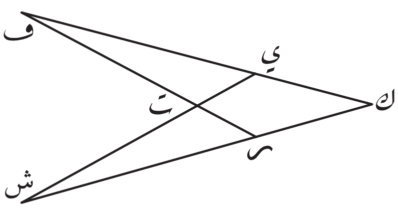
و


ع
ن
٢٧°
٣٨ سم
ر
ب
أ
٢٧°
٣٨ سم
ج

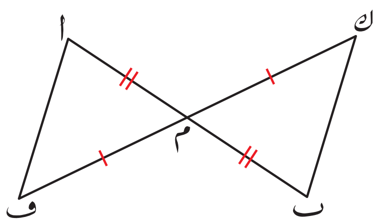
ز) 

ح) 

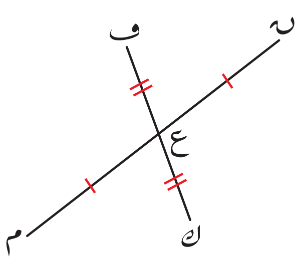
٢) في الشكل المُجاوِر، فر = ش ي، والشكل ر ت ي ك طائرة ورقية (دالتون). أثبت أن المُثلَّث ف ك ر مُتطابِق مع المُثلَّث ش ك ي.



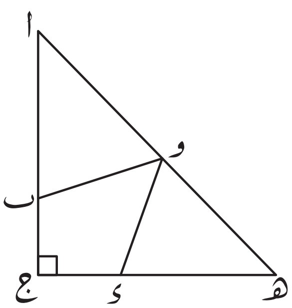
٣) في الشكل المُجاوِر، ا م = ب م، وف م = ك م. أثبت أن ا ف // ب ك.



٤) يتقاطع الشريطان ف ك، م ن عند النقطة ع، بحيث يُنصِّف كلّ منهما الآخر، كما هو مُبيَّن في الشكل المُجاوِر. أثبت أن ف م = ك ن.



٥) المُثلَّث و ا ب مُتطابِق مع المُثلَّث و هـ ى.
أثبت أن ب و ى ج طائرة ورقية (دالتون).



١٢-٢ التشابُه

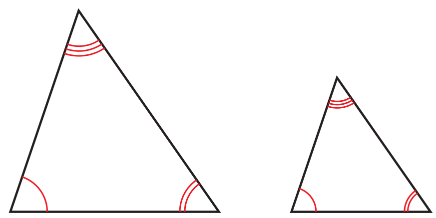
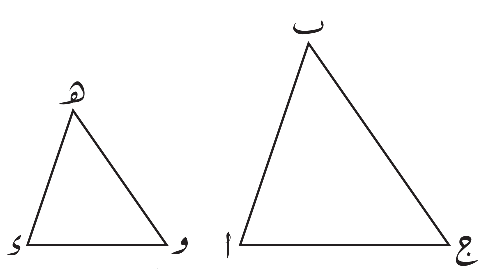
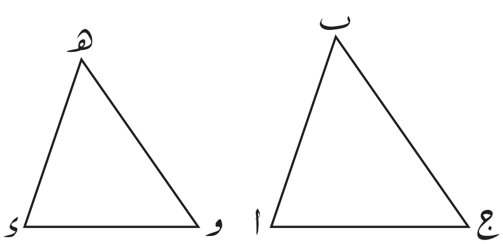
عندما يتمّ تكبير شكل هندسي ليُعطي شكلاً آخر، فإن كلّ جزء من الشكل الأصلي سيتناظر مع جُزء مُحدَّد من الشكل الجديد وبالتالي سيشابهه.

يكون الشكلان **مُتشابِهَين** إذا كانت:

- الزوايا المُتناظرة مُتطابِقة (مُتساوية في القياس).
- الأضلاع المتناظرة مُتناسِبة.

١٢-٢-أ تشابِه المُثلَّثات

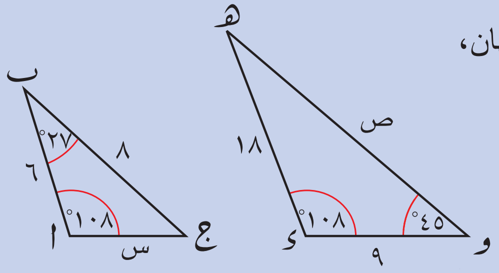
في المُثلَّثات المُتشابِهة تكون:

١. **الزوايا المُتناظِرة** مُتطابِقة.	
٢. النسب بين أطوال أضلاع المُثلَّث الأوّل مُساوية للنسب بين أطوال أضلاع المُثلَّث الثاني: $\frac{\overline{\text{أب}}}{\overline{\text{بج}}} = \frac{\overline{\text{ده}}}{\overline{\text{هو}}}$ و $\frac{\overline{\text{أب}}}{\overline{\text{أج}}} = \frac{\overline{\text{ده}}}{\overline{\text{دو}}}$	
٣. النسب بين الأضلاع المُتناظِرة مُتساوية: $\frac{\overline{\text{أب}}}{\overline{\text{ده}}} = \frac{\overline{\text{بج}}}{\overline{\text{هو}}} = \frac{\overline{\text{أج}}}{\overline{\text{دو}}}$	

إذا تحقَّقت إحدى حالات التشابُه في المُثلَّثَين فإن جميع حالات التشابُه تكون مُتحقِّقة في هَذَين المُثلَّثَين.

مثــال ٢

برهن أن المُثلَّثَين في الشكل المُجاوِر مُتشابِهان،
وأوجد قيمتَي س، ص.



الحــلّ:

ق(ا ج^ ب) = ١٨٠° − ٢٧° − ١٠٨° = ٤٥°

مجموع قياسات زوايا المُثلَّث يساوي ١٨٠°

ق(د هـ^ و) = ١٨٠° − ٤٥° − ١٠٨° = ٢٧°

مجموع قياسات زوايا المُثلَّث يساوي ١٨٠°

∵ قياس الزوايا الثلاث في المُثلَّث الأوَّل يتطابق مع قياس الزوايا الثلاث التي تناظرها في المُثلَّث الثاني،
∴ المُثلَّثان مُتشابِهان.

بما أن المُثلَّثين مُتشابِهان فإن: $\frac{\text{د هـ}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{د و}}{\text{ا ج}}$

فيكون: $\frac{١٨}{٦} = \frac{\text{ص}}{٨}$

$\frac{\text{ص}}{٨} = ٣ \Leftarrow \text{ص} = ٢٤$

و $\frac{٩}{\text{س}} = \frac{١٨}{٦} = ٣ \Leftarrow \text{س} = ٣$

من شروط تشابُه المُثلَّثات (الأضلاع المتناظرة متناسبة).

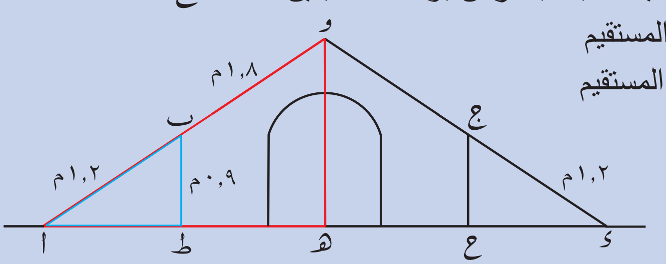
سابقًا

تذكَّر أن مجموع قياسات زوايا المُثلَّث يساوي دائمًا ١٨٠°

عند كتابة النسب، من الضروري التركيز في كتابة أطوال أضلاع المُثلَّثات، حيث يُنصح بكتابة أطوال أضلاع المُثلَّث الكبير في البسط وأطوال أضلاع المُثلَّث الصغير في المقام، وذلك لتجنُّب التعامُل مع الكسور الاعتيادية.

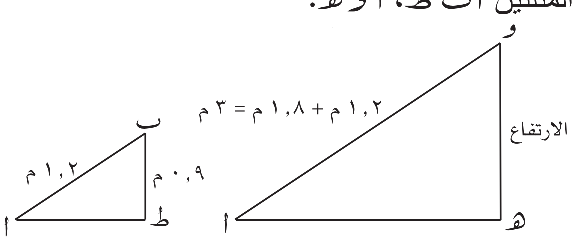
مثــال ٣

يُبيِّن الشكل المجاور مخطّطًا لخيمة مُثبتة بالأرض بواسطة الحبلَيْن ا ب، د ع
تقع النقاط ا، ب، و على نفس المستقيم
تقع النقاط د، ع، و على نفس المستقيم
الأضلاع ب ط، و هـ
ع ع متعامدة مع الأرض.
أوجد ارتفاع الخَيمة.



الحــلّ:

المُثلَّثين ا ب ط، ا و هـ:



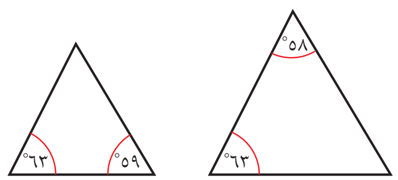
نحتاج إلى مُثلَّثين مُتشابهَين.
الخطأ الشائع هو استخدام ١,٨ م طولاً للضلع المائل في المُثلَّث الكبير، في حين أن طوله يساوي ٣ م.

ن(ب أ̂ ط) = ن(و أ̂ هـ) ن(أ ط̂ ب) = ن(أ هـ̂ و) = ٩٠° ن(أ ب̂ ط) = ن(أ و̂ هـ)	زاوية مشتركة في كلا المُثلَّثَين. ب ط، وهـ مستقيمان متعامدان مع الأرض، أي متوازيان. زوايا مُتناظرة.
وعليه يكون المُثلَّث أ ب ط مُشابهًا للمُثلَّث أ و هـ ويكون: $\frac{\text{الارتفاع}}{٠,٩} = \frac{٣}{١,٢} \Leftarrow \text{الارتفاع} = \frac{٣ \times ٠,٩}{١,٢}$ = ٢,٢٥ م	من شروط تشابُه المُثلَّثات.

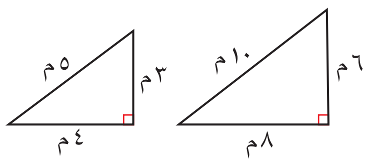
تمارين ١٢-٢-أ

١) حدِّد في كلّ من المُثلَّثات التالية ما إذا كان المُثلَّثان متشابهَين أم لا. وضِّح خطوات الحل.

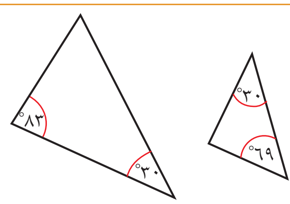
أ



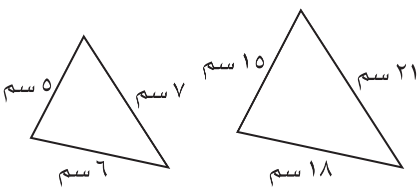
ب



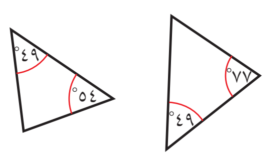
ج



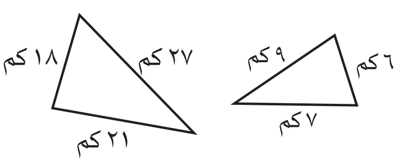
د



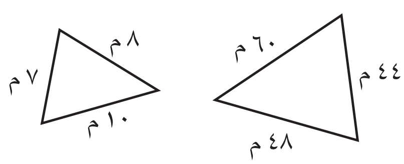
هـ



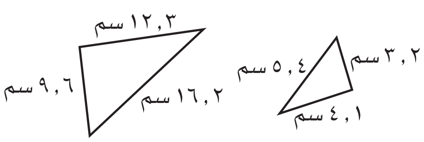
و



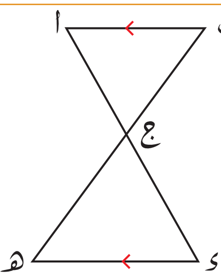
ز



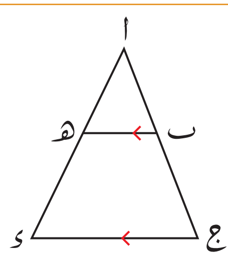
ح



ط



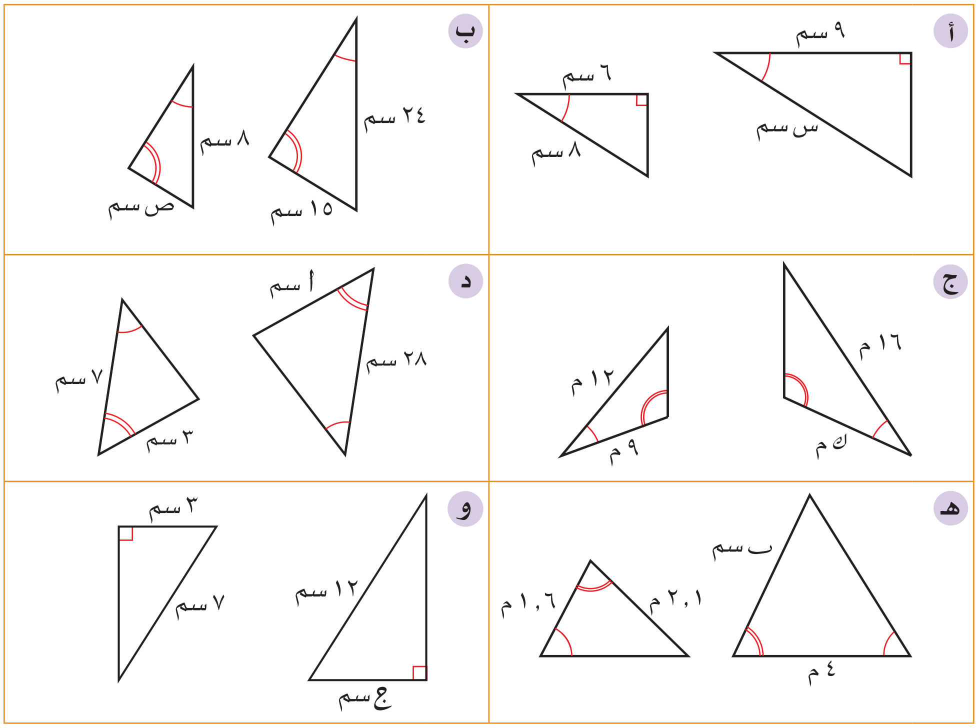
ي



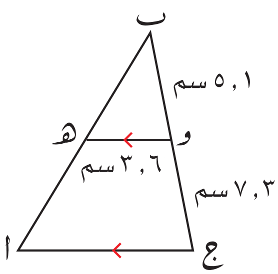
ابحث دائمًا عن الأضلاع المُتناظِرة (الأضلاع التي تربط بين الزوايا نفسها).

الأشكال الهندسية التي تمّ تدويرها أو انعكاسها تبقى أيضا متشابِهة.

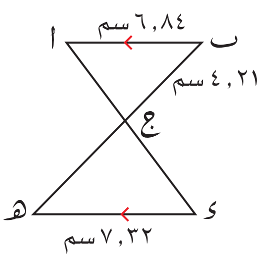
٢) أوجد طول الضلع المجهول في كل من المُثلَّثات التالية علمًا بأن أزواج المُثلَّثات التالية مُتشابِهة:



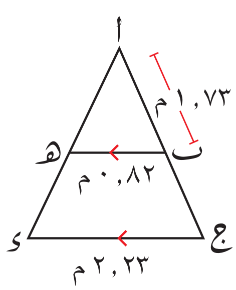
٣) في المُثلَّث المُجاوِر ا ب ج:
إذا كان المُستقيم ا ج // المستقيم هـ و، أوجد طول ا ج.



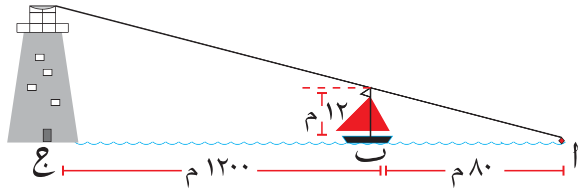
٤) أثبت أنَّ المُثلَّثَين في الشكل المُجاوِر مُتشابِهان،
علمًا بأن ا ب //ء هـ، ثمّ أوجد طول ج هـ.



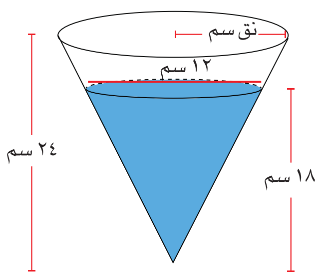
٥) في الشكل المجاور، أوجد طول ب ج
علمًا بأن المُثلَّثَين ا ب هـ، ا ج ء متشابهان.



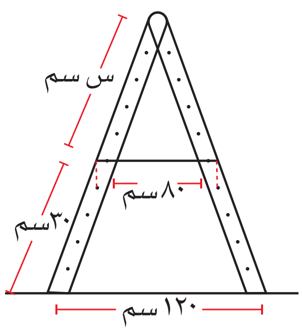
٦) يُبيّن الشكل أدناه أن المسافة بين السبّاح أ والقارب ب تساوي ٨٠ م، والمسافة بين القارب ب والمنارة ع تساوي ١٢٠٠ م، وارتفاع القارب يساوي ١٢ م، إذا كان السبّاح يستطيع رؤية قمّة المنارة وسارية علم القارب معًا، احسب ارتفاع المنارة، علمًا بأن رأس السبّاح يكون عند مستوى سطح البحر.



٧) يُبيّن الشكل المُجاوِر قطعًا طوليًا لمخروط دائري قائم تمّ ملؤه بسائل حتّى ارتفاع ١٨ سم. أوجد نصف قطر قاعدة المخروط.



٨) يُبيّن الشكل المُجاوِر سُلَّمًا ثُبّت بسلك أُفقي طوله ٨٠ سم. أوجد قيمة س.



١٢-٢-ب تشابُه الأشكال

تعلّمت في الدرس السابق عن المُثلَّثات المُتشابِهة. ولكن يمكن للتشابُه أن يشمل أي نوع من الأشكال الهندسية. يتشابه مُضلّعان إذا كانت:

- نسبة الأضلاع المُتناظِرة مُتساوية.
- قياسات الزوايا المُتناظِرة مُتساوية.

يمكنك استخدام نسبة الأضلاع المُتناظِرة لتجد قيَم الأضلاع المجهولة في الأشكال المُتشابِهة كما هو الحال في المُثلَّثات المُتشابِهة.

رابط

عندما تُحاوِل أن تفهم كيف تتناسب الجُزيئات بعضها مع بعض، فإنك تحتاج كما يحتاج الكيميائيون، إلى فهم عميق للأشكال والمُجسَّمات الهندسية.

مثال ٤

أ لدى أحمد علمان مُستطيلا الشكل. أبعاد الأول ١٠٠٠ مم، ٥٠٠ مم، وأبعاد الثاني ٥٠٠ مم، ٣٥٠ مم. هل العلمان مُتشابِهان؟

الحلّ:

$\frac{١٠٠٠}{٥٠٠} = ٢$ ، $\frac{٥٠٠}{٣٥٠} = ١,٤٣$ $\frac{١٠٠٠}{٥٠٠} \neq \frac{٥٠٠}{٣٥٠}$	أوجد نسب الأبعاد المُتناظِرة.
النسب بين الأبعاد المُتناظِرة ليست متساوية. وبناء على ذلك فإن العلمَين غير مُتشابِهَين.	وضِّح سبب عدم تشابُه العلمَين.

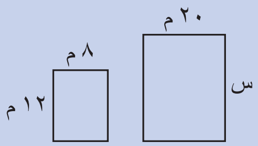
ب لدى بسام علمان مُربَّعا الشكل. طول ضلع العلم الأول ١٢٠ سم وطول ضلع العلم الثاني ٨٠ سم. هل العلمان متشابهان؟

الحلّ:

طول كل ضلع من أضلاع العلم الأول ١٢٠ سم. طول كل ضلع من أضلاع العلم الثاني ٨٠ سم. نسب الأضلاع المُتناظِرة متساوية، وكل منها تُساوي ١٢٠ : ٨٠ هذا يعني أن العلمَين متشابهان.	يُبيِّن ذلك أن كل المُربَّعات مُتشابِهة مهما كانت أطوال أضلاعها.

مثال ٥

في الشكل المجاور، أوجد قيمة س، علمًا بأن المستطيلَين مُتشابِهان.

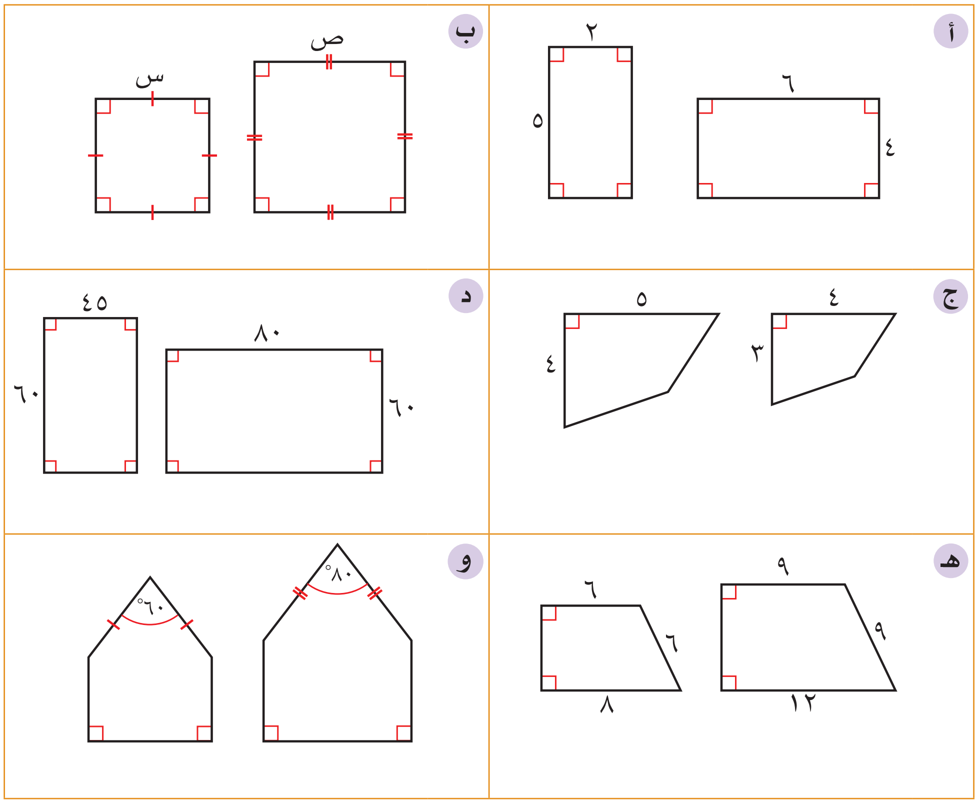


الحلّ:

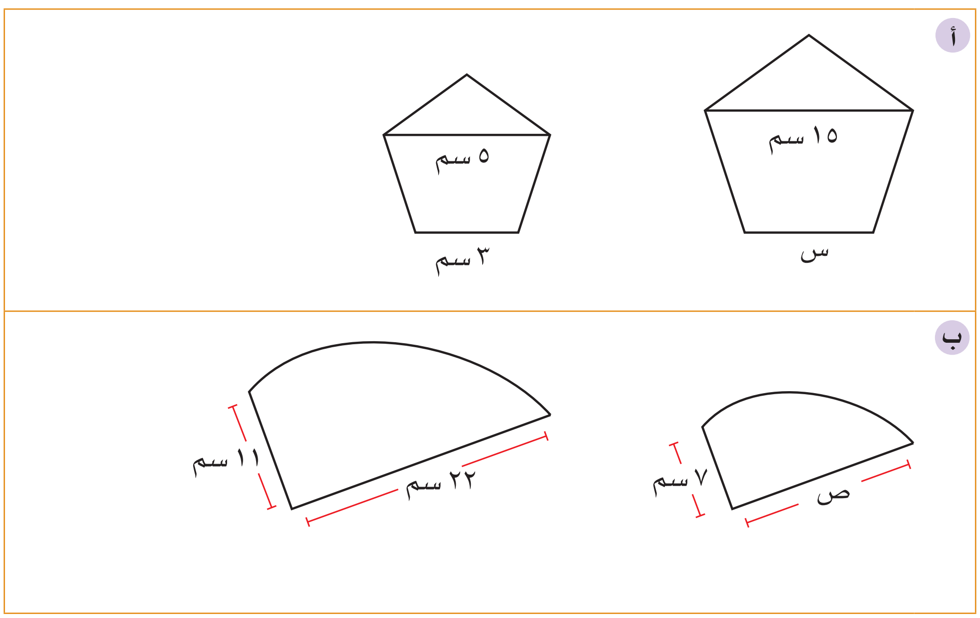
$\frac{س}{١٢} = \frac{٢٠}{٨}$	اكتب النسب المُتناظِرة.
$س \times ٨ = ١٢ \times ٢٠$	استخدم الضرب التبادُلي.
$\Leftarrow س = \frac{١٢ \times ٢٠}{٨} = ٣٠$ م	

تمارين ١٢-٢-ب

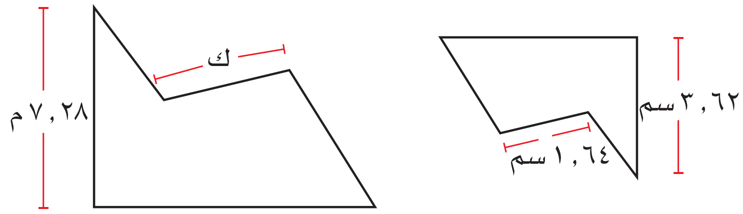
١) حدِّد ما إذا كان كلّ زوج من الأشكال التالية مُتشابِهًا أم لا. وضِّح خطوات الحل.



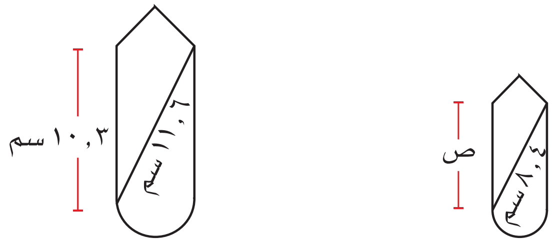
٢) إذا كان كل زوج من الأشكال التالية مُتشابِهًا، احسب قيمة الضلع المجهول:



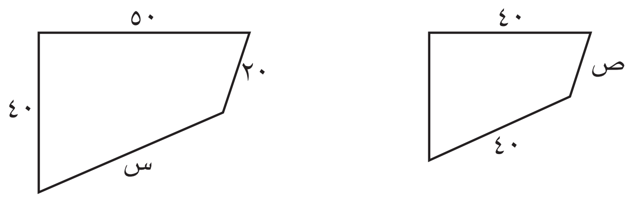
ج


٣,٦٢ سم
١,٦٤ سم
ك
٧,٢٨ م

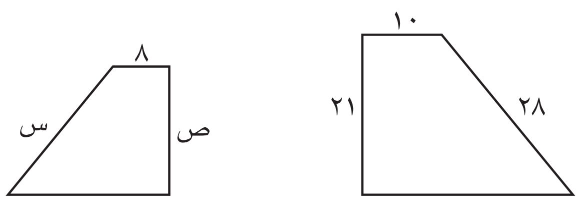
د


ص
٨,٤ سم
١٠,٣ سم
١١,٦ سم

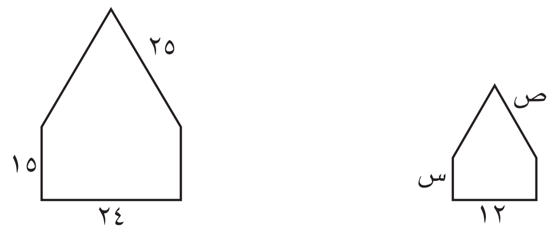
هـ


٤٠
ص
٤٠
٥٠
٢٠
٤٠
س

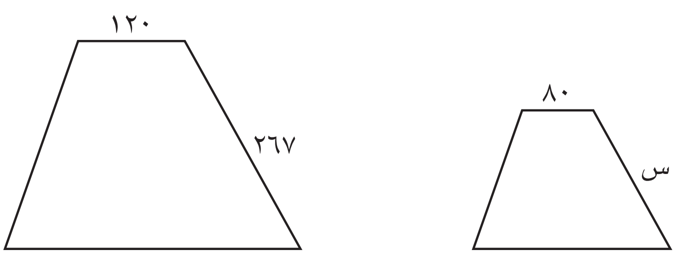
و


١٠
٢١
٢٨
٨
س
ص

ز

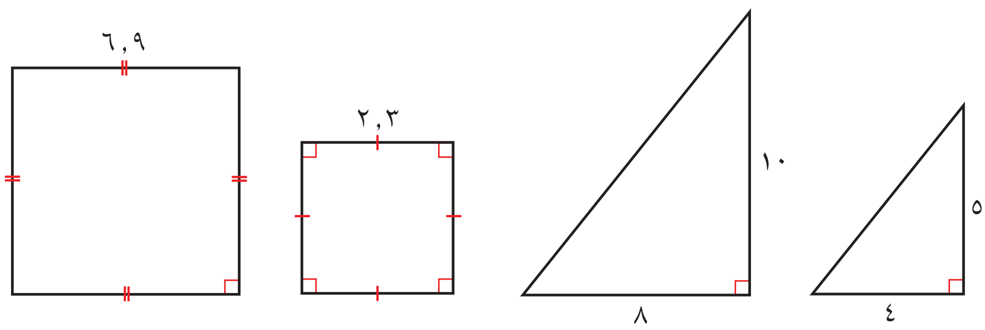

ص
س
١٢
٢٥
١٥
٢٤

ح


٨٠
س
١٢٠
٢٦٧

١٢-٢-ج مساحة الأشكال المُتشابِهة

إذا كان كلّ زوج من أزواج الأشكال الآتية مُتشابهًا:



المساحة = ١٠   المساحة = ٤٠   المساحة = ٥,٢٩   المساحة = ٤٧,٦١

نسبة الطول: ١٠ :٥ أو ٢: ١

مُعامِل التشابُه = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢

نسبة المساحة هي ٤٠: ١٠ أو ٤: ١

مُعامِل تشابُه المساحة = $\frac{٤٠}{١٠}$ = ٤

نسبة الطول: ٦,٩ : ٢,٣ أو ٣: ١

مُعامِل التشابُه = $\frac{٦,٩}{٢,٣}$ = ٣

نسبة المساحة هي ٤٧,٦١ : ٥,٢٩ أو ٩: ١

مُعامِل تشابُه المساحة = $\frac{٤٧,٦١}{٥,٢٩}$ = ٩

تُسمّى النسبة التي تُقارِن بين قياسات شكلَين مُتشابهين **مُعامِل التشابُه**.

ممّا سبق ستجد أن هناك علاقة بين الأضلاع المُتناظِرة في الأشكال المُتشابِهة ومساحة تلك الأشكال.

في الأشكال المُتشابِهة إذا كانت النسبة بين أطوال الأضلاع المُتناظِرة أ :ب، فإن النسبة بين مساحاتها $أ^٢$:$ب^٢$.

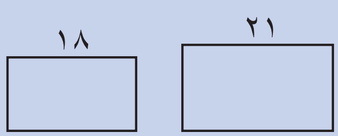
بمعنى آخر، **مُعامِل تشابُه المساحات** = $(\text{مُعامِل تشابُه الأطوال})^٢$

سابقًا

سبق لك أن تعاملت مع هذه الأمور عند دراسة التكبير في الوحدة ٨

مثـــال ٦

إذا علمت أن المُستطيلَين مُتشابِهان، فما نسبة مساحة المُستطيل الصغير إلى مساحة المُستطيل الكبير؟



الحــلّ:

النسبة بين طولَي الضلعَين = ١٨:٢١	ابدأ بِمُعامِل تشابه الأطوال (النسبة بين أطوال الأضلاع).
النسبة بين المساحتَين = $(١٨)^٢:(٢١)^٢$	أوجد النسبة بين المساحات بتربيع مُعامِل التشابُه بين الأطوال.
= ٣٢٤ : ٤٤١	
= ٣٦ : ٤٩	بسِّط النسبة بقسمة كلا العددَين على ٩

تذكّر أنّ ترتيب الأعداد في النسبة مُهِمّ جدًا. المطلوب هنا هو إيجاد نسبة مساحة المستطيل الصغير إلى مساحة المستطيل الكبير، لذا يجب كتابة أبعاد المستطيل الصغير أوّلًا.

مثــال ٧

إذا كان المُستطيلان ا ب ج ى، م ن ع ف مُتشابِهَين، والنسبة بين طولَي الضلعَين المُتناظرَين هي ٥:٣، وكانت مساحة المُستطيل ا ب ج ى تساوي ٩٠٠ سم^{٢}، فأوجد مساحة المستطيل م ن ع ف.

الحــلّ:

$$\frac{\text{مساحة م ن ع ف}}{\text{مساحة ا ب ج ى}} = \frac{٥^{٢}}{٣^{٢}}$$

استخدم مُعامِل تشابُه الأطوال $\frac{٥}{٣}$ لأنه في السؤال تمّ ذكر المستطيل ا ب ج ى أوّلاً، لذا فإن العدد ٣ هو مُعامِله والعدد ٥ هو مُعامِل المستطيل م ن ع ف

مُعامِل تشابُه المساحات هو $\frac{٥^{٢}}{٣^{٢}}$

$$\frac{\text{مساحة م ن ع ف}}{\text{٩٠٠ سم}^{٢}} = \frac{٢٥}{٩}$$

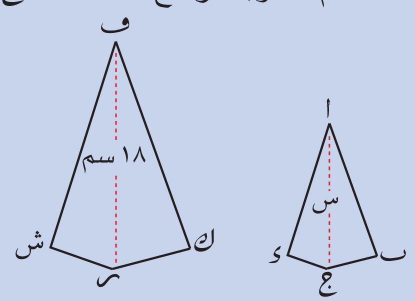
$$\text{مساحة م ن ع ف} = \frac{٢٥}{٩} \times ٩٠٠$$

$$= \text{٢٥٠٠ سم}^{٢}$$

∴ مساحة م ن ع ف تساوي ٢٥٠٠ سم^{٢}

مثــال ٨

إذا علمت أنّ الشكلَين التاليَين مُتشابِهان، وأن مساحة الشكل ا ب ج ى = ٤٨ سم^{٢} ومساحة الشكل ف ك ر ش = ١٠٨ سم^{٢}، فأوجد ارتفاع الشكل ا ب ج ى.



الحــلّ:

ليكن س هو ارتفاع الشكل ا ب ج ى.

استخدم مُعامِل تشابُه الأطوال $\frac{\text{س}}{١٨}$.

وبالتالي سيكون مُعامِل تشابُه المساحات هو $\frac{\text{س}^{٢}}{١٨^{٢}}$

$$\frac{٤٨}{١٠٨} = \frac{\text{س}^{٢}}{١٨^{٢}}$$

$$\frac{٤٨}{١٠٨} = \frac{\text{س}^{٢}}{٣٢٤}$$

$$\frac{٤٨}{١٠٨} \times ٣٢٤ = \text{س}^{٢}$$

$$\text{س}^{٢} = ١٤٤$$

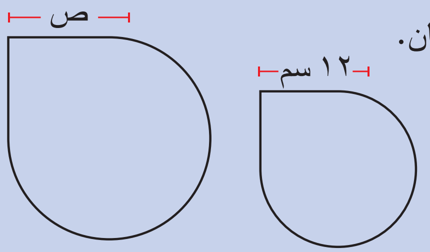
$$\text{س} = ١٢$$

أوجد الجذر التربيعي الموجب.

ا ج هو ارتفاع الشكل ا ب ج ى وطوله يساوي ١٢ سم.

مثـــال ٩

الشكلان المُبيَّنان في المُخطَّط المُجاوِر مُتشابِهان.
أوجد الطول المُشار إليه بالحرف ص إذا كانت مساحة الشكل الكبير ٢١٦ سم^{٢} ومساحة الشكل الصغير ٢٤ سم^{٢}.



الحـــلّ:

مُعامِل تشابُه المساحات = $\frac{٢١٦}{٢٤}$ = ٩

⇐ (مُعامِل تشابُه الأطوال)^{٢} = ٩

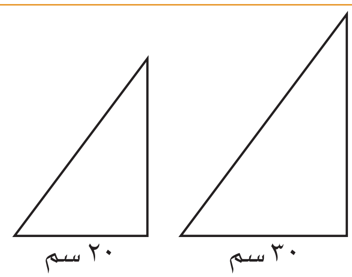
⇐ مُعامِل تشابُه الأطوال = $\sqrt{٩}$ = ٣

∴ ص = ٣ × ١٢ = ٣٦ سم

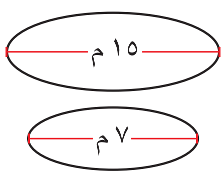
إذا علمنا مُعامِل تشابُه المساحات، فإننا نحتاج إلى إيجاد الجذر التربيعي له، لإيجاد مُعامِل تشابه الأطوال.

تمارين ١٢-٢-ج

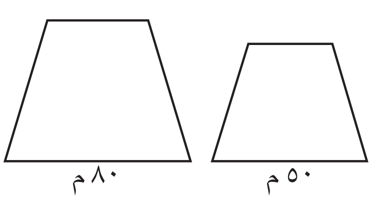
١) إذا علمت أن كل زوج من الأشكال التالية مُتشابِه، وأُعطيتَ مساحة أحد الشكلَين فأوجد مساحة الشكل الآخر:

أ


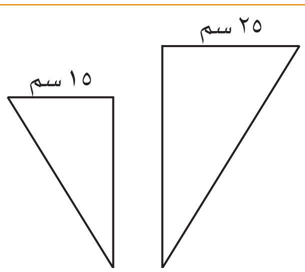
مساحة المُثلَّث الكبير = ١٨٧,٥ سم^{٢}

ب


مساحة الشكل الصغير = ١٧,٠ م^{٢}

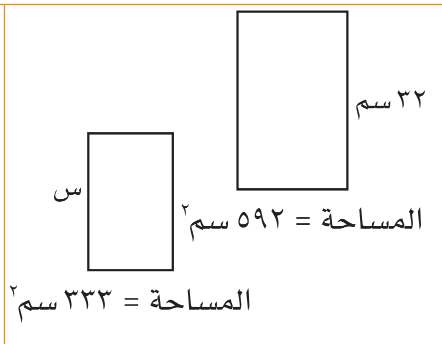
ج


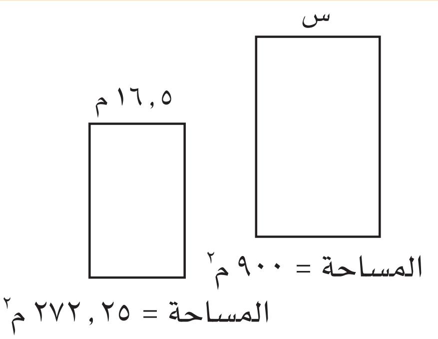
مساحة المُضلَّع الكبير = ٤٠٠٠ م^{٢}

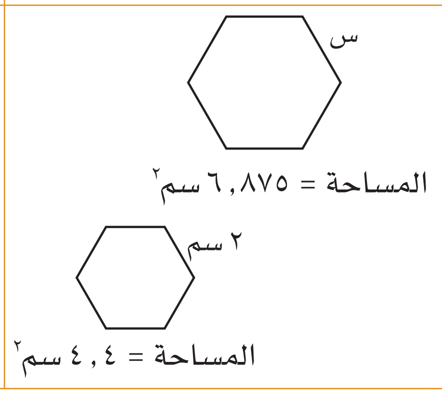
د


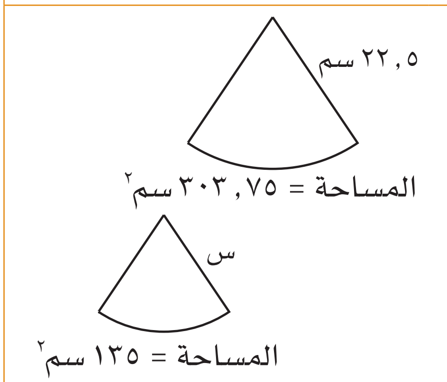
مساحة المُثلَّث الصغير = ١٣٥ سم^{٢}

٢) أوجد طول الضلع س في كل ممّا يلي علمًا بأن كل زوج من أزواج الأشكال التالية مُتشابِه:

أ


ب


ج


د


٣) تصنع أمينة نمطًا بقصّ مُضلَّعات خُماسيَّة مُنتظِمة. كيف ستتأثَّر مساحة المُضلَّع الخُماسي إذا:

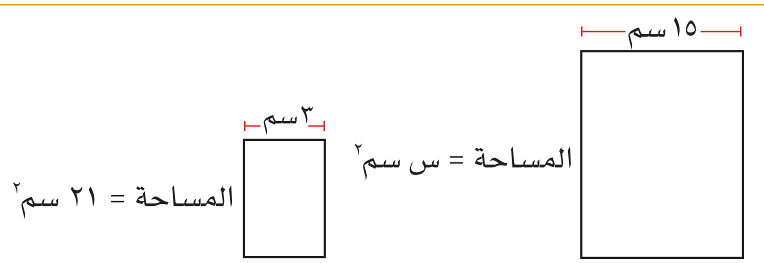
أ ضاعفت أطوال أضلاعه؟

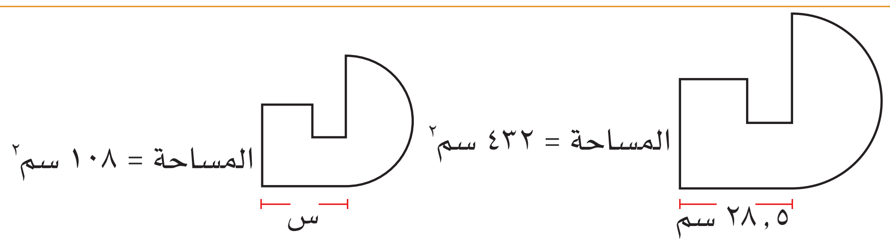
ب أصبح طول كل ضلع ثلاثة أمثال طوله السابق؟

ج أصبح طول كل ضلع نصف طوله السابق؟

٤) إذا كانت النسبة بين مساحتَي شكلَيْن مُتشابهَين ٩:٦٤، فكم تبلغ النسبة بين الأضلاع المُتناظِرة؟

٥) أوجد القيمة المجهولة في كلّ زوج من أزواج الأشكال المُتشابِهة التالية:

أ


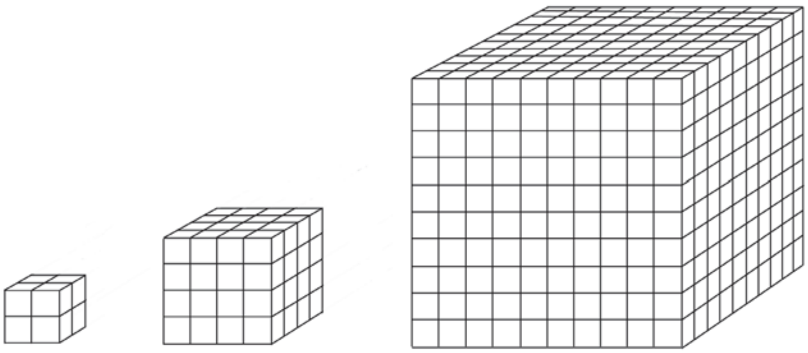
ب


١٢-٢-د تشابُه المُجسَّمات

يمكن للأشكال ثُلاثيَّة الأبعاد (المُجسَّمات) أيضًا أن تتشابه.

المُجسَّمات المُتشابِهة لها الهيئة نفسها وزواياها المُتناظِرة مُتطابِقة، أضف إلى ذلك أن جميع القياسات الخطّية المُتناظِرة (الأحرف والأقطار وأنصاف الأقطار والارتفاعات والارتفاعات الجانبية) لها نفس النسبة، وتسمّى النسبة التي تقارِن القياسات في مُجسَّمَين **مُعامِل التشابُه**.

حجوم المُجسَّمات المُتشابِهة و مساحاتها السطحية



يُبيِّن الجدول التالي حجوم وأطوال أضلاع كلّ من المُكعَّبات السابقة.

× ٥

× ٢

طول الضلع (وحدة)	٢	٤	١٠
الحجم (وحدة^{٣})	٢ × ٢ × ٢ = ٨	٤ × ٤ × ٤ = ٦٤	١٠ × ١٠ × ١٠ = ١٠٠٠

× $٢^{٣}$

× $٥^{٣}$

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع
حجم المُكعَّب = (طول الضلع)^{٣}
لأن أبعاد المُكعَّب كلها متساوية

لاحظ أنه عند ضرب طول الضلع في ٢، يُضرب الحجم في مُكعَّب مُعامِل تشابُه الطول، أي $٢^{٣}$ = ٨

هنا يكون **مُعامِل تشابُه الأطوال** ٢، و**مُعامِل تشابُه الحجوم** $٢^{٣}$

عند ضرب طول الضلع في ٥، يُضرب الحجم في مُكعَّب مُعامِل تشابُه الطول، أي $٥^{٣}$ = ١٢٥

هنا يكون **مُعامِل تشابُه الأطوال** ٥، و**مُعامِل تشابُه الحجوم** $٥^{٣}$

وبالتالي فإن:

مُعامِل تشابُه الحجوم = (مُعامِل تشابُه الأطوال)^{٣}

وباعتماد المساحة السطحية للمُكعَّبات، ستكون قادرًا على مُلاحظة أن قاعدة مُعامِل تشابُه المساحات لا تزال صحيحة بخصوص المساحة:

مُعامِل تشابُه المساحات = (مُعامِل تشابُه الأطوال)^{٢}

في بعض الأحيان، تعطى مُعامِل تشابه المساحات أو الحجوم لتبدأ به بدلاً من مُعامِل تشابه الأطوال. استخدم الجذر التربيعي أو الجذر التكعيبي لتحصل على مُعامِل تشابه الأطوال ويكون نقطة البداية في عملك.

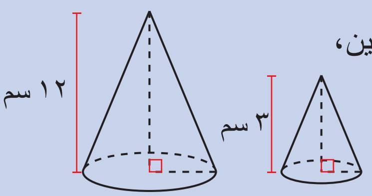
وبالتالي إذا تشابه مُجسَّمان (ا و ب)، فإن:

- لكل القياسات الخطّية المُتناظِرة نفس النسبة. مثلاً، ستكون النسبة بين طولَي الضلعَين المتناظرَين مساوية لـ ا: ب، كما ستكون النسبة بين القطرَين المُتناظرَين مساوية لـ ا: ب، وستكون النسبة بين ارتفاعَي المُجسَّمين مساوية لـ ا: ب. بشكل عام، سيكون ناتج قسمة أي طول من المُجسَّم (ا) على الطول المُناظر له من المُجسَّم (ب) مساويًا لـ ا: ب.
- النسبة بين المساحَتين في المُجسَّمين ستكون مساوية لـ ا^{٢}: ب^{٢}، فمثلاً، ناتج قسمة المساحة السطحية للمُجسَّم (ا) على المساحة السطحية للمُجسَّم (ب) يساوي ا^{٢}: ب^{٢}.
- النسبة بين الحجمَين في المُجسَّمَين ستكون مساوية لـ ا^{٣}: ب^{٣}، فمثلاً، ناتج قسمة حجم المُجسَّم (ا) على حجم المُجسَّم (ب) يساوي ا^{٣}: ب^{٣}

تُبيّن الأمثلة التالية كيفية استخدام مُعامِلات التشابُه في المُجسَّمات.

مثــال ١٠

إذا كان المخروطان المُبيَّنان في المُخطَّط المُجاوِر مُتشابِهَين، أوجد حجم المخروط الكبير، علمًا بأن حجم المخروط الصغير ٤٠ سم^{٣}.



الحــلّ:

مُعامِل تشابُه الأطوال $= \frac{١٢}{٣} = ٤$ $\Leftarrow$ مُعامِل تشابُه الحجوم $= ٤^{٣} = ٦٤$ $\therefore$ حجم المخروط الكبير $= ٦٤ \times ٤٠ = ٢٥٦٠$ سم^{٣}	مُعامِل تشابُه الحجوم يساوي (مُعامِل تشابه الأطوال)^{٣}

مثــال ١١

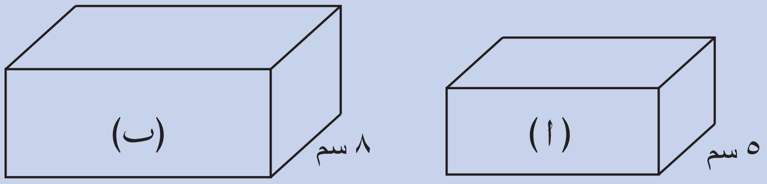
صندوق حجمه ٢٠٠٠ سم^{٣}. إذا تضاعفت أبعاده، فكم سيكون حجمه الجديد؟

الحــلّ:

$\frac{\text{الحجم الأصلي}}{\text{الحجم الجديد}} = \left(\frac{\text{الأبعاد الأصلية}}{\text{الأبعاد الجديدة}}\right)^{٣}$ $\frac{٢٠٠٠}{\text{الحجم الجديد}} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$ $\frac{٢٠٠٠}{\text{الحجم الجديد}} = \frac{١}{٨}$ الحجم الجديد $= ٢٠٠٠ \times ٨$ الحجم الجديد $= ١٦٠٠٠$ سم^{٣}	عند مُضاعفة الأبعاد، يكون مُعامِل تشابُه الطول ٢، وهذا يعني أن مُعامِل تشابُه الحجم هو $٢^{٣} = ٨$؛ وبناء على ذلك اضرب الحجم في ٨

مثـــال ١٢

إذا كان متوازيا المُستطيلات ا، ب مُتشابِهَين، وكانت المساحة السطحية للمُجسَّم الكبير تساوي ٦٠٨ سم^{٢}، فكم تساوي المساحة السطحية للمُجسَّم الصغير؟



الحـــلّ:

$\frac{\text{مساحة المُجسّم (ا) السطحية}}{٦٠٨} = \left(\frac{٥}{٨}\right)^{٢}$

$\frac{\text{مساحة المُجسّم (ا) السطحية}}{\text{مساحة المُجسّم (ب) السطحية}} = \left(\frac{\text{عرض المُجسّم (ا)}}{\text{عرض المُجسّم (ب)}}\right)^{٢}$

$\frac{\text{مساحة المُجسّم (ا) السطحية}}{٦٠٨} = \frac{٢٥}{٦٤}$

مساحة المُجسّم (ا) السطحية × ٦٤ = ٢٥ × ٦٠٨ استخدم الضرب التبادلي

مساحة المُجسّم (ا) السطحية = $\frac{٢٥ \times ٦٠٨}{٦٤}$ اقسم كلا الطرفَين على ٦٤

مساحة المُجسّم (ا) السطحية = ٢٣٧,٥ سم^{٢}

تمارين ١٢-٢-د

١) انسخ الجملة الآتية وأكملها:

عند ضرب أبعاد مُجسَّم في مقدار ك، سنضرب المساحة السطحية في ________ ونضرب الحجم في ________.

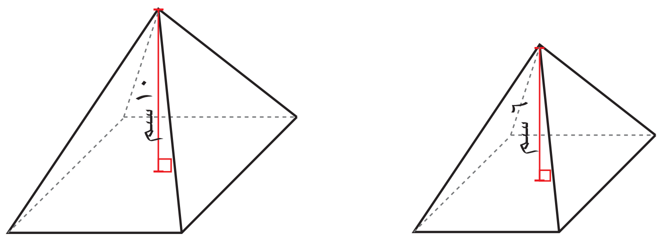
٢) إذا علمت أن المُكعَّبَين (ا)، (ب) مُتشابِهان، وأن طول ضلع المُكعَّب (ا) ٢٠ سم، وطول ضلع المُكعَّب (ب) ٥ سم:

أ) ما مُعامِل تشابُه (ا) إلى (ب)؟

ب) ما النسبة بين مساحتَيْهما السطحيَّة؟

ج) ما النسبة بين حجمَيْهما؟

٣) إذا كان الهرمان (أ)، (ب) مُتشابِهَين، أوجد المساحة السطحية للهرم (أ)(الصغير).



الهرم (أ)　　　المساحة السطحية للهرم (ب) = ٦٠٠ سم٢

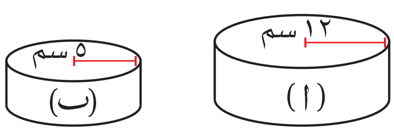
٤) لدى سالم أسطوانتان معدنيتان مُتشابهتان، قطر الأسطوانة الصغيرة ٤ سم، ومساحتها السطحية ١١٠ سم٢، وقطر الأسطوانة الكبيرة ٥ سم. أوجد المساحة السطحية للأسطوانة الكبيرة.

٥) إذا علمت أن مُتوازيي المُستطيلات (س)، (ص) مُتشابِهان. ومُعامِل تشابُه الأطوال (س) إلى (ص) هو $\frac{٣}{٤}$، فأجب عن الأسئلة التالية:

- **أ** إذا كان طول أحد أبعاد مُتوازي المُستطيلات (س) يساوي ١٢ مم، فأوجد طول البُعد المُناظِر له في مُتوازي المُستطيلات (ص).
- **ب** المساحة السطحية لمُتوازي المُستطيلات (س) تساوي ٨٨,٨ سم٢، فأوجد المساحة السطحية لمُتوازي المُستطيلات (ص).
- **ج** إذا كان حجم مُتوازي المُستطيلات (س) يساوي ٣٥,١سم٣، فأوجد حجم مُتوازي المُستطيلات (ص).

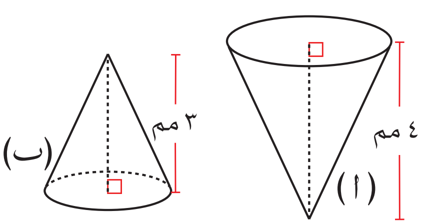
٦) إذا كان المُجسَّمان في كل جُزئيَّة من جُزئيّات هذا التمرين مُتشابِهَين، أوجد الحجم المجهول:

أ



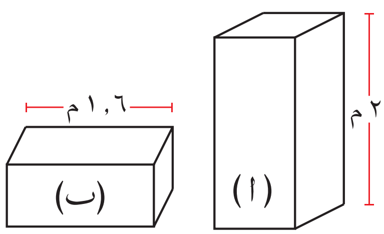
حجم (أ) = ٢٨٨ سم٣

ب



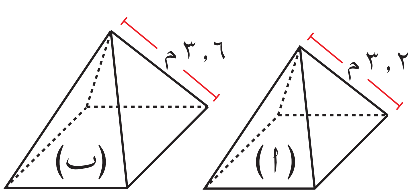
حجم (أ) = ٩ مم٣

ج



حجم (ب) = ٠,٣٨٤ م٣

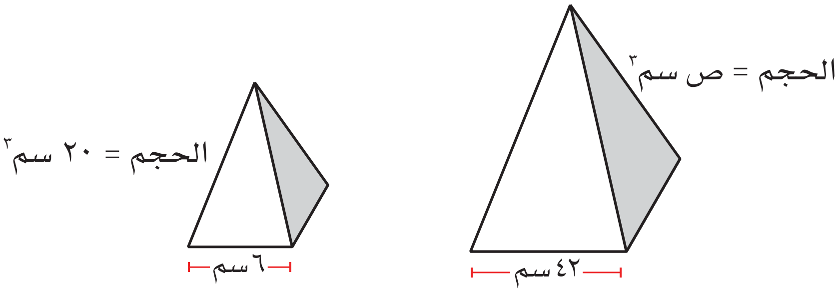
د



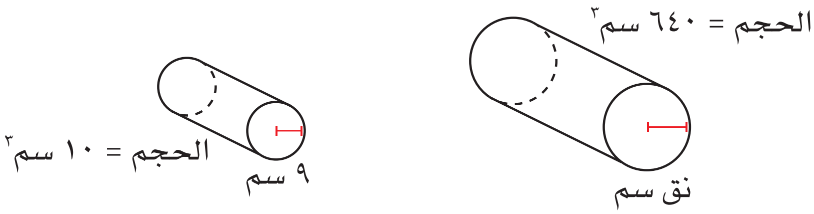
حجم (ب) = ٨٠,٦٤ م٣

٧) أوجد القيمة المجهولة في كلّ زوج من أزواج الأشكال المُتشابِهة التالية:

أ



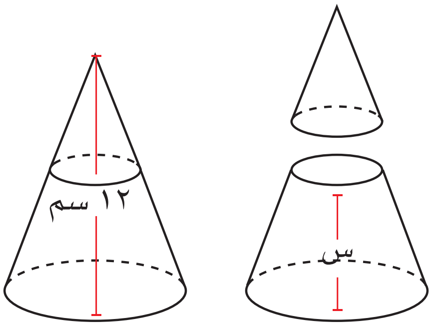
ب



طبّق مهاراتك

٨) تملك مريم مجموعة من الدُّمى المُتشابِهة.
يبلغ طول الدُّمية الكبرى ٣١ سم، والدُّمية التالية لها أقصر بمقدار ٢ سم، والثالثة أقصر بمقدار ٤ سم.
ارسم جدولاً لتُقارِن المساحة السطحية والحجم للدُّمى الثلاث، مُستخدِمًا مُعامِلات التشابُه المختلفة.

٩) يُنتِج مصنعٌ ما أزواجًا من المخاريط الورقية تم قطعها بمستوى موازٍ للقاعدة، كما هو مُوضَّح في المُخطَّط المُجاوِر.
فإذا كان حجم المخروط الكبير (الكامل) ٨٢١ سم^٣ وحجم المخروط الصغير الذي تمّ قطعه من أعلى ٢٤ سم^٣، أوجد قيمة س.



يُنتِج المخروط عندما يُقصُّ بهذه الطريقة مخروطًا صغيرًا ومجسّمًا يُسمّى مخروطًا ناقصًا.

١٢-٣ تطبيقات على التشابُه

يتمثَّل التطبيق العملي لموضوع التشابُه في رسم المُخطَّطات المختلفة أو استخدام الخريطة. حيث تحتاج أحيانًا إلى رسم مُخطَّط ليُمثِّل شيئًا أكبر بكثير من أن تتَّسع له الورقة، أو شيئًا صغيرًا جدًّا يصعب وضع التفاصيل عليه، مثل مُخطَّط بناية، أو خريطة بلد ما، أو تصميم رقاقة رقمية.

تكون كل المُستقيمات في المُخطَّطات المرسومة كسورًا من المُستقيمات التي تُمثِّلها في الحقيقة، ويُسمّى هذا الكسر **مقياس الرسم**، وهو يساوي مُعامِل التشابُه الذي استخدمناه في بداية الوحدة.

وكما تعلَّمت، فإنَّ مقياس الرسم لمُخطَّط، أو لخريطة ما يُعطى في صورة كسر، أو نسبة مثل $\frac{١}{٥٠٠٠٠}$ أو ١ : ٥٠٠٠٠.

حيث أن مقياس الرسم $\frac{١}{٥٠٠٠٠}$ يعني أن طول كلّ مستقيم على المُخطَّط يساوي $\frac{١}{٥٠٠٠٠}$ من طول المُستقيم الذي يُمثِّله في الواقع، فمثلاً: كل ١ سم على المُخطَّط يُمثِّل ٥٠٠٠٠ سم في الواقع، وكذلك كل ١ سم يُمثِّل ٥٠٠ م، أو كل ٢ سم تمثّل ١ كم.

سابقًا

يمكن استخدام بعض مهارات الإنشاءات الهندسية التي تعلّمتها في الوحدة ٤ في رسم المُخطَّط.

رابط

يُستخدَم رسم المُخطَّط في إنتاج مواد تصميم تكنولوجية. ويُمكن لكثير من المسائل التي تتضمَّن تطابُق الأشكال المختلفة أن تُحلّ بالاستخدام الجيد لرسم المُخطَّط. الخرائط في الجغرافيا أيضًا أمثلة على رسم المُخطَّطات، وهي تُمكّننا من تقديم مواقف من الواقع بقياسات قابلة للتعامُل معها.

مثـــال ١٣

حقل مستطيل الشكل طوله ١٠٠ م وعرضه ٤٥ م. تمّ تصميم رسم مُخطَّط له بمقياس رسم ١ سم لكل ١٠ م. كم يبلغ طول الحقل وعرضه على المُخطَّط؟

الحـــلّ:

يتمثَّل كل ١٠ م على المُخطَّط بـ ١ سم.

∴ يتمثَّل ١٠٠ م بـ (١٠٠ ÷ ١٠) سم = ١٠ سم.

ويتمثَّل ٤٥ م بـ (٤٥ ÷ ١٠) سم = ٤,٥ سم.

∴ يبلغ طول الحقل على المُخطَّط ١٠ سم، وعرضه ٤,٥ سم.

مقياس الرسم هو $\frac{١}{١٠٠٠}$، (يجب الانتباه لوحدات القياس المُستخدَمة).

رسم المُخطَّطات

إليك بعض الإرشادات لرسم المُخطَّطات بمقياس رسم:

- نَفِّذ رسمًا تقريبيًّا، مُبيِّنًا كل التفصيلات المُعطاة في السؤال.
- إذا طُلب إليك أن تستخدم مقياس رسم مُحدَّدًا، فعليك استخدامه! وإلا فعليك اختيار مقياس رسم يتناسب المُخطَّط فيه مع الصفحة التي ترسم عليها.
- ارسم مُخطَّطًا نظيفًا ودقيقًا باستخدام الأدوات الهندسية المُناسبة، وبيِّن عليه الأطوال وقياسات الزوايا المعطاة، واكتب المقياس أسفل الرسم.
- أوجد الأطوال وقياسات الزوايا في المُخطَّط لتجد الإجابات عن المسألة، وتذكَّر أن تُحوِّل الأطوال إلى الأطوال الحقيقية باستخدام مقياس الرسم، ولكن قياسات الزوايا هي نفسها في المُخطَّط.

الرسم في المُخطَّط يكون مُشابهًا للرسم الحقيقي. وبناء على ذلك تتناسب الأضلاع المُتناظِرة وتتساوى قياسات الزوايا المُتناظِرة.

تمارين ١٢-٣

١) يبلغ طول غرفة المعيشة على رسم مُخطَّط لأحد المنازل ٣,٤ سم، وعرضها ٢,٦ سم. مقياس الرسم المُستخدَم في المُخطَّط هو ١ سم لكل ٢ م. أوجد الطول والعرض الحقيقي للغرفة.

٢) تبلغ المسافة الحقيقية بين قريتَين ١٢ كم. احسب المسافة بينهما على خريطة، إذا كان مقياس الرسم:

أ ١ سم لكل ٤ كم.

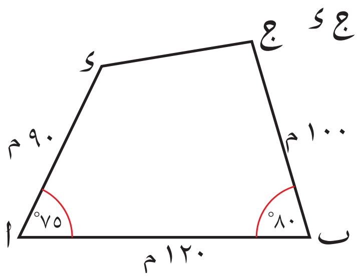
ب ١ سم لكل ٥ كم

٣) إذا علمت أن طول طريق مُنحدَر ٢٨ م ويُشكِّل زاوية قياسها ١٥° مع الأفق. يُراد رسم مُخطَّط للمُنحدَر باستخدام مقياس الرسم ١ سم لكل ٥ م،

أ فكم سيكون طول المُنحدَر في المُخطَّط؟

ب وما قياس الزاوية التي سيُشكِّلها المُنحدَر مع الأفق في المُخطَّط؟

٤) إذا كان الشكل المُجاوِر يُمثِّل رسمًا تقريبيًّا للحقل ا ب ج ى

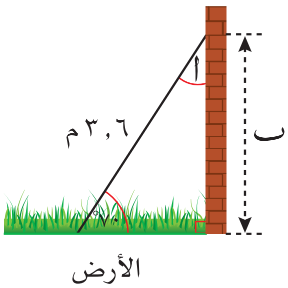


أ ارسم مُخطَّطًا دقيقًا للحقل مُستخدِمًا مقياس الرسم ١ سم إلى ٢٠ م.

ب أوجد ق(ب جَ ى) وق(اىَ ج) عند طرفَي الحقل مُستخدِمًا المنقلة.

ج أوجد طول ضلع الحقل ج ى.

٥) يرتكز سُلَّم طوله ٣٫٦ م على أرض أفقية وعلى حائط رأسي، ويُشكِّل زاوية مع الأرض قياسها ٧٠° (انظر الشكل المُقابِل).



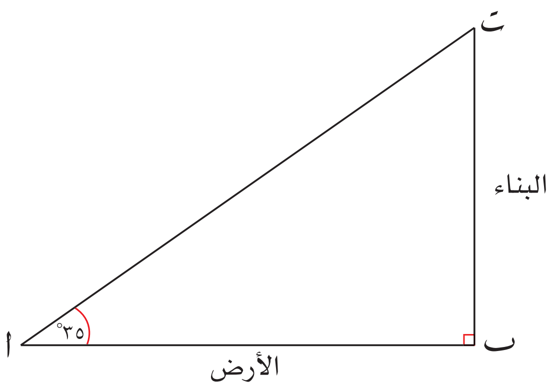
أ ما قياس الزاوية (أ) التي يُشكِّلها السلَّم مع الحائط؟

ب ارسم مُخطَّطًا مُستَخدِمًا مقياس الرسم ١ سم لكل ٥٠ سم، كي تجد ارتفاع السلَّم (ب) عن الأرض.

٦) يُمثِّل رسم المُخطَّط الدقيق الجدار الرأسي ب ت لبناء مُشيَّد على أرض أفقية. رُسم المُخطَّط بمقياس الرسم ١ سم لكل ٨ م.

أ أوجد ارتفاع البناء.

ب أوجد المسافة من النقطة أ إلى قاعدة البناء ب.



مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

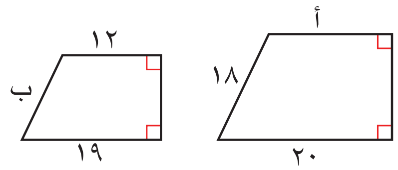
- الأشكال المُتطابِقة متساوية تمامًا.
- هناك أربع حالات للتطابق يمكن استخدامها للتحقُّق من تطابُق المُثلَّثات. إذا صحّت إحدى تلك الحالات، فإن المُثلَّثين يتطابقان. الحالات الأربعة هي:
  ضلع زاوية ضلع (ض ز ض)، ضلع ضلع ضلع (ض ض ض)، زاوية ضلع زاوية (ز ض ز)، قائمة ضلع وتر (ق ض و)
- قياسات الزوايا المُتناظِرة في الأشكال المُتشابهة مُتساوية، والنسبة بين أطوال الأضلاع المُتناظِرة مُتساوية.
- إذا كان الشكلان مُتشابِهَين، وضُربت أطوال أضلاع أحدهما في المُعامِل م:
  - تُضرب المساحة في المُعامِل م^{٢}، ويسمى مُعامِل المساحة.
  - ويُضرَب الحجم في المُعامِل م^{٣}، ويسمى مُعامِل الحجم.
- رسم المُخطَّط هو مُخطَّط دقيق يكون مُشابِهًا للشكل الحقيقي ويتم الرسم باستخدام مقياس الرسم.

يجب أن تكون قادرًا على:

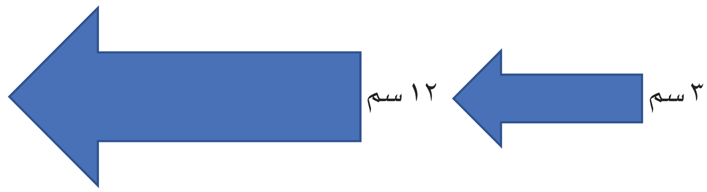
- تحديد ما إذا كان الشكلان مُتطابقَين أم لا.
- اختبار تطابُق المُثلَّثات.
- تحديد ما إذا كان الشكلان الهندسيّان مُتشابهَين أم لا.
- استخدام حقيقة تشابُه الشكلَين الهندسيَّين لإيجاد:
  - الأطوال المجهولة.
  - المساحات أو الحجوم.

تمارين نهاية الوحدة

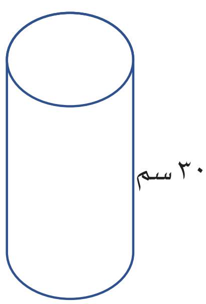
١) إذا علمت أن الشكلَين التاليين مُتشابِهان، فأوجد قيمتَي أ، ب:



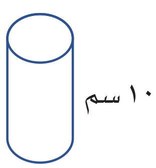
٢) إذا علمت أن السهمَين مُتشابِهان، ومساحة السهم الأول (الصغير) ٢٢سم^{٢}. أوجد مساحة السهم الثاني (الكبير):



٣) إذا كانت الأسطوانتان المُجاورتان مُتشابِهتَين، وكانت المساحة السطحية للأسطوانة (أ) تبلغ ١٥٠ سم^{٢}. فأوجد المساحة السطحية للأسطوانة (ب).

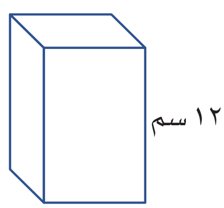


الأسطوانة (أ)

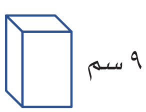


الأسطوانة (ب)

٤) إذا علمت أن مُتوازيَي المُستطيلات التاليَيْن مُتشابِهان: فأوجد حجم مُتوازي المُستطيلات (أ)، إذا كان حجم مُتوازي المُستطيلات (ب) يساوي ١٧٥ سم^{٣}.

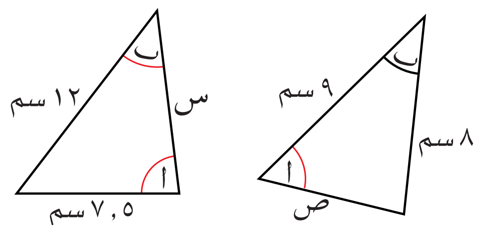


متوازي المُستطيلات (أ)



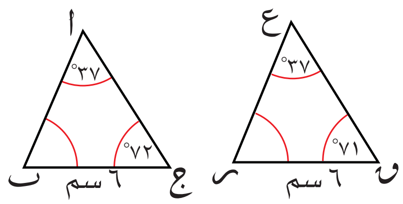
متوازي المُستطيلات (ب)

٥) إذا كان المُثلَّثان التاليان مُتشابِهَين، فأوجد قيمتَي س، ص.

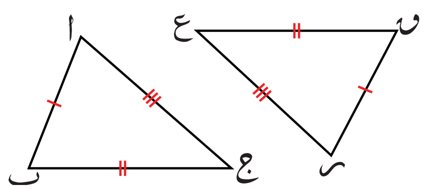


٦) حدِّد ما إذا كان كل زوج من المثلَّثات فيما يلي مُتطابِقًا. وضِّح خُطوات حلِّك.

أ



ب



الوحدة الثالثة عشرة: الزمن والمُعدَّلات

المُفردات

الزمن	Time
المُعدَّل	Rate
السرعة	Speed

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تُجري العمليات الحسابية على الزمن.
- تقرأ جداول الزمن وتستخدمها.
- تستخدم آلتك الحاسبة لإجراء العمليات الحسابية على الزمن.
- تقرأ المُعدَّلات وتُفسِّرها.
- تحسب السرعة المُتوسِّطة.
- تحل مسائل باستخدام صيغة المسافة والسرعة والزمن.

المُعدَّل هو مُقارنة بين كمّيَّتَين مُختلفتَين، والسرعة مُعدَّل يُقارِن بين المسافة المقطوعة والزمن الذي يستغرقه ذلك، فإذا أُعطيت السرعة بالكيلومتر في الساعة، فإنك تعلم المسافة المقطوعة في ساعة واحدة.

أمثلة أخرى على المُعدَّلات من واقع الحياة اليومية:

- عدد السعرات الحرارية لكل لتر من زيت الزيتون.
- عدد نبضات القلب في الدقيقة.
- عدد الأمتار المقطوعة في الساعة.
- عدد الكيلومترات المقطوعة لكل لتر من الوقود.
- سعر الصرف عند تحويل النقود لعملات مختلفة.

١٣-١ الزمن

اقرأ دائمًا مسائل الزمن بانتباه، وبيّن الخطوات التي استخدمتها في الحل. نورد هنا أحد السياقات التي يعتبر فيها الحل العكسي استراتيجية مفيدة.

سوف تتعلَّم في هذا الدرس كيفية احتساب الزمن بإجراء العمليات الحسابية واستخدام الآلة الحاسبة، كما أنّك سوف تتعلَّم كيفية قراءة الجداول الزمنية.

١٣-١-أ حساب الزمن

سبق أن تعلَّمت كيف تقرأ الوقت وكيف تكتبه باستخدام نظام توقيت الـ ١٢ ساعة ونظام توقيت الـ ٢٤ ساعة.

يُبيِّن التدرُّج الخارجي في الساعة المجاورة الوقت من ١ إلى ١٢ (صباحًا ومساءً)، ويُبيِّن التدرُّج الداخلي الوقت بعد الساعة ١٢ مساءً في نظام الـ ٢٤ ساعة.

مثـــال ١

غادرت سارة وأخوها سعيد البيت عند الساعة ٢:١٥ مساءً، عادت سارة عند الساعة ٢:٥٠ مساءً وعاد سعيد عند الساعة ٣:٠٥ مساءً. ما الزمن الذي قضاه كلّ منهما خارج البيت؟

الحـــلّ:

الطريقة (١):

٠٢:٥٠ − ٠٢:١٥ ٠٠:٣٥ بقيت سارة خارج البيت ٣٥ دقيقة.	اكتب عملية الطرح بطريقة رأسية. اطرح الدقائق من الدقائق والساعات من الساعات.
٠٢:٦٥ − ٠٣:٠٥ ٠٢:١٥ ٠٠:٥٠ بقى سعيد خارج البيت ٥٠ دقيقة.	اكتب عملية الطرح بطريقة رأسية. لا يمكن طرح ١٥ دقيقة من ٠٥ دقيقة، لذا فكّك ساعة واحدة إلى ٦٠ دقيقة، ثم أضف ٦٠ إلى الدقائق. اطرح الدقائق من الدقائق والساعات من الساعات.

الطريقة (٢):

سارة: ٢ ساعة و٥٠ دقيقة − ٢ ساعة و١٥ دقيقة = ٠ ساعة و٣٥ دقيقة. ٢ ساعة − ٢ ساعة = ٠ ساعة ٥٠ دقيقة − ١٥ دقيقة = ٣٥ دقيقة بقيت سارة خارج البيت ٣٥ دقيقة.	فكّر: كم ساعة وكم دقيقة لديك. ٢:٥٠ مساءً هي نفسها ٢ ساعة و٥٠ دقيقة بعد الساعة ١٢ ظهرًا. كما أن ٢:١٥ مساءً هي نفسها ٢ ساعة و١٥ دقيقة بعد الساعة ١٢ ظهرًا. اطرح الساعات، ثم اطرح الدقائق.

تذكَّر دائمًا أن الزمن يُكتب بالساعة والدقيقة، وأن الساعة ٦٠ دقيقة. وهذا الأمر مُهِمّ جدًّا عند احتساب الزمن، لأنك بإدخال ١,٥ ساعة على آلتك الحاسبة، ستفترض الحاسبة أن العدد عشري، وتتعامل مع أجزاء الـ ١٠٠، وليس مع أجزاء الـ٦٠. لذا يجب أن تتعامل مع الساعات والدقائق بصورة منفصلة.

لا يمكنك طرح ١٥ دقيقة من ٥ دقائق في السياق الزمني (لعدم وجود زمن سالب) لذلك عليك أن تحوّل ساعة واحدة إلى الدقائق. وبناء على ذلك تصبح كتابة ٣ ساعات و٥ دقائق في صورة ٢ ساعة و٦٥ دقيقة

سعيد: ٣ ساعات و ٥ دقائق = ٢ ساعة و ٦٥ دقيقة. ٢ ساعة و ٦٥ دقيقة – ٢ ساعة و ١٥ دقيقة = ٠ ساعة و ٥٠ دقيقة بقي سعيد خارج البيت ٥٠ دقيقة.	٣:٠٥ مساءً هي نفسها ٢ ساعة و ٦٥ دقيقة بعد الساعة ١٢ ظهرًا؛ قم بإجراء عملية الطرح كما في السابق. لاحظ أن كلا التوقيتَين بعد الظهر.

مثـــال ٢

غادر قطار محطّة ما عند الساعة ٠٥:٣٥ ووصل المحطّة التالية عند الساعة ١٨:٢٠. ما الزمن الذي استغرقته الرحلة بين المحطّتَين؟

الحـــلّ:

الطريقة (١):

١٨:٢٠ تُكافِئ ١٧ ساعة و ٨٠ دقيقة بعد الساعة ١٢ صباحًا.	لا يمكن إيجاد ناتج ٢٠ – ٣٥ في السياق الزمني، لذلك عليك أن تُحوِّل ساعة واحدة إلى دقائق لتحصل على ١٧ ساعة و ٨٠ دقيقة.
١٧ ساعة – ٥ ساعات = ١٢ ساعة ٨٠ دقيقة – ٣٥ دقيقة = ٤٥ دقيقة استغرقت الرحلة ١٢ ساعة و ٤٥ دقيقة.	يمكنك الآن أن تطرح وقت وصول القطار من وقت مغادرته لتحصل على الزمن المستغرق في الرحلة (طرح الساعات، ثم طرح الدقائق). اكتب الساعات والدقائق معًا.

الطريقة (٢):

هناك ٢٥ دقيقة بين الساعة ٠٥:٣٥ والساعة ٠٦:٠٠	هناك طريقة بديلة لحلّ المسألة تتمثَّل بتكملة العد. ما عدد الدقائق للوصول إلى الساعة الكاملة التالية؟ ٢٥ دقيقة.
هناك ١٢ ساعة و ٢٠ دقيقة للانتقال من الساعة ٠٦:٠٠ إلى الساعة ١٨:٢٠	عملية الحل الآن سهلة.
٢٥ دقيقة + ١٢ ساعة و ٢٠ دقيقة تُعطي ١٢ ساعة و ٤٥ دقيقة.	اجمع الإجابتَين معًا. تحقَّق من أن عدد الدقائق أقلّ من ٦٠

لاحظ أيضًا أنك لا تستطيع إيجاد الناتج بإجراء عملية الطرح ١٨,٢٠ – ٠٥,٣٥ لأن حسابات الزمن لا تتبع النظام العشري، حيث أنه يوجد ٦٠ دقيقة وليس ١٠٠ دقيقة في الساعة الواحدة.

يُفضَّل استخدام طريقتَي المثالَين (١) و (٢)، عندما تتعامل مع الوقت في اليوم نفسه. ولكن ما الذي سيحدث عندما يتخطّى الوقت اليوم الواحد؟

مثـــال ٣

ما الزمن المُستغرَق بين الساعة ١٩:٣٥ يوم الاثنين، والساعة ٠٣:٥٥ يوم الثلاثاء؟

الحـــلّ:

هناك جُزءان للحل النهائي: الجزء الأول من ١٩:٣٥ إلى ٠٠:٠٠، والجزء الثاني من ٠٠:٠٠ إلى ٠٣:٥٥	تكمن أسهل طريقة للتعامُل مع المسألة في تقسيم الزمن إلى أجزاء. يمكن التفكير في منتصف الليل على أنه ٠٠:٠٠ أو ٢٤:٠٠.
الجزء الأول: من ١٩:٣٥ إلى ٠٠:٠٠ ٢٤ ساعة = ٢٣ ساعة و ٦٠ دقيقة (بعد الساعة ١٢ صباحًا) ٢٣ ساعة و ٦٠ دقيقة – ١٩ ساعة و٣٥ دقيقة = ٤ ساعات و٢٥ دقيقة.	لا يمكن إيجاد ناتج ٠٠ – ٣٥ في سياق الزمن. لذا حوّل ساعة واحدة من ٠٠:٠٠ إلى دقائق لتصبح ٢٣ ساعة و ٦٠ دقيقة. ثمّ قم بإجراء عملية الطرح (اطرح الساعات، ثمّ اطرح الدقائق).
الجزء الثاني: من ٠٠:٠٠ إلى ٠٣:٥٥ ٣ ساعات و٥٥ دقيقة – ٠ ساعة و ٠ دقيقة = ٣ ساعات و٥٥ دقيقة	٠٣:٥٥ هي ٣ ساعات و٥٥ دقيقة بعد الساعة ١٢ صباحًا. (أو ٠٠:٠٠) وهذا الفرق ببساطة هو ٣ ساعات و٥٥ دقيقة.
٤ ساعات و٢٥ دقيقة + ٣ ساعات و٥٥ دقيقة = ٧ ساعات و ٨٠ دقيقة. ٨٠ دقيقة = ١ ساعة و ٢٠ دقيقة ٧ ساعات و ٠ دقيقة + ١ ساعة و ٢٠ دقيقة = ٨ ساعات و ٢٠ دقيقة. يكون قد انقضى من الزمن ٨ ساعات و ٢٠ دقيقة	اجمع ناتجَي الجزأين معًا. حوّل ٨٠ دقيقة إلى ساعات ودقائق. اجمع الناتجَين معًا.

تمارين ١٣-١-أ

١) بدأ كمال سباق الجري عند الساعة ٠٩:٢٥ صباحًا، وانتهى عند الساعة ٠١:٠٤ مساءً.
ما الزمن الذي استغرقه كمال في سباق الجري؟ اكتب إجابتك بالساعات والدقائق.

عند التعامل مع مسائل الزمن، اعتمد ما هو مطلوب وما العمليات الحسابية التي تحتاج إليها للإجابة عن السؤال.

٢) لدى نايف جهاز تلفاز يعرض الوقت باستخدام نظام الـ ٢٤ ساعة، أراد أن يبرمج الجهاز ليُسجِّل بعض البرامج. اكتب زمن بداية الضبط وزمن نهايته لكلّ من الفترات الزمنية التالية:

أ من الساعة ١٠:٣٠ مساءً إلى الساعة ١١:٣٠ مساءً.

ب من الساعة ٠٩:١٥ صباحًا إلى الساعة ١٠:٤٥ صباحًا

ج من الساعة ٠٧:٤٥ مساءً إلى الساعة ٠٩:١٠ مساءً.

٣) سجّلت مريم ٣ قصائد على هاتفها، وكان زمن كلّ قصيدة بالترتيب ثلاث دقائق و٢٦ ثانية، ثلاث دقائق و١٩ ثانية، دقيقتان و٥٨ ثانية، وتركت فراغًا مُدَّته ثانيتان بين القصيدة والأخرى. ما الزمن الذي استغرقه التسجيل؟

٤) بدأت إحدى الحافلات رحلتها عند الساعة ١٧:٣٠ يوم الجمعة، في السابع من فبراير، وانتهت بعد ٥٧ ساعة. اكتب الوقت واليوم والتاريخ الذي انتهت فيه الرحلة.

٥) يوضِّح الجدول التالي برنامج العمل الأسبوعي لسامي في المكتبة، علمًا بأن استراحة الغداء لا تُحتَسب من المجموع الكلّي لأوقات العمل:

اليوم	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
بداية العمل	٨:٢٠	٨:٢٠	٨:٢٠	٨:٢٢	٨:٢١
الغداء	١٢:٠٠	١٢:٠٠	١٢:٣٠	١٢:٠٠	١٢:٣٠
العودة إلى العمل	١٢:٤٥	١٢:٤٥	١:١٥	١٢:٤٥	١:١٥
نهاية العمل	٥:٠٠	٥:٠٠	٤:٣٠	٥:٠٠	٥:٣٠
المجموع الكلّي لزمن العمل					

أ أكمل الصف الأخير في برنامج العمل.

ب كم ساعة عمل سامي هذا الأسبوع؟

ج إذا كان سامي يتقاضى ٢,٥ ريال عُماني في الساعة، فكم ريالاً عُمانيًّا سيتقاضى في نهاية هذا الأسبوع؟

١٣-١-ب قراءة الجداول الزمنية

تُصمَّم معظم جداول السفر الزمنية في صورة جداول باستخدام نظام توقيت الـ ٢٤ ساعة للتعبير عن الوقت، بحيث يُمثِّل كل عمود الفترات الزمنية لكل رحلة.

إليك المثال الآتي:

المدينة / مواعيد انطلاق الحافلات	يوميًا ما عدا الجمعة	يوميًا	يوميًا	يوميًا	السبت فقط	يوميًا	يوميًا ما عدا الجمعة
(س)	٠٦:٣٠	٠٧:٤٥	١٢:٠٠	١٦:٣٠	١٧:١٥	١٨:٠٠	٢٠:٣٠
(ص)	٠٦:٥٠	٠٨:٠٥	١٢:٢٥	١٦:٥٠	١٧:٣٥	١٨:٢٥	٢٠:٥٠
(ع)	٠٧:٢٥	٠٨:٤٠	١٣:١٥	١٧:٢٥	١٨:١٥	١٩:٠٥	٢١:٢٥

يُبيِّن العمود الأول، مثلاً: أن الحافلة تُغادِر المدينة (س) عند الساعة ٠٦:٣٠ يوميًّا ما عدا يوم الجمعة (ستَّة أيام في الأسبوع)، وتصل إلى المدينة (ص) عند الساعة ٠٦:٥٠، ثمّ تصل إلى المدينة (ع) عند الساعة ٠٧:٢٥

مثــال ٤

إليك جزء من الجدول الزمني لمواعيد انطلاق الحافلات:

المدينة (أ)	٠٦:٣٠	٠٧:٠٠	٠٧:٣٠	وهكذا كل ٣٠ دقيقة حتى	١٧:٣٠	١٨:٠٠
المدينة (ب)	٠٦:٤٦	٠٧:١٦	٠٧:٤٦		١٧:٤٦	١٨:١٦
المدينة (ج)	٠٧:٠٨	٠٧:٣٨	٠٨:٠٨		١٨:٠٨	١٨:٣٨

أ يرغب خالد في الانتقال من المدينة (أ) إلى المدينة (ج) في نفس اليوم. وصل إلى محطَّة الحافلات عند الساعة ١١:٥٠. كم يجب أن ينتظر ليركب الحافلة؟

ب كم تستغرق الحافلة التي تُغادِر المدينة (ب) عند الساعة ٠٦:٤٦ لتصل إلى المدينة (ج)؟

ج كم تستغرق الحافلة التي تُغادِر المدينة (ب) عند الساعة ١٧:٤٦ لتصل إلى المدينة (ج)؟

د وصلت أمل إلى محطَّة حافلات المدينة (أ) عند الساعة ١٥:٠٨. في أي ساعة ستصل إلى المدينة (ج) إذا رغبت في الوصول في نفس اليوم؟

هـ وصل سيف إلى محطَّة حافلات المدينة (ب) عند الساعة ١٠:٣٥. ما الزمن الذي يستغرقه ليصل إلى المدينة (ج) إذا رغب في الوصول في نفس اليوم؟

الحـــلّ:

أ	تنطلق الحافلة التالية عند الساعة ١٢:٠٠، ينتظر خالد ١٠ دقائق.	تنطلق الحافلة كل ٣٠ دقيقة، لذا تتوافر حافلة في كل توقيت ينتهي بـ ٠٠ و٣٠، بين ٦:٣٠ و١٨:٠٠
ب	من الساعة ٠٦:٤٦ إلى الساعة ٠٧:٠٨ من ٠٦:٤٦ إلى ٠٧:٠٠ هناك ١٤ دقيقة. من ٠٧:٠٠ إلى ٠٧:٠٨ هناك ٨ دقائق. يصبح المجموع ٢٢ دقيقة.	باستخدام تكملة العد كما في المثال (٢) أو مباشرة بالطرح ٠٧:٠٨ − ٠٦:٤٦ = ٠٦:٦٨ − ٠٦:٤٦ = ٢٢ دقيقة
ج	من الساعة ١٧:٤٦ إلى الساعة ١٨:٠٨ يوجد ٢٢ دقيقة ١٧:٤٦ حتى ١٨:٠٠ هي ١٤ دقيقة. ١٨:٠٠ حتى ١٨:٠٨ هي ٨ دقائق.	باستخدام نفس الطريقة في الجُزئية (ب).
د	ستنطلق الحافلة التالية عند الساعة ١٥:٣٠، وتصل إلى المدينة (ج) عند الساعة ١٦:٠٨	باستخدام الجدول، تستغرق المسافة من المدينة (أ) إلى المدينة (ج) ٣٨ دقيقة.
هـ	بعد ١٠:٣٥، ستنطلق الحافلة التالية من المدينة (ب) عند الساعة ١٠:٤٦ وستصل إلى المدينة (ج) عند الساعة ١١:٠٨ من ١٠:٣٥ إلى ١١:٠٠ هناك ٢٥ دقيقة. من ١١:٠٠ إلى ١١:٠٨ هناك ٨ دقائق يصبح المجموع ٣٣ دقيقة.	المطلوب هنا أمر مختلف عن المطلوب في السؤال السابق.

تمارين ١٣-١-ب

طبِّق مهاراتك

يمكن كتابة الوقت بعد الساعة ١٢ صباحًا باستخدام نظام الـ ١٢ ساعة، وذلك بإضافة كلمة "مساءً" لأوقات المساء (بعد الظهر)، أو باستخدام نظام الـ ٢٤ ساعة، وذلك بمواصلة العد لنصل إلى الساعة ٢٣:٥٩ ثم الساعة ٠٠:٠٠

مثلاً، يمكن التعبير عن الساعة الواحدة بعد الظهر إما في صورة ١:٠٠ مساءً أو ١٣:٠٠.

للتحويل من نظام الـ ١٢ ساعة إلى نظام الـ ٢٤ ساعة، أضف ١٢ إلى الأوقات المسائية (بعد الظهر). مثلاً: يمكن التعبير عن الساعة ٧ مساءً في صورة ١٩:٠٠ (٧ + ١٢ = ١٩).

للتحويل من نظام الـ ٢٤ ساعة إلى نظام الـ ١٢ ساعة، يمكنك طرح ١٢. مثلاً: يمكن التعبير عن ١٥:٠٠ في صورة ٣:٠٠ مساءً (١٥ − ١٢ = ٣).

١) يُبيّن الجدول الزمني الآتي الفترة المسائية لانطلاق الحافلات بين المحطّات (أ)،(ب)،(ج)،(د):

المحطة	مواعيد انطلاق الحافلة				
(أ)	١٨:٢٩	١٩:٠٢	١٩:٣٢	٢٠:٠٢	٢١:٠٤
(ب)	١٨:٤٠	١٩:١٣	١٩:٤٣	٢٠:١٣	٢١:١٥
(ج)	١٩:٠١	١٩:٣١	٢٠:٠١	٢٠:٣١	٢١:٣٣
(د)	١٩:١٧	١٩:٤٧	٢٠:١٧	٢٠:٤٧	٢١:٤٩

أ ترغب سميرة أن تركب الحافلة من المحطّة (أ) لتصل إلى المحطّة (ج) عند الساعة ٨:٤٥ مساءً. ما توقيت آخر حافلة يمكن أن تُقلّها؟

ب احسب الزمن اللازم للحافلة التي تنطلق عند الساعة ١٩:٠٢ من المحطّة (أ) لتصل إلى المحطّة (د).

ج وصل محمد إلى المحطّة (ب) عند الساعة ٦:٥٠ مساءً، كم سينتظر لتقلّه الحافلة التالية إلى المحطّة (د)؟

٢) يُبيّن الجدول الزمني الآتي خدمة الحافلات بين المدن (أ)، (ب)، (ج)، (د):

(أ)	١٠:٣٠	١٠:٥٠	وهكذا كل ٢٠ دقيقة حتّى	١٨:٥٠
(ب)	١١:٠٥	١١:٢٥		١٩:٢٥
(ج)	١١:١٩	١١:٣٩		١٩:٣٩
(د)	١١:٣٧	١١:٥٧		١٩:٥٧

أ كم دقيقة تستغرق رحلة الحافلة من المدينة (أ) إلى المدينة (د)؟

ب اكتب الجدول الزمني للحافلة الأولى التي تنطلق من المدينة (أ) بعد الحافلة التي تنطلق عند الساعة ١٠:٥٠.

ج وصل عامر إلى محطّة حافلات المدينة (ب) عند الساعة ٠٢:١٥ مساءً. عند أي ساعة ستنطلق الحافلة التالية إلى المدينة (د)؟

٣) يُبيّن الجدول الآتي الفترة الزمنية للمدّ والجزر على مدى أسبوعَيْن:

فبراير	المدّ		الجزر	
	بداية	نهاية	بداية	نهاية
١ الأربعاء	٠٠:١٥	١٢:١٣	٠٥:١٨	١٨:٠٠
٢ الخميس	٠٠:١٧	١٢:٥٧	٠٦:١٤	١٨:٤٩
٣ الجمعة	٠١:٠٩	١٣:٣٢	٠٧:٠٠	١٩:٣٠
٤ السبت	٠١:٥٢	١٤:٠٤	٠٧:٤٠	٢٠:٠٤
٥ الأحد	٠٢:٢٩	١٤:٣٤	٠٨:١٥	٢٠:٣٨
٦ الاثنين	٠٣:٠٣	١٥:٠٥	٠٨:٤٨	٢١:١١
٧ الثلاثاء	٠٣:٣٦	١٥:٣٧	٠٩:٢٢	٢١:٤٣
٨ الأربعاء	٠٤:١١	١٦:١٠	٠٩:٥٧	٢٢:١٥
٩ الخميس	٠٤:٤٨	١٦:٤٤	١٠:٣٠	٢٢:٤٥
١٠ الجمعة	٠٥:٢٨	١٧:١٨	١١:٠٤	٢٣:١٦
١١ السبت	٠٦:١٤	١٧:٥٧	١١:٤٠	٢٣:٥٤
١٢ الأحد	٠٧:٠٦	١٨:٤٥	٠٠:١٧	١٢:٢٢
١٣ الاثنين	٠٨:٠٨	١٩:٤٨	٠٠:٤١	١٣:١٥
١٤ الثلاثاء	٠٩:١٧	٢١:١١	٠١:٤١	١٤:٢٥

أ متى حدث أول مدّ خلال الأسبوعين؟

ب ما الزمن الذي استغرقه المدّ في اليوم الثاني؟

ج ما الفترة الزمنية بين بداية المدّ وبداية الجزر في اليوم السابع؟

د يركب ماجد قاربه الشراعي لمدّة ساعة قبل حدوث المدّ:

(١) ما الوقت الذي سيركب ماجد فيه القارب الشراعي يوم الأحد في الخامس من فبراير؟

(٢) فسّر لماذا من غير المُستحسَن القيام بذلك عند الساعة ٠١:٢٩

هـ لدى مالك قارب صيد:

(١) إذا حدث الجزر بين الساعة ٥ صباحًا و١١ صباحًا، لا يستطيع المغادرة صباحًا. ما الأيام التي يحدث فيها ذلك؟

(٢) يأخذ مالك القارب مساءً إذا وقع المدّ بين الساعة ١١ صباحًا و٢:٣٠ مساءً. في أيّ يوم يستطيع أن يُبحر في القارب؟

١٣-١-ج حساب الزمن باستخدام الآلة الحاسبة

تحتوي كثير من الآلات الحاسبة على مفتاح لتنفيذ الحسابات التي تتضمَّن الزمن. يشبه المفتاح الشكل الآتي: °′″

تحتاج إلى أن تنقر هذا المفتاح بعد كلّ عدد تدخله، بحيث يكون العدد الأوَّل الذي تدخله في الآلة الحاسبة هو الساعات، ثم الدقائق، ثم الثواني (يمكنك أن لا تدخل الثواني إذا رغبت في ذلك)، يمكنك أيضًا استخدام هذا المفتاح لتُجري عمليّات الجمع والطرح والضرب والقسمة على الزمن.

مثــال ٥

أ أكمل عمّار الجزء الأول من سباق الجري في ١ ساعة و ٤٥ دقيقة و ٢٢ ثانية، وهو يحتاج إلى ١ ساعة و٥٢ دقيقة و٤٧ ثانية لإكمال الجزء الثاني من السباق. ما الزمن الذي سيستغرقه لإكمال جُزأي السباق معًا؟

ب تغادر حافلة ما المحطَّة عند الساعة ١٥:٥٠، وتستغرق الرحلة ٢٧ دقيقة. متى ستصل الحافلة إلى وجهتها؟

الحــلّ:

أ انقر:

1 °′″ 45 °′″ 22 °′″ + 1 °′″ 52 °′″ 47 °′″ =

ستعرض الشاشة: $3°38'9''$

يعني ذلك أن عمّار سيستغرق ٣ ساعات و٣٨ دقيقة و ٩ ثوانٍ لإكمال جُزأي السباق معًا.

(هذه المفاتيح شائعة الآن في الآلات الحاسبة العلمية، ولكنها قد تختلف في بعض أنواع الآلات الحاسبة. راجع دليل آلتك الحاسبة بدقَّة لمعرفة كيفية عملها)

اكتب ١ ساعة و٤٥ دقيقة و٢٢ ثانية على آلتك الحاسبة، ثمّ أضف إليها ١ ساعة و٥٢ دقيقة و٤٧ ثانية.

ب يمكنك جمع العددَين:

١٥ ساعة و ٥٠ دقيقة + ٠ ساعة و٢٧ دقيقة

15 °′″ 50 °′″ + 0 °′″ 27 °′″ =

ستعرض الشاشة: $16°17'0''$

وهذا يعني أن الحافلة ستصل إلى وجهتها عند الساعة ١٦:١٧

هنا لم تُذكَر الثواني. لذا يمكنك أن تترك العدد الثالث.

أمور يجب الانتباه لها:

- يمكنك عدم كتابة الثواني إذا لم تكن معطاة، لكن الناتج على الآلة الحاسبة سيظهر في صورة (″0)، ولكن لا تكتب هذا الجزء عند تسجيلك للإجابة.
- عليك نقر المفتاح °’” بعد كل عدد في التوقيت، ولا تنسَ نقر هذا المفتاح عند إدخال آخر جزء من العدد (الدقائق أو الثواني).
- الآلة الحاسبة غير مبرمجة على نظام توقيت الـ٢٤ ساعة، فإذا كتبت ١٥ ساعة + ٢١ ساعة، سوف تظهر النتيجة في صورة ٣٦ ساعة، وليس ١ يومًا و ١٢ ساعة.
- إذا لم يكن هناك عدد لتمثيل الساعة، اكتب ٠ ساعة فنحن في المثال ٥ أدخلنا ٢٧ دقيقة في صورة 0 °’” 27 °’”
- إذا أعطت آلتك الحاسبة الإجابة مع عدد صغير من الدقائق (أقلّ من ٦٠)، فإنك تحتاج إلى أن تضع صفر ساعة ليصبح لها معنى.

مثــال ٦

أ قدّر عامل طلاء أنه يحتاج إلى ٤ ساعات ونصف الساعة لطلاء غرفة. ولكنّه أنهى العمل في ساعتين وثلاثة أرباع الساعة. ما الزمن الذي وفّره؟

ب تصل إحدى الحافلات عند الساعة ١١:١٩، بعد رحلة تستغرق ١ ساعة و ١٣ دقيقة. في أي ساعة غادرت الحافلة؟

الحــلّ:

أ انقر: = °’” 45 °’” 2 − °’” 30 °’” 4 ستعرض الشاشة: ″0′45°1 الإجابة هي ١ ساعة و ٤٥ دقيقة.	اكتب ٤ ساعات و ٣٠ دقيقة على آلتك الحاسبة، ثمّ اطرح منها ٢ ساعة و ٤٥ دقيقة. أهمل صفر ثوانٍ عندما تكتب إجابتك.
ب ١١ ساعة و ١٩ دقيقة − ١ ساعة و ١٣ دقيقة. انقر: = °’” 13 °’” 1 − °’” 19 °’” 11 ستعرض الشاشة: ″0′6°10 الإجابة هي ١٠:٠٦	يمكنك أن تطرح زمن الرحلة من وقت الوصول: هنا ٦ تدلّ على عدد الدقائق، لذلك سيكون الوقت ١٠ساعات و ٦ دقائق. وتُكتب الإجابة في صورة ١٠:٠٦، واكتب صفرًا قبل العدد ٦

مثـــال ٧

أ يُعطي مدرّس كرة السلَّة دروسًا مُدَّة كل منها ٢٥ دقيقة. ما الزمن الذي يستغرقه لإعطاء ٥ دروس؟

ب يتعامل سائس مع ١٠ أحصنة لمدّة ٨ ساعات طول فترة عمله اليومية. احسب الزمن الذي سيقضيه مع كلّ حصان؟

الحـــلّ:

أ انقر: 0 °′″ 25 °′″ × 5 = ستعرض الشاشة: 2°5′0″ الإجابة هي ٢ ساعة و ٥ دقائق.	اكتب ٠ ساعة و ٢٥ دقيقة على آلتك الحاسبة، واضرب في ٥ لاحظ أن (٥) ليست زمنًا، لذلك يجب ألاّ تنقر المفتاح °′″ بعد كتابته.
ب ٨ ساعات ÷ ١٠ انقر: 8 °′″ ÷ 10 = ستعرض الشاشة: 0°48′0″ الإجابة هي ٤٨ دقيقة.	لاحظ أن ١٠ ليست زمنًا، لذا يجب ألاّ تنقر المفتاح °′″.

تمارين ١٣-١-ج

١) قاد إبراهيم سيّارته قاصدًا منزل والدَيه مُدَّة ٢ساعة و٤٢ دقيقة قبل أن يتوقَّف عند محطَّة وقود، ثم قاد السيّارة مُدَّة ١ ساعة و ٢٩ دقيقة، إلى أن وصل إلى منزل والدَيه. كم من الزمن قاد إبراهيم السيّارة طوال رحلته؟

٢) أ تُغادِر حافلة ما عند الساعة ١٠:٠٧ في رحلة تستغرق ٤٥ دقيقة. متى ستصل الحافلة؟

ب تُغادِر الحافلة التالية عند الساعة ١٠:٢٧ في رحلة تستغرق أيضًا ٤٥ دقيقة. في أي وقت ستصل الحافلة الثانية؟

٣) يتوقَّع سامي أن تستغرق رحلته ٢ $\frac{٣}{٤}$ ساعة، لكنّها في الواقع استغرقت ٤ ساعات و١٠ دقائق. بكم يزيد الزمن الحقيقي على الزمن المُتوقَّع؟

٤) قدّر عدّاء أنَّه سيقطع مسافة ٥ كم في ١٨ دقيقة و٢٥ ثانية، ولكنه في الواقع قطع المسافة في ١٦ دقيقة و٤٣ ثانية. أوجد الفرق بين الزمن الذي توقَّعه العدّاء والزمن الحقيقي.

٥) أ وصلت حافلة ما عند الساعة ١٢:٢٥ بعد رحلة مُدَّتها ١ساعة و٧ دقائق. في أي وقت انطلقت الحافلة؟

ب وصلت حافلة أخرى عند الساعة ١٣:٠٥ بعد رحلة مُدَّتها ٢ساعة و١٦ دقيقة. في أي وقت انطلقت الحافلة؟

٦) تحتاج مُصففِّة شعر إلى ٤٠ دقيقة لكلّ قصَّة شعر. كم طلبًا يمكنها أن تحجز خلال ٦ ساعات؟

٧) يتدرَّب عدّاء على الجري ويقطع كلّ دورة في ٨٠ ثانية. ما الزمن الذي سيستغرقه لقطع ١٠ دورات بنفس السرعة؟

٨) يتدرّب عدّاء خلال فترات زمنية مختلفة، ففي الفترة الأولى، يركض بسرعة كبيرة لمُدَّة دقيقة واحدة أما في الفترة الثانية، فيركض ببطء لمُدَّة دقيقة ونصف. ما الزمن الذي يستغرقه إذا تدرّب بهذه الطريقة ١٦ مرَّة؟

١٣-٢ المُعدَّلات

المُعدَّل هو مُقارَنة بين كمّيَّتَين مُختلفتَين، ويُعطى عادة في صورة علاقة إحدى الكمّيَّتَين بوحدة واحدة من الكمّيَّة الأخرى، مثلاً: ٧٥٠ مل في كلّ زجاجة، أو ٦٠ كم/ساعة، والمعنى الحقيقي لكل من هذَين المُعدَّلين هو: عدد المليلترات في الزجاجة الواحدة وعدد الكيلومترات المقطوعة في ساعة واحدة، ونلاحظ أنه يجب إعطاء وحدتَي قياس الكمّيَّتَين.

مثال ٨

يعيش ٤٩٢ شخصًا في مساحة مقدارها ١٢ كم^2. عبّر عن ذلك في صورة مُعدَّل في أبسط صورة.

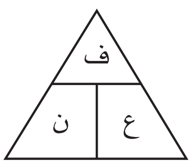
الحلّ:

٤٩٢ شخصًا في ١٢ كم^2	
= $\frac{٤٩٢}{١٢}$ شخص في كل كم^2	اقسم على ١٢ لتحصل على عدد الأشخاص في الكيلومتر المربّع الواحد.
= ٤١ شخص/ كم^2	اكتب وحدات القياس.

السرعة المُتوسِّطة

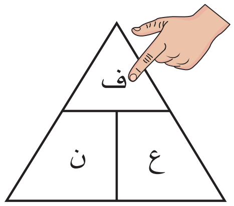
السرعة المُتوسِّطة (كم/ساعة) هي أحد أكثر المُعدَّلات استخدامًا.

استخدم مُثلَّث المسافة (ف)، والزمن (ن)، والسرعة (ع) (المُبيَّن في الشكل المجاور) لحلّ المسائل المرتبطة بالمسافة أو الزمن أو السرعة.

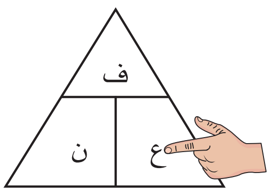


المُعدَّل الذي يُكتب على النحو الآتي: كم/ساعة يُكتب أحيانًا: كم في كل ساعة.

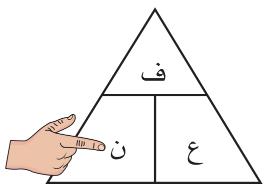
إذا حجبت الحرف (ف) للكمّية التي تريد أن تجدها، يعطيك الحرفان المُتبقِّيان في المُثلَّث، الحسابات التي تحتاج إلى إجرائها (الضرب أو القسمة). مثلاً:



ف = ع × ن



ع = $\frac{ف}{ن}$



ن = $\frac{ف}{ع}$

رابط

يتعامل جهاز التمريض وطواقم الدعم الطبيَّة الأخرى مع المُعدَّلات عندما يحسبون جرعات الأدوية، وعندما يُجرون التحويل بين وحدات القياس ويضبطون محلول التغذية الخاصّ بمرضاهم ليُزوِّدوهم بالكمّية الصحيحة من الدواء السائل في كل ساعة.

مثـــال ٩

تقطع حافلة ما مسافة ٢١٠ كم في ثلاث ساعات. ما سرعتها الُمتوسِّطة في كم/ساعة؟

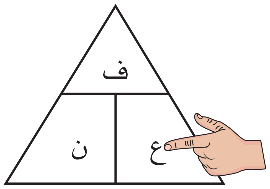
الحــلّ:

$ع = \frac{ف}{ن}$

ف = ٢١٠ كم، ن = ٣ ساعات

$\therefore ع = \frac{٢١٠}{٣} = ٧٠$ كم/ ساعة

السرعة المُتوسِّطة للحافلة هي ٧٠ كم/ ساعة.



مثـــال ١٠

يسير أحمد بسرعة ٤,٥ كم/ساعة. ما المسافة التي يقطعها في $٢\frac{١}{٢}$ ساعة بنفس السرعة؟

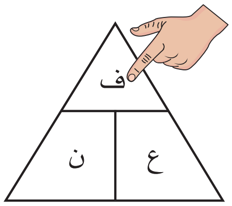
الحــلّ:

ف = ع × ن

ع = ٤,٥ كم/ساعة، ن = ٢,٥ ساعة

$\therefore$ ف = ٤,٥ × ٢,٥ = ١١,٢٥ كم

يقطع أحمد مسافة ١١,٢٥ كم.



مثـــال ١١

ما الزمن اللازم لقطع مسافة ٢٠٠ كم بسرعة ٨٠ كم/ساعة بنفس السرعة؟

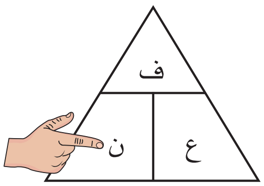
الحــلّ:

$ن = \frac{ف}{ع}$

ف = ٢٠٠ كم، ع = ٨٠ كم/ ساعة

$\therefore ن = \frac{٢٠٠}{٨٠} = ٢,٥$ ساعة

سيكون الزمن اللازم $٢\frac{١}{٢}$ ساعة



تمارين ١٣-٢

طبِّق مهاراتك

١) عبّر عن كلّ من العلاقات الآتية في صورة مُعدَّل في أبسط صورة:

أ ١٢ كغم لكل ٥ ريالات عمانيَّة.

ب ١٢٠ لترًا لكل ١٠٠٠ كم.

ج ٣١٥ ريالاً عُمانيًّا مقابل الإقامة ٣ ليالٍ في أحد الفنادق.

د ٥ كم في ٢٠ دقيقة.

هـ ١٣٥ طالبًا لكل خمسة مُعلّمين.

و ١٥ ساعة عمل لإنجاز ٥ حُفر.

٢) ينتج مصنع ألبان ١٢٠٠ لتر من الحليب في الساعة. ما كمّية الحليب التي ينتجها في:

أ فترةٍ مدَّتها ٨ ساعات؟ ب في خمْس فترات مدَّة كل منها ٨ ساعات؟

٣) يتسرَّب الماء من أنبوبة مياه بمُعدَّل ٥ل/ساعة. ما كمّية الماء التي تتسرَّب من الأنبوبة في:

أ يوم واحد؟ ب أسبوع واحد؟

٤) تملأ الآلة علب العصائر بمُعدَّل ١٣٥ علبة في الدقيقة. كم من الزمن يلزمها لتملأ ١٠٠٠ علبة بنفس المُعدَّل؟

٥) يقطع رياض مسافة ٤,٢٥ كم/ساعة. ما المسافة التي يقطعها في ٣ ساعات؟

٦) ما المسافة التي يقطعها قطار يسير بسرعة ٢٣٠ كم/ساعة في:

أ $٣\frac{١}{٢}$ ساعة؟ ب ٢٠ دقيقة؟

٧) تُحلِّق طائرة بسرعة مُتوسِّطة مقدارها ٧٥٠ كم/ساعة. ما المسافة التي تقطعها في:

أ ٢٥ دقيقة؟ ب أربع ساعات؟

٨) انطلقت طائرة من المدينة (أ) عند الساعة ٩ مساءً وقطعت مسافة ٦٤٠٠ كم لتصل المدينة (ب) عند الساعة ٥ صباحًا. ما السرعة المُتوسِّطة للطائرة؟

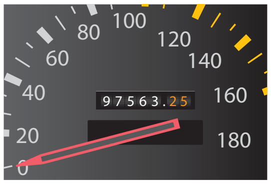
٩) يُكمل عدّاء جري مسافة ٤٢ كم في ساعتَين و١٥ دقيقة. ما السرعة المُتوسِّطة للعدّاء؟

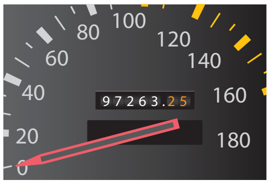
١٠) في أغسطس ٢٠٠٩، سجّل الدرّاج العُماني الدكتور عمر بن هلال المعمري رقمًا قياسيًّا في قيادة الدرّاجات وأصبح أوَّل عُماني يدخل موسوعة جينيس للأرقام القياسية، حيث قطع مسافة ٢١٢٧ كيلومترًا في ٢٤ ساعة.

أ احسب معدّل سرعة الدرّاج بـ كم/ساعة.

ب كم الزمن الذي سيستغرقه ليقطع مسافة ٢٨٣٦ كم بنفس السرعة؟

١١) يُبيّن عدّاد المسافة في سيّارة يحيى المسافة المقطوعة بالكيلومترات، والشكل التالي يوضّح قراءة العدّاد قبل الرحلة وبعدها:





أ ما المسافة التي قطعها يحيى بالسيارة؟

ب إذا استغرقت رحلة يحيى $٢\frac{١}{٢}$ ساعة، فكم كانت سرعته المُتوسِّطة؟

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإجراء عمليات حسابية مُتعلِّقة بالزمن من خلال المفتاح ° ′ ″ .
- المُعدَّل هو مُقارنة بين كمّيَّتَين مُختلفتَين.
- يُعطي المُعدَّل عادة مقدار إحدى الكمّيَّتَين لكل وحدة من الكمّية الأخرى.
- يجب أن تتضمَّن المُعدَّلات وحدات قياس الكمّيَّتَين.
- السرعة هي أحد مُعدَّلات التغيُّر الشائعة.
- السرعة = المسافة ÷ الزمن.

يجب أن تكون قادرًا على:

- إجراء الحسابات، وحلّ مسائل مرتبطة بالزمن، يدويًّا وباستخدام الآلة الحاسبة.
- التعبير عن العلاقة بين كمّيَّتَين مُختلفتَين في صورة مُعدَّلات بأبسط صورة.
- حلّ المسائل المُرتبِطة بالمُعدَّلات.

تمارين نهاية الوحدة

١) عبّر عن العلاقات التالية في صورة مُعدَّل في أبسط صورة:

أ ثمن ٥ لترات من العصير هو ٣ ريالات عُمانيَّة.

ب قطف ١٢٠ تفاحّة في ساعتَين ونصف الساعة.

ج استهلك ٣٥٤ لترًا من المياه خلال ٦ أيام.

٢) ينتج مخبز ما ٢٢٠ رغيفًا من الخبز كلّ ٤٥ دقيقة. كم رغيفًا ينتج في ٦ ساعات؟

٣) تستعد حافلة للانطلاق عند الساعة ١٦:٤٠ في رحلة تستغرق ٣ ساعات و٤٥ دقيقة. متى ستصل الحافلة؟

٤) يتدرَّب محمود على الجري لقطع مسافة ١٥ كم، حيث يركض بمُعدَّل ٤ دقائق و٢٥ ثانية لكل كيلومتر. ما الزمن الذي يقضيه محمود في التدريب؟

٥) في سباق الجري (٤٢,٢ كم)، تركض مريم بمُعدَّل ٤ دقائق و١٠ ثوانٍ لكلّ كيلومتر. احسب الزمن الذي ستحتاج إليه مريم لتكمل السباق.

٦) تمشي شيماء مسافة ٥ كم بسرعة ٨ كم في الساعة. ما الزمن الذي تستغرقه شيماء في المشي؟

٧) يسكن عامر في المدينة (أ) ولديه اجتماع في المدينة (ب) يبدأ عند الساعة ١٢:٠٠، حيث يبعد ١٥ دقيقة سيرًا على الأقدام عن محطة حافلات المدينة (ب)، ولكي يتمكَّن عامر من ركوب الحافلة في مدينته، عليه أن يغادر المنزل قبل نصف ساعة من موعد انطلاق الحافلة، إذا كان الجدول الزمني التالي يُبيّن أوقات انتقال الحافلة من المدينة (أ) إلى المدينة (ب):

المدينة (أ)	١٠:٠٥	١٠:١٧	١٠:٣٥	١١:٠٥	١١:١٧	١١:٣٥	١٢:٠٥
المدينة (ب)	١٠:٥٥	١١:١٩	١١:٢٥	١١:٥٥	١٢:١٩	١٢:٢٥	١٢:٥٥

أجب عما يلي:

أ ما توقيت الرحلة التي يجب أن ينطلق بها من المدينة (أ)؟

ب أوجد الزمن بين مغادرته المنزل وبداية الاجتماع.

الوحدة الرابعة عشرة: التمثيل البياني للدوال

المُفردات

- الدالّة Function
- الدالّة التربيعية Quadratic function
- محور التماثُل Axis of symmetry
- نقطة رأس المنحنى Turning point
- قيمة صُغرى Minimum
- قيمة عُظمى Maximum
- خط التقارُب Asymptote
- التقاطُع Intersection

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تُنشىء جدول القيَم لترسم التمثيل البياني للدالّة التربيعية.
- تُنشىء جدوَل القيَم لرسم التمثيل البياني للدالّة التي في صورة ص = $\frac{أ}{س}$.
- تُفسِّر التمثيلات البيانية المُنحنِية.
- تستخدم التمثيل البياني لتجد الحل التقريبي للدوال التربيعية
- تُكوِّن جدوَل القيَم لرسم التمثيل البياني لدوال في صورة ص = أس^{ن}، ص = $\frac{أ}{س}$
- تُميِّز التمثيلات البيانية للدوال المختلفة وتُفسِّرها.

تُشكِّل أقواس الماء في هذه النافورة أشكالاً مُنحنية.

لاحظت في الوحدة السابعة في الفصل الدراسي الأول إمكانيَّة تمثيل كثير من المسائل بدوال خطّيَّة تُمثَّل بيانيًّا بمُستقيمات، كما يمكن حل المسائل الواقعية مثل المساحة، ومسار الأشياء المُتحرِّكة، وأشكال الجسور والأبنية الأخرى، ومُعدَّلات نموّ البكتيريا وتغيُّر السرعة باستخدام مُعادَلات غير خطّيَّة.

في هذه الوحدة، سوف تستخدم جداول القيَم لترسم مجموعة من المُنحنيات البيانية، وسوف تتعلَّم كيف تُفسِّرها، وكيف تجد الحلّ التقريبي للمُعادَلات من تمثيلاتها البيانية.

١٤-١ التمثيل البياني للدوال التربيعية

هناك الكثير من العلاقات في حياتنا العملية تربط بين مُتغيّرَين أو أكثر، كالعلاقة بين ضغط الدم للإنسان العادي وعمره، والعلاقة بين السرعة والمسافة والزمن، وغيرها من العلاقات المختلفة، التي نستدلّ على قيمة أحد المُتغيّرات فيها بمعلومية المُتغيّر الآخر.

رابط

غالبًا ما نرسم تمثيلات بيانية منحنية لتساعدنا على فهم كيفية ارتباط مُتغيِّرَين في الجغرافيا. مثلاً، قد نستطيع رسم مخطَّط، إذا قمنا بتمثيل العلاقة بين تكلفة صيانة مرافق المُتنزَّه وعدد الزوّار كلّ سنة.

الدالة هي علاقة بين متغير تابع (ص) ومتغير مستقل (س)، والدالّة التربيعية من الدوال المُهمّة التي نجدها في المواقف الحياتية والتطبيقات الفيزيائية، فمثلاً:

– طاقة حركة الجسم = $\frac{١}{٢}$ ك $ع^{٢}$، حيث (ك) كتلة الجسم، و(ع) سرعته.

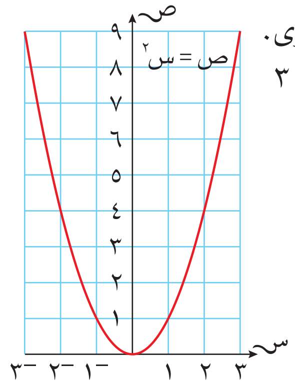
– مساحة المُربَّع = $س^{٢}$، حيث (س) طول ضلع المُربَّع.

وغيرها الكثير من العلاقات التي نسميها بالدالة التربيعية، وبالتالي فإن الصورة العامّة **للدالة التربيعية** هي:

$ص = أس^{٢} + ب س + جـ$، حيث $أ \neq ٠$

فالدوال التربيعية هي دوال تتضمَّن الحد $س^{٢}$ وهو الحد الأكبر قوى.

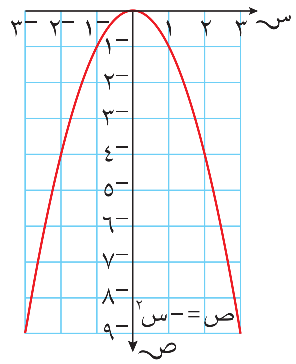
وفيما يلي جدول يُبيِّن القيَم لـ $ص = س^{٢}$ في الفترة $-٣ \leqslant س \leqslant ٣$



س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

يمكنك استخدام هذه النقاط لترسم التمثيل البياني بنفس الطريقة التي قمت بها لتمثيل الدوال الخطّيَّة بيانيًّا.

يُمثِّل الجدول الآتي $ص = -س^{٢}$ في الفترة $-٣ \leqslant س \leqslant ٣$



س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٩-	٤-	١-	٠	١-	٤-	٩-

عندما تُحدِّد مواقع هذه النقاط وترسُم المنحنى، سوف تُلاحظ تأثير إشارة السالب أمام $س^{٢}$ حيث تقلب المنحنى ليصبح مفتوحًا إلى الأسفل.

إذا كان مُعامِل $س^{٢}$ في الدالّة التربيعية موجبًا، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى الأعلى.

وإذا كان مُعامِل $س^{٢}$ في الدالّة التربيعية سالبًا، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى الأسفل.

١٤-١-أ محور التماثُل ونقطة رأس المنحنى

محور التماثُل هو مستقيم يقسم منحنى الدالّة التربيعية إلى نصفَين مُتماثِلَين، وفي التمثيلَين البيانيّين أعلاه، المحور الصادي (س = ٠) هو محور التماثُل.

نقطة رأس المنحنى، أو رأس التمثيل البيانيّ هي النقطة التي يتغيَّر عندها اتِّجاه المنحنى في التمثيل البياني، ونجد في التمثيلَين البيانيَّين أعلاه أنّ نقطة رأس المنحنى هي نقطة الأصل (٠، ٠).

في معظم التمثيلات البيانية، يكون رأس المنحنى **قيمة صغرى** أو **قيمة عظمى** لـ ص. في منحنى الدالّة التربيعية، إذا كانت إشارة مُعامِل $س^{٢}$ موجبة، يكون رأس المنحنى (في التمثيل البياني) قيمة صغرى. لكن إذا كانت إشارة مُعامِل $س^{٢}$ سالبة، فتكون نقطة رأس المنحنى قيمة عظمى.

تمارين ١٤-١-أ

> تذكّر أنه عند تربيع عدد سالب يكون الناتج موجبًا. عند استخدام آلتك الحاسبة، لا تنسَ أن تضع العدد السالب بين قوسين قبل تربيعه.

١) أكمل جداول القيَم الآتية، وارسم التمثيلات البيانية على نفس المُستوى الإحداثي.
استخدم القيَم من -٨ إلى ١٢ على المحور الصادي:

أ

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = س^٢ + ١							

ب

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = س^٢ + ٣							

ج

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = س^٢ - ٢							

د

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = - س^٢ + ١							

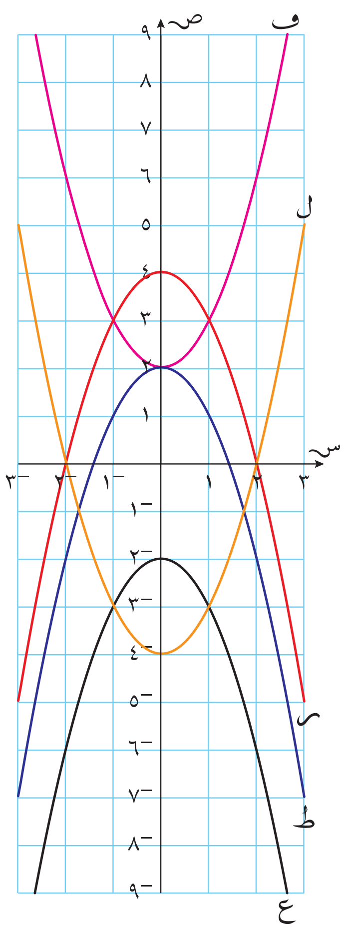
هـ

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = ٣ - س^٢							

> كُتبت جميع هذه الدوال في صورة ص = س^٢ + جـ أو ص = - س^٢ + جـ، حيث جـ الحد الثابت. الحد الثابت هو الجزء المقطوع من المحور الصادي للتمثيل البياني في كل حالة.

و ماذا يحدث للمنحنى في التمثيل البياني عندما تتغيَّر قيمة الحدّ الثابت؟

٢) طابق بين كلّ منحنى في التمثيل البياني المجاور والدالة التي يمثّلها في كلّ ممّا يلي:



أ ص = ٤ - س^٢

ب ص = س^٢ - ٤

ج ص = س^٢ + ٢

د ص = ٢ - س^٢

هـ ص = - س^٢ - ٢

١٤-١-ب الدوال التربيعية التي في صورة ص = س^{٢} + ب س + ج

تعلّمت سابقًا كيف تُنشئ جدول القيَم وكيف ترسم منحنى الدالّة التربيعية البسيطة. سترى الآن كيف تُنشئ جدوَل القيَم لدوال تربيعية تتضمَّن الحدَّين س^{٢}، س، وحدًّا ثابتًا. في هذه الحالة، ابدأ بإيجاد قيَم كلّ حد في صف منفصِل في الجدول، ثم جمعها لتجد قيمة ص.

مثــال ١

أنشئ جدوَل القيَم لـ ص = س^{٢} + ٢س − ١ في الفترة −٤ ⩽ س ⩽ ٢

حدِّد مواقع النقاط الإحداثيَّة لترسُم التمثيل البياني.

الحـــلّ:

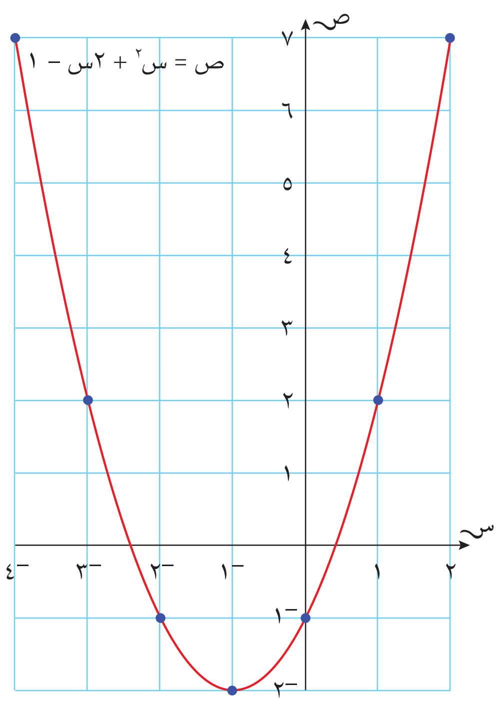
س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢
س^{٢}	١٦	٩	٤	١	٠	١	٤
٢س	−٨	−٦	−٤	−٢	٠	٢	٤
−١	−١	−١	−١	−١	−١	−١	−١
ص = س^{٢} + ٢س + ١	٧	٢	−١	−٢	−١	٢	٧

أوجد في هذا الجدول قيمة كلّ حد بطريقة مُنفصِلة.

اجمع حدود الدالّة في كلّ عمود لتجد المجموع الكلّي للصف الأخير (قيَم ص لكل نقطة).

لترسم التمثيل البياني:

- استخدم الجدول لتكتب النقاط في صورة أزواج مُرتَّبة (س، ص)
- حدِّد مواقع النقاط على المُستوى الإحداثي، وصِل بينها بمُنحنى.
- سمِّ التمثيل البياني بدالته.

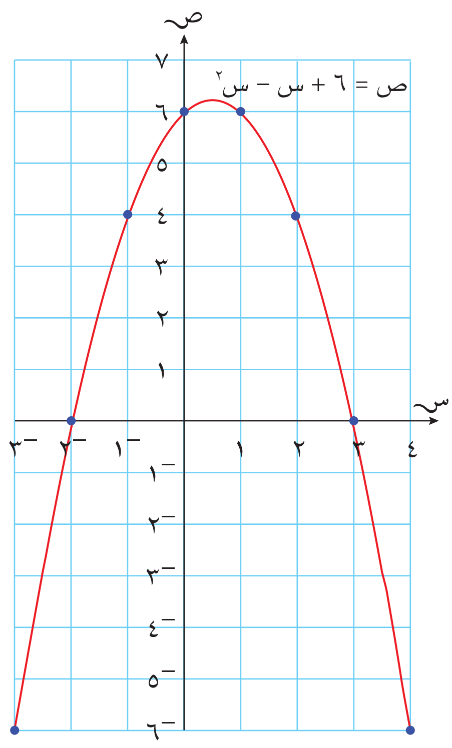


مثـــال ٢

ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = ٦ + س − س^{٢}، مُستخدِمًا قيَم س التي تقع في الفترة −٣ ⩽ س ⩽ ٤

الحـــلّ:

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	−٦	٠	٤	٦	٦	٤	٠	−٦



لترسُم مُنحنى دالّة التربيعية اتبع الخطوات التالية:

- أنشئ جدوَل القيَم (غالبًا ما يتّم إعطاء بعض القيَم).
- ارسم المحورَين، وسمِّهما.
- عيّن النقاط (س، ص) باستخدام جدول القيَم.
- صِل بين النقاط بمُنحنى.

تمارين ١٤-١-ب

١) أنشئ جدوَل القيَم لـ ص = س^{٢} − ٢س + ٢ في الفترة −١ ⩽ س ⩽ ٣، واستخدم النقاط (س، ص) من الجدوَل لترسُم التمثيل البياني للدالّة التربيعية.

٢) انسخ جدوَل القيَم، وأكمله ثمّ ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = س٢ − ٥س − ٤

س	⁻٢	⁻١	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص									

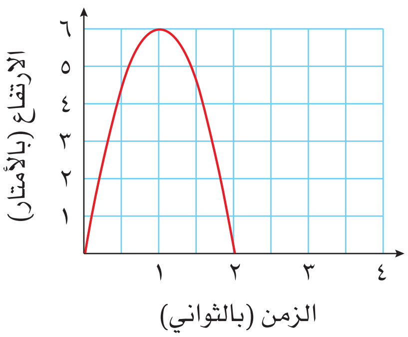
٣) أنشئ جدوَل قيَم للدالّة ص = س٢ + ٢س − ٣ في الفترة ⁻٣ ⩽ س ⩽ ٢، ثم عيّن النقاط، وصِل بينها لترسُم التمثيل البياني للدالّة.

٤) استخدم قيَم س من ٠ إلى ٤ وأنشئ جدوَل القيَم، واستخدمه لتمثيل الدالّة ص = − س٢ − ٤س بيانيًّا.

٥) استخدم قيَم س من ⁻٦ إلى ٠ وأنشئ جدوَل القيَم، واستخدمه لتمثيل الدالّة ص = − س٢ − ٦س − ٥ بيانيًّا.

طبِّق مهاراتك

٦) يُبيّن التمثيل البياني المُقابِل ارتفاع قَوس الماء من نافورة (بالأمتار) خلال عدد من الثواني:



أ) ما أعلى ارتفاع يصله قوس الماء؟

ب) ما الزمن اللازم لقوس الماء لكي يصل إلى أقصى ارتفاع؟

ج) ما المدّة التي بقي خلالها ارتفاع قوس الماء أعلى من ٢,٥ م؟

د) في رأيك لماذا يُبيّن هذا التمثيل البياني قيَمًا موجبة فقط للارتفاعات؟

١٤-١-ج الجزء المقطوع من المحور السيني

لإيجاد قيمة الجزء المقطوع من المحور السيني للتمثيل البياني للدالّة ص = س٢ + ٢س − ٣، اجعل ص = ٠ لتحصُل على:

س٢ + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

س = ⁻٣ أو س = ١ هما الجُزءان المقطوعان من المحور السيني.

إذن، المنحنى في التمثيل البياني للدالّة يقطع المحور السيني في النقطتين (⁻٣، ٠)، (١، ٠)

١٤-١-د نقطة رأس المنحنى

نقطة رأس المنحنى للدالّة التربيعية هي نقطة القيمة الصُغرى أو القيمة العُظمى للتمثيل البياني. مثلاً، في التمثيل البياني للدالّة ص = أ س^{٢} + ب س + جـ، تكون نقطة رأس المنحنى قيمة عُظمى إذا كانت أ سالبة، وقيمة صُغرى إذا كانت أ موجبة.

لتجد إحداثيات **نقطة رأس المنحنى** للتمثيل البياني للدالّة التربيعية، عليك أن تجد محور التماثُل للمنحنى، فعندما تكون الدالّة في الصورة ص = أس^{٢} + ب س + جـ، يمكن إيجاد محور التماثُل باستخدام العلاقة س = $-\frac{ب}{٢أ}$. وهذا يُعطي قيمة الإحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى.

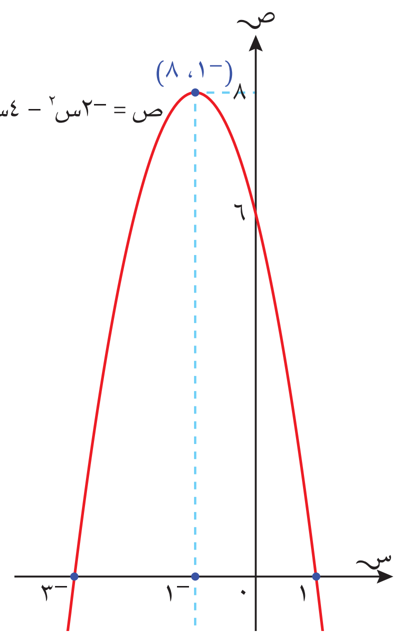
بعد ذلك، يمكنك إيجاد قيمة الإحداثي الصادي لنقطة رأس المنحنى، بالتعويض عن قيمة س في الدالّة الأصلية، وتكون قيمة الإحداثي الصادي هي القيمة العُظمى أو الصُّغرى للتمثيل البياني.

مثــال ٣

مثّل بيانيًّا ص = ‾٢س^{٢} − ٤س + ٦، ثم أوجد نقاط التقاطع مع المحورَين ونقطة رأس المنحنى.

الحـــلّ:

بما أن أ = ‾٢، فإن المنحنى في التمثيل البياني سيكون مفتوحًا إلى الأسفل.	الصورة العامة للدالّة التربيعية هي ص = أ س^{٢} + ب س + جـ
قيمة الجزء المقطوع من المحور الصادي تساوي ٦، وبالتالي فإن المنحنى يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ٦)	تدل جـ على قيمة الجزء المقطوع من المحور الصادي.
نوجد الجزء المقطوع من المحور السيني: ‾٢س^{٢} − ٤س + ٦ = ٠	اقسم طرفَي المعادلة على العامل المشترك ‾٢
س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠ (س − ١)(س + ٣) = ٠	حلل الحدودية الثلاثية إلى العوامل.
س = ١ أو س = ‾٣	حلّ بدلالة س.
وهما قيمتا الجزأين المقطوعَين من المحور السيني، وبالتالي فإن المنحنى يقطع المحور السيني في النقطتَين (١، ٠) و(‾٣، ٠).	بالتعويض عن: أ = ‾٢، ب = ‾٤، جـ = ٦ أوجد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني.
أوجد مُعادَلة محور التماثُل باستخدام س = $-\frac{ب}{٢أ}$ س = $\frac{٤}{٢(‾٢)}$ = ‾١	تذكَّر أن الناتج هو الإحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى.
ص = ‾٢(‾١)^{٢} − ٤(‾١) + ٦ = ٨ نقطة رأس المنحنى هي (‾١، ٨) وهي القيمة العُظمى لأن أ سالبة.	عوّض س = ‾١ في المُعادَلة الأصلية لتجد الإحداثي الصادي لنقطة رأس المنحنى.



الآن استخدم كل المعلومات السابقة لترسم التمثيل البياني، وسمّ كل المعلومات السابقة على الرسم.

تمارين ١٤-١-(ج، د)

١) أنشئ جداول القيَم وارسم التمثيلات البيانية لكل من الدوال التالية، وحدِّد محور التماثُل وإحداثيات نقطة رأس المنحنى لكلّ تمثيل بياني:

أ ص = س^{٢} + ٦س − ٥

ب ٢س^{٢} + ٤س = ص

ج ص = ٣ − (س + ١)^{٢}

د ص = ٤ − ٢(س + ٣)^{٢}

هـ ص = ١٧ + ٦س − س^{٢}

و ص = ٥ − ٨س + ٢س^{٢}

ز ص = ١ + ٢س − ٢س^{٢}

ح ص = −(س + ٢)^{٢} − ١

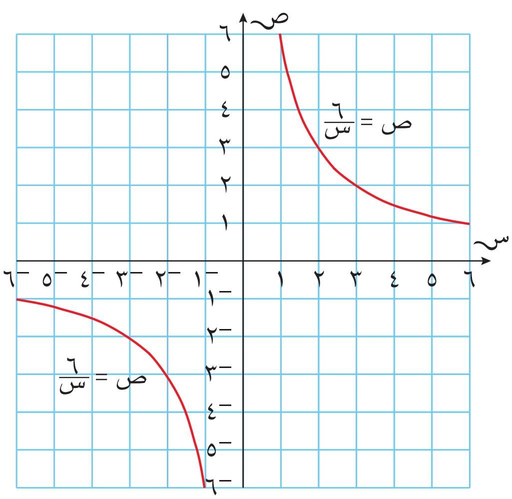
٢-١٤ رسم التمثيل البياني للدوال التي تأتي في صورة: $ص = \frac{أ}{س}$، $س \neq ٠$

التمثيلات البيانية للدوال المكتوبة في صيغة $ص = \frac{أ}{س}$ (حيث أ عدد حقيقي، $س \neq ٠$) لها أشكال مميزة، بالرغم من أنها تمثيل بياني لدالّة واحدة، إلّا أنها تتكوَّن من منحنيَين متماثلَين غير مُتَّصِلين لديهما خطّا تماثُل.

إليك جدول القيَم للدالّة $ص = \frac{٦}{س}$

س	-٦	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	-١	-١,٢	-١,٥	-٢	-٣	-٦	٦	٣	٢	١,٥	١,٢	١

عندما تُعيّن مواقع النقاط ستحصل على التمثيل البياني الآتي:



لاحظ أن التمثيل البياني:

- يتكوَّن من جُزأين مُنفصِلَين للمنحنى لهما نفس الشكل والقياس، وفي رُبعَين مُتقابِلَين.
- المُنحنى مُتماثل مع خطّي تماثُل.
- يقترب المُنحنى من المِحوَرَين، لكنّه لا يقطعهما أبدًا.
- لا توجد قيمة لـ ص عندما س = ٠ ولا توجد قيمة لـ س عندما ص = ٠

خطّ التقارُب هو مُستقيم يقترب إليه التمثيل البياني، ولا يتقاطع معه أبدًا.

عندما تكون الدالّة في صورة $ص = \frac{أ}{س}$، يقترب التمثيل البياني من كلا المِحوَرَين، دون أن يمسَ أيًّا منهما.

إذا كان $ص = \frac{٦}{س}$، فإن س ص = ٦، لا توجد قيمة لـ ص عندما س = ٠ لأنّ القسمة على الصفر غير ممكنة، وبالمثل، إذا كانت س = ٠، فإن س ص يجب أن تساوي ٠ لجميع قيَم ص وليس ٦، كما في المثال. وهذا سبب وجود جُزأين غير مُتَّصِلَين للمُنحنى.

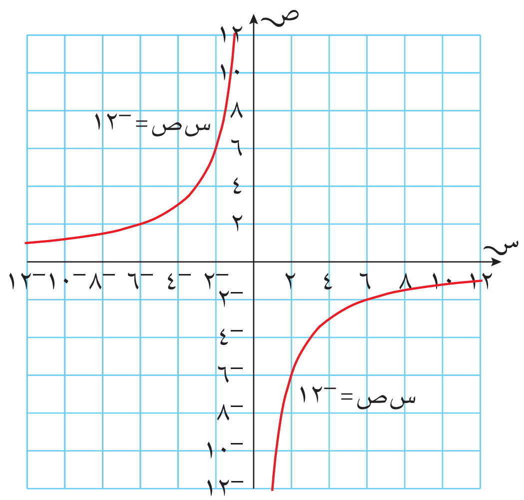
عند رسم التمثيل البياني للدوال في صورة: $ص = \frac{أ}{س}$، أوجد على الأقل خمس قيَم موجبة وخمس قيَم سالبة في جدول القيَم لأن التمثيل البياني سيتكوَّن من جُزأين مُنفصِلَين للمنحنى.

مثـــال ٤

أنشئ جدوَل القيَم، ثم ارسم التمثيل البياني للدالّة س ص = −١٢ (س ≠ ٠) في الفترة −١٢ ⩽ س ⩽ ١٢

الحـــلّ:

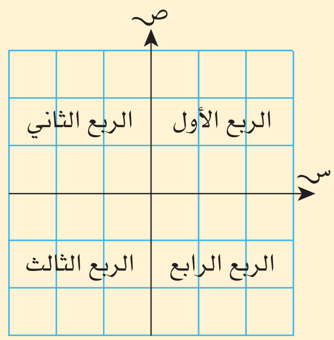
س	−١٢	−١٠	−٨	−٦	−٤	−٢	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢
ص	١	١,٢	١,٥	٢	٣	٦	−٦	−٣	−٢	−١,٥	−١,٢	−١



س ص = −١٢ ⟸
ص = $\frac{-١٢}{س}$
في هذه الحالة، حدِّد قيم س بحيث تكون من مضاعفات العدد ٢، ثم أوجد قيَم ص كما هو موضَّح في الجدول.

عيّن مواقع النقاط لترسُم التمثيل البياني.
لاحظ أن التمثيل البياني س ص = −١٢ يقع في الربع الأعلى إلى اليسار (الربع الثاني) والربع الأسفل إلى اليمين (الربع الرابع)، وسبب ذلك أن قيمة الحد الثابت (أ في الدالة ص = $\frac{أ}{س}$) سالبة، ولكن عندما تكون ا قيمة موجبة، سيكون المنحنى في الربع الأعلى إلى اليمين (الربع الأوَّل) والربع الأسفل إلى اليسار (الربع الثالث).

تتمّ تسمية الأرباع بعكس اتّجاه عقارب الساعة. تكون إحداثيات أي نقطة في الربع الأول موجبة دائمًا.



لترسُم التمثيل البياني للدالّة ص = $\frac{أ}{س}$:

- أكمل جدوَل القيَم (غالبًا ما يتمّ إعطاء بعضها).
- ارسم المحورَيْن، وسمِّهما.
- عيِّن النقاط (س، ص) باستخدام جدوَل القيَم.
- صِل بين النقاط بمُنحنى.
- اكتب الدالّة على جُزأي التمثيل البياني.

تمارين ١٤-٢

١) انسخ كل جدوَل قيَم من الجداول الآتية، وأكمله، وأعطِ قيَم ص مُقرَّبة إلى أقرب منزلة عشرية. استخدم النقاط لترسُم كل تمثيل بياني على مستوى إحداثي مُستقلّ:

أ

س	⁻٦	⁻٤	⁻٣	⁻٢	⁻١	١	٢	٣	٤	٦
ص = $\frac{٢}{س}$										

ب

س	⁻٥	⁻٤	⁻٣	⁻٢	⁻١	١	٢	٣	٤	٥
ص = $\frac{⁻١}{س}$										

ج

س	⁻٦	⁻٤	⁻٣	⁻٢	⁻١	١	٢	٣	٤	٦
ص = $\frac{⁻٦}{س}$										

د

س	⁻٦	⁻٤	⁻٣	⁻٢	⁻١	١	٢	٣	٤	٦
ص = $\frac{٤}{س}$										

طبِّق مهاراتك

٢) قام شخص برحلة مسافتها ٢٤٠ كم، وكانت سرعته المُتوسِّطة س كم/ساعة، وبلغ الزمن الذي استغرقته الرحلة ص ساعات.

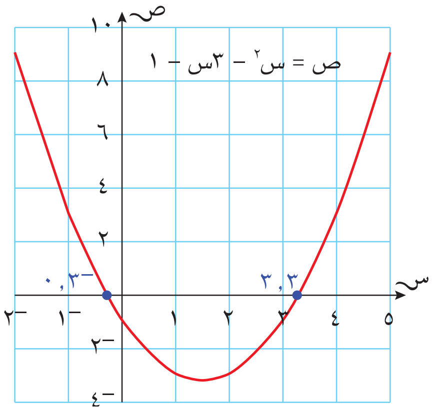
أ أكمل جدوَل القيَم لـ س، ص:

س	٢٠	٤٠	٦٠	٨٠	١٠٠	١٢٠
ص	١٢		٤			٢

ب ارسم التمثيل البياني لتُمثِّل العلاقة بين س، ص على مستوى إحداثي.

ج اكتب الصيغة الجبرية بين س، ص.

١٤-٣ حل المُعادَلات التربيعية بيانيًّا

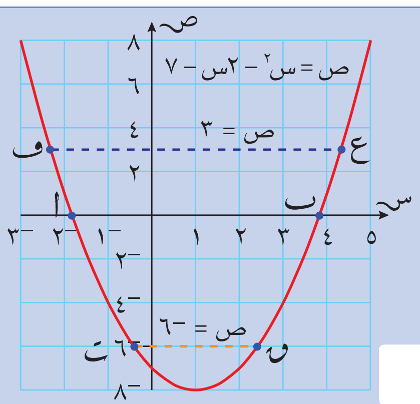


افترض أنك تريد حلّ المعادلة س^{٢} – ٣س – ١ = ٠
للقيام بذلك، تحتاج إلى إيجاد قيمة أو قيَم س التي تجعل س^{٢} – ٣س – ١ تساوي ٠
حاول إيجاد هذه القيَم باستخدام التجربة والخطأ، لكن ستجد أن قيمة س التي تبحث عنها ليست عددًا كاملًا (في الحقيقة، يقع أحد الحلول بين العددَين ٣ و ٤).
من الأسرع والأسهل أن ترسم التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٢} – ٣س – ١، وأن تستخدمَه في إيجاد حل تقريبي للمُعادَلة.
من خلال التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٢} – ٣س – ١ في الشكل أعلاه:
فإنّ حلّ المُعادَلة هو الإحداثي السيني للنقطة (أو النقاط) حيث ص = ٠، بمعنى آخر البحث عن قيمة الإحداثي س للنقطة التي يتقاطع فيها المنحنى مع المحور السيني.
إذا نظرت إلى التمثيل البياني، سترى أن المنحنى يقطع المحور السيني في نقطتَين هما (٣,٣، ٠)، (–٠,٣، ٠)
وتُسمّى قيمتا س في نقطتَي التقاطُع بجذرَي المُعادَلة س^{٢} – ٣س – ١ = ٠ وهما ٣,٣ و –٠,٣
يمكنك استخدام التمثيل البياني لتجد حلاًّ للمُعادَلة لقيَم س المختلفة، والمثال التالي يوضح كيف يتمّ ذلك:

استخدم قلم رصاص مُدبَّب الرأس. يمكنك أن تُصوِّب عملك بسهولة، وستكون أكثر دقَّة عند النظر إلى نقاط التقاطُع.

جذور المُعادَلة التربيعية هي إحداثيات س للنقاط التي يتقاطع فيها المنحنى في التمثيل البياني للمعادَلة التربيعية مع المحور السيني. يمكن أن يكون للمعادلة التربيعية جذران (إذا تقاطع المنحنى مع المحور السيني مرتَّين) ، أو جذر واحد (إذا لامس المنحنى المحور السيني عند نقطة واحدة) أو لا توجد جذور (إذا لم يتقاطع المنحنى مع المحور السيني).

مثـــال ٥



إذا كان الشكل المجاور هو التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٢} – ٢س – ٧،
أوجد جذرَي المعادلة فيما يلي:

أ س^{٢} – ٢س – ٧ = ٠

ب س^{٢} – ٢س – ٧ = ٣

ج س^{٢} – ٢س = ١

الحـــلّ:

أ جذرا المُعادَلة
س^{٢} – ٢س – ٧ = ٠
هما س = –١,٨
س = ٣,٨
وهما حل المعادلة.

لأن التمثيل البياني أعلاه هو التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٢} – ٢س – ٧، أوجد ببساطة النقاط الواقعة على المنحنى، حيث ص = ٠ (النقاط التي يقطع فيها المنحنى المحور السيني). هناك نقطتان على المنحنى، سمِّهما ا، ب. الإحداثي السيني لهما هو –١,٨ و ٣,٨

ب	جذرا المُعادَلة س^{٢} − ٢س − ٧ = ٣ هما س = ⁻٢,٣ س = ٤,٣ وهما حل المعادلة.	أوجد نقاطًا على المُنحنى يكون إحداثيّها الصادي مساويًا لـ ٣. (ارسم المستقيم الأفقي ص = ٣ للمساعدة). توجد نقطتان على التمثيل البياني والإحداثي الصادي لهما يساوي ٣، سمِّهما ع، ف ستجد أن الإحداثي السيني لهما هو ⁻٢,٣، ٤,٣
ج	جذرا المُعادَلة س^{٢} − ٢س = ١ هما س = ⁻٠,٤ س = ٢,٤ وهما حل المعادلة.	أعد تنظيم المعادلة س^{٢} − ٢س = ١ حتى يُطابِق طرفها الأيمن المُعادَلة المُمثَّلة في التمثيل البياني. اطرح ٧ من طرفَي المعادلة لتحصل على س^{٢} − ٢س − ٧ = ١ − ٧، س^{٢} − ٢س − ٧ = ⁻٦ والآن أكمل الحل كما في الجزئيَّتَين أ، ب. أوجد نقطتَين على المُنحنى يكون إحداثيهما الصادي يساوي ⁻٦؛ وسمّهما ن، ت. ستجد أن الإحداثي السيني لهما هو ⁻٠,٤، ٢,٤

لحل المُعادَلة التربيعية بيانيًّا:

- حدِّد الإحداثيات السينية لأيّ نقطة تقاطع لقيمة ص المعطاة.
- قد تحتاج إلى إعادة تنظيم المُعادَلة الأصلية لتنفيذ المطلوب.

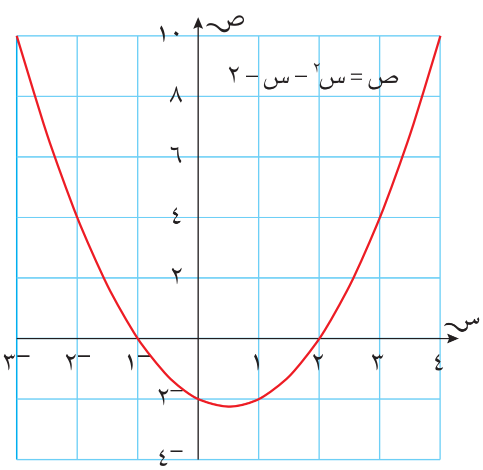
تمارين ١٤-٣

١) استخدم التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٢} − س − ٢ كي تحلّ المعادلات الآتية:

أ س^{٢} − س − ٢ = ٠

ب س^{٢} − س − ٢ = ٦

ج س^{٢} − س = ٦



٢) أ أنشئ جدول القيَم للدالّة ص = − س^{٢} − س + ١ في الفترة −٣ ⩽ س ⩽ ٢

ب حدِّد مواقع النقاط على شبكة الإحداثيات، ثم صِل بينها بمنحنى.

ج باستخدام التمثيل البياني أوجد جذرَي المُعادَلة − س^{٢} − س + ١ = ٠، اكتب إجابتك مقرَّبة إلى أقرب منزلة عشرية.

٣) حلّ المعادلتَين التاليتَين برسم تمثيل بياني مُلائِم في الفترات المُعطاة لكل منهما:

أ س^{٢} − س − ٣ = ٠ (−٣ ⩽ س ⩽ ٤)

ب س^{٢} + ٣س + ١ = ٠ (−٤ ⩽ س ⩽ ١)

٤) أ استخدم الفترة −٢ ⩽ س ⩽ ٤ لترسم التمثيل البياني للدالّة
ص = −٤ − س^{٢} + ٢س

ب استخدم التمثيل البياني لتحلّ المعادلتَين التاليتَين:

(١) −٤ − س^{٢} + ٢س = ٠

(٢) − س^{٢} + ٢س = ٠

٥) أ ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٢} − ٢س − ٤ مُستخدِمًا قيَمًا لـ س في الفترة من −٣ إلى ٥

ب استخدم التمثيل البياني لتحلّ المُعادَلات التالية:

(١) س^{٢} − ٢س − ٤ = ٠

(٢) س^{٢} − ٢س − ٤ = ٣

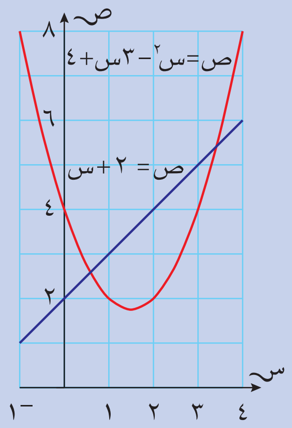
(٣) س^{٢} − ٢س − ٤ = −١

١٤-٤ استخدام التمثيلات البيانية للدوال لحل مُعادَلات خطّية ومُعادَلات غير خطّية آنيًّا

يمكنك أن تستخدم التمثيل البياني للدّوال لتحلّ مُعادَلات خطّية ومُعادلات غير خطّية، أو معادلتَين غير خطّيتين آنيًّا:

مثال ٦

استخدم التمثيل البياني التالي لكل من الدالّتين ص = ٢ + س، ص = س^{٢} − ٣س + ٤ لتجد قيَم س لنقاط تقاطُع المستقيم مع المُنحنى:



الحــلّ:

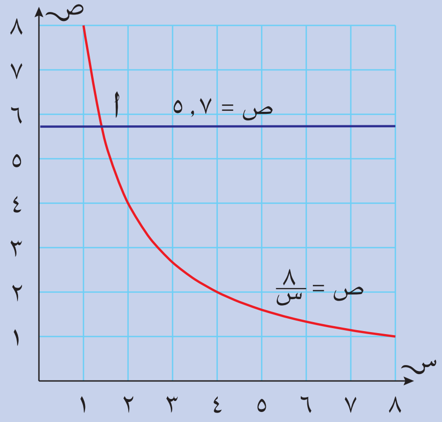
قيَم س لنقاط التقاطُع هي س= ٠,٦، س = ٣,٤	إحداثيات نقطتَي التقاطُع هي تقريبًا (٠,٦، ٢,٦)، (٣,٤، ٥,٤)

مُساعَدة

قد تُسأل أيضًا عن قيَم ص، لذا من المهم إيجاد أزواج من قيَم س الصحيحة مع قيَم ص الصحيحة،
عندما س = ٠,٦، ص= ٢,٦
وعندما س = ٣,٤، ص = ٥,٤

مثال ٧

يبيّن الشكل التالي التمثيل البياني للدالّة ص = $\frac{٨}{س}$، س > ٠:



استخدم التمثيل البياني للدالّة ص = $\frac{٨}{س}$ لتحلّ المعادلة $\frac{٨}{س}$ = ٥,٧

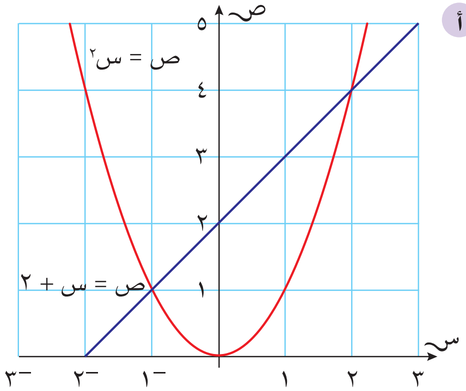
الحـــلّ:

حلّ المُعادَلة $\frac{٨}{س} = ٥{,}٧$ هو س = ١,٤	عليك أن تجد نقطة على المنحنى إحداثيّها الصادي يساوي ٥,٧، ارسم المُستقيم ص = ٥,٧ ليساعدك على إيجاد النقطة، وهي تقع عند تقاطُع المُستقيم مع المُنحنى. سمِّ النقطة أ على المُخطَّط. إحداثيها السيني هو ١,٤

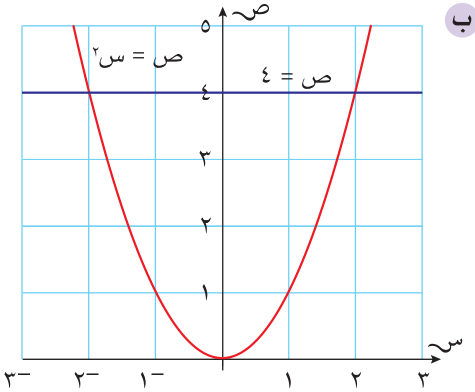
تمارين ١٤-٤

١) استخدم التمثيل البياني للدوال التالية لحل المعادلتين آنيًّا في كلّ ممّا يلي:

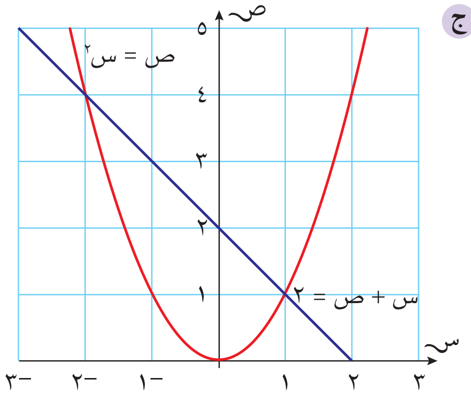
أ



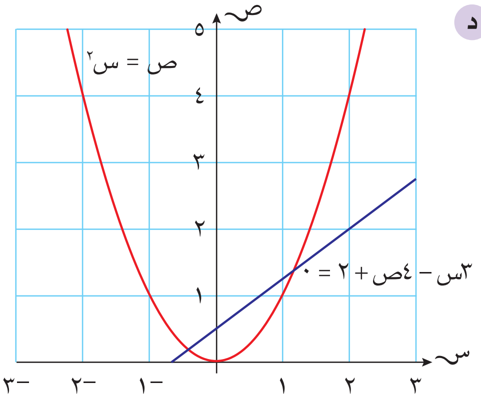
ب



ج



د



٢) ارسم التمثيلات البيانية لكل دالّتين في ما يلي، ثم أوجد إحداثيات نقاط التقاطُع لكل منهما:

- **أ** ص = س^{٢} ، ص = ٣س
- **ب** ص = س ، ص = $\frac{٢}{س}$
- **ج** ص = ٢ − س ، ص = س^{٢} − ٥س + ٦
- **د** ص = س^{٢} − ٨س + ٩ ، ص = ٢س + ١
- **هـ** ص = س^{٢} − س − ٦ ، ص = ٢ + س
- **و** ص = ٤س + ٤ ، ص = ٢س − ٣ + س^{٢}

٣) بيّن بالتمثيل البياني عدم وجود قيمة لـ س تُحقِّق المعادلتين آنيًّا:

ص = $^{-}$٤ ، ص = س^{٢} + ٢س + ٣

١٤-٥ المزيد من التمثيلات البيانيَّة غير الخطّية

حتى الآن، تعلَّمت كيف تُنشئ جدوَل القيَم وترسم كلاً من الأنواع المُختلفة من التمثيلات البيانية الآتية:

- التمثيلات البيانية الخطّية (دوال خطّية في صورة ص = م س + جـ).
- التمثيلات البيانية التربيعية (دوال تربيعية في صورة ص = أس^{٢} + ب س + جـ).
- التمثيلات البيانية للدوال التي في صورة ص = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$.

في هذا الدرس، سوف تُطبِّق ما تعلَّمته سابقًا في رسم التمثيلات البيانية على دوال من رتبة أعلى (دوال تكعيبية)، أو دوال حدودها تتكوّن من مجموعة من الحدود الخطّية والتربيعية والتكعيبية.

١٤-٥-أ رسم التمثيلات البيانيَّة التكعيبية

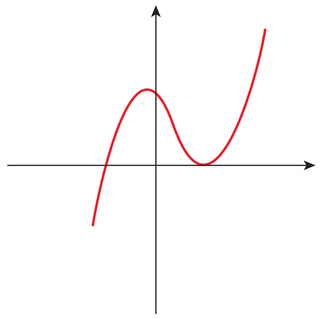
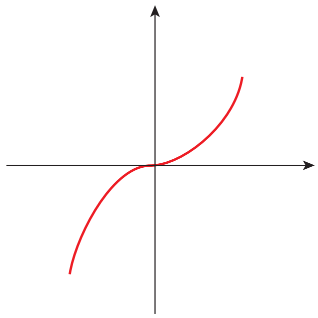
مُساعَدة

يُتوقَّع أن تتعامل مع دوال تحتوي على حدود أسُّها عدد صحيح من $^{-}$٢ إلى ٣، عندما تتعامَل مع دوال من درجة أعلى، فإنها لن تحتوي على أكثر من ثلاثة حدود.

الدالّة التكعيبية تتضمن حدًّا مرفوعًا إلى الأُسّ ثلاثة، وهو أكبر قوى للمُتغيِّر. مثلًا، تُعدّ كلّ الدوال ص = ٢س^{٣}، ص = − س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣، ص = ٢س^{٣} − ٤س دوال تكعيبية. وأبسط معادلة تكعيبية هي ص = س^{٣}.

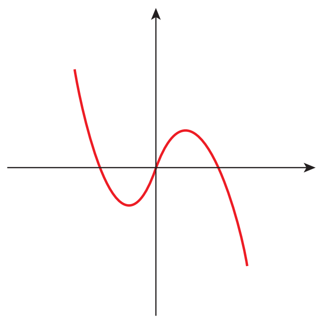
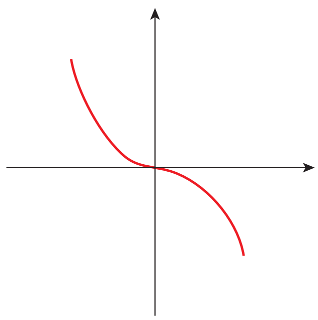
يُسمّى التمثيل البياني للدالّة التكعيبية المُنحنى التكعيبي، ويتَّخذ شكلَيْن أساسيَّيْن:

- إذا كانت إشارة مُعامِل س^{٣} موجبة، فسوف يتَّخذ التمثيل البياني أحد الشكلَيْن التاليَيْن:

إذا كانت س موجبة، فإن س^{٣} موجبة و−س^{٣} سالبة.
إذا كانت س سالبة، فإن س^{٣} سالبة و−س^{٣} موجبة.

- إذا كانت إشارة مُعامِل س^{٣} سالبة، سوف يتَّخذ التمثيل البياني أحد الشكلين التاليَين:

مثــال ٨

أكمل جداول القيَم التالية ثم ارسم التمثيل البياني لها على نفس المُستوى الإحداثي:

أ

س	−٢	−١	٠	١	٢
ص = س^{٣}					

ب

س	−٢	−١	٠	١	٢
ص = − س^{٣}					

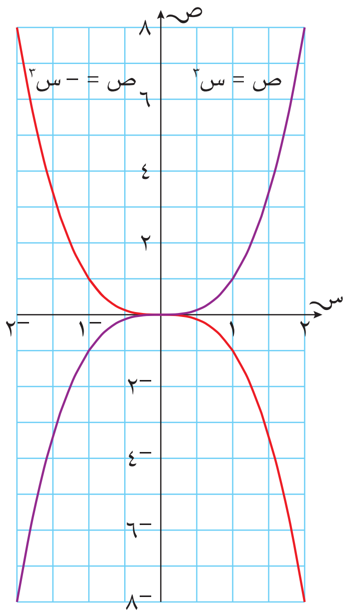
الحــلّ:

أ

س	−٢	−١	٠	١	٢
ص = س^{٣}	−٨	−١	٠	١	٨

ب

س	−٢	−١	٠	١	٢
ص = − س^{٣}	٨	١	٠	−١	−٨



كلما ازدادت قيمة س، تزداد قيمة س^{٣} بسرعة، ويصبح من الصعب تمثيلها بيانيًّا. إذا أردت أن تُنشئ جدوَل قيَم خاصًّا بك، اختر قيَمًا صغيرة. يُمكن تضمينها مُنتصفات النقاط (٠,٥، ١,٥، ...) لتجد قيَمًا أكثر تتلاءم مع التمثيل البياني.

مثــال ٩

ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٣} − ٦ س في الفترة −٣ ⩽ س ⩽ ٣

الحــلّ:

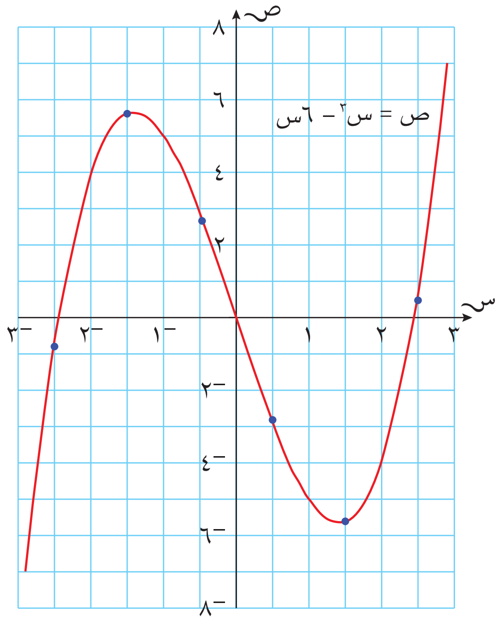
أولاً: أنشئ جدوَل قيَم تكون قيَم س فيه أعدادًا صحيحة.
أوجد قيمة ص = س^{٣} − ٦س

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	−٩	٤	٥	٠	−٥	−٤	٩

ثانيًا: أنشئ جدوَل قيَم مُستخدِمًا 'أنصاف قيَم' س من الأعداد الصحيحة.

س	−٢,٥	−١,٥	−٠,٥	٠,٥	١,٥	٢,٥
ص	−٠,٦٢٥	٥,٦٢٥	٢,٨٧٥	−٢,٨٧٥	−٥,٦٢٥	٠,٦٢٥

عيّن النقاط على شبكة الإحداثيات، وصِل بينها بمُنحنى.



رابط

يستخدم الجيوفيزيائيون الدوال والتمثيلات البيانية عندما يتعاملون مع القياسات (مثل زيادة الحُمم البركانية، أو ضغطها في البراكين)، وعندما يستخدمونها في توليد الأنماط والقيام بالتنبُّؤات.

١٤-٥-ب استخدام التمثيلات البيانية لحل مُعادَلات من رُتَب أعلى

يُمكنك استخدام التمثيل البياني للدوال التكعيبيّة، لتجد حلاً تقريبيًّا للمُعادَلات التكعيبيّة المُرتبِطة بها، والمثال التالي يوضِّح كيفية تنفيذ ذلك:

مثـــال ١٠

أ ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٣} − ٢س^{٢} − ١ في الفترة −١ ≤ س ≤ ٣

ب استخدم التمثيل البياني لتحلّ المُعادلات:

(١) س^{٣} − ٢س^{٢} − ١ = ٠

(٢) س^{٣} − ٢س^{٢} = −١

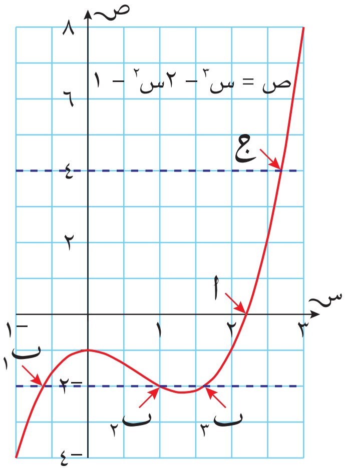
(٣) س^{٣} − ٢س^{٢} − ٥ = ٠

قبل البدء برسم المحورين، تحقَّق من مجال قيَم ص المطلوبة مستخدمًا جدول القيَم.

الحـــلّ:

أ

س	-١	$-٠,٥$	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥	٣
ص	-٤	$-١,٦٢٥$	-١	$-١,٣٧٥$	-٢	$-٢,١٢٥$	-١	٢,١٢٥	٨



أنشئ جدوَل القيَم لـ ص، حيث قيَم س من الأعداد الكاملة وأنصافها.

عيّن النقاط على شبكة الإحداثيات لترسُم المُنحنى.

ب (١) حلّ المُعادَلة

$س^٣ - ٢س^٢ - ١ = ٠$

هو س ≈ ٢,٢

لتحلّ

$س^٣ - ٢س^٢ - ١ = ٠$، أوجد النقطة أو النقاط على المُنحنى التي يكون إحداثيّها الصادي يساوي ٠ (حيث يقطع المنحنى المحور السيني).

هناك نقطة واحدة (النقطة أ على التمثيل البياني) إحداثيها السيني هو ٢,٢

لتحلّ $س^٣ - ٢س^٢ = -١$، أعد تنظيم المُعادَلة ليصبح الطرف الأيمن كما في المعادلة التي مثلتها أعلاه. إذا طرحتَ ١ من كلا الطرفَين تحصل على $س^٣ - ٢س^٢ - ١ = -٣$ والآن أوجد النقاط على المُنحنى التي يكون إحداثيّها الصادي -٢ (ارسم المُستقيم ص = -٢ للمساعدة). هناك ثلاث نقاط ($ب_١$، $ب_٢$، $ب_٣$ على التمثيل البياني). الإحداثي السيني لهذه النقاط هي حلول المُعادَلة.

(٢) حلّ المُعادَلة

$س^٣ - ٢س^٢ = -١$

هو س ≈ $-٠,٦$،

س = ١، س ≈ ١,٦

(٣) الحل التقريبي للمُعادَلة هو س = ٢,٧	أعد تنظيم $س^٣ - ٢س^٢ - ٥ = ٠$ لتتمكن من استخدام التمثيل البياني للدالّة $ص = س^٣ - ٢س^٢ - ١$ في حلها. اجمع ٤ مع طرفي المُعادَلة لتحصل على $س^٣ - ٢س^٢ - ١ = ٤$ أوجد على المُنحنى النقاط التي يكون إحداثيها الصادي يساوي ٤ (ارسم المستقيم ص = ٤ للمساعدة). هناك نقطة واحدة فقط (ع على التمثيل البياني). الإحداثي السيني للنقطة ع يساوي ٢,٧

تمارين ١٤-٥-(أ، ب)

١) أنشئ جدوَل القيَم في الفترة $^-٣ \leqslant س \leqslant ٣$، وعيّن النقاط لترسُم التمثيل البياني لكل من الدوال التالية:

أ) $ص = ٢س^٣$ ب) $ص = ^-٣س^٣$

ج) $ص = س^٣ - ٢$ د) $ص = ٣ + ٢س^٣$

هـ) $ص = س^٣ - ٢س^٢$ و) $ص = ٢س^٣ - ٤س + ١$

ز) $ص = -س^٣ + س^٢ - ٩$ ح) $ص = س^٣ - ٢س^٢ + ١$

٢) أ) انسخ جدوَل القيَم للدالّة $ص = س^٣ - ٦س^٢ + ٨س$. (قد تحتاج إلى إضافة صفوف أخرى إلى الجدوَل، كما في الأمثلة).

س	$^-١$	$^-٠,٥$	٠	٠,٥	١	١,٥	٢,٥	٣	٣,٥	٤	٤,٥	٥
ص	$^-١٥$	$^-٦,٥$										

ب) ارسم التمثيل البياني للدالّة $ص = س^٣ - ٦س^٢ + ٨س$ على شبكة إحداثيات في الفترة $^-١ \leqslant س \leqslant ٥$.

ج) استخدم التمثيل البياني في الجزئية ب لتحلّ المُعادلتَين التاليتَين:

(١) $س^٣ - ٦س^٢ + ٨س = ٠$

(٢) $س^٣ - ٦س^٢ + ٨س = ٣$

٣) أ ارسم التمثيل البياني للدالّتين ص $= \frac{س^3}{10}$، ص = ٦س − س^2 في الفترة $^-4 \leqslant$ س $\leqslant 6$

ب استخدم التمثيلَين البيانيَّين في الجزئية أ لتحلّ المُعادَلة $\frac{س^3}{10}$ + س^2 − ٦س = ٠

١٤-٥-ج التمثيلات البيانية لدوال تتضمّن مجموعة من الحدود

عندما يُطلَب إليك أن ترسم التمثيل البياني لدوال تتضمَّن مجموعة من الحدود الخطّية والتربيعية والتكعيبية والثابتة، عليك تكوين جدوَل القيَم يتكوَّن من ٨ قيَم لـ س على الأقل، ليتوفَّر لديك مُؤشِّر واضح على ما سيكون عليه شكل التمثيل البياني.

مثـــال ١١

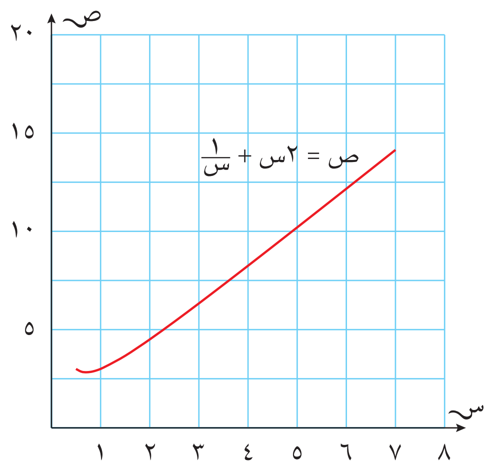
أكمل جدوَل القيَم للدالّة ص = ٢س + $\frac{1}{س}$ في الفترة ٠,٥ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٧، ومثّلها بيانيًّا:

س	٠,٥	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص								

الحـــلّ:

لا يمكنك إيجاد قيمة ص عندما س = ٠ لأن هناك حدًا هو $\frac{1}{س}$، ولا يُمكننا القسمة على صفر.

س	٠,٥	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص	٣	٣	٤,٥	٦,٣٣	٨,٢٥	١٠,٢	١٢,١٧	١٤,١٤



مثــال ١٢

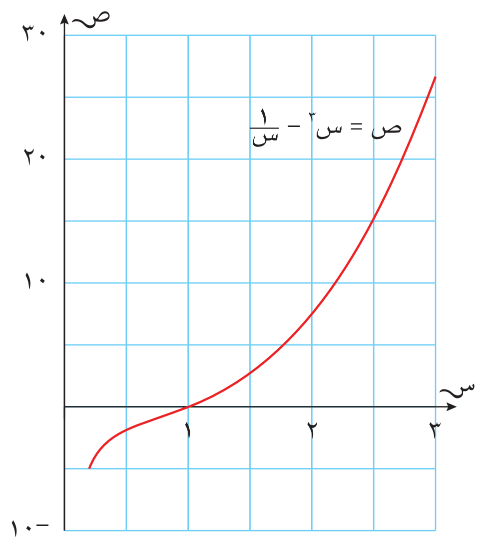
أكمل جدوَل القيَم للدالّة ص = س^{٣} − $\frac{١}{س}$ في الفترة ٠,٢ ⩽ س ⩽ ٣، ومثّلها بيانيًّا:

س	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥	٣
ص	−٥,٠						

الحــلّ:

قرّب قيَم ص إلى منزلة عشرية واحدة، وإلاّ سيكون من الصعب تحديد النقاط على المستوى الإحداثي.

س	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥	٣
ص	−٥,٠	−١,٩	٠	٢,٧	٧,٥	١٥,٢	٢٦,٧



تمارين ١٤-٥-ج

١) أنشئ جدوَل القيَم مُستخدِمًا س = −٣ ، −٢ ، −١ ، −٠,٥ ، −٠,٢ ، ٠,٢ ، ٠,٥ ، ١ ، ٢ ، ٣ لكلّ دالّة فيما يلي، ثم مثّلها بيانيًّا:

أ ص = ٣ + س^{٢} − $\frac{٢}{س}$

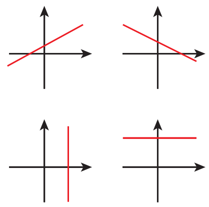
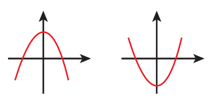
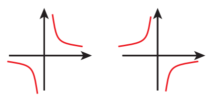
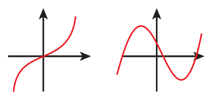
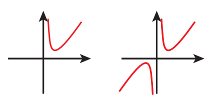
ب ص = ٣س − $\frac{١}{س}$

ج ص = −س + س^{٢} + $\frac{٢}{س}$

د ص = −س^{٣} − ٢س + ١ (أهمل القيَم الكسرية في هذه الحالة)

١٤-٥-د تمييز التمثيلات البيانية

يجب أن تكون قادرًا على تحديد أيّ نوع من التمثيلات البيانية تُمثّلها الدالّة المعطاة.
يُلخّص الجَدوَل التالي ما تعلَّمته حتى الآن:

نوع التمثيل البياني	الصورة العامة للدالّة	شكل التمثيل البياني
المُستقيم (الدالّة الخطّية)	ص = م س + جـ أكبر قوى لـ س هو ١ عندما س = أ، يكون المُستقيم موازيًا لمحور الصادات وعندما ص = ب يكون المُستقيم موازيًا لمحور السينات.	
الدالّة التربيعية	ص = س^{٢} ص = أس^{٢} + ب س + جـ أعلى قوى لـ س هي ٢	
الدالّة في الصورة: ص = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$	ص = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$ أو س ص = أ ويمكن أن تكون أيضًا ص = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$ + ع	
الدالّة التكعيبية	ص = س^{٣} ص = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د أعلى قوى لـ س هي ٣	
منحنى دالّة تتكوَّن من مجموعة من الحدود (خطية، تربيعية، تكعيبية)	لغاية ثلاثة حدود من: ص = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + $\frac{\text{د}}{\text{س}}$ + هـ	

مُلخَّص

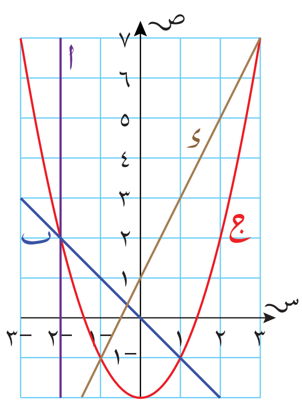
ما يجب أن تعرفه:

- الدالّة التربيعية هي التي تكون أكبر قوى للمُتغيِّر س فيها هي العدد ٢
- التمثيل البياني للدالّة التربيعية هو منحنى.
- التمثيل البياني للدالّة التي تكون في صورة ص = $\frac{أ}{س}$ أو س ص = أ
- التمثيل البياني للدالّة التي تأتي في صورة: ص = $\frac{أ}{س}$ يتكوَّن من جزأين منفصلَين.
- يمكنك استخدام التمثيل البياني للدوال لحل المُعادَلات المُرتبِطة بها، وذلك بإيجاد قيمة س أو ص لنقاط مختلفة على التمثيل البياني، كما يمكنك أن تجد حلّ المُعادَلات الآنيَّة باستخدام نقاط تقاطع التمثيلَين البيانيَّين لهما.
- الدوال التكعيبيّة هي التي تكون أكبر قوى للمُتغيِّر س فيها هي العدد ٣
- التمثيل البياني للدالّة التكعيبيّة هو شكل مُتموّج.
- يمكن أن تظهر الحدود الخطّية والتربيعيّة والتكعيبيّة والتي تأتي في صورة $\frac{أ}{س}$ في الدالّة نفسها. ويُمكن تمثيل تلك الدوال بيانيًّا بإنشاء جدوَل القيَم لها، ثم تحديد مواقع النقاط على المُستوى الإحداثي.

يجب أن تكون قادرًا على:

- إنشاء جدوَل القيَم لدوال تربيعيّة.
- رسم التمثيل البياني للدوال التربيعيّة بإنشاء جدول القيَم لها.
- رسم التمثيل البياني للدالّة التي على صورة: ص = $\frac{أ}{س}$ من جدوَل القيَم.
- تفسير التمثيل البياني للدوال التربيعيّة واستخدامهما في حلّ مُعادَلات مُرتبِطة بهما.
- إنشاء جداول القيَم ورسم التمثيلات البيانية لدوال تكعيبيّة ولدوال تتكوَّن من حدود خطّية وحدود غير خطّية.
- رسم التمثيل البياني لدوال من رتبة أعلى، واستخدامها في حلّ مُعادَلات مُرتبِطة بها.

تمارين نهاية الوحدة



١) أ اكتب دالّة كلّ من التمثيلات البيانية (أ)، (ب)، (ج)، (ى).

ب اكتب إحداثيات تقاطُع:

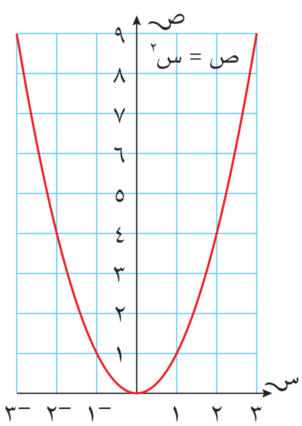
(١) التمثيلَين البيانيَّين (أ)، (ب)

(٢) التمثيلَين البيانيَّين (ج)، (ى)

ج أيّ الإحداثيات التي تُحقِّق حلّ معادلتَي التمثيلَين البيانيَّين (ب)، (ى) في نفس الوقت؟

د أيّ تمثيل بياني مقطعه السيني يساوي $-\frac{١}{٢}$؟

هـ أيّ تمثيل بياني مُتماثِل حول المحور الصادي؟



٢) الشكل المجاور هو التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٢}:

أ يُبيّن الجدول أدناه بعض قيَم الدالّة ص = س^{٢} + ٣، انسخ الجدول وأكمله بملء القيَم الناقصة:

س	-٢	-١,٥	-١	-٠,٥	٠	٠,٥	١	١,٥	٢
ص		٥,٢٥	٤	٣,٢٥	٣		٤	٥,٢٥	٧

ب ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = س^{٢} + ٣ في الفترة -٢ ≤ س ≤ ٢ على شبكة الإحداثيات المجاورة.

ج هل يمكن أن يتقاطع المُنحنيان؟ فسّر إجابتك.

٣) استخدم التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢} المعطاة في التمرين ٢ لترسم مستقيمًا يساعدك على حلّ كلّ من المعادلتَين التاليتَين ثم حلّ كلّ منهما:

(١) س^{٢} = ٦ (٢) س^{٢} + ٣ = ٦

٤) أجب عن جميع جُزئيات هذا التمرين على شبكة إحداثيات واحدة:

س	٠,٦	١	١,٥	٢	٢,٥	٣	٣,٥	٤	٤,٥	٥
ص	ع	$-٥,٩$	$-٣,٧$	$-٢,٣$	$-١,١$	٠,٣	١,٩	٣,٨	ق	ر

ظهرت بعض قيَم ص = $\frac{س^{٣}}{١٢} - \frac{٦}{س}$ في الجدوَل أعلاه. وتمّ تقريب قيَم ص إلى أقرب منزلة عشرية.

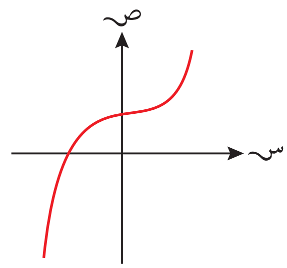
أ أوجد قيم ع، ق، ر.

ب استخدم مقياس رسم (٢ سم) لتمثيل وحدة واحدة على المحور السيني، و(١ سم)، لتمثيل وحدة واحدة على المحور الصادي، كي ترسم التمثيل البياني للدالّة ص = $\frac{س^{٣}}{١٢} - \frac{٦}{س}$ في الفترة ٠,٦ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٥.

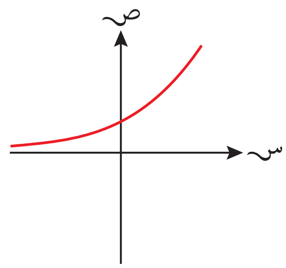
ج أوجد قيمة س (مُقرَّبة إلى أقرب منزلة عشرية) في المُعادَلة $\frac{س^{٣}}{١٢} - \frac{٦}{س}$ = ٠ مُستخدِمًا التمثيل البياني.

٥) فيما يلي ستَّة تمثيلات بيانيَّة:

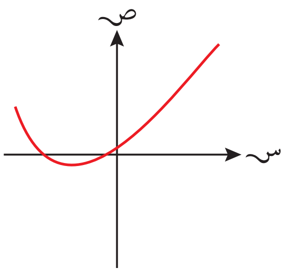
(١)



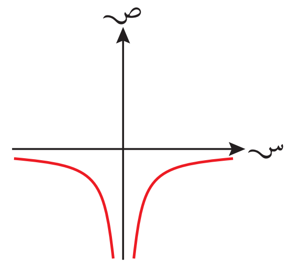
(٢)



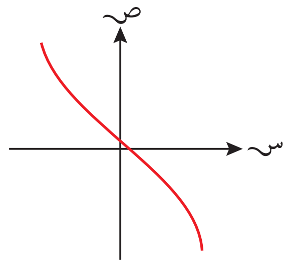
(٣)



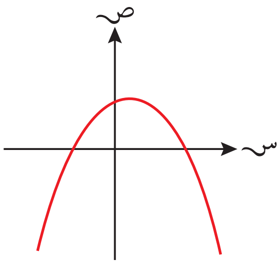
(٤)



(٥)



(٦)



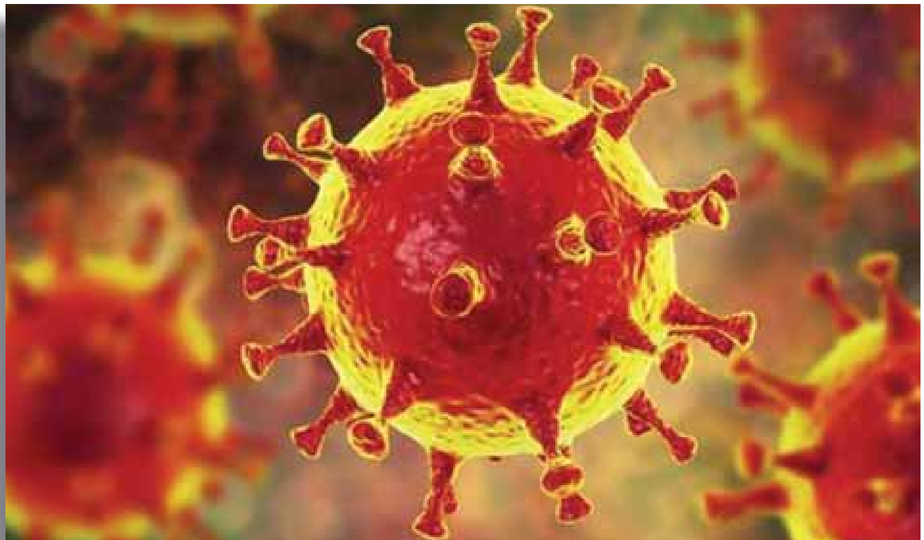
طابِق بين التمثيلات البيانية السابقة والدوال التالية:

أ ص = ١ + س − ٢$س^{٢}$

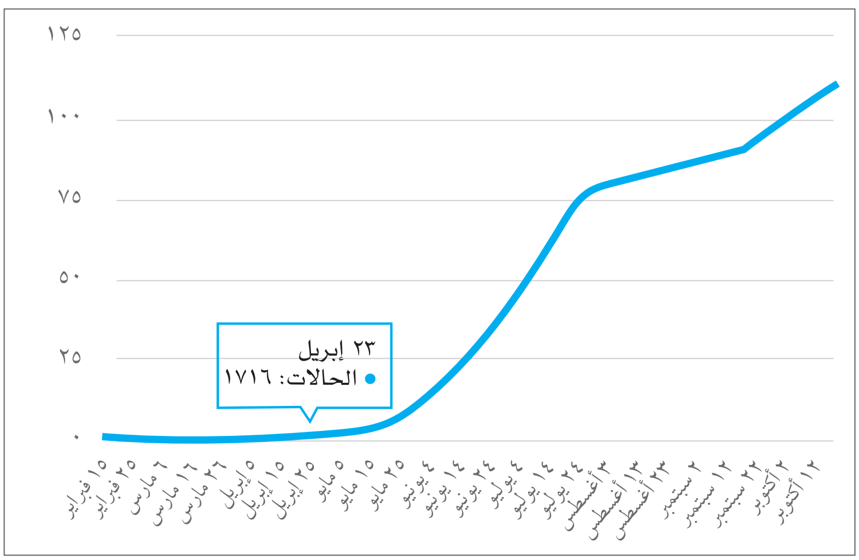
ب ص = $س^{٣}$ + $س^{٢}$ + ١

ج ص = $-\frac{١٦}{س^{٢}}$

الوحدة الخامسة عشرة: النموّ الأُسّي والاضمحلال الأُسّي



كوفيد–١٩ هو فيروس كورونا الذي سبَّب جائحة عالمية في العام ٢٠٢٠م، حيث انتشر بسرعة في مختلف أنحاء العالم، والتمثيل البياني التالي يعتبر مثالاً على النموّ الأسّي، حيث يتضاعف عدد الحالات كل ثلاثة أيام أو أربعة، ولوقف ازدحام المُستشفيات والأعباء على الأطباء بسبب هذه الحالات، لجأت دول كثيرة إلى تحديد فترة إغلاق تام، تمّ خلالها إغلاق المدارس والمطاعم وأماكن العمل والمتاجر، وسُمح للناس فقط بالتنقُّل من أجل شراء المستلزمات اليومية، وقد ساعدت هذه الإجراءات على ضبط انتشار الفيروس.



المصدر: https://www.worldometers.info/coronavirus/country/oman/

تمثيل بياني يبيّن عدد المصابين بفيروس كوفيد–١٩ في سلطنة عُمان من ١٥ فبراير ٢٠٢٠ م إلى ١٢ أكتوبر ٢٠٢٠ م.

المُفردات

- الأُسّي Exponential
- النموّ الأسّي Growth
- الاضمحلال الأسّي Decay

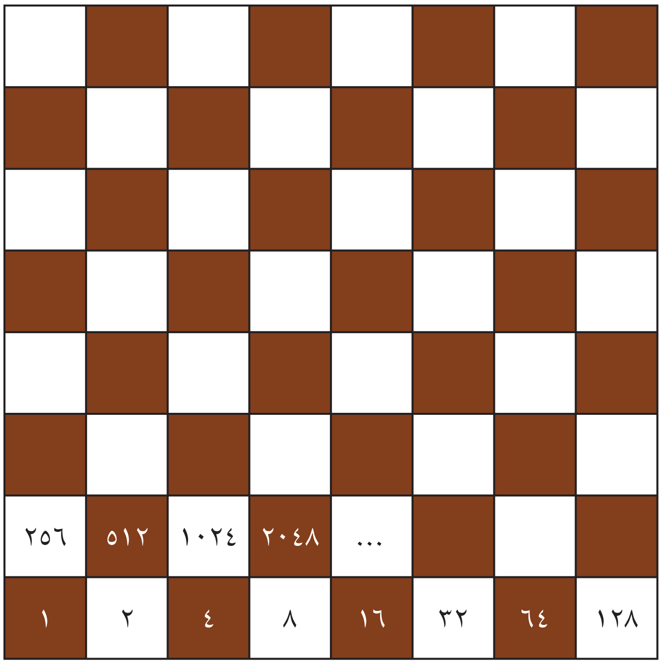
سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تُميّز التمثيلات البيانية لدوال أُسّية وتفسرها.
- تستخدم طرق التمثيل البياني لتجد حلولاً تقريبية لمُعادلات تتضمَّن أُسسًا.
- ترسم التمثيلات البيانية التي تمثّل دوالّ النموّ الأسّي والاضمحلال الأسّي وتُفسِّرها.
- تستخدم دوالّ النموّ الأسّي والاضمحلال الأسّي في مواقف من الحياة اليومية.

١٥-١ فهم النموّ الأُسّي والاضمحلال الأُسّي

تُروى قصة قديمة عن قائد أراد أن يكافئ مُخترِع لعبة الشطرنج، فسأله عن المكافأة التي يقترحها، فطلب المُخترِع أن يُعطى بعض حبوب الأرز بوضع: حبّة واحدة في المُربَّع الأوَّل من لوحة الشطرنج، وحبَّتَين في المُربَّع الثاني، و٤ حبّات في المُربَّع الثالث، و٨ حبّات في المُربَّع الرابع، وهكذا ... بمضاعفة العدد كلّ مرة.

إليك شكل لوحة الشطرنج، وقد وُضِّح عليها عدد حبوب الأرز في عدد قليل من المُربَّعات:



أصبح عدد حبوب الأرز كبيرًا بسرعة هائلة، فإذا احتوى المُربَّع الأوَّل على حبّة أرُزّ واحدة، فإن المُربَّع الحادي عشر سيحتوي على ١٠٢٤ حبّة أرُزّ، وإذا قرَّبنا هذا العدد إلى ١٠٠٠، نلاحظ الأمر الآتي: عندما نزيد عدد المُربَّعات بمقدار ١٠، فإننا نضرب عدد حبوب الأرُزّ في ذلك المُربَّع في ١٠٠٠ تقريبًا.

سوف يحتوي المُربَّع الحادي والعشرون على حوالي ١٠٠٠٠٠٠ حبّة أرُزّ،

والمُربَّع الحادي والثلاثون على حوالي ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠ حبّة أرُزّ،

والمُربَّع الحادي والأربعون على حوالي $١٠^{١٢}$ حبّة أرُزّ،

والمُربَّع الحادي والخمسون على حوالي $١٠^{١٥}$ حبّة أرُزّ،

والمُربَّع الحادي والستّون على حوالي $١٠^{١٨}$ حبّة أرُزّ

وبالتالي سوف يصبح العدد كبيرًا جدًّا، حيث أنه إذا جمعنا كمّيات الأرُزّ الموضوعة على اللوحة سوف يصبح العدد حوالي $١٫٨ \times ١٠^{١٩}$ حبّة أرُزّ، وهذا عدد ضخم من حبّات الأرُزّ.

مُلخَّص قوانين الأُسس

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$، عند ضرب الحدود اجمع الأُسس.

$س^{م} \div س^{ن} = س^{م-ن}$، عند قسمة الحدود اطرح الأُسس.

$(س^{م})^{ن} = س^{من}$، عند إيجاد قوى القوى اضرب الأُسس.

$س^{٠} = ١$، أيّ قيمة (غير الصفر) مرفوعة لقوى ٠ تساوي ١

$س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$، (حيث س $\neq$ ٠)

التغيُر الأسّي

يحدث التغيُر الأسّي عندما نضرب في العدد نفسه مرَّة تلو الأخرى بحيث أنه:

إذا كان العدد أكبر من ١ يحدث نمو أسّي، (أي أن العدد يزداد).

إذا كان العدد بين صفر وواحد يحدث اضمحلال أُسّي (أي أن العدد ينقص).

يُبيّن الجدول الآتي قيَمًا للدوال الأسّية: $٢^{س}$، $٥^{س}$، $١٠^{س}$ لبعض قيَم س:

س	⁻٣	⁻٢	⁻١	٠	١	٢	٣
$٢^{س}$	٠,١٢٥	٠,٢٥	٠,٥	١	٢	٤	٨
$٥^{س}$	٠,٠٠٨	٠,٠٤	٠,٢	١	٥	٢٥	١٢٥
$١٠^{س}$	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠

ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين صفوف الجدول أعلاه؟

لاحظ أنه كلما ازدادت قيمة س، تزداد قيَم $٥^{س}$، $١٠^{س}$ بسرعة كبيرة، وهذه أمثلة على النموّ الأسّي.

انظر إلى جدول القيَم التالي الذي يُبيّن قيَم $(\frac{١}{٢})^{س}$، $(\frac{١}{٥})^{س}$، $(\frac{١}{١٠})^{س}$ لقيَم س من ⁻٣ إلى ٣:

س	⁻٣	⁻٢	⁻١	٠	١	٢	٣
$(\frac{١}{٢})^{س} = (٠,٥)^{س}$	٨	٤	٢	١	٠,٥	٠,٢٥	٠,١٢٥
$(\frac{١}{٥})^{س} = (٠,٢)^{س}$	١٢٥	٢٥	٥	١	٠,٢	٠,٠٤	٠,٠٠٨
$(\frac{١}{١٠})^{س} = (٠,١)^{س}$	١٠٠٠	١٠٠	١٠	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١

لاحظ أنه كلما ازدادت قيمة س، تتناقص قيم $(\frac{١}{٥})^{س}$، $(\frac{١}{١٠})^{س}$ بسرعة كبيرة، وهذه أمثلة على الاضمحلال الأسي.

من خلال مقارنة جدولَي القيَم السابقين، ستجد أن الأعداد في كلّ صف هي نفسها، ولكنْ بترتيب عكسي.

مثـــال ١

في المُتتالية (١,٦)ن

أ عند أيّ عدد صحيح من قيَم ن ستتجاوز المُتتالية العدد ١٠؟

ب متى ستتجاوز المُتتالية العدد ٥٠٠ لأوَّل مرّة؟

الحــلّ:

أ

ن	(١,٦)ن
١	١,٦
٢	٢,٥٦
٣	٤,٠٩٦
٤	٦,٥٥٤
٥	١٠,٤٩

ستتجاوز قيمة المتتالية العدد ١٠ عندما ن = ٥

اضرب الحد السابق في العدد ١,٦ (استخدم الآلة الحاسبة بنقر المفتاح × ١,٦، كرّر العمليّة، حتى تتجاوز الإجابة ١٠).

ب

(١,٦)١٠ = ١١٠

(١,٦)١٥ = ١١٥٣

(١,٦)١٣ = ٤٥٠

(١,٦)١٤ = ٧٢١

تتجاوز المتتالية (١,٦)ن القيمة ٥٠٠ أوَّل مرَّة عندما ن = ١٤

حاول مع بعض قيَم ن. إذا كانت الإجابة صغيرة جدًّا، حاول مع قيمة أكبر لـ ن، وهكذا حتى تصل إلى القيمة المطلوبة.

تمارين ١٥-١

١) افترض أن مُخترِع لعبة الشطرنج طلب أن تُضرَب حبوب الأرُزّ في العدد ٣ كلّ مرة، عندئذ ستبدأ المُتتالية في الحدود ١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ...

كم حبَّة أرُزّ سوف يحتوي:

أ المُربَّع السادس؟

ب المُربَّع الحادي عشر؟

٢) **أ** أكمل جدوَل القيَم التالي لقوى العدد ٤ وقوى العدد $\frac{١}{٤}$:

س	$^{-}٣$	$^{-}٢$	$^{-}١$	٠	١	٢	٣
$٤^{س}$	٠,٠١٥٦٢٥					١٦	
$(\frac{١}{٤})^{س} = (٠,٢٥)^{س}$	٦٤						

ب ما الرابط بين قيَم صفَّي الجدوَل؟

٣) لديك مُتتاليتان: الحد العامّ للمُتتالية (أ) هو $٤ن^{٣}$، والحد العامّ للمُتتالية (ب) هو $٣^{ن}$. ويبيِّن الجدول التالي الحدود الأوَّلى في كلّ من المُتتاليتَين، بحيث تلاحظ أن قيَم $٤ن^{٣}$ أكبر من قيَم $٣^{ن}$:

ن	$٤ن^{٣}$	$٣^{ن}$
١	٤	٣
٢	٣٢	٩
٣	١٠٨	٢٧
٤		
٥		

عند أي قيمة للعدد الصحيح ن ستصبح قيَم $٣^{ن}$ أكبر من $٤ن^{٣}$ لأوَّل مرَّة؟

٤) في المُتتالية $(١,١)^{ن}$، حيث ن عدد صحيح:

أ أوجد قيمة ن عندما يكون $(١,١)^{ن}$ أكبر من ٢ لأول مرّة.

ب أوجد قيمة ن عندما يكون $(١,١)^{ن}$ أكبر من ٢٠ لأول مرّة.

١٥-٢ التمثيلات البيانية للنمو الأُسّي والاضمحلال الأُسّي

يقطع التمثيل البياني الأسّي في صورة $ص = أ^{س}$ دائمًا المحور الصادي في النقطة (٠، ١) لأن $أ^{٠} = ١$ لكل قيَم أ (أ $\neq$ ٠). (يجب أن تتذكّر ذلك من قوانين الأسس).

نجد تطبيقات **النموّ الأُسّي** في كثير من المواقف الحياتية، حيث أن ازدياد كمّية ما يتمّ بنسبة مئوية ثابتة في زمن مُحدَّد، وتُعدّ مواضيع النموّ السكّاني والفائدة المُركَّبة (التي سوف تدرسها في الوحدة ١٧) أمثلة على النموّ الأسّي.

تُسمّى الدوال في صورة $ص = أ^{س}$ (حيث أ عدد صحيح موجب) الدوال الأُسّية.

يتَّخذ التمثيل البياني للدالّة الأسّيّة $ص = أ^{س}$ شكل منحنى يرتفع بسرعة كلّما تحرَّك من اليسار إلى اليمين؛ ويُسمّى ذلك نموًّا أسّيًّا، وكلما أصبحت قيمة س سالبة أكثر، اقترب المنحنى أكثر فأكثر من المحور السيني، لكنه لا يقطعه أبدًا.

أما بالنسبة للتمثيل البياني للدالّة الأسيّة $ص = أ^{-س}$ فهو منحنى يهبط بسرعة كلما تحرَّك من اليسار إلى اليمين؛ ويُسمّى ذلك اضمحلالاً أُسّيًّا.

مثـــال ٢

أ) أكمل جدوَل القيَم التالي للدالّة $ص = ٢^{س}$ في الفترة $-٢ \leqslant س \leqslant ٤$:

س	-٢	-١,٥	-١	-٠,٥	٠	١	٢	٣	٤
ص									

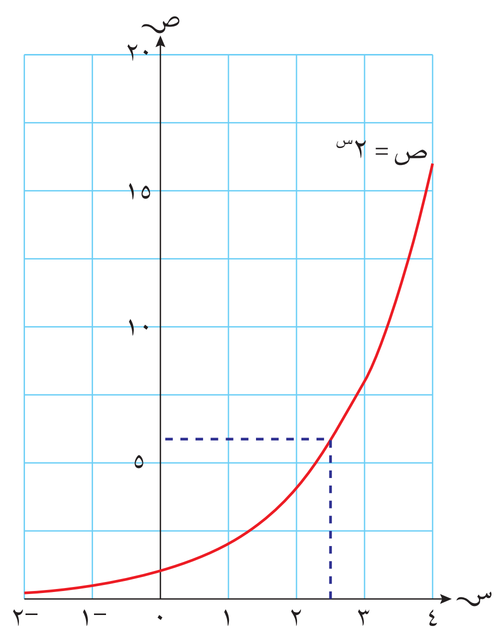
ب) استخدم التمثيل البياني لتجد قيمة $٢^{٢,٥}$

الحـــلّ:

أ)

س	-٢	-١,٥	-١	-٠,٥	٠	١	٢	٣	٤
ص	٠,٢٥	٠,٣٥	٠,٥	٠,٧١	١	٢	٤	٨	١٦

عيّن النقاط لترسم التمثيل البياني.



ب	$٢^{٢,٥} = ٥,٧$	سوف تلاحظ من التمثيل البياني أن ص = ٥,٧ عندما س = ٢,٥

مثــال ٣

أ ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = $٣^{س}$ على مستوى إحداثي في الفترة $-٢ \leqslant$ س < ٢

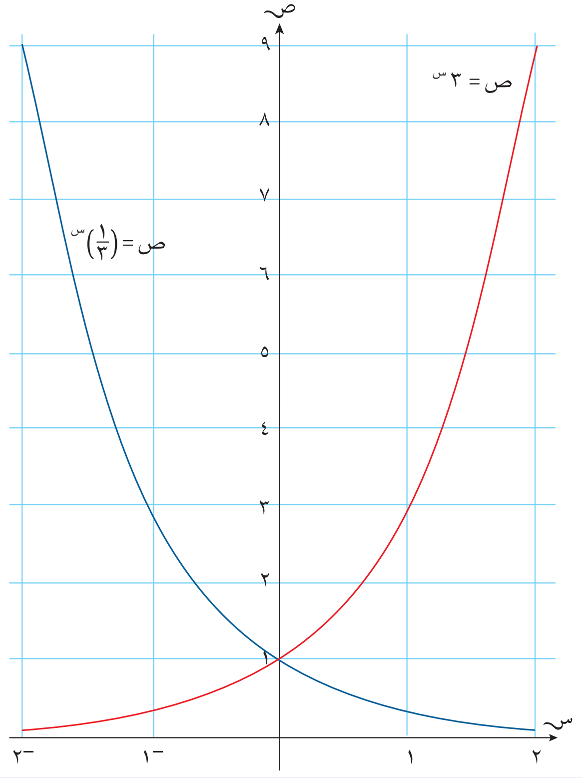
ب ارسم على نفس المستوى الإحداثي في الجُزئية (أ)، التمثيل البياني للدالّة ص = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$.

ج صِف التماثُل في التمثيلَين البيانيَّين اللذَين رسمتهما.

د أين يتقاطع التمثيلان البيانيَّان؟

الحــلّ:

أ ، ب



يمكنك إنشاء جدول قيَم (كما فعلت في المثال ٢) ليساعدك على رسم التمثيل البياني.
يُبيّن المُنحنى الأحمر ص = $٣^{س}$
يُبيّن المنحنى الأزرق ص = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

ج كلّ منهما انعكاس للآخر، والمحور الصادي هو محور التماثُل.

د يتقاطعان عند النقطة (٠، ١).

عندما تتَّخذ الدالَّة الأسّية الصورة: ص = ب × أ ^{س}، ينبغي إيجاد قيمة أ ^{س} أوَّلاً، ومن ثم ضرب الناتج في ب.

مثــال ٤

تتدلّى على أغصان شجرةِ كرز ١٢٨ ثمرة، إذا كانت العصافير تأكل نصف الثمار المتوفِّرة كلّ يوم. متى ستبقى ثمرة واحدة على الشجرة؟

الحــلّ:

ن	١٢٨ × (٠,٥)^{ن}
١	٦٤
٢	٣٢
٣	١٦
٤	٨
٥	٤
٦	٢
٧	١

ستبقى ثمرة كرز واحدة على الشجرة في اليوم السابع.

استخدم ص = ب × أ^{ن}، حيث ب عدد ثمرات الكرز عند البداية (١٢٨)، أ التغيُّر كلّ يوم، ن عدد الأيّام.

وهنا يجب أن نشير إلى أنه يوجد لديك طريقتان لإظهار الاضمحلال الأسّي:

- يمكن أن نستخدم: أ^{س}، حيث ٠ < أ < ١
- أو: أ$^{-س}$، حيث أ > ١

مثــال ٥

بيّن أن ٥٦ × ٢$^{-س}$، ٥٦ × (٠,٥)^{س} تُعطيان نفس الإجابة لقيَم س من ٠ إلى ٦

الحــلّ:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
٥٦ × ٢$^{-س}$	٥٦	٢٨	١٤	٧	٣,٥	١,٧٥	٠,٨٧٥
٥٦ × (٠,٥)^{س}	٥٦	٢٨	١٤	٧	٣,٥	١,٧٥	٠,٨٧٥

تُبيِّن قوانين الأسس صحّة نتائج الجدول في مثال ٥، حيث أن: ٢$^{-٥}$ = $\frac{١}{٢^{٥}}$ = $(\frac{١}{٢})^{٥}$

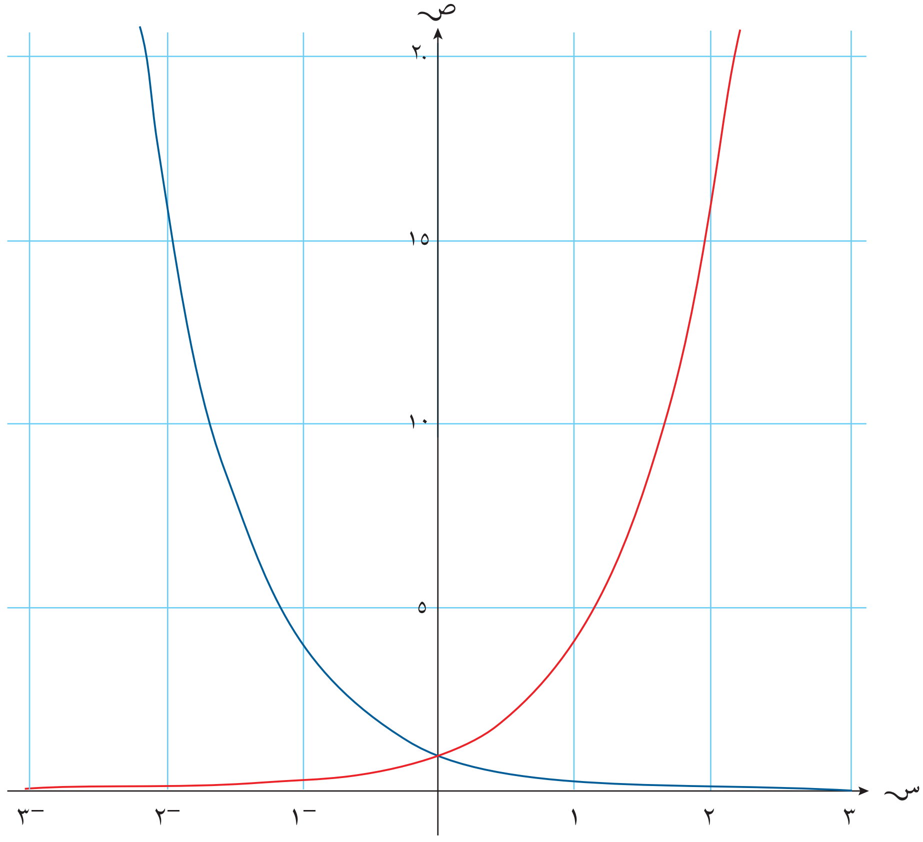
تمارين ١٥-٢

١) أ انسخ جدوَل الدالّة ص = (١,٥)^{س} وأكمله (قرّب الإجابة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية عند الضرورة).

س	‾٣	‾٢	‾١	٠	١	٢	٣
ص			٠,٦٦٧			٢,٢٥	

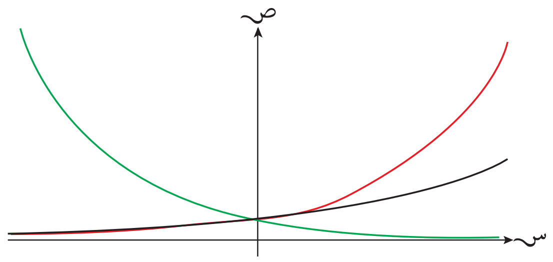
ب ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = (١,٥)^{س}.

٢) يُبيّن التمثيل البياني الأحمر للدالّة ص = ٤^{س}، ما هي دالّة التمثيل البياني الأزرق؟



٣) انظر إلى التمثيلات البيانية التالية، وطابق بين كلّ دالّة والتمثيل البياني المُلوَّن المناسب لها:

أ ص = ٢^{س} ب ص = (٠,٣)^{س} ج ص = ٣^{س}



٤) أ ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = $٥^{س}$ في الفترة ⁻٢ ⩽ س ⩽ ٣، قرّب القيَم إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين عند الضرورة.

ب ارسُم على نفس المستوى الإحداثي التمثيل البياني للدالّة ص = $٥^{-س}$ في الفترة ⁻٢ ⩽ س ⩽ ٢، قرّب القيَم إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين عند الضرورة.

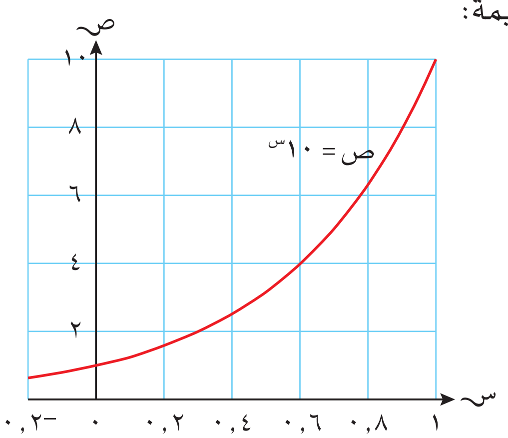
ج ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالّة ص = $٥^{س}$ والتمثيل البياني للدالّة ص = $٥^{-س}$؟

٥) استخدم التمثيل البياني المجاور لتجد قيمة:

أ $١٠^{٠,٣}$

ب $١٠^{-٠,١}$

ج انسخ التمثيل البياني مُستخدِمًا ورقة شفّافة، وارسم مستقيمًا لحلّ المعادلة $١٠^{س}$ = ٨ − ٥س



٦) ترتفع درجة حرارة معدن ما في فرن انصهار وفق دالّة أسّية، كما يعرض الجدول أدناه. ارسم التمثيل البياني لتوضِّح ذلك:

الزمن (دقيقة)	٠	١	٢	٣	٤
درجة الحرارة (س°)	٥	١٥	٤٥	١٣٥	٤٠٥

تظهر هذه الأشكال مختلفة عن تلك التي تعوَّدت التعامُل معها، لأن الدالّة التي تصف درجة الحرارة مع الزمن هي د = ٥ × $٣^{ن}$، حيث د درجة الحرارة، ن الزمن بالدقائق.

٧) تبيّن أن عدد الحشرات في إحدى المدن يزداد بصورة أسّية. يُبيّن الجدول التالي التغيُّر في عددها:

الزمن (شهر)	٠	١	٢	٣	٤
عدد الحشرات	١٠٠٠	٢٠٠٠	٤٠٠٠	٨٠٠٠	١٦٠٠٠

أ ارسم تمثيلاً بيانيًّا يُمثِّل الزيادة في عدد الحشرات مع الزمن.

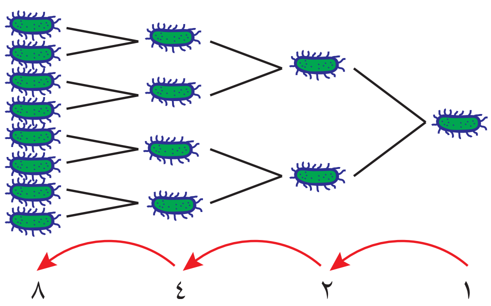
ب متى سيصل عدد الحشرات إلى ١٠٠٠٠؟ استخدم التمثيل البياني لإيجاد الإجابة.

ج كم سيكون عدد الحشرات بعد ستة أشهر، إذا استمرت الزيادة بنفس المُعدَّل؟

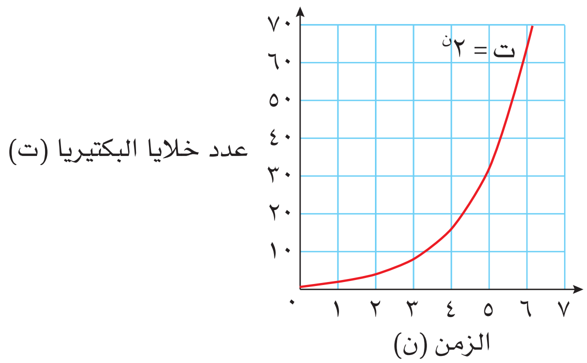
طبِّق مهاراتك

تتضاعف الخلايا البكتيرية بصورة أسيّة، حيث أن خليّتها تنقسم إلى خليَّتَين، ثم تنقسم كلّ من الخليَّتَين لتنتج خليَّتَين إضافيتَين، وهكذا.

٨) يمكن التعبير عن عدد خلايا البكتيريا مع مرور الزمن بالصيغة ت = ٢ن (ن هي الفترة الزمنية).



يُبيّن التمثيل البياني التالي الزيادة في عدد خلايا البكتيريا خلال ست ساعات:



أ) ما عدد خلايا البكتيريا بعد ساعة واحدة؟

ب) ما الزمن الذي تستغرقه البكتيريا ليتجاوز عددها ٤٠ خلية؟

ج) ما عدد خلايا البكتيريا بعد ست ساعات؟

د) إذا استمرّ نمو خلايا البكتيريا بنفس المعدَّل، فمتى في رأيك يتجاوز عددها المليون؟

٩) يتضاعف عدد خلايا البكتيريا في معمل ما كلّ دقيقة، حيث كان عددها عند الساعة ٨:٠٥ صباحًا ٣٢ خلية بكتيرية.

أ) ما عدد خلايا البكتيريا عند الساعة ٨:١٥؟

ب) إذا استخدم عامل التنظيف مبيدًا عند الساعة ٨:١٥ صباحًا، وقتل ٩٩,٩٪ من خلايا البكتيريا، واستمرت الخلايا المتبقية في التضاعف، فكم سيكون عددها عند الساعة ٨:٣٠ صباحًا؟

٣-١٥ تطبيقات حياتية على النموّ الأُسّي والاضمحلال الأُسّي

يمكن التعبير عن النموّ الأسّي والاضمحلال الأسّي باستخدام الصيَغ التالية:

النموّ: ص = أ$(١ + ر)^{ن}$

الاضمحلال: ص = أ$(١ - ر)^{ن}$

حيث أ القيمة الأصلية أو الأساسية؛ ر هي مُعدَّل التغيُّر، ويُكتب بصورة عدد عشري؛ ن هي الفترة الزمنية.

مثــال ٦

استثمر محمود مبلغ ١٠٠ ريال عُماني بربح نسبته ٨٪ في السنة. أوجد قيمة الاستثمار مُقرَّبة إلى أقرب بيسة بعد مرور ١٥ سنة.

الحــلّ:

القيمة = أ$(١ + ر)^{ن}$	اكتب صيغة النموّ الأسّي
= ١٠٠$(١ + ٠,٠٨)^{١٥}$	عوّض عن قيَم أ ، ر، ن بالقيَم المُعطاة
= ١٠٠$(١,٠٨)^{١٥}$	بسّط ما بين القوسَين
= ٣١٧,٢١٦٩١١٤	أوجد الناتج
قيمة الاستثمار ٣١٧,٢١٧ ريالاً عُمانيًّا (مُقرَّبة إلى أقرب بيسة)	

مثــال ٧

تتناقص قيمة جهاز حاسوب جديد بنسبة مئوية مقدارها ٣٠٪ في العام. إذا كان سعر الجهاز الجديد ٤٠٠ ريال عُماني، فكم سيبلغ سعره بعد عامَين؟

الحــلّ:

القيمة = أ$(١ - ر)^{ن}$	اكتب صيغة الاضمحلال الأسّي
= ٤٠٠$(١ - ٠,٣)^{٢}$	عوّض عن قيَم أ ، ر، ن بالقيَم المعطاة
= ٤٠٠$(٠,٧)^{٢}$	بسّط ما بين القوسَين
= ١٩٦	أوجد الناتج
سعر الحاسوب بعد عامَين ١٩٦ ريالاً عُمانيًّا.	

تمارين ١٥-٣

١) تمّ تقدير عدد سكان العالم في أغسطس ٢٠١٠م، فبلغ ٦,٨٥٩ مليارات نسمة، بحيث يزداد نموّ عدد سكان العالم بنسبة مئوية مقدارها ١,١٣٪ سنويًّا؛ إذا استمرّ هذا النموّ بنفس المُعدَّل، قدّر عدد سكان العالم في شهر أغسطس من عام:

أ ٢٠١٥م　　ب ٢٠٢٠م　　ج ٢٠٢٥م

٢) في عام ٢٠١٠م تمّ تقدير عدد دببة الباندا الضخمة في الصين فبلغ ١٦٠٠ دبّ، قدِّر عددها في عام ٢٠٢٥م إذا كان:

أ مُعدَّل النموّ لعدد دببة الباندا الضخمة يساوي ٠,٥٪

ب مُعدَّل الاضمحلال لعدد دببة الباندا الضخمة يساوي ٠,٥٪

٣) يتضاعف عدد الميكروبات في مختبر ما كلّ يوم، حيث قُدّر عددها في بداية الفترة فكان ١٠٠٠٠٠٠ ميكروب:

أ أكمل الجدول التالي لتُبيِّن النموّ في عدد الميكروبات.

الزمن (يوم)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الميكروبات الكلّي (مليون)	١	٢	٤						

ب ارسم تمثيلاً بيانيًّا يُبيّن معدَّل الزّيادة في عدد الميكروبات خلال ٨ أيام.

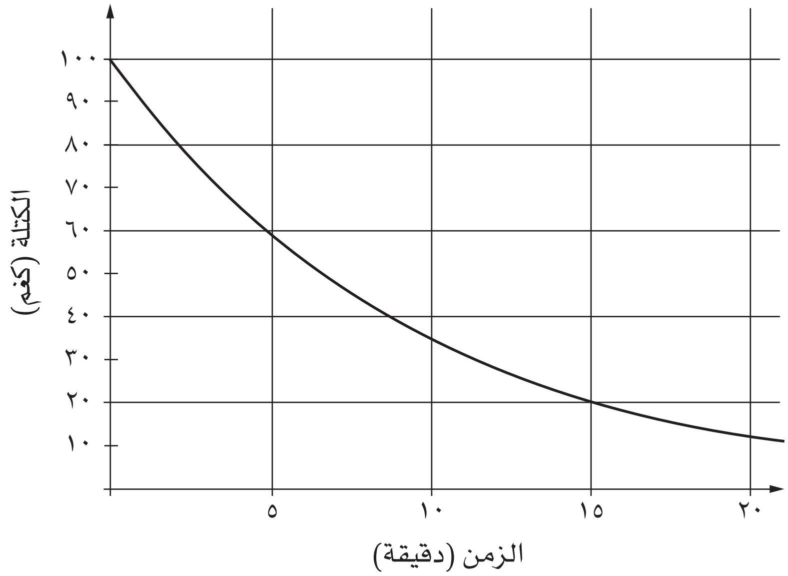
ج استخدم التمثيل البياني لتُحدِّد عدد الميكروبات بعد:

(١) ٢,٥ يوم

(٢) ٣,٦ أيام

د استخدم التمثيل البياني لتُحدِّد الزمن اللازم ليُصبح عدد الميكروبات ٢٠ مليونًا.

٤) يُبيّن التمثيل البياني التالي معدّل فقدان مادة نشطة إشعاعيًّا لكتلتها بمرور الزمن:



أ إذا كان نصف عمر المادة هو الزمن المُستغرَق لاضمحلال نصف كتلتها الأصلية، فما نصف عمر هذه المادة؟

ب ما كتلة المادة المُتبقِّية بعد مرور ٢٠ دقيقة؟

٥) ينقص سعر سيّارة ما بنسبة مئوية مقدارها ٨٪ كلّ سنة. فإذا كان سعرها وهي جديدة ٤٠٠٠ ريال عُمانيّ، فكم سيكون سعرها بعد:

أ سنة واحدة؟

ب ٣ سنوات؟

ج ٨ سنوات؟

د ن سنة؟

٦) يتناقص إجمالي عدد طلّاب جامعة ما بنسبة مئوية مقدارها ٠٫٦٪ سنويًّا، فإذا كان عددهم في عام ٢٠١٩م ٧٤٠٠ طالب:

أ فكم سيكون عددهم في عام ٢٠٢٥م إذا استمرّ التناقص بنفس المُعدَّل؟

ب متى سيصبح عدد طلّاب هذه الجامعة أقلّ من ٧ آلاف طالب لأوّل مرّة؟

٧) تنمو مُستعمرة بكتيرية بنسبة مئوية مقدارها ٥٪ لكل ساعة. متى سيتضاعف حجم المُستعمَرة لأول مرة؟

مُلَخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- الدالّة الأُسّيَّة هي دالّة في صورة ص = أ^{س}.
والدوال الأُسّيَّة تُنتِج مُنحنيات شديدة الانحدار.
- يمكن تمثيل مُنحنيات الدوال الأُسّيَّة بإنشاء جدول قيَم وتعيين النقاط في المُستوى الإحداثي.
- التمثيل البياني للدالّة ص = أ^{س}، منحنى يتَّجه إلى الأعلى كلّما اتَّجهنا يمينًا عندما تكون أ $>$ ١؛ ويتَّجه إلى الأسفل كلما اتَّجهنا يمينًا عندما تكون أ $<$ ١
- التمثيل البياني للدالّة ص = أ^{س} لا يمس المحور السيني أبدًا لأن أ^{س} $\neq$ ٠ (أ $\neq$ ٠).

يجب أن تكون قادرًا على:

- إنشاء جدول القيَم ورسم التمثيل البياني لدالة أسّية.
- استخدام التمثيل البياني لتحلّ مُعادلة أسّية.
- استخدام دوال النموّ الأسّي والاضمحلال الأسّي في المعاملات المالية والتغيُّر في عدد السكّان وغيرها من التطبيقات الحياتية.

تمارين نهاية الوحدة

١) أ أكمل جدول القيَم التالي، مقرِّبًا كل قيمة إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين.

س	⁻٢	⁻١	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص = $(١,٤)^{س}$									

ب ارسم التمثيل البياني للدالّة الأُسّيَّة ص = $(١,٤)^{س}$ استخدم تدرُّج المحورَين:
⁻٢ ≤ س ≤ ٦ ، ٠ ≤ ص ≤ ٨

ج ارسم التمثيل البياني للدالّة الخطّية ص = س + ١ على المُستوى الإحداثي نفسه.

د استخدم التمثيل البياني لتحلّ المُعادلة $(١,٤)^{س}$ = س + ١

٢) أ ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = $(١,٨)^{س}$، استخدم قيَم س من ⁻٢ إلى ٣

ب استخدم التمثيل البياني لتقدّر قيمة $(١,٨)^{٢}$

ج ما قيمة س التي تُحقِّق $(١,٨)^{س}$ = ٢؟

٣) أ في تفاعُل كيميائي، تُعطى كتلة المادة الكيميائية ك بالصيغة ك = $\frac{١٦٠}{٢^{ن}}$، حيث ن الزمن بالدقائق بعد البداية:

ن (دقيقة)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ك (غرام)	ع	٨٠	٤٠	٢٠	ف	٥	ر	١,٢٥

(١) أوجد قيم ع، ف، ر.

(٢) ارسم التمثيل البياني الذي يُبيِّن ك بدلالة ن، حيث ٠ ≤ ن ≤ ٧، باستخدام مقياس رسم حيث أن كل ٢ سم تُمثِّل دقيقة واحدة على المحور الأفقي (الزمن ن)، وكل ١ سم يُمثِّل ١٠ غرامات على المحور الرأسي (الكتلة ك).

ب مادة كيميائية أخرى في نفس التفاعُل كتلتها (م) غرام، حيث م = ١٦٠ − ك. عند أي قيمة لـ ن تتساوى كُتلتا المادتَين الكيميائيَّتَين؟

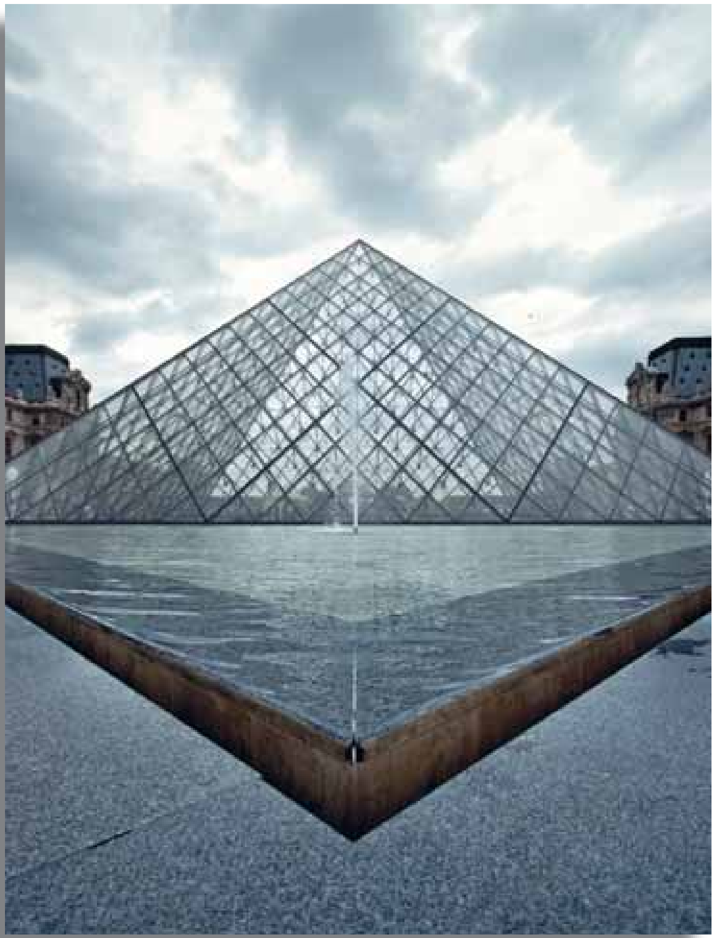
الوحدة السادسة عشرة: المساحة والحجم

المُفردات

- المُحيط Perimeter
- مُحيط الدائرة Circumference
- المساحة Area
- العدد غير النسبي Irrational number
- القطاع Sector
- القوس Arc
- نصف الدائرة Semi-circle
- المُجسَّم Solid
- الشبكة Net
- الرؤوس Vertices
- الوجه Face
- المساحة السطحية Surface area
- الحجم Volume
- القِمَّة Apex
- الراسم Slant height
- متوازي المستطيلات cuboid
- المنشور Prism
- المقطع العرضي Cross section
- الأسطوانة Cylinder
- الهرم Pyramid
- الكرة Sphere

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تحسب مساحة ومحيط الأشكال ثُنائية الأبعاد.
- تحسب مساحة ومحيط الشكل الهندسي الذي يمكنِ تقسيمه إلى مُضلّعين بسيطين أو أكثر.
- تحسب مساحة الدائرة ومحيطها.
- تحسب مساحة ومحيط القطاعات الدائرية.
- ترسم شبكة المُجسَّمات ثُلاثية الأبعاد.
- تحسب حجم المُجسَّم ومساحته السطحية.
- تحسب الحجم والمساحة السطحيّة لكل من الهرم والمخروط والكرة.



تعرض الصورة أعلاه هرمًا زجاجيًّا عند مدخل مُتحف اللوفر في باريس، يصل ارتفاعه إلى ٢٠,٦ م، وهو مثال على المُجسَّمات ثلاثية الأبعاد، كما يوجد هرم صغير مُعلَّق بشكل مقلوب يعمل كقبَّة ضوئية في ساحة أحد المُجمَّعات التجارية المُقابلة للمُتحف.

عندما ينطلق العدّاؤون في الجري حول المسار المُخصَّص للجري في المضمار، فإنهم لا يبدؤون من نفس نقطة الانطلاق، لأن مساراتهم مختلفة في الطول، ولكنَّ القدرة على إيجاد محيطات المسارات المختلفة تتيح لمُنظِّمي السباق بأن يحدِّدوا بداية كل مسار بحيث يركض كلّ متسابق نفس المسافة.

وفي موضوع آخر، تجد أن التعليمات على علبة الطلاء تُحدِّد المساحة التي سيُغطّيها الطلاء من الجدار أو السقف، لذا فإن قدرتك على حساب مساحات الجدران والأبواب تمكّنك من شراء علبة الطلاء المناسبة، وبالنسبة للحجوم، فإن معرفتك بها تساعدك على تقنين كمّية الماء المُستخدَمة في الاستحمام يوميًّا، وبالتالي ضبط الميزانية الشهرية المُخصَّصة لذلك.

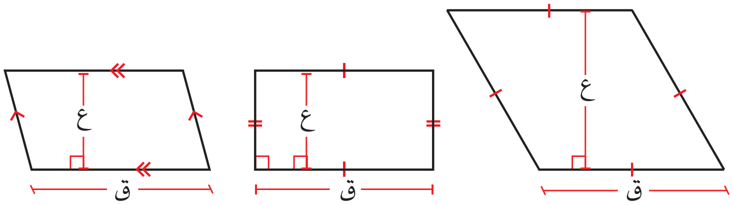
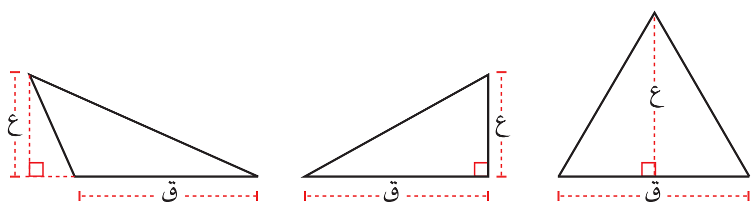
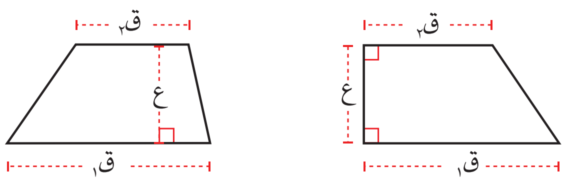
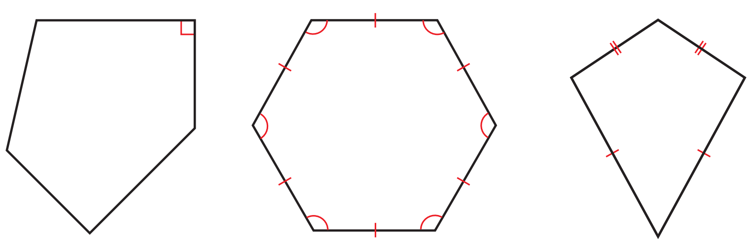
١٦-١ مُحيط ومساحة الأشكال ثُنائيَّة الأبعاد

المُضلَّعات

المُضلَّع هو شكل مُستوٍ (ثُنائيّ الأبعاد) له ثلاثة أضلاع أو أكثر.

محيط المُضلَّع يساوي مجموع أطوال أضلاعه، ويعبّر عن المسافة الكلّية حول المُضلَّع.

مساحة المُضلَّع تساوي مقدار الحيّز الذي يشغله المضلّع من الفراغ، ويوضّح الجدول التالي القوانين المستخدمة في حساب مساحة بعض المُضلَّعات:

أشكال ثُنائية الأبعاد	قوانين المساحة
أشكال رُباعية أضلاعها المُتقابِلة مُتوازية  المُعيّن - المُستطيل - مُتوازي الأضلاع	المساحة = ق ع
المُثلَّثات 	المساحة = $\frac{١}{٢}$ ق ع أو $\frac{\text{ق ع}}{٢}$
شبه المنحرف 	المساحة = $\frac{١}{٢}(ق_١ + ق_٢)\,ع$ أو $\frac{(ق_١ + ق_٢)ع}{٢}$
فيما يلي بعض الأمثلة على أشكال أخرى ثُنائيَّة الأبعاد:  الطائرة الورقية (الدالتون) - السداسي المنتظم - خماسي غير منتظم	يتم إيجاد المساحة بتقسيم الشكل ثنائي الأبعاد إلى أشكال أخرى يمكن حساب مساحتها مثل المُثلَّثات والأشكال الرُّباعيَّة.

رابط

عند دراسة أطوال سواحل جزيرة ما، يكون مجموع أطوال هذه السواحل مُساويًا لمُحيط الجزيرة.

مُساعَدة

يجب أن تعطي وحدة القياس للإجابة النهائية. ولكن قد تكون مربكة أحيانًا إذا استخدمت وحدات القياس خلال الحل.

وحدات قياس المساحة

إذا أُعطيت أبعاد الشكل بالسنتيمترات، فإن وحدة المساحة المستخدمة تكون بالسنتيمترات المُربَّعة ويُرمَز إليها بالرمز سم٢، وتستخدم الوحدة م٢ للتعبير عن الأمتار المُربَّعة والوحدة كم٢ للتعبير عن الكيلومترات المُربَّعة، وهكذا.

القياس	الوحدات المستخدمة	القيمة المكافئة للوحدة
الطول: طول (ارتفاع) مضلّع ما.	مليمتر (مم) سنتيمتر (سم) متر (م) كيلومتر (كم)	١٠ مم = ١ سم ١٠٠ سم = ١ م ١٠٠٠ م = ١ كم ١ كم = ١٠٠٠٠٠٠ مم
المساحة: مقدار الحيّز الذي يشغله شكل هندسي مستوٍ (ذو بُعدَين)، وتقاس دائمًا بالوحدات المُربَّعة.	مليمتر مُربَّع (مم٢) سنتيمتر مُربَّع (سم٢) متر مُربَّع (م٢) كيلومتر مُربَّع (كم٢) هكتار	١٠٠ مم٢ = ١ سم٢ ١٠٠٠٠ سم٢ = ١ م٢ ١٠٠٠٠٠٠ م٢ = ١ كم٢ ١ كم٢ = ١٠٠ هكتار ١ هكتار = ١٠٠٠٠ م٢

مثــال ١

اكتب كل قياس بوحدة القياس المطلوبة:

أ ٥ كم بالمتر ب ٣,٢ سم بالمليمتر ج ٢٠٠٠٠٠٠ سم٢ بالمتر المُربَّع

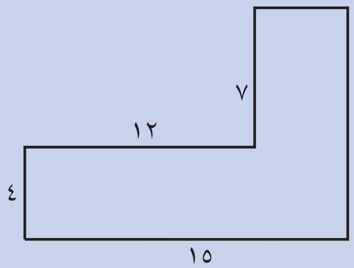
الحــلّ:

أ	١ كم = ١٠٠٠ م ∴ ٥ كم = ٥ × ١٠٠٠ = ٥٠٠٠ م	اكتب العلاقة بين الكيلومتر والمتر.
ب	١ سم = ١٠ مم ∴ ٣,٢ سم = ٣,٢ × ١٠ = ٣٢ مم	اكتب العلاقة بين السنتيمتر والمليمتر.
ج	م٢ = ١٠٠ سم × ١٠٠ سم = ١٠٠٠٠ سم٢ ∴ ٢٠٠٠٠٠٠ سم٢ = $\frac{٢٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠}$ = ٢٠٠ م٢	اكتب العلاقة بين المتر المُربَّع والسنتيمتر المُربَّع.

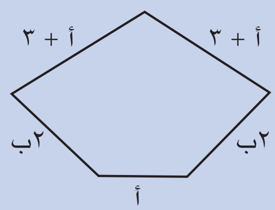
مثـــال ٢

أوجد محيط كل من الشكلَين التاليَين:

أ

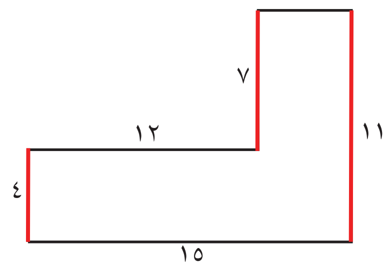


ب



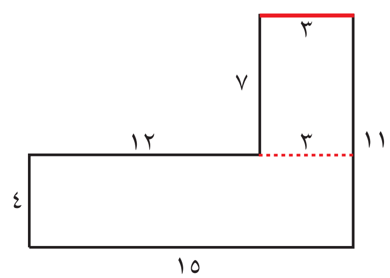
الحــلّ:

أ

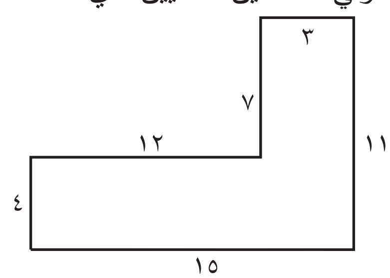


مجموع قياسَي طولَي الضلعَين يساوي ٧ + ٤ = ١١

طول الضلع الرأسي على جهة اليمين يساوي ١١



طول الضلع الأفقي في الأعلى يساوي الفرق بين طولَي الضلعَين الأفقيَّين، أي ١٥ − ١٢ = ٣



محيط الشكل = ١٥ + ١١ + ٣ + ٧ + ١٢ + ٤

= ٥٢

ابدأ أولاً مع الأضلاع الرأسية.

اجمع أطوال الأضلاع لتجد المحيط.

ب

محيط الشكل

= أ + ٣ + أ + ٣ + ٢ب + أ + ٢ب

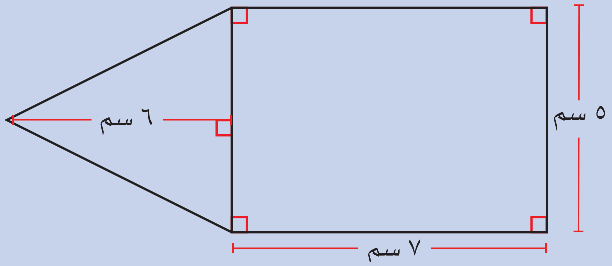
= ٣أ + ٤ب + ٦

اجمع أطوال كل أضلاع المُضلَّع.

بسّط.

مثــال ٣

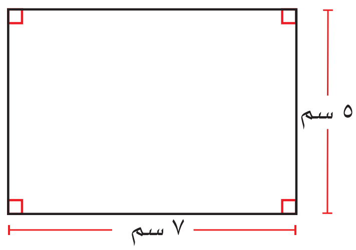
احسب مساحة الشكل التالي:



الحــلّ:

مساحة المستطيل = ق ع = ٧ × ٥ = ٣٥ سم^{٢}

يمكن تقسيم الشكل إلى مُضلَّعين بسيطَيْن: مُستطيل ومُثلَّث. أوجد مساحة كلّ شكل، ثم اجمعهما معًا.



المُستطيل

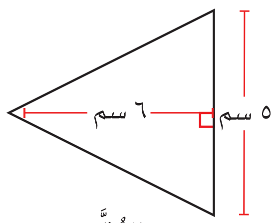
مساحة المُثلَّث

= $\frac{١}{٢}$ ق ع = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٦

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٠

= ١٥ سم^{٢}

المساحة الكلّيّة = ٣٥ + ١٥ = ٥٠ سم^{٢}



المُثلَّث

عوّض بقيَم كل من القاعدة والارتفاع بدلاً من ق، ع.

يمكن كتابة قانون مساحة المُثلَّث بعدة طرق:

$\frac{١}{٢}$ × ق × ع = $\frac{ق ع}{٢}$

أو = ($\frac{١}{٢}$ق) × ع

أو = ق × ($\frac{١}{٢}$ع)

اختر الطريقة الأنسب لك، ولا تنسَ أن تذكرها في سياق الحل.

لست مضطرًا إلى إعادة رسم الأشكال المُنفصلة، ولكن قد تجد ذلك مفيدًا لك.

سابقًا

قد تحتاج (عند هذه النقطة) إلى تذكُّر كيفية إعادة كتابة الصيَغ كما مر سابقًا في الوحدة ٦

مثــال ٤

مُثلَّث مساحته ٤٠ سم^{٢}، وطول قاعدته ٥ سم. أوجد ارتفاعه.

الحــلّ:

م = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع — استخدم قانون مساحة المُثلَّث.

٤٠ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ع — عوّض بقيمة ق المعطاة.

⇐ ٤٠ × ٢ = ٥ × ع — اضرب الطرفَين في ٢ للتخلُّص من الكسر.

⇐ ع = $\frac{٤٠ × ٢}{٥}$ = $\frac{٨٠}{٥}$ = ١٦ سم — أعد كتابة القانون بدلالة المُتغيِّر ع.

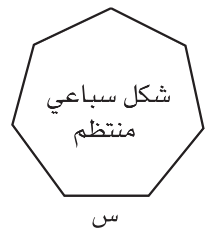
تمارين ١٦-١

رابط

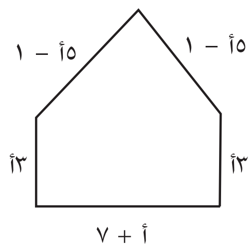
تتطلَّب الهندسة الزراعية التعامُل مع المحيط والمساحة والمُعدَّل. فغالبًا ما تُعطى مُعدَّلات تطبيقات الأسمدة بالكيلوغرامات لكل كيلومتر مُربَّع (الكيلومتر المُربَّع يساوي ١٠٠٠٠٠٠ م^{٢}). يُسبِّب تقليل السماد أو زيادته آثارًا خطرة على المحاصيل وعلى إنتاج الطعام.

١) أوجد محيط كلّ شكل من الأشكال التالية، وضع الناتج في أبسط صورة:

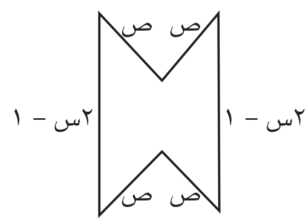
أ



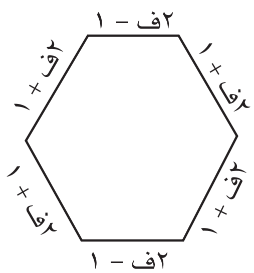
ب



ج

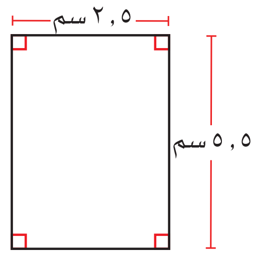


د

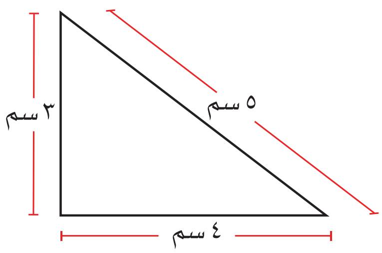


٢) أوجد محيط كلّ شكل من الأشكال التالية:

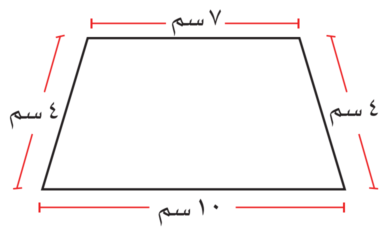
أ



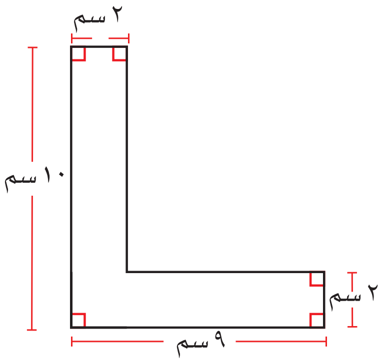
ب



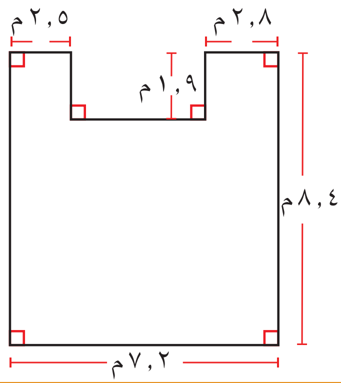
ج



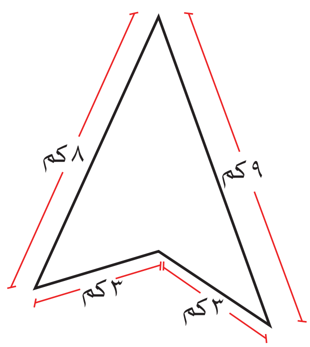
د



هـ

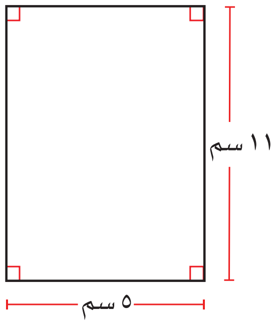


و

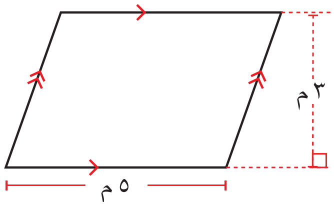


٣) أوجد مساحة كلّ شكل من الأشكال التالية:

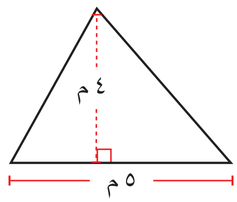
أ



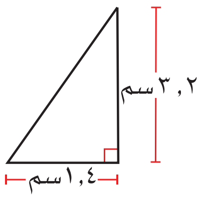
ب



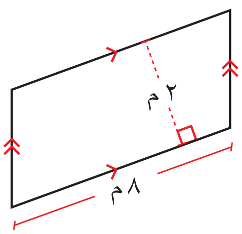
ج



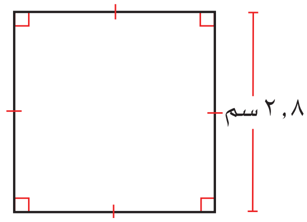
د



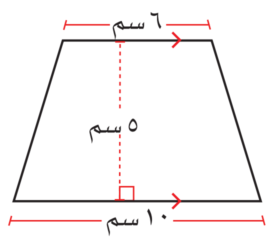
هـ



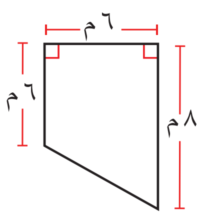
و



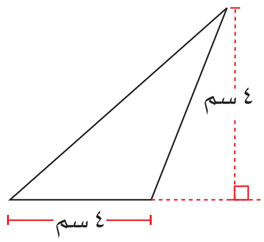
ز



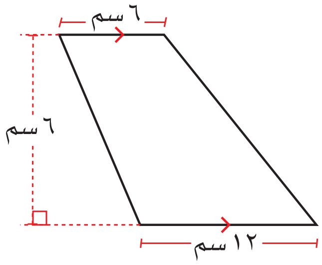
ح



ط



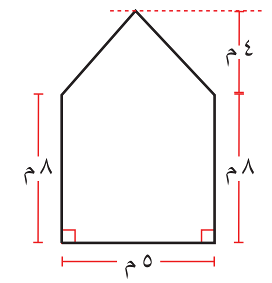
ي



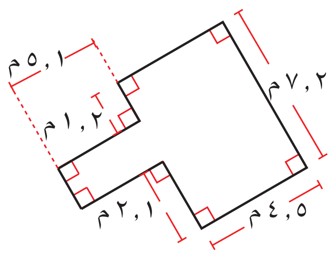
ارسم الأشكال البسيطة بطريقة مُنفصلة، ثم اوجد مساحة كلّ شكل على حدة، كما في المثال ٢

٤) أوجد المساحة الكلّية لكل شكل فيما يلي:

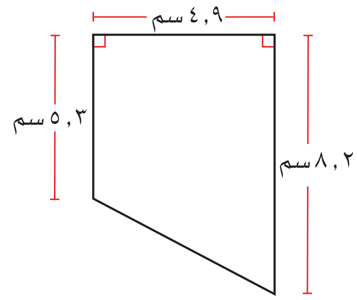
أ



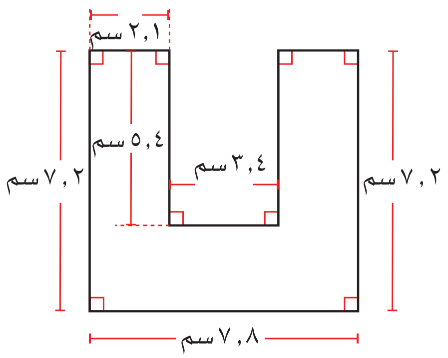
ب



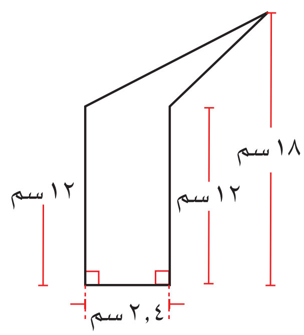
ج



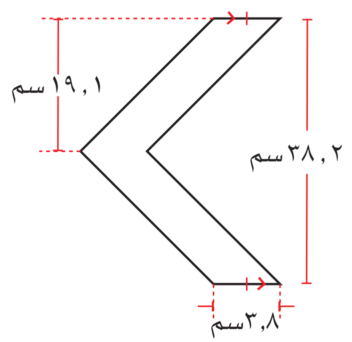
د



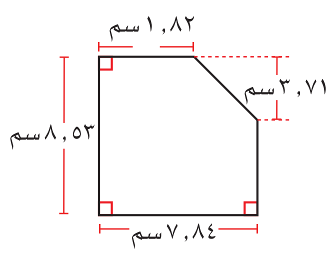
هـ



و



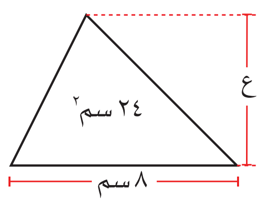
ز



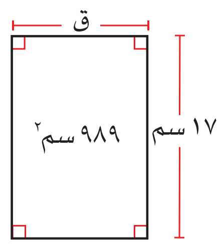
اكتب قانون المساحة لكلّ حالة. عوِّض القيَم التي تعرفها في الصيغة، ثمّ أعد كتابتها بدلالة القيمة المجهولة.

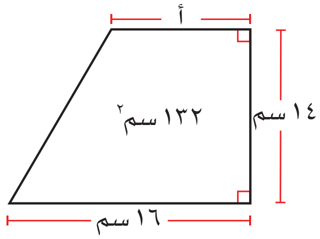
٥) أوجد قيمة البعد المجهول في كل شكل فيما يلي:

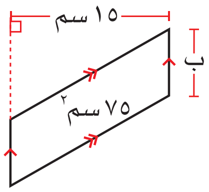
أ

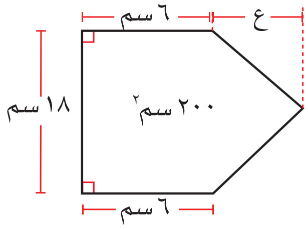


ب

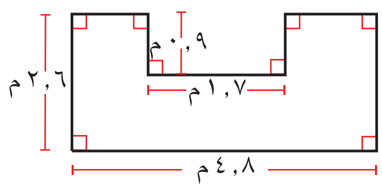


ج


د


هـ


٦) كم بلاطة مُستطيلة بُعداها ٢٠ سم في ٣٠ سم تلزمك لتبليط الساحة الأمامية المعروضة في الشكل التالي؟



٧) عند سُميّة مرآة مُربَّعة الشكل طول ضلعها ١٠ سم، وعند سميرة مرآة مُربَّعة تُغطّي ضعف المساحة التي تُغطّيها مرآة سُميّة. حدِّد أبعاد مرآة سميرة مُقرَّبًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين.

٨) ارسم شكلاً تقريبيًا لكلّ حالة من الحالات التالية وحدِّد الأبعاد المُعطاة عليه:

أ مُستطيلان لهما المُحيط نفسه ويختلفان في المساحة.

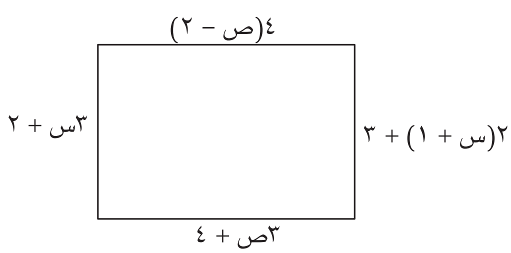
ب مُستطيلان لهما المساحة نفسها ويختلفان في المُحيط.

ج مُتوازيا أضلاع لهما المُحيط نفسه ويختلفان في المساحة.

د مُتوازيا أضلاع لهما المساحة نفسها ويختلفان في المُحيط.

٩) أوجد مساحة ومُحيط المُستطيل التالي:

سوف تحتاج إلى استخدام الجبر الذي تعلّمته في الوحدة ٦

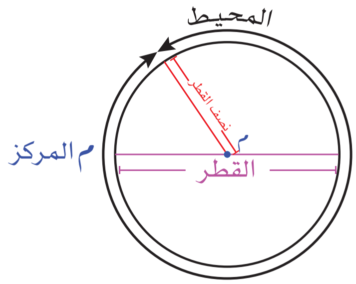


١٦-٢ مُحيط الدائرة ومساحتها

الدائرة شكل من الأشكال الهندسية الأساسية، حيث نرى الدائرة في كثير من المواقف الحياتية اليومية، فهي تظهر عند قيادة السيّارة، وفي مسارات الجري في السباق، وعند ممارسة رياضة كُرة السلة.

سابقًا

تعلّمت أجزاء الدائرة في الوحدة ٤؛ يُذكّرك المُخطَّط أدناه ببعض هذه الأجزاء. القطر مُستقيم يمرّ بمركز الدائرة، ويقسمها إلى نصفَين متساويَين.



١٦-٢-أ مُحيط الدائرة

لاحظ أن القطر (ق) = ٢ × نصف القطر (نق)، وقد عرف الأغريق القُدماء أنهم يستطيعون إيجاد مُحيط الدائرة بضرب القطر في عدد مُحدَّد، ويُعرَف هذا العدد بـ π وهو حرف يوناني يُلفَظ 'پاي' وقيمته تساوي تقريبًا ...٣,١٤١٥٩٢٦٥٤

يمكن إيجاد مُحيط الدائرة باستخدام قانون:

المحيط = π × القطر

= π × ق   (ق القطر)

= ٢ π × نق   (نق نصف القطر)

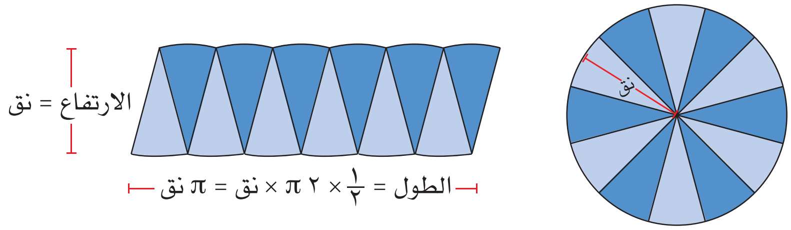
سابقًا

π عدد **غير نسبي**. لقد تمَّت مناقشة خصائص الأعداد غير النسبية في الوحدة ٢

١٦-٢-ب مساحة الدائرة

هناك صيغة بسيطة لإيجاد مساحة الدائرة. وفيما يلي طريقة تُبيّن كيف تم الوصول إلى هذه الصيغة:

اعتمد الدائرة المُبيَّنة في المُخطَّط أدناه، لقد تم تقسيمها إلى ١٢ جُزءًا متساويًا، وتم ترتيب هذه الأجزاء لتعطي المُخطَّط الأيسر:



بما أن أجزاء الدائرة صغيرة جدًّا، فإن الشكل يُشبِه إلى حد كبير مُتوازي أضلاع ارتفاعه يساوي نصف قطر الدائرة (نق)، وطوله يساوي نصف محيطها (π × نق).

وحيث أن قانون مساحة مُتوازي الأضلاع: م = ق ع، فإن:

مساحة الدائرة = $\frac{١}{٢}$ × ٢ π × نق × نق   (باستخدام قيَم ق، ع المُبيَّنة أعلاه)

= π نق^{٢} (بالتبسيط)

إذا جرَّبت ذلك بنفسك مع عدد أكبر من القطاعات الدائرية الصغيرة، فسوف تُلاحِظ أن الشكل (المُضلَّع) سيشبه إلى حدّ كبير المستطيل.

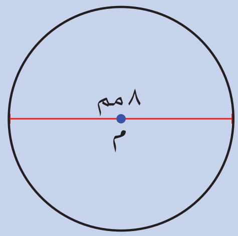
يُوضِّح ذلك (من دون أن يثبت) أن مساحة الدائرة تُعطى بالقانون: π نق^{٢}

سوف تُلاحظ في الأمثلة التالية كيفيَّة تطبيق هذه الصيَغ.

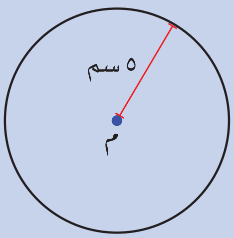
مثـال ٥

احسب مُحيط ومساحة كلّ من الدائرتَين التاليتَين، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية:

أ



ب



الحـل:

أ

المُحيط = π × ٨	المساحة = π × ٤^{٢}	المُحيط = π × القطر
= ...٢٥,١٣٢٧	= π × ١٦	المساحة = π × نق^{٢}
= ٢٥,١ مم	= ...٥٠,٢٦٥	نق = $\frac{ق}{٢}$
	= ٥٠,٣ مم^{٢}	

ب

المُحيط = π × ١٠	المساحة = π × ٥^{٢}	المحيط = ٢ π × نق
= ...٣١,٤١٥	= π × ٢٥	المساحة = π × نق^{٢}
= ٣١,٤ سم	= ...٧٨,٥٣٩	
	= ٧٨,٥ سم^{٢}	

استخدام الذاكرة في الآلة الحاسبة

تحتاج أحيانًا إلى استخدام العدد نفسه أكثر من مرة، قد تحتاج مثلاً إلى إيجاد إجابة ما، ثم استخدامها كجزء من حسابات لاحقة، وتجنّب إعادة كتابة العدد في كل مرّة.

يُلاحظ في أغلب الآلات الحاسبة، أنك إذا نقرت مفتاح المساواة، يمكنك إعادة استخدام الناتج عند القيام بكتابة حسابات جديدة، دون الحاجة إلى إعادة كتابته مرة أخرى.

وهذا يرجع إلى أن بعض الآلات الحاسبة تتضمّن مفتاحًا يُسمى 'ANS'، يُعيد كتابة الناتج السابق مباشرة.

كما تحتوي بعض الآلات الحاسبة على ذاكرة (تُسمّى 'M') بينما تحتوي بعض الآلات الحاسبة الأخرى على حروف أخرى (مثل A، B، C، D)، هذه المفاتيح تُمكّنُك من كتابة عدد ما في الذاكرة، لتعود وتستخدمه لاحقًا في العمليات الحسابية المختلفة، لذا من المفيد أن تتحقّق من دليل آلتك الحاسبة لتعرف كيف تقوم بذلك.

سابقًا

يفرض ترتيب العمليات الحسابية الذي تعلَّمته في الوحدة (١) إيجاد مُربَّع نصف القطر قبل الضرب في π

لاحظ أن المُعطى في الجُزئية أ هو القطر، في حين أن المُعطى في الجزئية ب هو نصف القطر. راقب بدقّة القياسات المُعطاة إليك قبل البدء بتنفيذ العمليات الحسابية.

مُساعَدة

تحتوي الآلة الحاسبة المفتاح π. إذا لم تجده، استخدم القيمة التقريبية ٣,١٤٢، لكن تأكَّد أن تكتب ذلك خلال الحل. تأكَّد من كتابة الإجابة النهائية الظاهرة على الحاسبة قبل التقريب، ثم اذكر درجة الدقّة التي استخدمتها في التقريب.

مثــال ٦

أ استخدم آلتك الحاسبة لتجد قيمة ٤π − ١ في صورة عدد عشري، واكتب جميع الأرقام الظاهرة على الشاشة.

ب احسب قيمة ٢(٤π − ١)

الحــلّ:

أ ٤π − ١ = ١١,٥٦٦٣٧٠٦١	قد تحتاج إلى نقر مفتاح S⇔D على بعض الآلات الحاسبة لتحويل القيمة الحقيقية إلى عدد عشري.
ب ٢(٤π − ١) = ٢٣,١٣٢٧٤١٢٣	يمكنك إعادة كتابة كل الأرقام. أو يمكنك أن تكتب فقط (×٢) بعد ما تجد الناتج في الجزئية (أ). أو يمكنك أن تخزنه في الذاكرة ثم تستدعيه، أو يمكنك أن تكتب 2 × ANS انظر إلى الرقم الأخير. إذا ضاعفت إجابة الجزئية (أ)، ستنتهي بالرقم (٢)، في حين أن الرقم الأخير الموجود هو الرقم (٣). يحدث ذلك لأن الآلة الحاسبة تتذكَّر معلومات أكثر مما يمكن عرضها على الشاشة. وأن إجابة الجزئية (أ) يجب أن تكون أكبر قليلاً مما عُرِض على الشاشة.

مثــال ٧

أوجد نصف قطر كلّ دائرة في كل مما يلي إذا كان محيطها (ح) معلومًا، ثم اكتب الناتج مُقرَّبًا إلى أقرب عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية:

أ ح = ١٠٠ سم ب ح = ٥ م ج ح = ٥٥ سم د ح = ١٢٧ مم

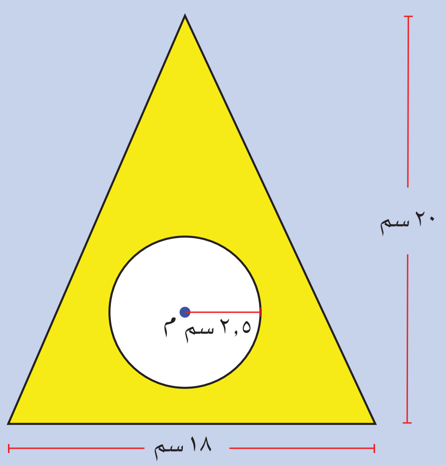
الحــلّ:

أ نق = $\frac{١٠٠}{٢\pi}$ = ١٥,٩ سم	ابدأ بكتابة قانون محيط الدائرة بدلالة نق؛ قد تحتاج إلى استخدام الأقواس عند إدخال المقام في الآلة الحاسبة: ١٠٠ ÷ (٢ × π)

ب	احفظ ٢ × π في ذاكرة آلتك الحاسبة. يمكنك بعد ذلك تنفيذ: 5 ÷ M = ٠,٧٩٦ م	عندما تحفظ ٢ × π في الذاكرة (والتي قد لا تكون الحرف M على آلتك الحاسبة)، سيكون حلّ باقي السؤال سريعًا جدًّا لأنه يتطلب فقط القسمة على ما تم تخزينه في الذاكرة، ولا يحتاج إلى إعادة كتابة الأقواس في كلّ مرة.
ج	٥٥ ÷ M = ٨,٧٥ سم	استخدم ذاكرة الآلة الحاسبة كما فعلت في الجزئية (ب).
د	١٢٧ ÷ M = ٢٠,٢ مم	استخدم ذاكرة الآلة الحاسبة كما فعلت في الجزئية (ب).

مثــال ٨

أوجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في الشكل أدناه:

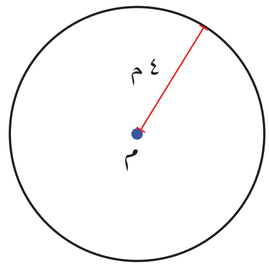


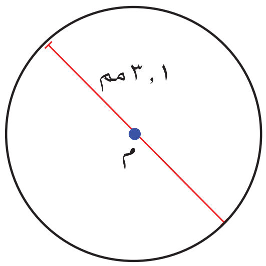
الحــلّ:

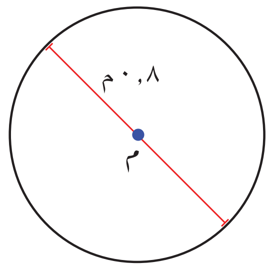
مساحة المنطقة المُظلَّلة = مساحة المُثلَّث − مساحة الدائرة. المساحة = $\frac{١}{٢}$ ق ع − π نق^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٠ − π × (٢,٥)^{٢} = ١٦٠,٣٦٥... = ١٦٠ سم^{٢}	عوّض عن قيَم ق، ع، نق استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج مقرّبًا الإجابة إلى عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية.

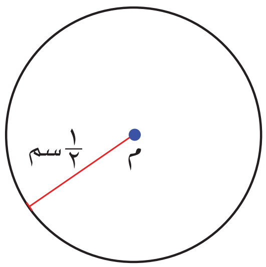
تمارين ١٦-٢-(أ، ب)

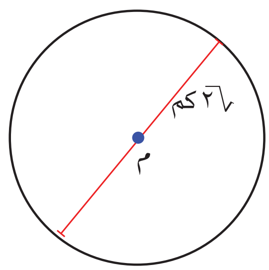
١) أوجد مساحة ومُحيط كلّ دائرة من الدوائر التالية:

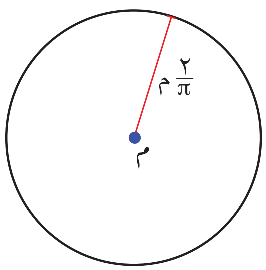
أ


ب


ج


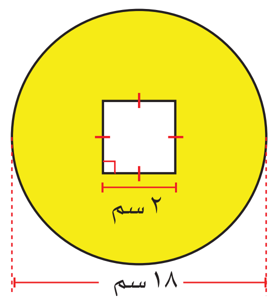
د


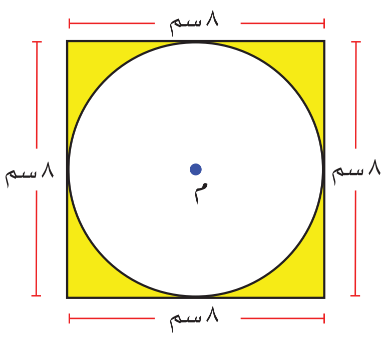
هـ


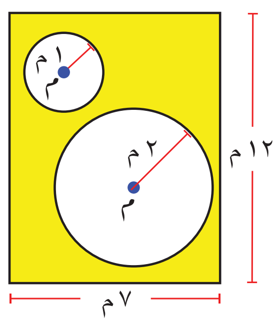
و


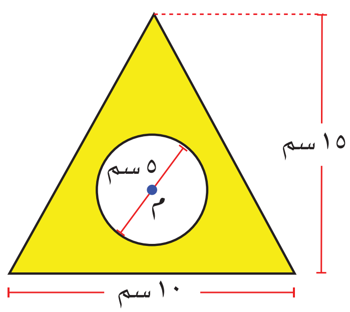
يكون مُفيدًا في بعض الحالات أن تكتب قيمَتي نصف القطر والقطر في صورة أعداد عشرية قبل البدء بالحل، رغم أنك تستطيع إدخال القيَم الحقيقية كما هي بسهولة في أغلب الآلات الحاسبة الحديثة. إذا قمت بذلك، فإنك ستتجنَّب الأخطاء الناتجة من التقريب.

٢) احسب مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلّ حالة من الحالات التالية:

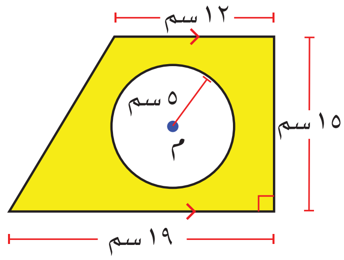
أ


ب


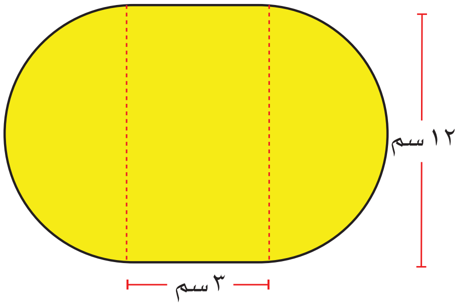
ج


د


هـ

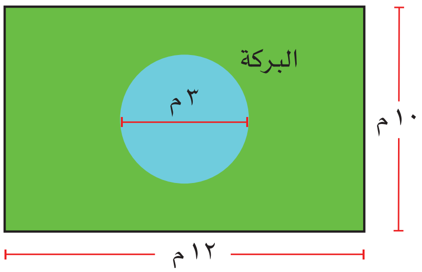


و



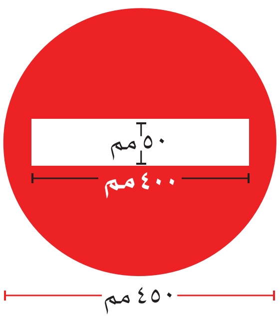
طبِّق مهاراتك

٣) يُبيِّن الرسم المُجاوِر مُخطَّطًا لحديقة مُستطيلة الشكل في داخلها بركة دائرية. يُريد صاحب الحديقة تغطية المساحة المُحيطة بالبركة بالعُشب. فإذا كان الكيس الواحد من بذور الأعشاب يغطي خمسة أمتار مُربَّعة من الحديقة، أوجد عدد أكياس البذور اللازمة لإتمام العمل.



هذا مثال جيد على مسألة تحتاج فيها إلى إجراء مجموعة من العمليات الحسابية لتصل إلى الإجابة. رتِّب عملك بخطوات واضحة لتبيّن كيف توصّلت إلى الحل.

٤) يُبيّن الرسم المُجاوِر إشارة مرور على الطريق بها لونان مختلفان.
احسب مساحة كلّ لون مُقرَّبة إلى أقرب عدد كامل.



٥) يُراد قصّ ست عشرة دائرة مُتطابقة من قطعة قماش مُربَّعة الشكل طول ضلعها ٠,٤ م. أوجد مساحة القماش المُتبقِّية مُقرَّبة إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين، إذا تمّ قصّ الدوائر بأكبر قطر ممكن.

٦) تتشارك آمنة وصديقتها في قرص بيتزا من القياس الكبير، قطر قرص البيتزا الكبير يساوي ٢٤ سم، وقرّرتا هذا الأسبوع أن تأكلا أقراصًا مختلفة من البيتزا، فطلبتا قرصَي بيتزا من القياس الصغير، قطر قرص البيتزا الصغير ١٢ سم. وهما ترغبان في معرفة ما إذا كان مجموع مساحتَي البيتزا في القرصَيْن الصغيرَيْن مساويًا لمساحة القرص الكبير أم لا. احسب لتجد الإجابة.

١٦-٢-ج الإجابة الدقيقة لمحيط ومساحة الدائرة بدلالة π

باي (π) عدد غير نسبي، أي ليس له قيمة كسرية أو عشرية دقيقة. لهذا السبب، لا تكون للحسابات التي تستخدم فيها قيمة تقريبية لـ 'π' نواتج دقيقة.

إذا طُلب إليك إيجاد إجابة دقيقة لحسابات تستخدم فيها π، عليك إيجاد الإجابة النهائية بدلالة π.

إذا أُعطيت مُحيط أو مساحة الدائرة بدلالة π، يمكنك عندها إيجاد طول القطر أو نصف القطر بالقسمة على π.

مثلاً، إذا كان المُحيط ح = ٥ π سم، سيكون القطر ٥ سم ونصف القطر ٢,٥ سم.

كذلك الأمر بخصوص المساحة، إذا كانت المساحة م = ٢٥π سم^{٢} فإن نق^{٢} = ٢٥ سم، نق = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم.

مثــال ٩

اكتب الناتج بدلالة π في كل ممّا يلي:

أ أوجد محيط دائرة قطرها ١٢ سم.

ب ما محيط دائرة نصف قطرها ٤ مم؟

ج أوجد مساحة دائرة قطرها ١٠ م.

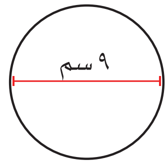
د ما نصف قطر دائرة مُحيطها ٢,٨ π سم؟

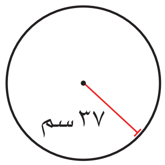
الحــلّ:

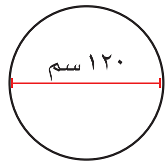
أ	ح = π ق ح = ١٢π سم	عوّض عن ق بـ ١٢ سم، وتذكّر أن تكتب وحدة القياس.
ب	ح = π ق ح = ٢ × ٤ × π = ٨π مم	تذكّر أن القُطر يساوي ٢ × نصف القطر
ج	م = π نق^{٢} نق = ٥ م، م = π × ٥^{٢} م = ٢٥π م^{٢}	لتجد نصف القطر، اقسم القطر على ٢
د	ح = π ق فيكون، ق = $\frac{ح}{\pi}$ ق = $\frac{٢,٨\pi}{\pi}$ = ٢,٨ سم ∴ نق = ١,٤ سم	تذكّر أن القُطر يساوي ٢ × نصف القطر

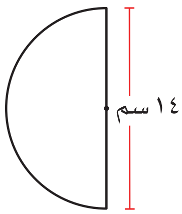
تمارين ١٦-٢-ج

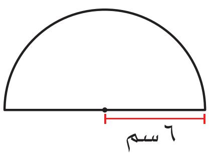
١) أوجد مُحيط ومساحة كل دائرة من الدوائر التالية، واكتب الناتج بدلالة π:

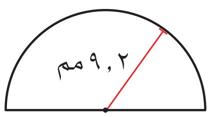
أ


ب


ج


د


هـ


و


٢) أوجد الناتج بدلالة π في كل حالة من الحالات التالية:

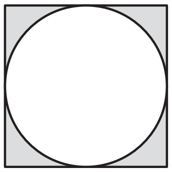
أ مُحيط دائرة قطرها ١٠ سم.

ب مُحيط دائرة نصف قطرها ٧ مم.

ج مساحة دائرة قطرها ١,٩ سم.

د مساحة نصف دائرة طول نصف قطرها ٣ سم.

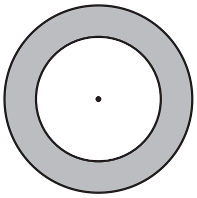
٣) دائرة محيطها ١٢π سم قُصّت بدقّة من صفيحة معدنية مُربَّعة الشكل، كما هو مُبيَّن في الشكل المجاور:



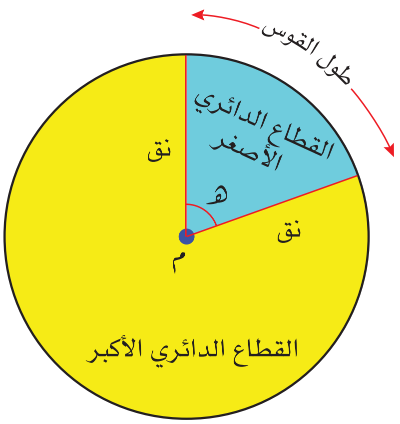
أ ما طول ضلع المُربَّع؟

ب ما مساحة الصفيحة المعدنيَّة المُتبقِّية بعد قصّ الدائرة؟ أوجد الناتج بدلالة π.

٤) يُبيّن الشكل المجاور دائرتَين لهما نفس المركز، مُحيط الدائرة الداخلية ١٤π مم، ونصف قطر الدائرة الخارجية ٩ مم. أوجد الإجابة الدقيقة لمساحة المنطقة المُظلَّلة.



١٦-٢-د القوس والقطاع الدائري



يُبيِّن الشكل المُجاوِر دائرة مع نصفَي قطر رُسما من المركز. تُعرف المنطقة المحصورة بين نصفَي القُطرَين والقوس بينهما **بالقطاع الدائري**. لاحظ وجود قطاعَين دائريَين أحدهما أكبر من الآخر.

يُسمّى الجُزء من المُحيط **بالقوس الدائري**.

الزاوية المركزية هـ تُقابِل قوس القطاع الدائري.

لاحظ أن القطاع الدائري الأصغر كسر من الدائرة الكاملة ويُساوي $\frac{هـ}{٣٦٠°}$ من الدائرة.

بما أن مساحة الدائرة π نق^٢ ومساحة القطاع الدائري $\frac{هـ}{٣٦٠°}$ من مساحة الدائرة، فإن

$$\boxed{\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{هـ}{٣٦٠°} \times \pi \text{ نق}^٢}$$

إذا كان القطاع الدائري يساوي $\frac{هـ}{٣٦٠°}$ من الدائرة، يُحسب طول قوس القطاع الدائري من مُحيط الدائرة (٢ × π × نق). على النحو التالي:

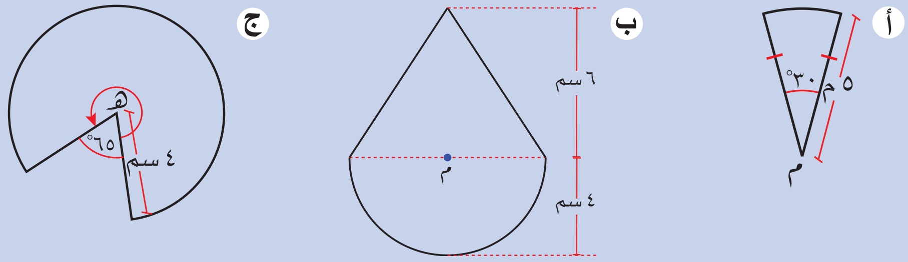
$$\boxed{\text{طول القوس} = \frac{هـ}{٣٦٠°} \times ٢ \times \pi \times \text{نق}}$$

تأكَّد أنَّك تتذكَّر الحالتَين الخاصّتَيْن التاليتَين:

- إذا كانت قيمة هـ = ٩٠°، يكون لديك **ربع دائرة**.
- إذا كانت قيمة هـ = ١٨٠°، يكون لديك **نصف دائرة**.

مثـــال ١٠

أوجد مساحة ومُحيط الشكلَين (أ)، (ج)، ومساحة الشكل (ب).
أعطِ الناتج مُقربًّا إلى عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية.



الحـــلّ:

أ

$\text{المساحة} = \frac{\text{هـ}}{٣٦٠°} \times \pi \text{ نق}^2$

$= \frac{٣٠°}{٣٦٠°} \times \pi \times ٥^2$

$= ٦{,}٥٤٤...$

$= ٦{,}٥٤ \text{ م}^2$

$\text{المُحيط} = \frac{\text{هـ}}{٣٦٠°} \times ٢\pi \text{ نق} + ٢ \text{ نق}$

$= \frac{\text{هـ}}{٣٦٠°} \times ٢\pi \times ٥ + ٢ \times ٥$

$= ١٢{,}٦١٧...$

$= ١٢{,}٦ \text{ م}$

المطلوب كسر من مساحة الدائرة الكاملة. لذا اضرب مساحة الدائرة في $\frac{٣٠°}{٣٦٠°}$

محيط الشكل = طول القوس + ٢ × طول نصف القطر

ب

المساحة = مساحة المُثلَّث + $\frac{١}{٢}$ مساحة الدائرة.

$\text{المساحة} = \frac{١}{٢} \text{ ق ع} + \frac{١}{٢} \pi \text{ نق}^2$

$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٦ + \frac{١}{٢} \times \pi \times ٤^2$

$= ٤٩{,}١٣٢...$

$= ٤٩{,}١ \text{ سم}^2$

لتجد مساحة نصف الدائرة، اقسم مساحة الدائرة على ٢

اكتب مساحتَي الشكلَين.

عوِّض.

الناتج مُقرَّبًا الى ثلاثة أرقام معنوية.

لاحظ أنك تحتاج إلى إضافة ٥ م مرَّتَين للمُحيط، إذ تلزمك إضافة طولَي الحافتَين المستقيمتَين.

لاحقًا

ستتمكَّن من إيجاد مُحيط الشكل الثاني بعد دراسة نظرية فيثاغورث في الصف العاشر.

لاحظ أن قاعدة المُثلَّث هي قطر الدائرة.

لاحظ أن قياس الزاوية هـ غير معطى. يجب إيجاده باستخدام هـ = ٣٦٠° − ٦٥°

لا بد أنك لاحظت عدم وجود معلومات كافية لتجد مُحيط الجزء العلوي من الشكل بمعرفة القوانين التي درستها حتى الآن.

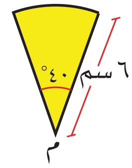
ج

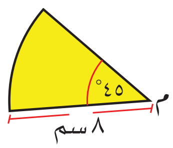
المساحة = $\frac{\text{٣٦٠°} - \text{٦٥°}}{\text{٣٦٠°}} \times \pi \times \text{٤}^{\text{٢}}$	اكتب صيغة المساحة.
= $\frac{\text{٢٩٥°}}{\text{٣٦٠°}} \times \pi \times \text{١٦}$	عوّض.
= ٤١,١٨٩...	
= ٤١,٢ سم$^{\text{٢}}$	الناتج مُقرَّبًا الى ثلاثة أرقام معنوية
المُحيط = $\frac{\text{هـ}}{\text{٣٦٠°}} \times$ ٢ π نق + ٢ نق	اكتب صيغة المحيط.
= $\frac{\text{٢٩٥°}}{\text{٣٦٠°}} \times$ ٢ π × ٤ + ٢ × ٤	عوِّض.
= ٢٨,٥٩٤...	
= ٢٨,٦ سم	الناتج مُقرَّبًا الى ثلاثة أرقام معنوية.

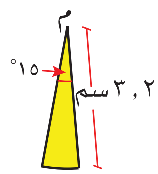
تمارين ١٦-٢-د

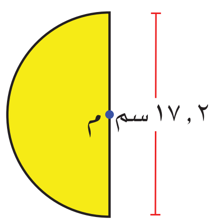
لتجد المُحيط، تحتاج إلى إيجاد طول القوس، لذا احسبه بصورة مُستقلَّة.

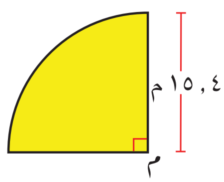
١) أوجد مساحة ومُحيط كلّ شكل من الأشكال التالية:

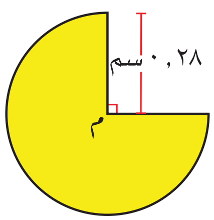
أ


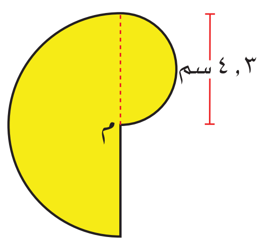
ب


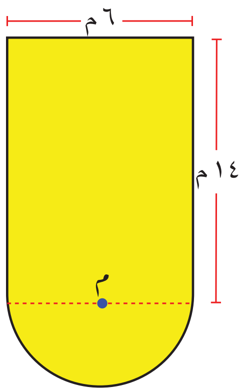
ج


د


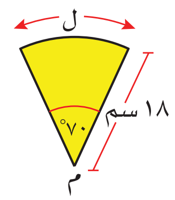
هـ


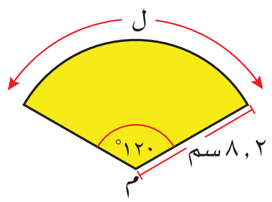
و


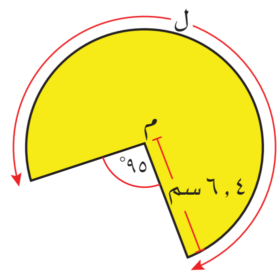
ز


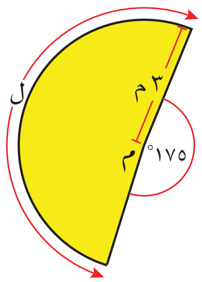
ح


٢) احسب مساحة المنطقة المُظلَّلة، وأوجد طول القوس في كل شكل من الأشكال التالية:

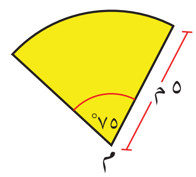
أ


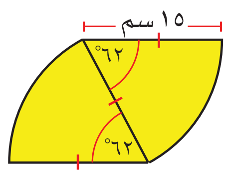
ب


ج


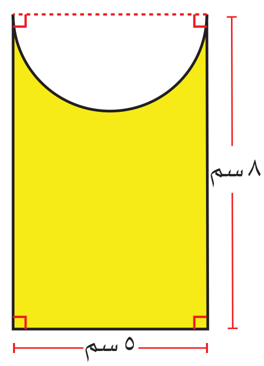
د


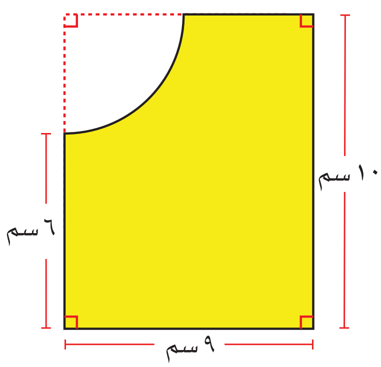
٣) أوجد مساحة ومُحيط كلّ شكل من الأشكال التالية:

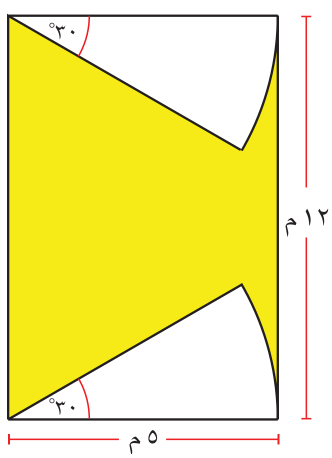
أ


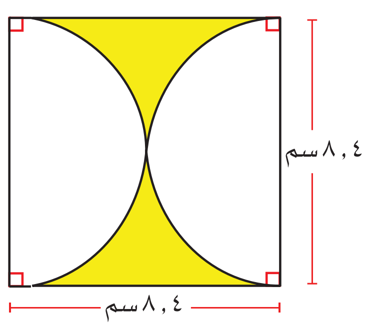
ب


٤) أوجد مساحة ومُحيط المنطقة المُظلَّلة لكل شكل من الأشكال التالية:

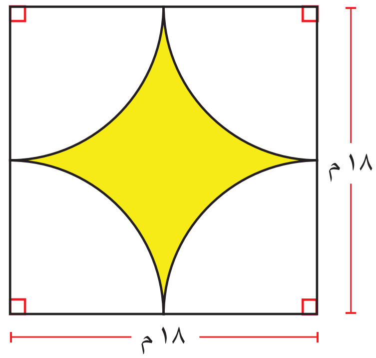
أ


ب


ج


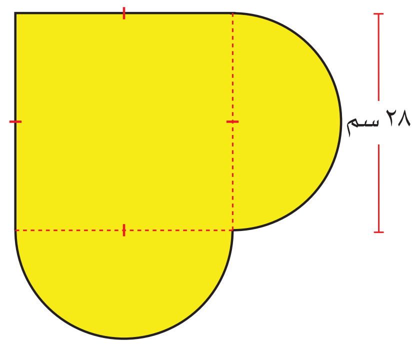
د


هـ

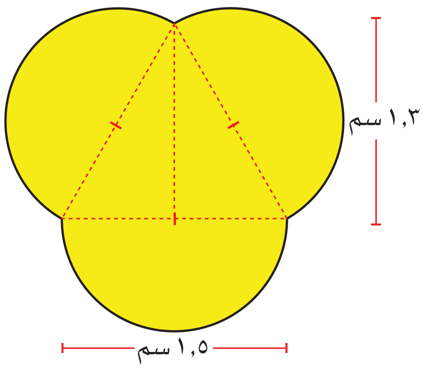


٥) يمكن تقسيم كلّ شكل من الأشكال التالية إلى أشكال أبسط. أوجد محيط ومساحة كلّ شكل ممّا يلي:

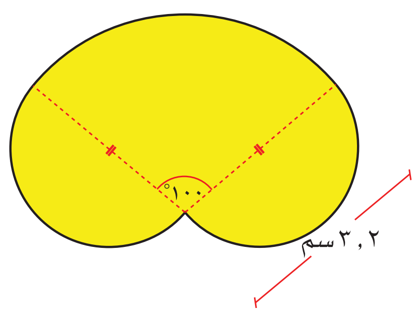
أ



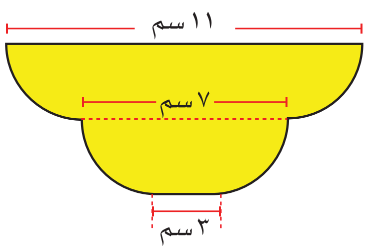
ب



ج



د



١٦-٣ مساحة الأشكال ثلاثية الأبعاد وحجمها

مُساعَدة

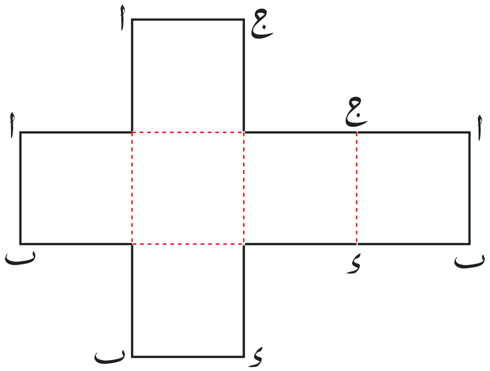
قد يُطلَب إليك عدّ الرؤوس والحروف (الأضلاع) والوجوه الموجودة في مُجسَّم ما.

تسمّى الأشكال ثُلاثية الأبعاد **بالمُجسَّمات**.

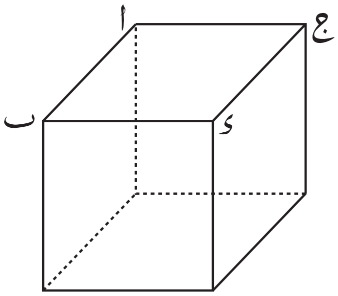
١٦-٣-أ شبكة المُجسَّمات

الشبكة شكل ذو بُعدَين يمكن رسمه وتقسيمه وطيّه ليشكل مُجسَّمًا ثُلاثي الأبعاد.

يُمثِّل الشكل التالي شبكة لمُجسَّم يجب أن تألف التعامُل معها:



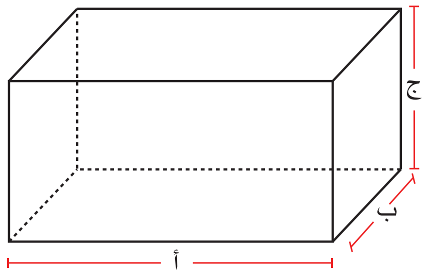
إذا طويتَ الشبكة حول الخطوط المُنقَّطة ووصلت النقاط التي تحمل نفس الاسم، سوف تُشكِّل المُكعَّب أدناه:



يجب أن تُحاوِل ذلك بنفسك، وتنتبه للحروف (الأضلاع) **والرؤوس** (الزوايا) التي سوف تصل بعضها ببعض.

تمارين ١٦-٣-أ

١) اكتب اسم الشكل المُجاوِر وارسم شبكته.

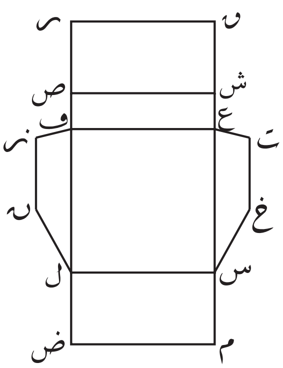


٢) يُبيِّن الشكل المُجاوِر شبكة مُجسَّم:

أ صِف المُجسَّم قدر ما تعرف بالتفصيل.

ب أي نقطتَين ستتقاطعان مع النقطة م عند طي الشبكة؟

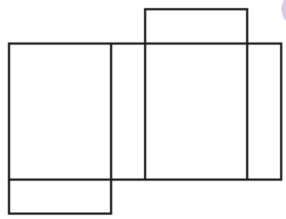
ج أيُّ حروف (أضلاع) طولها يساوي طول الحرف (الضلع) ف ز؟



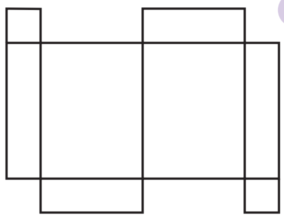
٣) طلب مُعلِّم إلى طُلّاب صفّه رسم شبكة لصندوق حبوب شكله مُتوازي مستطيلات. وفيما يلي ثلاثة أشكال رسمها ثلاثة طلّاب. أي منها صحيح؟

إن لم تستطع تصوُّر الحل في مثل هذه المسائل، يمكنك أن تبني نموذجًا ليساعدك على ذلك.

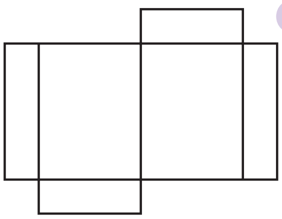
أ



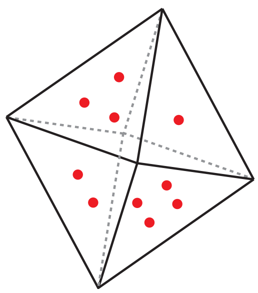
ب



ج



٤) كيف تبني نموذجًا لحجر نرد له ثمانية وجوه من الكرتون؟ ارسم أشكالاً وسمِّها لتعرض حلك.



١٦-٣-ب المساحة السطحية لمُتوازي المستطيلات والمنشور والأسطوانة وحجومها

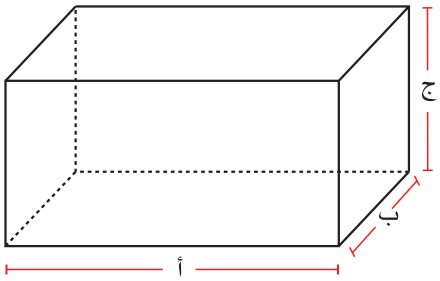
من المفيد رسم شبكة المُجسَّم عند إيجاد مساحته السطحية.

تُسمّى الأسطح المُستوية الخارجية في المُجسَّم ثُلاثي الأبعاد **أوجهًا**، ويمكن إيجاد مساحة كل وجه باستخدام الطرق التي تعلَّمتها في بداية هذه الوحدة، بحيث أن المجموع الكلّي لمساحات الأوجه يُعطي **المساحة السطحية** للمُجسَّم.

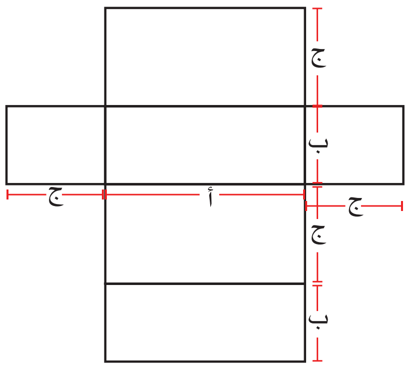
الحجم هو كمّية الفراغ الموجودة داخل المُجسَّم، فإذا كانت وحدة القياس المُعطاة بالسنتيمتر (سم)، ستكون وحدة قياس الحجم سنتيمترًا مُكعَّبًا (سم^{٣}) وهكذا.

فيما يلي بعض صيَغ المساحات السطحية والحجوم المعروفة:

مُتوازي المُستطيلات

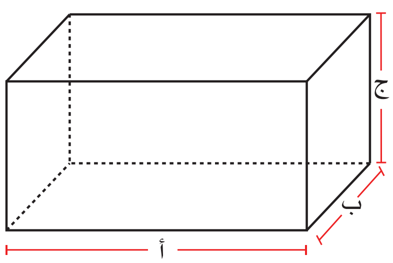


يحتوي مُتوازي المستطيلات على ٦ أوجه مُستطيلة الشكل، و١٢ حرفًا (ضلعًا) و ٨ رؤوس. إذا كان طول وعرض وارتفاع مُتوازي المُستطيلات هي على الترتيب أ، ب، ج، يمكن عندئذ إيجاد المساحة السطحية بإيجاد مساحة كل وجه مُستطيل.



لاحظ أن المساحة السطحية مُساوية تمامًا لمساحة شبكة مُتوازي المُستطيلات.

المساحة السطحية لمُتوازي المُستطيلات = ٢(أب + أ ج + ب ج)



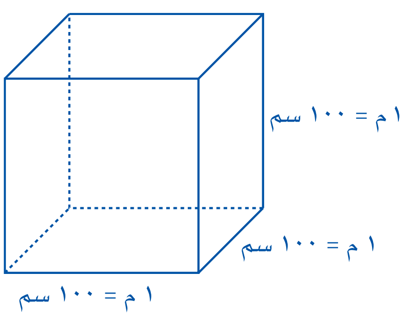
حجم مُتوازي المُستطيلات يساوي الطول × العرض × الارتفاع.

وعليه يكون

حجم مُتوازي المُستطيلات = أ × ب × ج

الوحدات المُكعَّبة

لدى فهد صندوق أبعاده ١م × ١م × ١م. جمع عددًا كبيرًا من المُكعَّبات الصغيرة أبعادها ١سم × ١سم × ١سم. ولأنه طالب مُنظَّم قرَّر أن يُرتِّب جميع المُكعَّبات بشكل أنيق في الصندوق.



حاول أن تتصوّر صندوقًا أبعاده ١ م × ١ م × ١ م:

طول كل ضلع ١ م = ١٠٠ سم

العدد الكلّي للمُكعَّبات التي أبعادها

١ سم × ١ سم × ١ سم والتي يمكن ترتيبها داخل

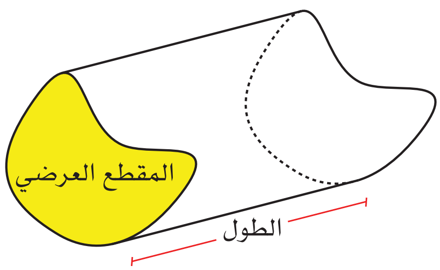
الصندوق يساوي ١٠٠سم × ١٠٠سم × ١٠٠سم = ١٠٠٠٠٠٠سم^{٣}

الفكرة الأساسية من هذا المثال هي أنَّك إذا غيّرت الوحدات التي قيست فيها الكمّية، فسوف تجد أن القيمة العددية الحقيقية ستختلف كثيرًا، حيث أن المتر المُكعَّب الواحد يُكافئ مليون سنتيمتر مُكعَّب!

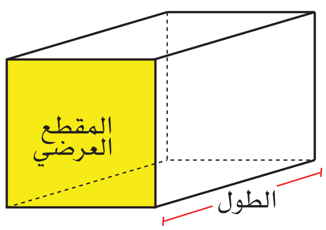
القياس	الوحدة المُستخدَمة	القيمة المُكافِئة للوحدة
الحجم هو مقدار الحيّز داخل جسم ثُلاثي الأبعاد، يقاس دائمًا بوحدات مُكعَّبة (أو ما يُكافئها من وحدات قياس حجم السوائل، مثل المليلتر).	المليّمتر المُكعَّب (مم^{٣}) السنتيمتر المُكعَّب (سم^{٣}) المتر المُكعَّب (م^{٣}) المليلتر (مل)	١٠٠٠ مم^{٣} = ١ سم^{٣} ١٠٠٠٠٠٠ سم^{٣} = ١ م^{٣} ١ م^{٣} = ١٠٠٠ ل (لتر) ١ سم^{٣} = ١ مل

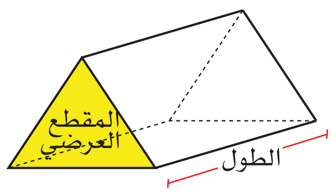
المنشور

المنشور مُجسَّم يكون مقطعه العرضي هو نفسه على كامل طوله. (**المقطع العرضي** هو السطح المُتكوِّن عندما تقطع المُجسَّم بمستوى موازٍ لوجه المُجسَّم).



متوازي المُستطيلات حالة خاصّة من المنشور الذي يكون مقطعه العرضي مُستطيلاً.
أما المقطع العرضي في المنشور الثلاثي فهو مُثلَّث.





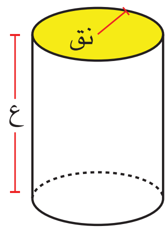
تُحسَب المساحة السطحية للمنشور بإيجاد مساحة كلّ وجه، وجمع المساحات جميعها معًا. هناك وجهان مساحة كلّ منهما تساوي مساحة المقطع العرضي. أما الجوانب المُتبقِّية فيكون لها نفس الطول، وعليه تكون مساحاتها تساوي محيط المقطع العرضي مضروبًا في الطول.

المساحة السطحية للمنشور = ٢ × مساحة المقطع العرضي + محيط المقطع العرضي × الطول

يُحسب حجم المنشور بإيجاد مساحة المقطع العرضي، ثم ضربها في الارتفاع

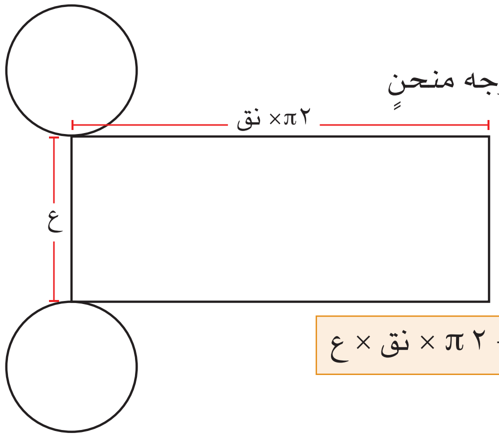
حجم المنشور = مساحة المقطع العرضي × الطول (الارتفاع)

الأسطوانة



الأسطوانة حالة خاصة أخرى من المنشور. فهي منشور مقطعه العرضي دائرة.

يمكن بسط الأسطوانة لتنتج شبكتها.



يتكوّن سطح الأسطوانة من وجهَين دائريَّين ووجه منحنٍ يمكن بسطه ليكوّن مستطيلاً.

مساحة سطح الأسطوانة المنحني

= ٢ × π نق × ع وعليه تكون

المساحة السطحية للأسطوانة = ٢ π نق^{٢} + ٢ × π × نق × ع

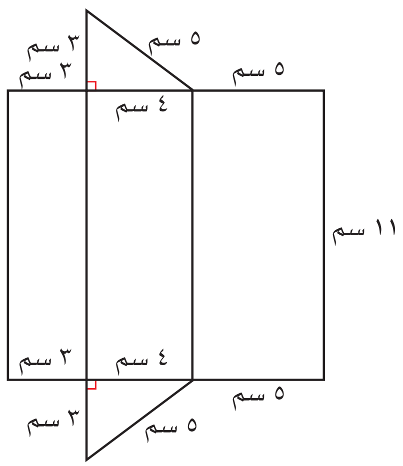
الحجم = π نق^{٢} × ع

مُساعَدة

قد يُطلَب إليك إيجاد الإجابة الدقيقة للمساحة السطحية للأسطوانة وحجمها، حيث π جزء من الصيغة الرياضية. في هذه الحالة، اكتب إجابتك بدلالة π

تمارين ١٦-٣-ب

١) في الشكل المُجاوِر شبكة مُجسَّم:
أوجد حجمه ومساحته السطحية.



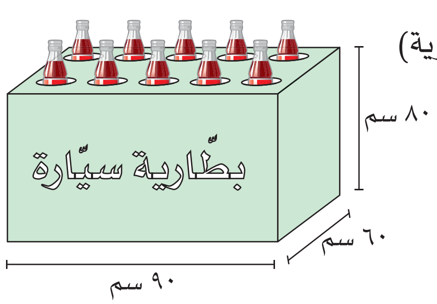
٢) أوجد الحجم والمساحة السطحية لمُتوازي المُستطيلات ذي الأبعاد التالية:

أ) الطول = ٥ سم، العرض = ٨ سم، الارتفاع = ١٨ سم

ب) الطول = ١,٢ مم، العرض = ٢,٤ مم، الارتفاع = ٤,٨ مم

طبِّق مهاراتك

٣) أوجد حجم بطّارية السيّارة (بدون الأصابع العلوية) في الشكل المُجاوِر.

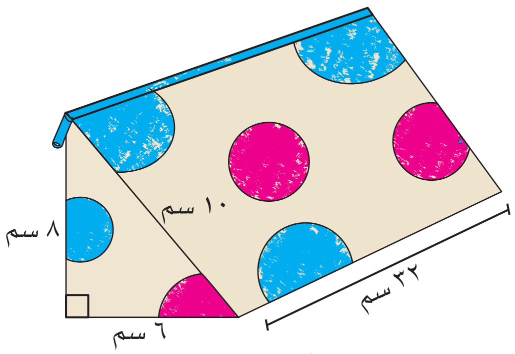


٤) يُبيّن الشكل المُجاور حقيبة أقلام على هيئة منشور ثُلاثي.

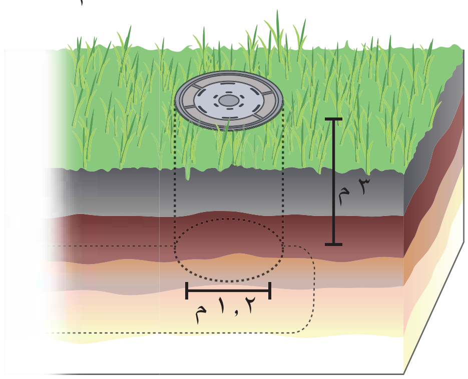
أوجد :

أ حجم الحقيبة.

ب المساحة السطحية للحقيبة.

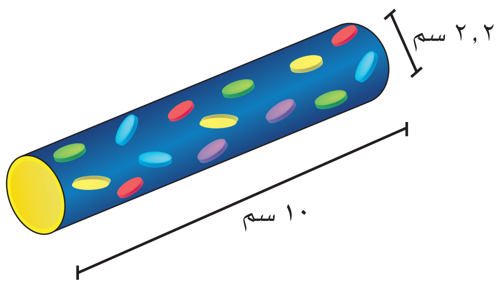


٥) أوجد حجم أُسطوانة تصريف المياه المُوضَّحة في الشكل المُجاوِر.

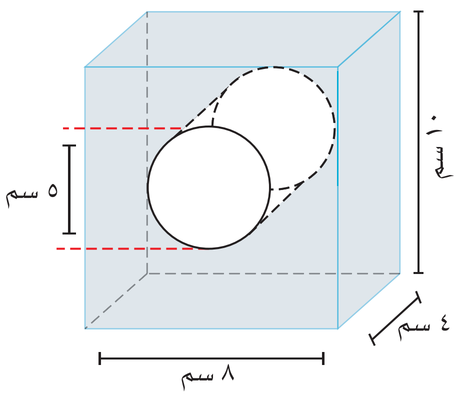


٦) يُبيّن الشكل المُجاوِر أنبوبًا يحتوي على قطع شوكولاتة صغيرة.

أوجد المساحة السطحية الكلّية للأنبوب.



٧) يُبيّن الشكل المُجاوِر مُجسَّمًا زُجاجيًّا على هيئة مُتوازي مُستطيلات، أُزيل منه جزء أسطوانيّ (لوضع الساعة بداخله). أوجد حجم الزجاج الذي ستتم إزالته.



٨) مُستودَع تخزين على هيئة مُتوازي مستطيلات طوله ٢٠ م وعرضه ٨ م وارتفاعه ٢,٨ م:

أ أوجد حجم مُستودَع التخزين.

ب كم صندوقًا من الكرتون أبعاده ١م × ٠,٥ م × ٢,٥ م يتَّسع المُستودَع؟

ج ما المساحة السطحية للصندوق الواحد؟

٩) سوف ينتقل صالح إلى محافظة مسقط ليتسلَّم عمله الجديد، وقد استأجر حاوية شحن أبعادها ٣ م × ٤ م × ٤ م لنقل حاجاته:

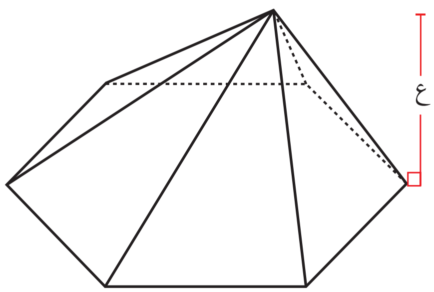
أ احسب حجم الحاوية.

ب تمّ تزويد صالح بصناديق تتلاءم مع أبعاد الحاوية، وهو يحتاج إلى نقل ثمانية من هذه الصناديق حجم كلّ منها ٥ م^{٢}. هل تتَّسع حاوية واحدة لنقل جميع الصناديق مرَّة واحدة؟

١٦-٣-ج المساحات السطحيَّة للهرم والمخروط والكرة وحجومها

تعلَّمت في الدرس السابق كيف تتعامل مع المساحات السطحية وحجوم مُتوازي المُستطيلات والمنشور والأسطوانة، أما في هذا الدرس، فسوف تتعامل مع المساحات السطحية للهرم والمخروط والكرة وحجومها.

الهرم



الهرم مُجسَّم قاعدته مُضلَّع ووجوهه مُثلَّثات تلتقي في نقطة واحدة تُسمّى **القمّة**.

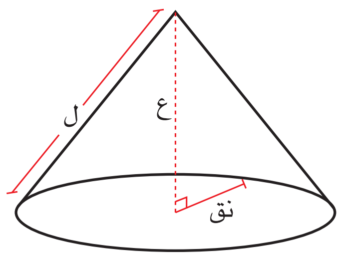
إذا وجدت مساحة القاعدة ومساحة كل مُثلَّث، يمكنك أن تجمعها معًا، لتجد المساحة السطحية الكلّية للهرم.

يمكن إيجاد حجم الهرم باستخدام الصيغة الآتية:

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع العمودي

الارتفاع العمودي هو أقصر مسافة من القاعدة إلى القمّة.

المخروط

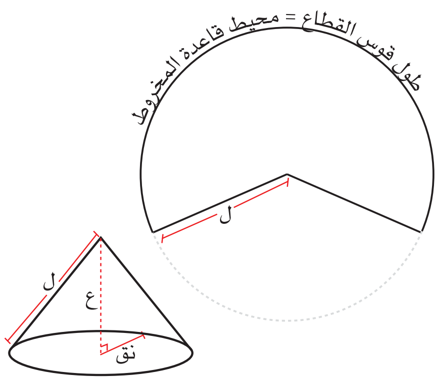


المخروط هرم خاصّ قاعدته دائرية. يُعرَّف الطول (ل) **بالراسم**، ويُعرَّف (ع) بالارتفاع العمودي.

لاحقًا

يمكن إيجاد طول الراسم باستخدام نظرية فيثاغورث التي ستدرسها في الصف العاشر.

يمكن بسط السطح المُنحني للمخروط ليكون قطاعًا من دائرة.



مساحة السطح المنحني = π × نق × ل

لإيجاد المساحة الكلّية لسطح المخروط، أضف دائرة إلى مساحة السطح المنحني:

المساحة الكلية للمخروط = π نق^{٢} + π × نق × ل

إذا طُلب إليك حساب المساحة الكلّية للمخروط، فاحسب مساحة القاعدة الدائرية، وأضفها إلى مساحة السطح المنحني.

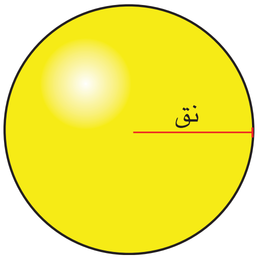
وحجم المخروط يعطى بالصيغة:

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π × نق^{٢} × ع

تذكّر، إذا طُلِب إليك أن توجد إجابة دقيقة، فعليك أن تعطي الإجابة بدلالة π ولا يمكنك أن تستخدم قيَمًا تقريبية في حساباتك.

الكُرة

يبيّن الشكل المجاور كُرة نصف قطرها نق.



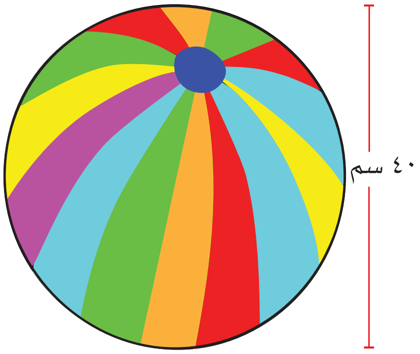
المساحة السطحية = ٤ π نق^{٢}

و

الحجم = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

تمارين ١٦-٣-ج

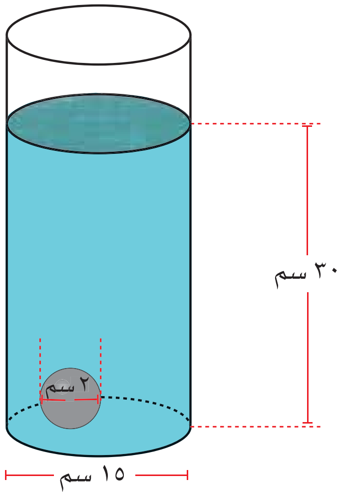
١) يُبيّن الشكل المُجاوِر كرة شاطئ:



أ) أوجد مساحتها السطحية.

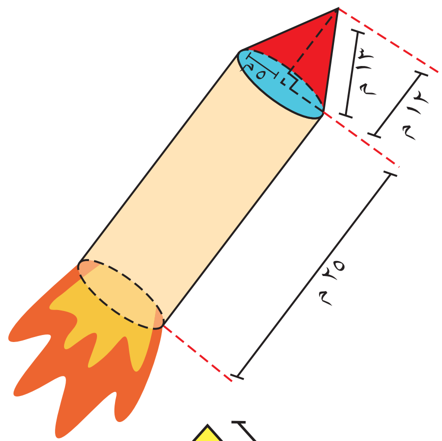
ب) أوجد حجمها.

٢) يُبيّن الشكل المُجاوِر كُرة معدنية غُمِرت بالكامل في أسطوانة تحتوي ماءً، أوجد حجم الماء في الأسطوانة.



٣) طول ضلع قاعدة الهرم الأكبر في الجيزة المُبيَّن في الصورة المُجاوِرة يساوي ٢٣٠ م، وارتفاعه العمودي يساوي ١٤٦م.

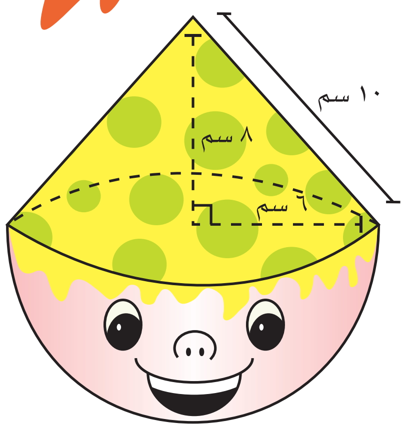
أوجد حجم هذا الهرم.



٤) يُبيّن الشكل المُجاوِر صاروخًا يتكوَّن من مخروط وُضِع على قمَّة أسطوانة:

أ أوجد المساحة السطحية للصاروخ.

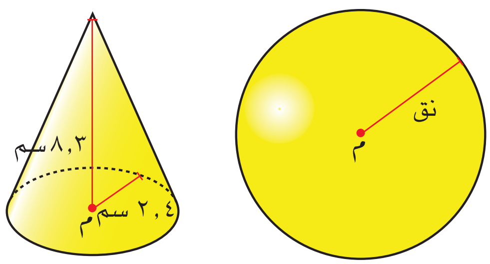
ب أوجد حجم الصاروخ.



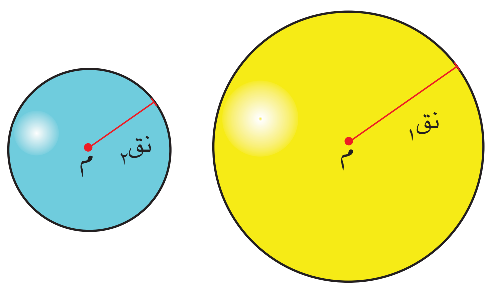
٥) يُبيّن الشكل المجاور لُعبة أطفال تتكوَّن من نصف كرة ومخروط:

أ أوجد حجم اللعبة.

ب أوجد المساحة السطحية للُّعبة.



٦) إذا كان المخروط والكرة المُبيَّنان في الشكل المُجاوِر لهما الحجم نفسه. أوجد نصف قُطر الكُرة.



٧) إذا علمت أن حجم الكُرة الكبيرة (نصف قطرها نق١) يساوي ضعف حجم الكرة الصغيرة (نصف قطرها نق٢). اكتب مُعادَلة تربط بين نق١، نق٢

٨) إذا كان طول طرد بريدي على شكل أنبوب من الكرتون ٣٢ سم، ونصف قطره ٢,٥ سم:

أ ما الحجم الدقيق للأنبوب؟

ب ما المساحة السطحية للأنبوب؟

٩) تمّ استخدام ورق معدني سماكته ٥ مم لصُنع أنبوب معدني مُفرَّغ. طول الأنبوب ٣٥ سم وقطره الخارجي ١٠,٤ سم:

أ ارسم شكلاً تقريبيًّا للأنبوب، وبيّن عليه أبعاده.

ب احسب حجم المعدن في الأنبوب.

ج كيف تجد المساحة السطحية الكلّية الخارجية مُضافًا إليها المساحة داخل الأنبوب؟

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- المحيط هو المسافة التي تُحيط بالشكل ثنائي الأبعاد، والمساحة هي مقدار الحيّز داخل الشكل.
- إذا أُعطيَت وحدة القياس بالسنتيمتر، فإن وحدة المساحة ستكون بالسنتيمتر المُربَّع ووحدة الحجم ستكون بالسنتيمتر المُكعَّب، ويصح ذلك مع كل وحدة طول.
- القطاع الدائري هو المنطقة المحصورة بين نصفَي قُطرَين في دائرة. ويقسم الدائرة إلى قطاع أصغر وقطاع أكبر.
- القوس جزء من مُحيط الدائرة.
- المنشور والهرم والكرة والمُكعَّب ومُتوازي المُستطيلات والأسطوانة، أمثلة على أشكال ثلاثية الأبعاد (المُجسَّمات).
- الشبكة شكل ذو بُعدَين، يمكن طيّها لتُشكِّل مُجسَّمًا.
- تُفيد شبكة المُجسَّم على إيجاد مساحته السطحية.

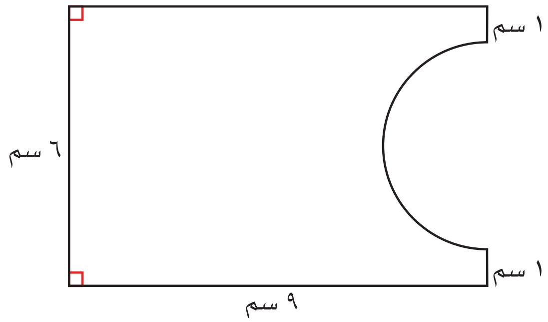
يجب أن تكون قادرًا على:

- تمييز الأشكال ذات البُعدَين وإيجاد مساحاتها.
- إعطاء وحدة قياس المساحة.
- إيجاد مساحات أشكال مختلفة ثُنائية الأبعاد.
- تقسيم شكل هندسي إلى أشكال أبسط وإيجاد مساحته.
- إيجاد الطول المجهول بمعلومية بعض الأطوال والمساحة.
- إيجاد مساحة الدائرة ومحيطها.
- إيجاد المحيط وطول القوس ومساحة القطاع الدائري.
- تمييز شبكات المُجسَّمات.
- طي شبكة بشكل صحيح لتنشئ مُجسَّمًا.
- إيجاد الحجم والمساحة السطحية لمُتوازي المستطيلات والمنشور والأسطوانة.
- إيجاد حجم مُجسَّمات يمكن تجزئتها إلى مُجسّمات معروفة.
- إيجاد الحجم والمساحة السطحية لكل من الهرم والمخروط والكُرة.

تمارين نهاية الوحدة

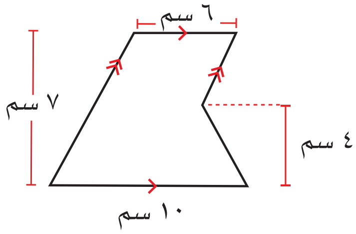
١) لُفّ حبل حول أنبوب أسطواني الشكل ١٨ مرَّة. إذا كان قُطر الأنبوب ٦٠٠ مم، فكم يكون طول الحبل؟

٢) أوجد مُحيط ومساحة الشكل التالي:



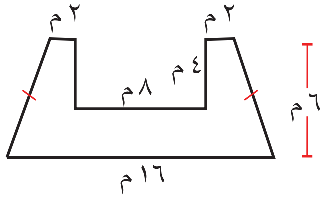
٣) خزّان لجمع ماء المطر أسطواني الشكل، طوله ١,٥ م وقطره ١,٤ م. ما أكبر حجم من الماء يتَّسع له الخزّان؟

٤) أوجد مساحة الشكل المجاور:



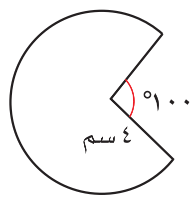
٥) أ) أوجد مساحة الشكل المجاور.

ب) أكتب الناتج بالسنتيمتر المُربَّع.

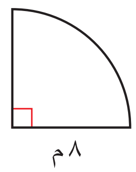


٦) أوجد محيط كل شكل من الأشكال التالية. اكتب الإجابة بدلالة π، ثمّ مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية.

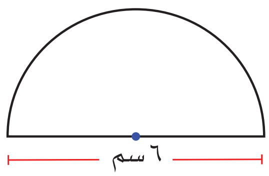
(١)



(٢)

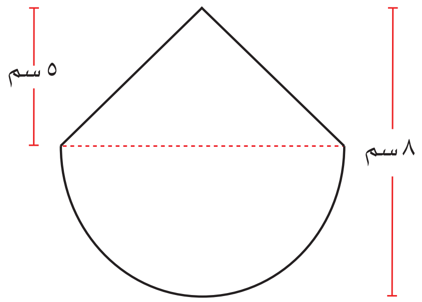


(٣)



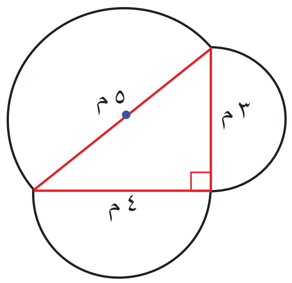
٧) أوجد مساحة كل شكل من الأشكال المعطاة في التمرين (٦).

٨) أوجد مساحة الشكل المجاور:

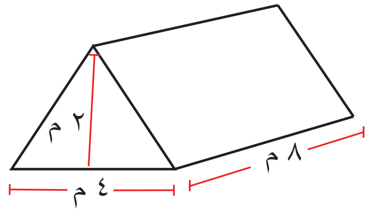


٩) **أ** أوجد مساحة الشكل المجاور.

ب أوجد محيط الشكل المجاور.



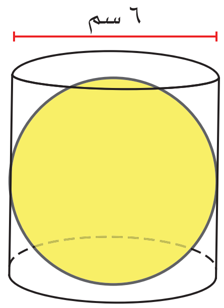
١٠) أوجد حجم المُجسَّم المجاور.



١١) تم وضع كرة داخل أنبوب أسطواني الشكل (مفتوح من الأعلى والأسفل)، بحيث يكون ارتفاع الأسطوانة مساويًا لقطر الكرة:

أ احسب المساحة السطحية للأنبوب.

ب احسب المساحة السطحية للكرة.



الوحدة السابعة عشرة: النقود

المُفردات

- المكاسب Earnings
- الأجور Wages
- الراتب Salary
- العمولة Commission
- الدّخل الإجمالي Gross income
- الاقتطاع Deduction
- صافي الدخل Net income
- الفائدة Interest
- الفائدة البسيطة Simple interest
- مُعدَّل الفائدة Interest rate
- رأس المال Capital
- الفائدة المُركَّبة Compound interest
- سعر الكلفة Cost price
- سعر البيع Selling price
- الربح Profit
- الخسارة Loss
- الخصم Discount
- التحويل Conversion
- سعر الصرف Exchange rate

تتوزَّع في سلطنة عُمان الكثير من المؤسسات المالية الرسمية، والتي تهدف إلى تنظيم سوق الأوراق الماليّة وبناء البُنية التحتية للقطاع المالي، ومراقبة شركات الوساطة الماليّة وتطوير صناعة الأوراق الماليّة في السَلطَنة، بالإضافة إلى توفير المعلومات والبيانات للجهات الرقابيّة بشكل فوري، لتتمكّن من تفعيل دورها الرّقابي في السّوق، وأهمّ هذه المُؤسَّسات هي الهيئة العامة لسوق المال، وسوق مسقط للأوراق الماليّة، وشركة مَسقط للمقاصّة والإيداع، ومُؤشِّر سوق مسقط ٣٠

تُعتبر معرفة التعامُل مع النقود في المُعاملات التجارية المختلفة من المهارات المُهمَّة التي ينبغي أن تكتسبها لأنك سوف تستخدمها مرارًا وتكرارًا في حياتك اليومية.

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تستخدم سعر الصرف للتحويل بين العملات.
- تحسب المكاسب (الأجور والرواتب) في مواقف مختلفة.
- تستخدم وتعالج صيغة لتحسب الفائدة البسيطة المُستحقَّة على القروض والاستثمارات.
- تحُلّ مسائل على الفائدة البسيطة والفائدة المُركَّبة.
- تُطبِّق ما تعلَّمته عن النسب المئوية لتحسب الخصم والربح والخسارة في سياقات من الحياة اليومية.

- تستخدم الآلة الحاسبة بفاعلية لتنفِّذ حسابات مالية.
- تقرأ بيانات مالية مُعدَّة في جداول وقوائم وتفسِّرها.

لا بدّ من أنك قد واجهت خلال حياتك اليومية حتى الآن عددًا من المسائل المُرتبِطة بالنقود، وسوف تستمر في القيام بذلك كلما تقدَّمت في العمر، لكن ستصبح المسائل التي سوف تحلّها أكثر تعقيدًا، وخاصة عندما تبدأ بكسب النقود وإنفاقها واستدانتها وتوفيرها.

سوف تُطبِّق في هذه الوحدة بعض المهارات الرياضية التي تعلمتها لتحلّ مسائل في مواقف من الحياة اليومية، وقد تحتاج إلى استخدام آلتك الحاسبة لتجد الإجابة بسرعة وفاعلية.

١٧-١ سعر الصرف

عندما تسافر إلى بلد آخر تحتاج إلى استخدام العملة النقدية المستخدمة في ذلك البلد، لذا ستلجأ إلى معرفة سعر الصرف وتحويل النقود.

يوجد تشابُه بين تحويل النقود من عملة إلى أخرى وتحويل وحدات القياس. مثلاً، للتحويل من مم إلى سم، نقسم على ١٠، وللتحويل من الريال العُماني إلى الريال القطري نضرب في المقدار (٩,٤٦)، والفرق الكبير عند التحويل بين النقود ناجم عن عدم ثبات سعر الصرف الذي يتغيَّر بانتظام، كما أن التحويل بين النقود ليس بسيطًا كالتحويل بين وحدات القياس، ولا يتمّ بالضرب أو القسمة على مُضاعفات العدد ١٠، لهذا السبب ستستخدم الآلة الحاسبة لتنفِّذ التحويلات وتجد الإجابات.

العمل مع النقود مشابه للعمل مع الكسور العشرية، لأن معظم كمّيات النقود تُعطى في صورة عشرية، وبالرغم من ذلك، تذكَّر عند التعامل مع النقود أن تُضمِّن إجاباتك الوحدات النقدية (الريال العُمانيّ أو البيسة).

تحويل العملات

سابقًا

قبل البدء بهذا الدرس، من المفيد تذكُّر كيفية التعامُل مع الكسور كما في الوحدة ٢

تسمّى النقود التي تستخدمها الدول العِملَة، ولكلّ دولة عُملتها الخاصَّة، كما تعتمد أغلب العُملات على النظام العشري (١٠٠ وحدة صغيرة أو ١٠٠٠ وحدة صغيرة تساوي الوحدة الأساسية). يُبيّن الجدوَل أدناه أمثلة على العُملات المُعتمَدة في بعض الدول.

الدولة	الوحدة الأساسية	الوحدة الأصغر
سلطنة عُمان	الريال (الريال العُمانيّ)	= ١٠٠٠ بيسة
المملكة العربية السعودية	الريال (ر. س)	= ١٠٠ هللة
المملكة الأردنية الهاشمية	الدينار (د. أ)	= ١٠٠٠ فلس
الهند	الروبية (₹)	= ١٠٠ بيسة
المملكة المُتحَّدة	الجنيه الإسترليني (£)	= ١٠٠ بنس
الولايات المُتَّحدة الأمريكية	الدولار ($)	= ١٠٠ سنت

عند التعامُل مع النقود، غالبًا ما يتمّ تقريب النواتج إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين.

مثـــال ١

حوّل ٥٠ ريالاً عُمانيًّا إلى دراهم إماراتية. استخدم ١ ريال عُمانيّ = ٩,٥٤ دراهم.

الحــلّ:

١ ريال عُمانيّ = ٩,٥٤ دراهم ٥٠ ريالاً عُمانيًّا = س درهم إماراتي ∴ س=٥٠ × ٩,٥٤ = ٤٧٧ ∴ ٥٠ ريالاً عُمانيًّا = ٤٧٧ درهمًا	اضرب في ٩,٥٤ تحقّق من منطقية الناتج.

مثـــال ٢

حوّل ٨٠٣ روبيّات هندية إلى ريالات عُمانية. استخدم ١ ريال عُمانيّ = ١٩١ روبية.

الحــلّ:

١٩١ روبية = ١ ريال عُمانيّ ٨٠٣ روبيات = س ريال عماني ∴ س = $\frac{٨٠٣ \times ١}{١٩١}$ =٤,٢٠٤ ∴ ٨٠٣ روبيات = ٤,٢٠٤ ريالات عُمانيَّة	الآن نحتاج إلى القسمة اقسم على ١٩١ أو اضرب في $\frac{١}{١٩١}$

تمارين ١٧-١

طبّق مهاراتك

١) إذا علمت أن ١ ريال عُمانيّ = ٢,٦٠ دولار أميركي:

أ كم دولارًا أميركيًّا يُعادِل ٥٢٠ ريالاً عُمانيًّا؟

ب كم ريالًا عُمانيًّا يُعادِل ٥٢٠ دولارًا أميركيًّا؟

٢) إذا علمت ان ١ ريال عُماني = ٢,١١ يورو، أيهما أكبر: ٧ ريالات عُمانيَّة أم ١٥ يورو؟

٣) حوّل ٤٠٠٠ دينار بحريني إلى ريالات عُمانيَّة إذا علمت أن ١ دينار بحريني = ٠,٩٨٠ ريال عُمانيّ.

٤) إذا علمت أن ١ دولار أمريكي = ٠,٣٩٠ ريال عُمانيّ، كم دولارًا أميركيًّا يعادل ٣٠٠ ريال عُمانيّ؟

٥) زار محمود دولة جنوب أفريقيا ومعه ٣٠٠٠ ريال عُماني، وعند وصوله كان سعر الصرف ١ ريال عُمانيّ = ٤٢,٩٦٠ راندًا. حوّل محمود جميع الريالات العُمانيَّة التي بحوزته إلى راندات وصرف ٩٠٠ راند في كلّ يوم على مدى سبعة أيام، ثمّ حوّل الراندات التي بقيت لديه إلى ريالات عُمانيَّة بسعر صرف ١ ريال عُمانيّ = ٤٣,٢٣٠ راندًا. كم ريالاً عُمانيًّا بقي معه؟

١٧-٢ المكسب

كسب النقود

عندما تعمل، تكسب نقودًا مقابل العمل الذي تقوم به تُسمّى الأجر أو **الدخل**، يمكن حساب **الدخل الإجمالي** بطرق مختلفة. تأكَّد من فهم المُصطلحات التالية:

- **الأجر (الدخل):** مبلغ يدفع مُقابل تنفيذ عدد مُحدَّد من ساعات العمل الأسبوعي، ويتمّ دفعه عادة كل أسبوع، وتسمَّى ساعات العمل الإضافية العمل الإضافي، ويكون مُعدَّل أجرها أعلى.
- **الراتب:** مبلغ يُدفع مُقابل تنفيذ عدد مُحدَّد من ساعات العمل السنوي، ويدفع عادة كل شهر، ويمكن أن يُدفَع للعامل مقابِل العمل الإضافي، أو يُعطى استراحة مُقابله.
- **العمل بالقطعة:** يعتمد المبلغ المدفوع على عدد القطع المُنتجة.
- **العمولة:** مبلغ يدفع كنسبة مئوية من المبيعات؛ وأحيانًا يتقاضى العامل أجرًا مُنخفِضًا كعائد ثابت إضافة إلى العمولة.

مثــال ٣

يتقاضى سعيد ١٤,٥٠٠ ريالاً عُمانيًا مُقابل كل قلادة يصنعها، فإذا قام بصنع ٥٥ قلادة في الأسبوع. أوجد دخل سعيد الأسبوعي.

الحــلّ:

الدخل = ٥٥ × ١٤,٥٠٠ = ٧٩٧,٥٠٠ ريالاً عُمانيًا	اضرب عدد الوحدات المُنتَجة في سعر القلادة الواحدة.

مثــال ٤

يعمل خلفان مندوب مبيعات لشركة سيّارات، ويتقاضى راتبًا أسبوعيًّا مقداره ١٥٠ ريالًا عُمانيًا إضافة لعمولة نسبتها ١٪ من قيمة المبيعات.

أ) كم يكسب خلفان أسبوعيًّا إذا لم يبع أيّ سيّارة؟

ب) كم يكسب خلفان أسبوعيًّا، إذا باع أربع سيّارات سعر الواحدة منها ٣٢٩٩ ريالاً عُمانيًّا؟

الحــلّ:

أ) ١٥٠ ريالًا عُمانيًّا	إذا لم يبع أي سيّارة، فإنه لن يتقاضى أي عمولة، وسوف يتقاضى راتبه الأسبوعي فقط.

ب العمولة = ١٪ من (٣٢٩٩ × ٤) = ٠,٠١ × ١٣١٩٦ = ١٣١,٩٦٠ ريالاً عُمانيًّا المكسب = الراتب + العمولة = ١٥٠ ريالًا عُمانيًّا + ١٣١,٩٦٠ ريالاً عُمانيًّا = ٢٨١,٩٦٠ ريالاً عُمانيًّا	أوجد ١٪ من قيمة المبيعات التي قام خلفان ببيعها. أضف العمولة إلى الراتب

سابقًا

درست تكافؤ الأعداد العشرية والنسبة المئوية في الوحدة ٢

مثــال ٥

يتقاضى سعد ٤,٥٠٠ ريالات عُمانية مُقابل كل ساعة عمل، ويتقاضى أجرة 'ساعة ونصف الساعة' مُقابِل كل ساعة عمل إضافي وعن ساعات العمل خلال يوم الاستراحة، و 'ضعف ساعات العمل' بدل العمل يوم الجمعة والأعياد الوطنية.

عَمِل في أحد الأسابيع ٥,٥ ساعات يوم الاستراحة و ٣ ساعات يوم الجمعة. كم كسب سعد من العمل الإضافي؟

الحــلّ:

أجرة العمل يوم الاستراحة = ١,٥ × ٥,٥× ٤,٥٠٠ = ٣٧,١٢٥ ريالاً عُمانيًّا	'ساعة ونصف الساعة' = ١,٥ × زمن العمل الطبيعي
أجرة العمل يوم الجمعة = ٢ × ٤,٥٠٠ × ٣ = ٢٧ ريالاً عُمانيًّا	'ضعف ساعات العمل' = ٢ × زمن العمل الطبيعي
المجموع الكلّي لمكسب سعد من العمل الإضافي = ٣٧,١٢٥ ريالاً عُمانيًّا + ٢٧ ريالاً عُمانيًّا = ٦٤,١٢٥ ريالاً عُمانيًّا	الدخل الإجمالي = أجرة العمل يوم الاستراحة + أجرة العمل يوم الجمعة

تمارين ١٧-٢

طبِّق مهاراتك

١) يتقاضى نادل في مطعم ٣,٢٥٠ ريالات عُمانيَّة في الساعة. كم ريالاً عُمانيًّا يتقاضى إذا عمل ست ساعات؟

٢) يتقاضى عامل استقبال ٣,٥٠٠ ريالات عُمانيَّة في الساعة. كم ريالاً عُمانيًّا يتقاضى إذا عمل ٣٥ ساعة في الأسبوع؟

٣) احسب الأجر في الساعة الواحدة في كلّ حالة من الحالات التالية:

أ ٢٦,٥٠٠ ريالاً عُمانيًّا مُقابِل خمس ساعات.

ب ١٠٢,٢٥٠ ريال عُمانيّ مُقابِل ٣٨ ساعة في الأسبوع.

ج ٥٤,١٢٠ ريالاً عُمانيًّا مُقابِل ١٣,٥ ساعة.

د ١٧٥,٢٥٠ ريالاً عُمانيًّا مُقابِل $٦\frac{١}{٢}$ ساعات.

هـ ٢٨,٨١٠ ريالاً عُمانيًّا مُقابِل خمس ساعات و١٥ دقيقة.

٤) يتقاضى سائق شاحنة ٦,٤٥٠ ريالات عُمانيَّة أجرة نقل كل طن من الخشب إلى مصنع في البريمي. كم ريالاً عُمانيًّا سيتقاضى إذا نقل ١٣٥ طنًّا من الخشب؟

٥) يتقاضى فريق عمل في مصنع ١١,٢٥٠ ريالاً عُمانيًّا لإنتاج رزمة واحدة من البضائع. إذا أنتج فريق من ٥ عمال ١٠٢ رزمة من البضائع في مُناوبة عملهم، فكم يكون نصيب كل منهم؟

٦) يتقاضى وكيل عقارات ٦٥ ريالاً عُمانيًّا في الأسبوع إضافة إلى عمولة ٢,٥٪ على المبيعات لغاية ٦٥٠٠٠ ريال عُمانيّ، ويتقاضى ١,٧٥ ٪ للمبيعات الأكثر من ذلك. كم ريالاً سوف يتقاضى في الأسبوع إذا باع بيتًا بمبلغ ٩٥٠٠٠ ريال عُمانيّ، وباع مكتبًا بمبلغ ٤٩٠٠٠ ريال عُمانيّ؟

٧) يعرض الجدول الزمني أدناه فترة العمل لخمسة عمّال في مصنع. احسب دخل كلّ عامل منهم في الأسبوع إذا كان مُعدَّل الأجر لكلّ منهم ٣,٩٠٠ ريالات عُمانيَّة في الساعة.

العامل	عدد ساعات العمل الطبيعية	ساعات العمل الإضافي بنظام ساعة ونصف الساعة	ساعات العمل الإضافي بنظام ضعف ساعات العمل
عدنان	٣٥	٢	٠
سالم	٢٥	٣	٤
أحمد	٣٠	١,٥	١,٧٥
محمود	٤٠	٠	٤
عبدالحميد	٢٠	٣,٧٥	٢

٨) سجَّلت إحدى الشركات قائمة الرواتب السنوية لعشرة من المُديرين التنفيذيّين لعام ٢٠١٦م، كما في القائمة الآتية:

الاسم	الراتب السنوي (ألف ريال عُماني)
سالم	٨٧,٩٠٠
صالح	٨٦,١٠٠
رشيد	٨٥,١٠٠
سلطان	٦٦,٩٠٠
منير	٦٦,٨٠٠
سامر	٥٩,٥٠٠
محمود	٥١,٩٠٠
جمال	٥١,٥٠٠
وليد	٤٩,٩٠٠
أحمد	٤٩,٧٠٠

أ أوجد الراتب الشهري لكلّ مدير تنفيذي.

ب إذا كان مُعدَّل ساعات العمل الأسبوعية ٤٠ ساعة، وأخذ كلّ شخص إجازة مدتها ٣ أسابيع في السنة (تُقتطع من الراتب)، فما مُتوسِّط المكسب بالساعة لصاحب أعلى راتب وصاحب أدنى راتب؟

١٧-٣ اقتراض النقود واستثمارها

عندما تقترض نقودًا أو تشتري أشياء على مبدأ التسليف، تترتَّب عليك أعباء **الفائدة** على استخدام تلك النقود، وفي المقابل، عندما توفِّر أو تستثمر نقودًا، يدفع لك البنك أو المؤسسة المالية عائدًا مُقابِل السماح لهم بالاحتفاظ بالنقود واستخدامها.

١٧-٣-أ الفائدة البسيطة

الفائدة البسيطة هي نسبة مئوية ثابتة من المبلغ الأصلي المُستدان أو المُستثمَر، بمعنى آخر، إذا استدنت ١٠٠ ريال عُمانيّ بفائدة نسبتها ٥٪ سنويًّا، سيترتَّب عليك عبء مالي مقداره ٥ ريالات عُمانيّة كلّ سنة لهذا القرض.

يتضمَّن الربح البسيط إضافة مقدار الفائدة إلى المبلغ الأصلي على فترات مُنتظمة.
الصيغة التي تستخدم لحساب الفائدة البسيطة هي:

ف = $\frac{\text{ر م ن}}{١٠٠}$، حيث:

ر: **رأس المال** أو المبلغ الأصلي الذي تمّ اقتراضه أو استثماره في حساب التوفير.

م: مُعدَّل الفائدة.

ن: زمن الاقتراض أو الاستثمار (بالسنة).

مثـــال ٦

استثمرت سارة مبلغ ٥٠٠ ريال عُمانيّ بمُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ١٠٪ في السنة. ما مقدار الفائدة التي ستكسبها سارة في ثلاث سنوات؟

الحــلّ:

١٠٪ من الـ ٥٠٠ = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٥٠٠ = ٥٠ ريالاً عُمانيًّا	مُعدَّل الفائدة ١٠٪ في السنة
مقدار الفائدة في السنة الواحدة ٥٠ ريالاً عُمانيًّا. مقدار الفائدة في ثلاث سنوات يساوي: ٣ × ٥٠ = ١٥٠ ريالاً عُمانيًّا	اضرب في عدد السنوات.

مثــال ٧

استثمر سامي مبلغ ٤٠٠ ريال عُماني بمُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ١٥٪ في السنة لمُدَّة ثلاث سنوات. ما المبلغ الذي سيحصل عليه سامي في نهاية المُدَّة؟

الحــلّ:

سيحصل سامي في نهاية المُدَّة على ر + ف	اكتب صيغة المبلغ الإجمالي الذي سيحصل عليه سامي (المبلغ الأصلي + الفائدة).
ف = $\frac{\text{ر م ن}}{١٠٠}$ ، ر = ٤٠٠، فيكون:	
ر + ف = ٤٠٠ + $\frac{(٤٠٠ \times ١٥ \times ٣)}{١٠٠}$	عوّض القيَم في الصيغة.
= ٤٠٠ + ١٨٠	بسّط.
= ٥٨٠ ريالاً عُمانيًّا	
∴ سيحصل سامي في نهاية المُدَّة على ٥٨٠ ريالاً عُمانيًّا	

مثــال ٨

استثمر ماجد مبلغ ٢٥٠ ريالاً عُمانيًّا بمُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ٨ ٪ وأصبح المبلغ الإجمالي ٣١٠ ريالات عُمانيَّة بعد مُدَّة زمنية. ما المُدَّة التي استثمر فيها ماجد المبلغ؟

الحــلّ:

المبلغ الإجمالي = المبلغ الأصلي + الفائدة	اكتب صيغة المبلغ الإجمالي.
الفائدة = المبلغ الإجمالي – المبلغ الأصلي	اطرح المبلغ الأصلي من طرفَي المعادلة.
∴ الفائدة = ٣١٠ – ٢٥٠ = ٦٠ ريالاً عُمانيًّا	عوّض.
الفائدة في السنة = ٨٪ في السنة	اكتب مُعدَّل الفائدة في السنة.
= $\frac{٨}{١٠٠}$ × ٢٥٠	اضرب مُعدَّل الفائدة في المبلغ.
= ٢٠ ريالاً عُمانيًّا	بسّط.
∴ الفائدة في السنة تساوي ٢٠ ريالاً عُمانيًّا	عوّض وبسّط.
الفائدة الإجمالية ÷ الفائدة في السنة	
= ٦٠ ÷ ٢٠ = ٣	
استثمر ماجد المبلغ لمُدَّة ثلاث سنوات.	

تذكّر

يمكنك تغيير موضوع الصيغة لكتابة أيّ من المُتغيّرات بدلالة المُتغيّرات الأخرى:

$ف = \frac{ر م ن}{١٠٠}$

$ر = \frac{١٠٠ف}{م ن}$

$م = \frac{١٠٠ف}{ر ن}$

$ن = \frac{١٠٠ف}{ر م}$

مثـــال ٩

تمّ استثمار مبلغ ٢٥٠ ريالاً عُمانيًّا بمعدل فائدة بسيطة لمُدّة ثلاث سنوات فأصبح ٤٠٠ ريال عُمانيّ. أوجد نسبة مُعدّل الفائدة البسيطة.

الحـــلّ:

الفائدة المُحصّلة = ٤٠٠ − ٢٥٠ = ١٥٠ ريالاً عُمانيًّا	
$ف = \frac{ر م ن}{١٠٠}$	أعد كتابة صيغة الفائدة البسيطة بدلالة المُتغيِّر ف.
١٠٠ف = ر م ن	
$م = \frac{١٠٠ف}{ر ن} = \frac{١٠٠ \times ١٥٠}{٢٥٠ \times ٣} = ٢٠$	اكتب الصيغة بدلالة المُتغيِّر م لتجد نسبة مُعدّل الفائدة.
نسبة مُعدّل الفائدة تساوي ٢٠٪	

تمارين ١٧-٣-أ

١) أوجد الفائدة البسيطة المُحصّلة في كلّ من حسابات التوفير التالية:

المبلغ الأصلي (رأس المال)	مُعدّل الفائدة (٪)	زمن الاستثمار
٥٠٠	١	٣ سنوات
٦٥٠	٠,٧٥	$٢\frac{١}{٢}$ سنة
١٠٠٠	١,٢٥	٥ سنوات
١٢٠٠	٤	$٦\frac{١}{٤}$ سنوات
٨٧٥	٥,٥	٣ سنوات
٩٠٠	٦	٢ سنة
٦٩٩	٧,٢٥	٣,٧٥ سنوات
١٢٠٠	٨	٩ أشهر
١٥٠٠٠٠	$٩\frac{١}{٢}$	١٨ شهرًا

٢) احسب المبلغ الإجمالي الذي يجب إعادة دفعه لكل من القروض التالية:

المبلغ الأصلي	مُعدَّل الفائدة (٪)	زمن الاستثمار
٥٠٠	٤,٥	٢ سنة
٦٥٠	٥	٢ سنة
١٠٠٠	٦	٢ سنة
١٢٠٠	١٢	١٨ شهرًا
٨٧٥	١٥	١٨ شهرًا
٩٠٠	١٥	٣ سنوات
٦٩٩	٢٠	٩ أشهر
١٢٠٠	٢١,٢٥	٨ أشهر
١٥٠٠٠٠	١٨	$١\frac{١}{٢}$ سنة

٣) استثمر جاسم ١٤٠٠ ريالٍ عُمانيّ بمُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ٤٪ في السنة ليصبح إجمالي المبلغ ١٦٢٤ ريالاً عُمانيًّا بعد مُدَّة زمنية. ما المُدَّة التي استثمر فيها جاسم المبلغ؟

٤) إذا كانت الفائدة البسيطة على مبلغ قيمته ٦٠٠ ريال عُماني في خمس سنوات تساوي ٢١٠ ريالات عُمانيَّة، فما نسبة مُعدَّل الفائدة في السنة؟

طبِّق مهاراتك

٥) إذا استثمرت مبلغًا بمُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ٦٪، فما المُدَّة الزمنية اللازمة لكي يصبح إجمالي المبلغ ثلاثة أمثال المبلغ الأصلي؟

٦) أنفقت سميرة $\frac{١}{٤}$ دخلها من الوظيفة على شراء الكتب و $\frac{١}{٣}$ الدخل على المواصلات و $\frac{١}{٦}$ الدخل على الملابس ووفّرت الباقي:

أ) إذا وفّرت سميرة ٨ ريالات عُمانية في الشهر، فكم دخلها الشهري؟

ب) ما المبلغ الذي توفِّره سميرة في السنة إذا وفّرت ٨ ريالات عُمانيَّة في الشهر؟

ج) إذا أودعت سميرة ما وفّرته في سنة في حساب توفيري بمُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ٨,٥ ٪ في السنة لمدَّة خمس سنوات:

(١) ما قيمة الفائدة التي ستحصل عليها عند نهاية السنة الخامسة؟

(٢) ما المبلغ الإجمالي الذي ستحصل عليه في نهاية السنة الخامسة؟

٧) استدان عبد المجيد ٨٠٠٠ ريال عُمانيّ لمُدَّة ثلاث سنوات، ودفع ٣٢٥ ريالاً عُمانيًّا كلّ شهر في تلك الفترة الزمنية:

أ ما المبلغ الإجمالي الذي أعاد دفعه عبد المجيد خلال السنوات الثلاث؟

ب كم ريالاً عُمانيًّا دفعها كفائدة على المبلغ؟

ج ما نسبة مُعدَّل الفائدة البسيطة التي دفعها عبد المجيد على القرض؟

١٧-٣-ب البيع والشراء بالتقسيط

لا يستطيع الكثير من الأفراد توفير سعر الأشياء الغالية نقدًا، مثل سعر التلفاز والأثاث والسيَّارات، لذا يلجأ هؤلاء الأفراد إلى نظام شراء يُسمّى الشراء بالتقسيط.

عند البيع أو الشراء بالتقسيط تدفع جزءًا من السعر مُقدَّمًا، وتُقسِّط الباقي على دفعات أسبوعية أو شهرية، بحيث تُستوفى الفائدة على القسط المُستحقّ في موعده. من المفيد أن تكون قادرًا على حساب مُعدَّل الفائدة المقرَّرة على الأقساط، لأنه غالبًا ما يكون هذا المُعدَّل غير مذكور بشكل واضح وصريح.

عند البيع أو الشراء بالتقسيط، تُسمّى الدفعة الأولى أحيانًا بالمُقدِّم. عندما تُحسب الفائدة على أنها جزء من المبلغ المدين، تُسمّى عندها الفائدة بمعدل الفائدة الثابت. وهو نفسه معدل الفائدة البسيطة.

مثـــال ١٠

سيارة سعرها نقدًا ٢٠٠٠٠ ريال عُمانيّ. غير أنَّ البيع بالتقسيط يستوجب دفع مبلغ مقداره ٦٠٠٠ ريال عُمانيّ نقدًا كمُقدَّم، وأقساط شهرية مقدار كل منها ٧٠٠ ريال عُمانيّ لمُدَّة سنتَين. كم ريالاً يزيد سعر البيع بالتقسيط على سعر البيع نقدًا؟

الحـــلّ:

المُقدَّم النقدي = ٦٠٠٠ ريال عُمانيّ القسط الواحد = ٧٠٠ ريال عُمانيّ ٢٤ × قيمة القسط الواحد = ٧٠٠ ريال عُمانيّ × ٢٤ = ١٦٨٠٠ ريال عُمانيّ	بما أن القسط يُدفع مرَّة واحدة في كل شهر، فإن عدد الأقساط في سنتَين يُساوي ٢٤ قسطًا.
إجمالي سعر البيع بالتقسيط = المُقدَّم النقدي + (٢٤ × قيمة القسط الواحد) = ٦٠٠٠ ريال عُمانيّ + ١٦٨٠٠ ريال عُمانيّ = ٢٢٨٠٠ ريال عُمانيّ	عوّض.
إجمالي سعر البيع بالتقسيط − سعر البيع نقدًا = ٢٢٨٠٠ − ٢٠٠٠٠ = ٢٨٠٠ ∴ يزيد سعر البيع بالتقسيط على البيع نقدًا بمقدار ٢٨٠٠ ريال عُمانيّ.	

مثــال ١١

اشترى عبدالله سيّارة بالتقسيط بمبلغ مقداره ٣٠٠٠٠ ريال عُمانيّ. دفع مبلغ ٢٠٪ مُقدمًا وتمّ احتساب الفائدة على المبلغ المُستحقّ بمُعدّل فائدة نسبتها ١٠٪ سنويًّا لفترة السداد، بحيث يتمّ التقسيط بدفع ١٢ قسطًا متساويًا في السنة. ما قيمة القسط الواحد؟

الحــلّ:

سعر السيارة نقدًا = ٣٠٠٠٠ ريال عُمانيّ	
قيمة المبلغ المُقدَّم = ٢٠٪ من السعر نقدًا	
$= \frac{٢٠}{١٠٠} \times ٣٠٠٠٠$	حوّل النسبة المئوية إلى كسر وعوّض.
= ٦٠٠٠ ريال عُمانيّ	بسّط.
المبلغ المُستحقّ = ٣٠٠٠٠ − ٦٠٠٠	عوّض.
= ٢٤٠٠٠ ريال عُمانيّ	
الفائدة ١٠٪ $= \frac{١٠}{١٠٠} \times ٢٤٠٠٠$	حوّل النسبة المئوية إلى كسر وعوّض.
= ٢٤٠٠ ريال عُمانيّ	بسّط.
المبلغ الذي سيدفع عند البيع بالتقسيط	
= المبلغ المُستحقّ + الفائدة	
= ٢٤٠٠٠ + ٢٤٠٠	عوّض.
= ٢٦٤٠٠ ريال عُمانيّ	
قيمة كل قسط $= \frac{٢٦٤٠٠}{١٢}$ = ٢٢٠٠ ريال عُماني	اقسم على عدد الأقساط الكلّي.

تمارين ١٧-٣-ب

١) يُريد حارس متجر أن يشتري دراجة نارية سعرها ٤٠٠ ريال عُمانيّ، بحيث يدفع ٢٠٪ من سعرها مُقدَّمًا، ويُقسِّط الباقي بمُعدَّل فائدة نسبتها ٢٠٪ سنويًّا. أوجد قيمة:

أ المُقدَّم ب الفائدة ج سعر الدرّاجة الإجمالي

٢) دفع شخص ٣٠٪ مُقدَّمًا لثلاّجة قيمتها ٩٥٠ ريالاً عُمانيًّا، وسوف يدفع المبلغ المُتبقّي في سنة واحدة، بمُعدَّل فائدة نسبتها ٢٠٪ سنويًّا. كم ريالاً بالإجمال سيدفع سعرًا للثلاّجة؟

٣) اشترى طالب حاسوبًا محمولاً، سعره ٧٥٠ ريالاً عُمانيًّا. دفع مُقدَّمًا ٢٠٪ من سعره، وقسّط الباقي على ١٢ قسطًا شهريًّا مُتساويًا، بحيث يدفع مُعدَّل فائدة سنوية نسبتها ١٥٪ على المبلغ المُستحقّ:

أ ما قيمة القسط الشهري؟

ب ما التكلفة الكلّية لشراء الحاسوب بالتقسيط؟

٤) سعر شاشة تلفاز مُسطّح ٤٢٠ ريالاً عُمانيًّا. اتّفق سليمان مع المتجر أن يدفع ٤٠ ريالاً عُمانيًّا مُقدَّمًا ويُقسّط الباقي على ١٢ قسطاً شهريًّا متساويًا، قيمة كلّ قسط ٤٠ ريالاً عُمانيًّا:

أ أوجد المبلغ الإجمالي الذي سيدفعه سليمان.

ب أوجد قيمة الفائدة.

٥) سيّارة مُستعمَلة سعرها في إعلان تجاري ٦٢٠٠ ريال عُمانيّ نقدًا ويمكن شراؤها بالتقسيط بدفع ٦٠٠ ريال عُمانيّ مُقدَّمًا و٢٤ قسطًا شهريًّا قيمة القسط الواحد ٢٧٥ ريالاً عُمانيًّا:

أ ما الفرق بين سعر السيارة نقدًا وسعرها بالتقسيط؟

ب ما قيمة الفائدة السنوية عند البيع بالتقسيط؟

١٧-٣-ج الفائدة المُركَّبة

تُحتسب الفائدة البسيطة على مبلغ التوفير الأصلي أو القرض الأصلي، ولكن غالبًا ما يتمّ الادّخار أو الاستدانة بنظام الفائدة المُركَّبة. فعندما تستدين قرضًا على نظام **الفائدة المُركَّبة**، تُضاف الفائدة إلى المبلغ المُقترَض على فترات زمنية مُنتظمة، لذا يزداد مقدار الدَّين المُستحقّ في الفترة التالية، وعندما تستثمر نقودًا لفترة مُحَدَّدة، يمكنك الكسب بفائدة مُركَّبة، بحيث تضاف الفائدة المُتحقِّقة إلى المبلغ كلّ فترة زمنية مُحدَّدة، وبناء على ذلك فإنك تكسب فائدة على المبلغ مضافًا إليها فائدة الفترة التي تليها، وهكذا.

إحدى طرق حساب الفائدة المُركَّبة هي اعتبارها سلسلة من حسابات الفائدة البسيطة. هذه الطريقة مُوضَّحة في المثال الآتي:

عند وجود نفس رأس المال ومُعدَّل الفائدة والزمن، تكون الفائدة المُركَّبة أكبر من الفائدة البسيطة. الاستثناء هو عند إيجاد الفائدة لمُدّة زمنية واحدة (مثلاً لمدة سنة واحدة)؛ في هذه الحالة، تتساوى الفائدة البسيطة مع الفائدة المُركَّبة.

مثال ١٢

يستثمر بدر مبلغ ١٠٠ ريال عُمانيّ بمُعدَّل فائدة مُركَّبة نسبتها ١٠ ٪ سنويًّا. ما المبلغ الذي سيحصل عليه بدر بعد ثلاث سنوات؟

الحــلّ:

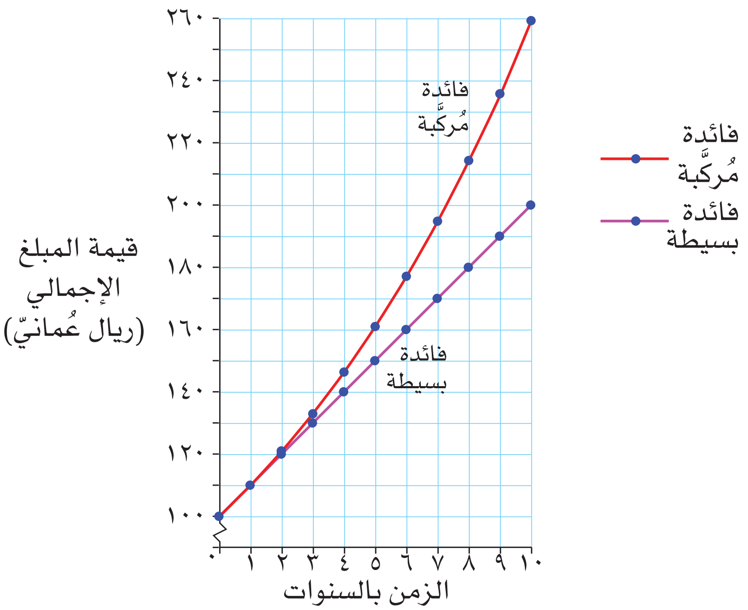
السنة الأولى: ف = $\frac{\text{ر م ن}}{١٠٠}$ = $\frac{١٠٠ \times ١٠ \times ١}{١٠٠}$ = ١٠ ريالات عُمانيّة ر + ف = ١٠٠ + ١٠ = ١١٠ ريالات عُمانيّة	استخدم صيغة الفائدة البسيطة. أوجد المبلغ الإجمالي في السنة الأولى.
السنة الثانية: ف = $\frac{\text{ر م ن}}{١٠٠}$ = $\frac{١١٠ \times ١٠ \times ١}{١٠٠}$ = ١١ ريالاً عُمانيًّا ر + ف = ١١٠ + ١١ = ١٢١,٠٠٠ ريالاً عُمانيًّا	رأس المال في السنة الثانية هو ١١٠ ريالات عُمانيّة؛ الزمن ن سنة واحدة فقط وكأنك تجد الفائدة البسيطة في السنة الثانية.

السنة الثالثة: ف = $\frac{\text{ر م ن}}{١٠٠}$ = $\frac{١٢١ \times ١٠ \times ١}{١٠٠}$ = ١٢,١٠٠ ريالاً عُمانيًّا ر + ف = ١٣٣,١٠٠ ريالاً عُمانيًّا	رأس المال في السنة الثالثة هو ١٢١ ريالاً عُمانيًّا؛ ويبقى الزمن سنة واحدة.

الجدول والتمثيل البياني أدناه يُقارنان قيمة الاستثمار لمبلغ ١٠٠ ريال عُمانيّ بطريقتَين مختلفتَين: استثمر بالطريقة الأولى بمُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ١٠٪ سنويًّا، واستثمر بالطريقة الثانية بمُعدَّل فائدة مُركَّبة نسبتها ١٠٪ سنويًّا:

السنة (ن)	المبلغ الإجمالي (بالريال العُمانيّ) مُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ١٠٪ سنويًّا	المبلغ الإجمالي (بالريال العُمانيّ) مُعدَّل فائدة مُركَّبة نسبتها ١٠٪ سنويًّا
١	١١٠	١١٠
٢	١٢٠	١٢١
٣	١٣٠	١٣٣,١٠
٤	١٤٠	١٤٦,٤١
٥	١٥٠	١٦١,٠٥
٦	١٦٠	١٧٧,١٦
٧	١٧٠	١٩٤,٨٧
٨	١٨٠	٢١٤,٣٦
٩	١٩٠	٢٣٥,٧٩
١٠	٢٠٠	٢٥٩,٣٧

مقارنة نموّ ١٠٠ ريال عُمانيّ تمّ استثماره بمُعدَّل فائدة بسيطة ومُركَّبة نسبتها ١٠٪



من الواضح أن اختيار مُعدَّل فائدة مُركَّبة يكون لصالح المُستثمِر. تذكَّر أن نفس التأثير يتمّ عند الاقتراض، أي أن مبلغ الدين المُستحقّ يزداد كلّ مُدَّة بمُعدَّل الفائدة المُركَّبة.

يستغرق احتساب الفائدة المُركَّبة على أنها سلسلة من الفائدة البسيطة وقتًا طويلاً وحسابات كثيرة. ولكن هناك طريقة أسرع لاحتساب الفائدة المُركّبة معروضة في العمود الثالث من الجدول التالي:

السنة (ن)	المبلغ الإجمالي (بالريال العُمانيّ) مُعدَّل فائدة مُركَّبة نسبتها ١٠٪ سنويًا	الحل باستخدام مُعامِل الضرب
١	١١٠	١٠٠ × ١,١ = ١١٠
٢	١٢١	١٠٠ × ١,١ × ١,١ = ١٢١
٣	١٣٣,١٠	١٠٠ × ١,١ × ١,١ × ١,١ = ١٣٣,١٠
٤	١٤٦,٤١	١٠٠ × $(١,١)^{٤}$ = ١٤٦,٤١
٥	١٦١,٠٥	١٠٠ × $(١,١)^{٥}$ = ١٦١,٠٥
٦	١٧٧,١٦	١٠٠ × $(١,١)^{٦}$ = ١٧٧,١٦
٧	١٩٤,٨٧	١٠٠ × $(١,١)^{٧}$ = ١٩٤,٨٧
٨	٢١٤,٣٦	١٠٠ × $(١,١)^{٨}$ = ٢١٤,٣٦
٩	٢٣٥,٧٩	١٠٠ × $(١,١)^{٩}$ = ٢٣٥,٧٩
١٠	٢٥٩,٣٧	١٠٠ × $(١,١)^{١٠}$ = ٢٥٩,٣٧

اضرب العدد العشري في نفسه عددًا من المرّات مُساويًا لعدد السنوات. لثلاث سنوات ١,١ × ١,١ × ١,١ أو $(١,١)^{٣}$ وليس ١,١ × ٣

هل يمكنك ملاحظة القاعدة؟

- أضف مُعدَّل الفائدة السنوي إلى المبلغ ١٠٠ لتحصل على النسبة المئوية للزيادة (اطرح في حالة النقصان): ١٠٠٪ + ١٠٪ = ١١٠٪
- اكتب ذلك في صورة عدد عشري: $\frac{١١٠٪}{١٠٠}$ = ١,١
- اضرب المبلغ الأصلي في قوى العدد العشري، واستخدم عدد السنوات كأُسّ، لمُدَّة خمس سنوات تعني : ١٠٠ × $(١,١)^{٥}$

يمكنك أيضًا إدخال القيَم في الصيغة لتحسب قيمة المبلغ الإجمالي للاستثمار بنظام الفائدة المُركَّبة كالتالي:

جـ ن = ر $(١ + \frac{م}{١٠٠})^{ن}$، حيث يُمثِّل ر مبلغ الاستثمار، م النسبة المئوية لمُعدَّل الفائدة، ن الزمن بالسنوات.

يعتبر العمل السابق مثالاً جيّدًا على النموّ الأسيّ.

مثال ١٣

أ) استُثمِر مبلغ ١٥٠٠ ريال عُمانيّ بمُعدَّل فائدة مُركَّبة نسبتها ٥٪ سنويًّا. ما قيمة المبلغ الإجمالي بعد ٥ سنوات؟

الحــلّ:

أ) $ج_ن = ر\left(١ + \frac{م}{١٠٠}\right)^ن$	
$= ١٥٠٠(١ + ٠,٠٥)^٥$	عوِّض.
$=$ ١٩١٤,٤٢٢ ريالاً عُمانيًّا	استخدم آلتك الحاسبة.

ب) استُثمر مبلغ من المال بمُعدَّل فائدة مُركَّبة نسبتها ٥ ٪ سنويًّا لمُدَّة ٥ سنوات ليصبح ٢٥٠٠ ريال عُمانيّ. ما قيمة المبلغ الأصلي؟

الحــلّ:

ب) $ج_ن = ر\left(١ + \frac{م}{١٠٠}\right)^ن$	اكتب صيغة الفائدة المُركَّبة.
$\therefore ر = \frac{ج_ن}{\left(١ + \frac{م}{١٠٠}\right)^ن}$	اكتب الصيغة بدلالة المُتغيِّر م.
$ر = \frac{٢٥٠٠}{(١ + ٠,٠٥)^٥}$	عوِّض.
$=$ ١٩٥٨,٨١٥ ريالاً عُمانيًّا	استخدم آلتك الحاسبة.

تمارين ١٧-٣-ج

١) احسب المبلغ الإجمالي لقرض قيمته ٨٠٠٠ ريال عُمانيّ بعد سنتَين:

أ) بمُعدَّل فائدة مُركَّبة نسبتها ١٢٪ ب) بمُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ١٢٪

٢) إذا اقترضت مبلغ ٣٥٠٠ ريال عُمانيّ، احسب إجمالي القرض:

أ) بعد مرور سنتين إذا كان مُعدَّل الفائدة المُركَّبة ١٩,٥٪ في السنة.

ب) بعد مرور ٤ سنوات إذا كان مُعدَّل الفائدة المُركَّبة ٩,٧٥٪ في السنة.

٣) احسب إجمالي قرض سكني قيمته ٦٠٠٠٠ ريال عُمانيّ بعد ١٠ سنوات، إذا كان مُعدَّل الفائدة المُركَّبة ٤٪ سنويًّا.

٤) اشترى عبدالله منزلاً في محافظة مسقط سعره ١٢٠٠٠٠ ريال عُمانيّ، فإذا كانت قيمة المنزل تزداد كل سنة بنسبة ٣,٥٪ ، فكم ستكون قيمته بعد ٥ سنوات؟

١٧-٤ البيع والشراء

سابقًا

لاحظ التشابُه مع النسبة المئوية للزيادة والنقصان في الوحدة ١٠

يشتري التجّار البضائع، ثم يقومون بتحديد أسعار بيعها، وبعد ذلك يعرضونها للبيع.

يُسمّى السعر الذي يدفعه التاجر لشراء البضاعة **سعر التكلفة**.

يُسمّى السعر الذي تُباع فيه البضاعة **سعر البيع**.

إذا كان سعر البيع أعلى من سعر التكلفة، فتكون البضاعة قد بيعت وحقّقت **ربحًا**.

أمّا إذا كان سعر البيع أقلّ من سعر التكلفة، تكون البضاعة قد بيعت وحقّقت **خسارة**.

الربح = سعر البيع − سعر التكلفة

الخسارة = سعر التكلفة − سعر البيع

١٧-٤أ النسبة المئوية للربح والخسارة

تُستخدَم الصيغتان التاليتان لحساب النسبة المئوية للربح والخسارة:

$$\text{النسبة المئوية للربح} = \frac{\text{الربح الفعلي}}{\text{سعر التكلفة}} \times ١٠٠\%$$

$$\text{النسبة المئوية للخسارة} = \frac{\text{الخسارة الفعلية}}{\text{سعر التكلفة}} \times ١٠٠\%$$

مثال ١٤

اشترى صاحب متجر سلعة بمبلغ ٥٠٠ ريال عماني وباعها بمبلغ ٦٠٠ ريال عُمانيّ.
ما النسبة المئوية للربح؟

الحلّ:

الربح = سعر البيع − سعر التكلفة	اكتب صيغة الربح.
= ٦٠٠ − ٥٠٠	عوّض بالقيَم المُعطاة.
= ١٠٠ ريال عُمانيّ	
$\text{النسبة المئوية للربح} = \frac{\text{الربح الفعلي}}{\text{سعر التكلفة}} \times ١٠٠\%$	اكتب صيغة النسبة المئوية للربح.
$= \frac{١٠٠}{٥٠٠} \times ١٠٠\%$	عوّض بالقيَم المعطاة.
$= ٢٠\%$	

مثـــال ١٥

اشترى شخص سيّارة بمبلغ ٦٠٠٠ ريال عُماني، وباعها بمبلغ ٤٥٠٠ ريال عُمانيّ.
أوجد النسبة المئوية للخسارة.

الحــلّ:

الخسارة = سعر التكلفة − سعر البيع	اكتب صيغة الخسارة.
= ٦٠٠٠ − ٤٥٠٠	عوِّض بالقِيَم المُعطاة.
= ١٥٠٠ ريال عُمانيّ	
النسبة المئوية للخسارة = $\frac{\text{الخسارة الفعلية}}{\text{سعر التكلفة}}$ × ١٠٠٪	اكتب صيغة النسبة المئوية للخسارة.
= $\frac{١٥٠٠}{٦٠٠٠}$ × ١٠٠٪	عوِّض بالقِيَم المعطاة.
= ٢٥٪	

تمارين ١٧-٤-أ

١) أوجد النسبة المئوية للربح في كل حالة من الحالات التالية (استخدم درجة الدقّة المناسبة عند الضرورة):

أ) سعر التكلفة ٢٠ ريالاً عُمانيًّا، وسعر البيع ٢٥ ريالاً عُمانيًّا.

ب) سعر التكلفة ٥٠٠ ريال عُمانيّ، وسعر البيع ٥٥٠ ريالاً عُمانيًّا.

ج) سعر التكلفة ١,٥٠٠ ريال عُمانيّ، وسعر البيع ١,٨٠٠ ريال عُمانيّ.

د) سعر التكلفة ٣٠٠ بيسة، وسعر البيع ٣٥٠ بيسة.

٢) أوجد النسبة المئوية للخسارة في كل حالة من الحالات التالية (استخدم درجة الدقّة المناسبة عند الضرورة):

أ) سعر التكلفة ٤٠٠ ريال عُمانيّ، وسعر البيع ٣٠٠ ريال عُماني.

ب) سعر التكلفة ٧٥٠ بيسة، وسعر البيع ٦٥٠ بيسة.

ج) سعر التكلفة ٥,٠٠٠ ريالات عُمانيّة، وسعر البيع ٤,٧٥٠ ريالات عُمانيّة.

د) سعر التكلفة ٦,٥٠٠ ريالات عُمانيّة، وسعر البيع ٥,٨٥٠ ريالات عُمانيّة.

٣) اشترى تاجر بيع المواد الغذائية ١٠٠ كيلوغرام من البُرتقال بمبلغ ٣٠ ريالاً عُمانيًّا، وباع الكيلوغرام الواحد منه بسعر ٥٠٠ بيسة. احسب النسبة المئوية للربح أو للخسارة التي حقّقها التاجر.

> يعتبر سعر التكلفة دائمًا ١٠٠٪.
> إذا أضفت ١٠٪ هامش ربح،
> فسيكون سعر المبيع ١١٠٪.

١٧-٤-ب سعر البيع وسعر التكلفة والربح

يُحدِّد بائعو البضائع مقدار الربح الذي يرغبون في تحقيقه. بمعنى آخر، عليهم أن يُقرِّروا الزيادة بالنسبة إلى سعر التكلفة ليُحدِّدوا سعر البيع، ومنه يمكننا تعريف هامش الربح على أنه الفرق بين تكلفة السلعة وسعر بيعها.

سعر التكلفة + الربح = سعر البيع

مثال ١٦

يبيع تاجر مُنتَجه بمبلغ ٣٩ ريالاً عُمانيًا. إذا كان قد حدَّد ربحًا نسبته ٣٠٪، فما سعر تكلفة المُنتج؟

الحــلّ:

سعر التكلفة + الربح = سعر البيع	اكتب الصيغة التي تربط سعر البيع بسعر التكلفة والربح.
سعر البيع = ١٣٠٪ من سعر التكلفة	أوجد سعر البيع
∴ ٣٩ ريالاً عُمانيًّا = ١٣٠٪ × سعر التكلفة	لتجد ١٠٠ ٪
سعر تكلفة المنتج يساوي ٣٠ ريالاً عُمانيًّا	$\frac{٣٩}{١٣٠}$ × ١٠٠ = ٣٠ ريالاً عُمانيًّا.

مثال ١٧

وضع تاجر ربح مقداره ١,٠٨٠ ريال عُمانيّ على سلعة بيعت بمبلغ ٦,٤٨٠ ريالات عُمانيّة. ما النسبة المئوية لربحه؟

الحــلّ:

سعر التكلفة + الربح = سعر البيع	اكتب الصيغة التي تربط سعر البيع بسعر التكلفة والربح.
سعر البيع − الربح = سعر التكلفة	
٦,٤٨٠ − ١,٠٨٠ = ٥,٤٠٠ ريالات عُمانيَّة	
النسبة المئوية للربح = $\frac{\text{الربح الفعلي}}{\text{سعر التكلفة}}$ × ١٠٠٪	
$\frac{١,٠٨}{٥,٤٠}$ × ١٠٠ = ٢٠٪	عبّر عن الربح في صورة نسبة مئوية من سعر التكلفة.

مثـــال ١٨

أوجد سعر البيع لسلعة تم شراؤها بمبلغ ٤٠٠ ريال عُمانيّ، وتم بيعها بخسارة نسبتها ١٠٪.

الحـــلّ:

سعر التكلفة = ٤٠٠ ريال عُماني	
الخسارة = ١٠٪ من ٤٠٠ = ٤٠ ريالاً عُمانيًّا	اكتب ١٠٪ في صورة كسر.
سعر البيع = سعر التكلفة – الخسارة	اكتب الصيغة التي تربط بين سعر البيع وسعر التكلفة والخسارة.
= ٤٠٠ – ٤٠	
= ٣٦٠ ريالاً عُمانيًّا	

تمارين ١٧-٤-ب

١) أوجد سعر التكلفة في كلّ حالة من الحالات التالية:

أ سعر البيع ١٣٠ ريالاً عُمانيًّا، ونسبة الربح ٢٠ ٪

ب سعر البيع ٣٢٠ ريالاً عُمانيًّا، ونسبة الربح ٢٥ ٪

ج سعر البيع ٣٩٩ ريالاً عُمانيًّا، ونسبة الخسارة ١٥ ٪

د سعر البيع ٧٥٠ ريالاً عُمانيًّا، ونسبة الخسارة $\frac{١}{٣}$٣٣ ٪

٢) أوجد سعر البيع لسلعة تم شراؤها بمبلغ ٧٥٠ ريالاً عُمانيًّا وتم بيعها بربح نسبته ١٢٪

٣) احسب سعر البيع لسيارة تم شراؤها بمبلغ ١٢٠٠ ريال عُمانيّ، وتم بيعها بربح نسبته ٧,٥ ٪

٤) اشترى عبدالرحمن حاسوبًا بمبلغ ٢٥٠ ريالاً عُمانيًّا، وباعه بعد سنتَين بخسارة نسبتها ٢٨٪ ما سعر بيع الحاسوب؟

٥) بيعت سلعة تكلفتها ٢٤٠ ريالاً عُمانيًّا بخسارة نسبتها ٨٪. أوجد سعر البيع.

٦) لدى سعيد محل لصناعة وبيع المجوهرات. تكلفة صناعة ١٠ خواتم تساوي ٣٧٧ ريالاً عُمانيًّا. ويريد أن يبيعها ويحقّق ربحًا نسبته ١٥٪ ما المبلغ الذي يجب أن يتقاضاه؟

٧) يبيع سعد شطيرة اللحم بسعر ١,٥٠٠ ريال عُمانيّ ويُحقّق ربحًا مقداره ٠,٤٠٠ ريال عُمانيّ في كلّ شطيرة. ما النسبة المئوية للربح بالنسبة لسعر التكلفة؟

١٧-٤-ج الخصم

إذا لم يتمّ بيع سلعة بالسرعة التي يرغب بها التاجر، أو إذا رغب التاجر في القيام بتصفية البضاعة القديمة وإحلال بضاعة جديدة محلّها، عندها يقوم التاجر ببيع السلعة بعد إخضاع سعرها **لخصم** مُحدَّد.

يمكن التعامُل مع الخصم، كما هو الحال مع النسبة المئوية للتغيُّر (الخسارة)، حيث تُحتسب النسبة المئوية للتغيُّر دائمًا في صورة نسبة مئوية من الكمّية الأصلية.

مثــال ١٩

خلال موسم التنزيلات، قدَّم متجر خصمًا مقداره ١٥ ٪ على سلعة سعرها الأصلي ٢٥ ريالاً عُمانيًّا. ما سعر البيع في موسم التنزيلات؟

الحــلّ:

الخصم = ١٥٪ من ٢٥ ريالاً عُمانيًّا

$= \frac{١٥}{١٠٠} \times ٢٥$

= ٣,٧٥ ريالات عُمانيَّة

أوّلاً، أوجد مقدار الخصم.

سعر البيع = السعر الأصلي − الخصم

= ٢٥ − ٣,٧٥٠

= ٢١,٢٥٠ ريالاً عُمانيًّا

أوجد سعر البيع بطرح الخصم من السعر الأصلي.

يمكنك أن تحسب أيضًا السعر باعتبار سعر البيع في موسم التنزيلات في صورة نسبة مئوية من ١٠٠٪
١٠٠ − ١٥ = ٨٥، فيكون سعر البيع في موسم التنزيلات ٨٥٪ من ٢٥ ريالاً عُمانيًّا:

$\frac{٨٥}{١٠٠} \times ٢٥ = ٢١,٢٥٠$ ريالاً عُمانيًّا.

تمارين ١٧-٤-ج

١) انسخ الجدول التالي، وأكمله:

السعر الأصلي (بالريال العُمانيّ)	النسبة المئوية للخصم	مقدار الخصم (بالريال العُمانيّ)	سعر البيع (بالريال العُمانيّ)
٨٩,٩٩٠	٥٪		
١٢٥,٩٩٠	١٠٪		
٥٩٩,٠٠٠	١٢٪		
٢٢,٥٠٠	٧,٥٪		
٦٥,٨٠٠	٢,٥٪		
١٠٠٠٠,٠٠٠	٢٣٪		

٢) احسب النسبة المئوية للخصم على كل من المبيعات التالية. اكتب الناتج مُقرّبًا إلى أقرب نسبة مئوية كاملة.

السعر الأصلي (بالريال العُمانيّ)	سعر البيع بعد الخصم (بالريال العُمانيّ)	النسبة المئوية للخصم
٨٩,٩٩٠	٧٩,٩٩٠	
١٢٥,٩٩٠	١٢٠,٠٠٠	
٥٩٩,٠٠٠	٤٥٠,٠٠٠	
٢٢,٥٠٠	١٨,٥٠٠	
٦٥,٨٠٠	٥٨,٩٩٠	
١٠٠٠٠,٠٠٠	٩٥٠٠,٠٠٠	

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- تستخدم الدول عملات مختلفة، ويمكنك أن تُحوِّل فيما بينها إذا عرفتَ سعر الصرف.
- يكسب الناس نقودًا مُقابل الأعمال التي يقومون بها. تُدفَع هذه النقود على صورة أجور أو رواتب أو عمولات أو رسوم، مقابل كلّ سلعة (العمل بالقطعة).
- الدخل الإجمالي هو مُقدار ما تكسبه قبل الخصم. الدخل الإجمالي − الخصم = صافي الدخل. صافي دخلك هو القيمَة التي تستلمها فعليًّا.
- تُحتَسب الفائدة البسيطة لكل فترة زمنية في صورة نسبة مئوية ثابتة من المبلغ الأصلي (رأس المال). صيغة إيجاد الفائدة البسيطة هي $ف = \frac{ر\ م\ ن}{١٠٠}$.
- الفائدة المُركَّبة هي إضافة الفائدة إلى المبلغ الأصلي على مجموعة فترات زمنية ممّا يؤدي إلى زيادة المبلغ الأصلي (رأس المال). معظم الفوائد في مواقف الحياة اليومية هي فوائد مُركَّبة. صيغة المبلغ الإجمالي بعد تطبيق الفائدة المُركَّبة هي $جـ_ن = ر\left(١ + \frac{م}{١٠٠}\right)^{ن}$
- البيع أو الشراء بالتقسيط هو أسلوب لبيع وشراء البضائع على بطاقة الائتمان، بحيث يتم الدفع على أقساط بسعر فائدة ثابت يضاف إلى السعر الأصلي.
- عندما تُباع البضاعة وتُحقِّق ربحًا، فإنها تُباع بأسعار أعلى من أسعار التكلفة، وعندما تُباع البضاعة بخسارة فإنها تُباع باسعار أقلّ من أسعار التكلفة. ويُسمّى السعر الأصلي سعر التكلفة. عندما تُباع البضاعة وتُحقِّق ربحًا، يكون
  سعر البيع − التكلفة = الربح.
  وإذا بيعت البضاعة بخسارة، فإن:
  التكلفة − سعر البيع = الخسارة.
- الخصم هو تخفيض على السعر العادي. خصم ١٥٪ يعني أن تدفع أقلّ من السعر العادي بنسبة ١٥٪.

يجب أن تكون قادرًا على:

- التحويل بين العملات المختلفة عندما تعرف سعر الصرف.
- استخدام المعلومات المعطاة لحلّ مسائل ترتبط بالأجور والرواتب والعمولات والعمل بالقطعة.
- إيجاد الدخل الإجمالي والدخل الصافي إذا أعطيت المعلومات المناسبة.
- استخدام صيغة حساب الفائدة البسيطة.
- التعامُل مع صيغة الفائدة البسيطة لتحسب رأس المال (المبلغ الأصلي)، ومُعدَّل الفائدة، والمُدَّة الزمنية لقرض أو استثمار.
- حل مسائل ترتبط بالبيع بالأقساط.
- إيجاد الفائدة المُركَّبة في فترة زمنية معطاة، وحل مسائل ترتبط بالفائدة المُركَّبة.
- استخدام النموّ الأسّي المُرتبطَ بالتغيُّرات المالية والتغيُّر السكاني.
- إيجاد سعر التكلفة وسعر البيع والنسبة المئوية للربح أو الخسارة والربح باستخدام النسب والأسعار المُعطاة.
- إيجاد سعر تكلفة سلعة تمّ بيعها في فترة التخفيضات، وإيجاد النسبة المئوية للخصم بمعلومية السعر الأصلي والسعر الجديد.

تمارين نهاية الوحدة

١) يتقاضى سعيد ٢,٥٠٠ ريال عُمانيّ في الساعة، عندما يعمل ٣٦ ساعة في الأسبوع. ويتقاضى بحسب نظام 'ساعة ونصف الساعة' على العمل الإضافي. أوجد:

أ دخله الإجمالي في الأسبوع إذا عمل $٤\frac{١}{٣}$ ساعات إضافية.

ب عدد ساعات العمل الإضافي، إذا كسب في الأسبوع ١٢٣,٧٥٠ ريالاً عُمانيًّا.

٢) اشترى أحمد قُرصًا مُدمجًا بمبلغ ٥ ريالات عُمانيّة، وباعه لسعيد بخسارة نسبتها ٢٠٪:

أ كم ريالاً دفع سعيد سعرًا للقرص المدمج؟

ب باع سعيد القرص المُدمَج لعليّ بربح نسبته ٢٠٪. كم دفع علي سعرًا للقرص المُدمَج؟

٣) في السنة الماضية، كان راتب عبدالحميد الأسبوعي ٤٠ ريالاً عُمانيًّا، أصبح راتبه الأسبوعي الآن ٤٣ ريالاً عُمانيًّا. احسب النسبة المئوية للزيادة.

٤) ما قيمة الفائدة البسيطة لمبلغ ١٦٠ ريالاً عُمانيًّا استثمِر بمُعدَّل فائدة نسبتها ٧٪ سنويًّا لمُدَّة ثلاث سنوات؟

٥) استثمر سمير مبلغ ٥٠٠ ريال عُمانيّ في سندات حكومية بمُعدَّل فائدة بسيطة نسبتها ٩٪ سنويًّا. كم ستصبح قيمة هذه السندات بعد ثلاث سنوات؟

٦) ازداد راتب سميرة بنسبة ٦٪ سنويًّا خلال السنوات الثلاث الماضية، وأصبح إجمالي راتبها السنوي الآن ٣٥٧٣٠,٤٠٠ ريالاً عُمانيًّا:

أ كم كان دخلها السنوي قبل ثلاث سنوات؟

ب كم أصبح راتبها الشهري الإجمالي بحسب المُعدَّل الحالي؟

ج إذا كانت النسبة المئوية لمجموع الخصومات الشهرية ٢٢,٥ ٪ من راتبها الإجمالي. ما قيمة الخصومات الشهرية؟

٧) إذا كان سعر سيّارة جديدة ٤٩٥٠ ريالاً عُمانيًّا، وقدَّرت شركة التأمين أن سعرها سيصبح بعد ثلاث سنوات ٣٥٦٠ ريالاً عُمانيًّا، أوجد النسبة المئوية لنقصان قيمة السيّارة على مدى السنوات الثلاث.

٨) جهاز رياضي سعره ٦٠٠ ريال عُمانيّ، تمّ بيعه في فترة التنزيلات بمبلغ ٤٨٠ ريالاً عُمانيًّا. ما النسبة المئوية للخصم؟

مصطلحات علمية

أ

الأجور Wages: مبلغ يُدفع مُقابل تنفيذ عدد مُحدَّد من ساعات العمل، ويتمّ دفعه عادة كل أسبوع. (ص ١٩٦)

أسّي Exponential: دالة تتكوَّن عندما يكون المتغيّر أسًّا. (ص ١٤٥)

الأضلاع المُتناظِرة Corresponding sides: أضلاع تشغل الموقع نفسه في الأشكال المُتطابقة والمُتشابهة. (ص ٦٦)

الاضمحلال الأُسّي Exponential decay: عندما يتناقص شيء ما (مثل النقود)، غالبًا ما يرجع ذلك إلى الاضمحلال الأسّي. (ص ١٤٥)

ت

التجميع Grouping: جمع الحدود المُتشابهة في العبارة الجبرية لتبسيطها. (ص ٤٨)

التحليل إلى عوامل Factorisation: إعادة كتابة العبارة الجبرية باستخدام الأقواس. (ص ٤٥)

التحويل Conversion: تحويل كمّية أو وحدة ما إلى ما يُعادلها في وحدة أخرى. (ص ٣٣)

التقاطُع Intersection: في المجموعات، هو مجموعة العناصر المُشترَكة بين مجموعتَين أو اكثر. في الجبر، هو نقطة التقاء مستقيمَين. (ص ١٢٦)

التناسُب الطردي Direct proportion: عندما تزداد أو تتناقص كمّيتان بنفس النسبة. (ص ٣٣)

التناسُب العكسي Inverse proportion: عندما تتناقص إحدى الكمّيتين بنفس التناسُب الذي تتزايد به الكمّية الأخرى. (ص ٣٦)

ح

الحجم Volume: كمّية الفراغ الموجودة داخل المُجسَّم. (ص ١٨٢)

الحدّ الثابت Constant term: هو الحدّ الوارد في المعادلة أو العبارة وله قيمة ثابتة. (ص ٤٢)

خ

الخسارة Loss: عندما يكون سعر بيع البضاعة أقل من سعر تكلفتها. الخسارة تساوي سعر التكلفة − سعر البيع. (ص ٢١٠)

الخصم Discount: الكمّية التي يتمّ خصمها من سعر البيع. (ص ٢١٣)

خطّ التقارُب Asymptote: مستقيم يقترب إليه التمثيل البياني ولا يتقاطع معه أبدًا. (ص ١٢٣)

د

الدالّة Function: هي علاقة بين متغير تابع (ص) ومتغير مستقل (س). (ص ١١٦)

الدخل الإجمالي Gross income: مقدار ما تكسبه قبل الخصم. (ص ١٩٦)

ر

الراتب Salary: مبلغ يُدفع مُقابِل تنفيذ عدد مُحدَّد من ساعات العمل السنوي، ويدفع عادة كل شهر. (ص ١٩٦)

رأس المال Capital: المبلغ الأصلي الذي يتمّ اقتراضه أو استثماره. (ص ٢٠٠)

الراسم Slant height: في المخروط هو أقصر مسافة بين أي نقطة على محيط القاعدة وقمّة المخروط. (ص ١٨٧)

الربح Profit: عندما يكون سعر بيع بضاعة ما أعلى من سعر تكلفتها. الربح يساوي سعر البيع − سعر التكلفة. (ص ٢١٠)

الرؤوس Vertices: نقاط التقاء الأضلاع في شكل هندسي ثنائي الأبعاد. (ص ١٨١)

ز

الزاوية المحصورة Included angle: في التطابق هي الزاوية التي تتكوّن عند التقاء ضلعَين. (ص ٦٩)

الزمن Time: ثوانٍ، دقائق، ساعات، إلخ. (ص ٩٨)

الزوايا المُتناظرة Corresponding angles: تتساوى الزاويتان المُتناظرتان في القياس، وهما تتشكَّلان عندما يقطع قاطع خطَّين مُستقيمَين متوازيَين وتقعان على نفس الجهة من المستقيم القاطع ومن المستقيمَين المُتوازيين. كذلك تظهر الزوايا المُتناظِرة في المُثلَّثات المُتطابِقة والمُتشابِهة والأشكال المُتشابِهة. (ص ٧٤)

س

السرعة Speed: معدَّل يقارن بين المسافة المقطوعة والزمن الذي يستغرقه ذلك. (ص ١١٠)

سعر البيع Selling price: السعر الذي تباع فيه البضاعة. (ص ٢١٠)

سعر التكلفة Cost price: السعر الذي يدفعه التاجر لشراء البضاعة. (ص ٢١٠)

سعر الصرف Exchange rate: القيمة التي تستخدمها للتحويل من عملة إلى عملة أخرى. (ص ١٩٤)

ش

الشبكة Net: شكل ذو بعدين يمكن رسمه وتقسيمه وطيّه ليشكّل مُجسّمًا ثُلاثي الأبعاد. (ص ١٨١)

ص

صافي الدخل Net income: الدخل الذي تحصل عليه بعد إجراء كل الاقتطاعات منه. (ص ٢١٥)

ض

الضلع المحصور Included side: في التطابق، هو الضلع الذي يربط بين زاويتَين. (ص ٦٩)

ط

طريقة النسبة Ratio method: طريقة لحل مسائل حول التناسُب. (ص ٢٦)

طريقة الوحدة Unitary method: طريقة لحل مسائل حول التناسُب. (ص ٢٦)

ع

العامل المُشترَك Common factor: حدّ يمكن قسمة حدَّين أو أكثر عليه بدون باق. (ص ٤٨)

العبارة التربيعية Quadratic expression: عبارة جبرية أكبر أسّ في مُتغيّراتها هو العدد ٢. (ص ٤٢)

العدد غير النسبي Irrational number: عدد غير مُنتهٍ وغير دوري ولا يمكن كتابته في صورة كسر. (ص ١٦٨)

العمولة Commission: مبلغ يُدفع كنسبة مئوية من المبيعات. (ص ١٩٦)

ف

الفائدة Interest: النقود التي تدفعها عندما تقترض نقودًا، أو تكسبها عندما تستثمر نقودًا. (ص ٢٠٠)

الفائدة البسيطة Simple interest: نسبة مئوية ثابتة من المبلغ الأصلي المستدان أو المستثمر. (ص ٢٢٠)

الفائدة المُركَّبة Compound interest: فائدة تضاف إلى الفائدة المُكتسَبة وليس فقط إلى المبلغ الأصلي. (ص ٢٠٦)

الفرق بين مُربَّعَين Difference between two squares: طريقة لتحليل حدّ مُربَّع مطروح من حدّ مُربَّع آخر إلى عوامل. (ص ٥٣)

فكّ الأقواس Expand: عندما تتخلَّص من الأقواس وتعيد كتابة العبارة الجبرية، تكون قد فككت الأقواس أو ضربتها. (ص ٤٢)

ق

القطاع Sector: جزء من الدائرة يتحدّد بنصفَي قطرَين والقوس المحصور بينهما. (ص ١٧٦)

القمَّة Apex: في الهرم، تُسمّى نقطة التقاء الوجوه المُثلَّثة القمة. (ص ١٨٧)

القوس Arc: جزء من محيط الدائرة. (ص ١٧٦)

القيمة الصغرى Minimum: رأس التمثيل البياني الذي يكون إحداثيّه الصادي أصغر من النقاط الواقعة إلى يمينه أو إلى يساره. (ص ١١٦)

القيمة العظمى Maximum: رأس التمثيل البياني الذي يكون إحداثيّه الصادي أكبر من النقاط الواقعة إلى يمينه أو إلى يساره. (ص ١١٦)

م

مُتشابه Similar: تتشابه الأشكال عندما يكون لها الشكل نفسه وتكون أطوال أضلاعها متناسبة ومختلفة في القياس. (ص ٧٤)

متطابق Congruent: تتطابق الأشكال عندما يكون لها الشكل نفسه والقياسات نفسها. (ص ٦٦)

المُجسّم Solid: شكل ثلاثي الأبعاد. (ص ١٨١)

محور التماثُل Axis of symmetry: مستقيم يقسم شكلًا ثنائي الأبعاد إلى نصفَين متماثلين أو عصا في مُجسَّم يدور حولها ويظهر بنفس المظهر عند نقاط مختلفة خلال دورانه. (ص ١١٦)

المحيط Perimeter: محيط المُضلَّع يساوي مجموع أطوال أضلاعه. (ص ١٦٠)

محيط الدائرة Circumference: هو طول المسافة حولها. (ص ١٦٨)

المُربَّع الكامل Perfect square: عدد يكون مُربّعًا لعدد كامل آخر. في الجبر، هو عبارة جبرية تكون مُربّعًا لعبارة جبرية أخرى. (ص ٤٥)

المساحة السطحية Surface area: هي المجموع الكلّي لمساحات أوجُه المُجسّم. (ص ١٨٢)

المعادلة التربيعية Quadratic equation: معادلة تتضمّن عبارة تربيعية. (ص ٥٦)

مُعامِل التشابُه Scale factor: النسبة التي تُقارن بين قياسات شكلَين مُتشابهَين. (ص ٨٢)

مُعامِل تشابُه الأطوال Scale factor of lengths: مُعامِل ضرب أطوال أضلاع شكل هندسي تمّ تكبيره أو تصغيره. (ص ٨٦)

مُعامِل تشابُه الحجوم Scale factor of volumes: مُعامِل ضرب حجم أضلاع شكل هندسي تم تكبيره أو تصغيره (يساوي ذلك مُكعّب مُعامِل تشابُه الأطوال). (ص ٨٦)

مُعامِل تشابُه المساحات Scale factor of areas: مُعامِل ضرب مساحة شكل هندسي تمّ تكبيره أو تصغيره (يساوي ذلك مُربَّع مُعامِل تشابُه الأطوال). (ص ٨٢)

المُعدَّل Rate: مُقارنة بين كمّيّتَين مختلفتَين. (ص ١١٠)

معدّل الفائدة Interest rate: هو النسبة المئوية التي تدفعها عندما تقترض نقودًا أو النسبة المئوية التي تكسبها عندما تستثمر نقودًا (تُحسب عادة سنويًّا). (ص ٢٠٠)

المقطع العرضي Cross section: السطح المُتكوِّن عندما تقطع المُجسَّم بمستوى موازٍ لوجه المُجسَّم. (ص ١٨٤)

مقياس الرسم Scale drawing: نسبة يتمّ التعبير عنها في صورة: مقياس الرسم = الطول على الرسم : الطول الحقيقي. (ص ٢٩)

المكاسب Earnings: كمّية النقود التي تكسبها مُقابل العمل الذي تقوم به. (ص ١٩٦)

ن

النسبة Ratio: مُقارنة بين كمّيّتَين بترتيب مُحدَّد. (ص ٢١)

النسبة المئوية العكسية Reverse percentage: إيجاد القيمة الأصلية لسلعة ما قبل أن تُطبَّق عليها النسبة المئوية للزيادة أو النسبة المئوية للنقصان. (ص ١٩)

النسبة المئوية للزيادة Percentage increase: هي الكمّية التي تُضاف (في صورة نسبة مئوية) إلى القيمة الأصلية. (ص ١٦)

النسبة المئوية للنقصان Percentage decrease: هي الكمّية التي تنقص (في صورة نسبة مئوية) من القيمة الأصلية. (ص ١٦)

نقطة رأس المنحنى Turning point: نقطة على التمثيل البياني يتغيّر عندها اتّجاه المنحنى في التمثيل البياني. (ص ١١٦)

النموّ الأسّي Exponential growth: عندما يزداد شيء ما (مثل النقود)، غالبًا ما يرجع إلى النموّ الأسّي. (ص ١٤٥)

و

وجه Face: سطح مستوٍ خارجي في المُجسّم ثُلاثي الأبعاد. (ص ١٨١)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Philip Lange/Shutterstock; JOSEPH EID/AFP via Getty Images; JohnFScott/Getty Images; DeAgostini/Getty Images; MOHAMMED MAHJOUB/AFP via Getty Images; Oman Ministry of Education; Stefan Cioata/Moment/Getty Images; Nick Brundle Photography/Moment/Getty Images; Pearl-diver/Shutterstock

تمت بحمد الله

الرياضيات

كتاب الطالب ٩

يزخر كتاب الطالب بالعديد من الموضوعات مع شرح واضح وسهل لكل المفاهيم المتضمنة في هذه الموضوعات، تليها تمارين تطبيقية لاختبار مدى فهم الطالب وللسماح له بتعزيز وممارسة المهارات الرياضية المطلوبة.

يتضمن كتاب الطالب:

- أقسام تذكر للمعرفة السابقة والتحقق من التعلم السابق
- تمارين في نهاية كل موضوع لتعزيز الفهم.
- أسئلة في نهاية كل وحدة من شأنها تأهيل الطلاب لخوض الاختبارات.
- قاموس للمصطلحات يرد في آخر الكتاب.
- تمارين ومسائل عامة تتناول جميع الموضوعات التي تم تغطيتها في كل وحدة.
- إرشادات لمساعدة الطلاب على حل التمارين، بما في ذلك الأمثلة المحلولة والملاحظات المفيدة.

يشمل منهج الرياضيات للصف التاسع من هذه السلسلة:

- كتاب النشاط
- دليل المُعلِّم

www.moe.gov.om