سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

كتاب الطالب

٩

الفصل الدراسي الأول

الطبعة التجريبية ١٤٤٥هـ-٢٠٢٣م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

كتاب الطالب

٩

الفصل الدراسي الأول

الطبعة التجريبية ١٤٤٥هـ - ٢٠٢٣م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٠ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب - الرياضيات للصف التاسع - من سلسلة
كامبريدج للرياضيات الأساسية والمُوسَّعة IGCSE للمؤلفَين كارين موريّسون ونيك هامشاو.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج رقم ٤٠ / ٢٠٢٠ .
لا تتحمَّل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توفُّر أو دقة المواقع الإلكترونية
المستخدمة في هذا الكتاب، ولا تؤكِّد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق
وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمَّت مواءمة الكتاب

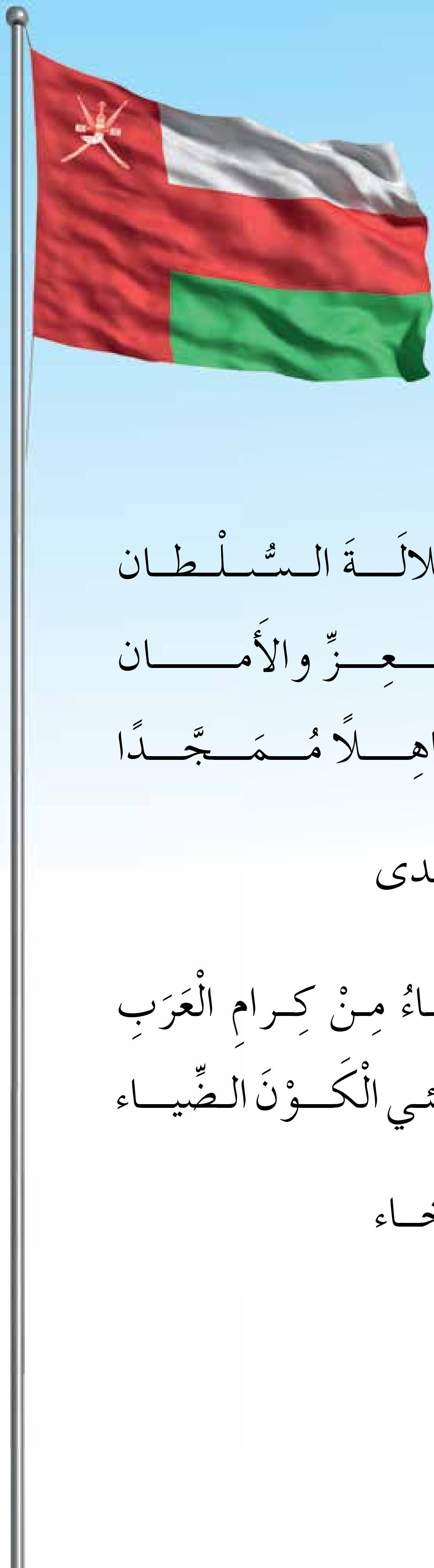
بموجب القرار الوزاري رقم ٣٠٢ / ٢٠١٩ واللجان المنبثقة عنه

المغفور له
السلطان قابوس بن سعيد
–طيّب اللّه ثراه–

حضرة صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المعظم
– حفظه اللّه ورعاه –

سلطنة عُمان

(المحافظات والولايات)



النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لَنا   جَلالَةَ السُّلْطان

وَالشَّعْبَ في الأَوْطان   بِالْعِزِّ والأَمان

وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا   عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي   أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ

فارْتَقي هامَ السَّماء   وَامْلَئي الْكَوْنَ الضِّياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

الوحدة السابعة: المُستقيمات

الوحدة الثامنة: التماثُل والتحويلات الهندسية

الوحدة التاسعة: المُتتاليات والمجموعات

المقدمة

يرتكز هذا الكتاب المدرسي على كتاب معروف وناجح تمَّت كتابته للمرة الأولى بالاستناد إلى منهج كامبريدج IGCSE في الرياضيات (٠٥٨٠ / ٠٩٨٠). وهو يُغطّي المنهج الدراسي بأكمله ضمن مجموعة متكاملة تُعطى لجميع الطلاب والمعلمين.

تمّ تأليف الكتاب، بحيث تستطيع العمل فيه بالتدرُّج من البداية إلى النهاية. تعتمد جميع الوحدات على المعرفة والمهارات التي تعلّمتها في السنوات السابقة، وتُبنى بعض الوحدات اللاحقة على المعرفة التي تم تطويرها في الكتاب من قبل. وسوف تُساعدك فقرات 'فائدة' و'سابقًا' 'ولاحقًا' على ربط محتوى الوحدات بما تعلَّمته سابقًا، والإضاءة على المكان الذي ستستخدم فيه تلك المعرفة مرّة أخرى في الدروس اللاحقة.

المسار المقترح للعمل في الكتاب هو:

الفصل الدراسي الأول للصفّ التاسع: الوحدات من ١ إلى ٩

الفصل الدراسي الثاني للصفّ التاسع: الوحدات من ١٠ إلى ١٨

سابقًا

من المهم أن تتذكر قواعد ترتيب العمليات الحسابية قبل البدء بهذا الدرس.

لاحقًا

لاحقًا، ستتعامل مع ضرب وقسمة وجمع وطرح الكسور مرة ثانية عند التعامل مع المقادير الجبرية.

ميزات رئيسية

تُفتتَح كل وحدة بقائمة من المُفردات وأخرى من الأهداف التي ستتعلَّمها في الوحدة، ومُقدِّمة تعرض نظرة عامَّة عن كيفية استخدام الرياضيات في الحياة الواقعية.

هناك أيضًا قائمة **بالمفردات الرياضية الرئيسية**. يشار إلى هذه المُفردات في متن الدروس باللون الأزرق، حيث يتمّ استخدامها وشرحها.

تقسم الوحدات إلى أقسام (دروس)، يُغطّي كل منها موضوعًا مُعيَّنًا. ويتم تقديم وشرح المفاهيم في كل موضوع، ويتمّ إعطاء أمثلة لتقديم طرائق مختلفة للعمل بطريقة عملية وسهلة المُتابَعة.

تُقدِّم **التمارين** الخاصّة بكل موضوع أسئلة مُتنوِّعة، وبمستويات مختلفة، تسمح للطالب بالتدرُّب على الأساليب التي تم تقديمها في الدرس. تتراوح هذه التمارين بين الأنشطة البسيطة والتطبيقات وحل المسائل.

يرد مُلخّص لكل وحدة تُعرَض فيه المعارف والمهارات التي يجب أن تمتلكها عند الانتهاء من العمل في الوحدة. يمكنك استخدام هذا المُلخَّص كقائمة عند المراجعة، للتحقّق من تغطية المطلوب معرفته في الوحدة.

ترد بعض التمارين الموجزة في نهاية كل وحدة.

مُميّزات في الهامش

تتضمّن الإرشادات المُفيدة في هوامش الكتاب ما يلي:

مفاتيح: وهي تعليقات عامّة تُذكِّرك بمعلومات مُهمَّة أو أساسية مُفيدة للتعامُل مع تمرين ما. وأنت بمطلق الأحوال مستفيد من معرفتها. غالبًا ما توفِّر هذه المفاتيح معلومات إضافية أو دعمًا إضافيًا في موضوعات قد تكون مُلتبِسة.

تذكر أن 'المعامل' هو العدد الذي يقع إلى جانب المتغير في الحد.

مساعدة: تُغطّي الأخطاء الشائعة بناءً على تجارب المؤلّفين مع طلّابهم، وتمنحك أشياء يجب أن تتذكّرها أو أن تكون حذرًا منها.

مُساعَدة

انتبه للأعداد السالبة التي تسبق الأقواس لأنها تحتاج دائمًا إلى اهتمام مضاعف.

مساعدات في حل المسائل: أثناء عملك في العام الدراسي، سوف تُطوِّر 'صندوق الأدوات' الخاص بك والمُتعلِّق بمهارات واستراتيجيات حل المسائل. سوف يُذكِّرك هذا الصندوق بإطار حل المسائل ويحثّك على اقتراح طرائق لمعالجة أنواع مختلفة من المسائل.

يعتبر تحويل المعلومات من صيغ لفظية إلى مخططات أو معادلات من الاستراتيجيات المفيدة لحل المسائل.

روابط مع موضوعات أخرى: لا يتمّ تعلُّم مادة الرياضيات بمعزل عن المواد الأخرى. وسوف تستخدم وتُطبِّق ما تتعلَّمه في الرياضيات على العديد من المواد الدراسية الأخرى. تُشير هذه النوافذ إلى كيفية الاستفادة من المفاهيم الرياضية في موضوعات أخرى.

مصادر إضافية

دليل المعلم: هذا الكتاب متوفر لمُعلّميك. وهو يتضمَّن، إضافة إلى الأشياء الأخرى، بطاقات مراجعة لكل وحدة، بالإضافة إلى إجابات جميع التمارين وتمارين نهاية الوحدة.

كتاب النشاط: يتبع هذا الكتاب وحدات ودروس كتاب الطالب، ويُقدِّم تمارين إضافية هادفة لمن يرغب منكم في المزيد من التدريبات. ويتضمّن أيضًا مُلخَّصًا للمفاهيم الأساسية، إضافة إلى 'المفاتيح' و'المساعدات' بهدف توضيح الموضوعات المُلتبِسة.

الوحدة الأولى: أنواع الأعداد والعمليات عليها

المُفردات

- العدد الحقيقي Real number
- العدد الطبيعي Natural number
- العدد الصحيح Integer
- العدد الأوّلي Prime number
- الرمز Symbol
- المُضاعف Multiple
- العامل Factor
- العدد غير الأوّلي Composite numbers
- العامل الأوّلي Prime factor
- مُربَّع العدد Square
- الجذر التربيعي Square root
- مُكعّب العدد Cube
- الجذر التكعيبي Cube root
- الأعداد المُوجَّهة Directed numbers

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تحدِّد أنواعًا مختلفة من الأعداد وتُصنِّفها.
- تجد العوامل المُشترَكة والمُضاعَفات المُشترَكة للأعداد.
- تكتب أعدادًا في صورة نواتج ضرب عواملها الأوّلية.
- تحسب مُربّعات الأعداد والجذور التربيعية للأعداد ومُكعّبات الأعداد والجذور التكعيبية للأعداد.
- تتعامل مع أعداد صحيحة في مسائل من واقع الحياة اليومية.
- تستخدم قواعد ترتيب العمليات الحسابية لإجراء الحسابات على الأعداد.
- تُجري العمليات الحسابية باستخدام طرائق الحساب الذهني والآلة الحاسبة.

يُعدّ البنك المركزي العُماني مصرف سلطنة عمان الرسمي، حيث يُحتفَظ بالودائع.
أُنشِئ البنك المركزي العُماني في الأول من ديسمبر ١٩٧٤ كنتيجة طبيعية لتطوُّر النظام النقدي والمالي في السلطنة وهو يُسهم في المُحافظة على قيمة العملة الوطنية (الريال العُماني) في الداخل والخارج. تُستخدَم في المصارف أنواع مختلفة من الأعداد، منها الكاملة والصحيحة والنسبية، ومنها الموجبة (الودائع)، والسالبة (القروض).

يُسمّى نظامنا العدديّ المُستخدَم بالنظام الهنديّ-العربيّ، لأنه تطوّر على أيدي علماء الرياضيات في الهند، وانتشر بواسطة التجّار العرب الذين جلبوه معهم عندما تحرّكوا في أماكن مختلفة من العالم. ويُعدّ النظام الهندي-العربي نظامًا عشريًّا، ويعني ذلك أنه يستخدم القيمة المكانيّة، مُعتمِدًا على قوى العدد عشرة، حيث يمكن كتابة الأعداد، بما فيها الكسور العُشريّة والكسور، باستخدام القيمة المكانيّة والأرقام من ٠ إلى ٩

فائدة

يجب أن تكون معظم مفاهيم الأعداد مألوفة لديك. سوف تُساعدك هذه الوحدة على مراجعة المفاهيم والتحقُّق من تذكُّرها.

١-١ الأنواع المُختلفة من الأعداد

كل الأعداد التي تعاملت معها في الرياضيات حتى الآن هي **أعداد حقيقية**. وأنت تعرف أنواعًا مختلفة من الأعداد، منها **الأعداد الفردية** و**الزوجية**، و**الأعداد الأوّلية**، و**الأعداد الموجبة** و**الأعداد السالبة**، و**الكسور**، و**الأعداد العشرية**. وفي الوحدة الثانية، سوف تتعرّف على **الأعداد النسبية** و**الأعداد غير النسبية**.

تأكَّد من أنك تعرف المُفردات الرياضية الصحيحة لأنواع الأعداد في الجدول الآتي:

العدد	التعريف	المثال
العدد الطبيعي	أيّ عدد كامل من ١ إلى ما لا نهاية، وتُسمّى الأعداد الطبيعية أحيانًا «أعداد العدّ» ولا تتضمّن الصفر.	١، ٢، ٣، ٤، ٥، ...
العدد الصحيح	الأعداد الكاملة الموجبة والسالبة والصفر.	...، $^{-}$٣، $^{-}$٢، $^{-}$١، ٠، ١، ٢، ٣، ...
العدد الفردي	عدد كامل لا يمكن قسمته على ٢ بدون باقٍ.	١، ٣، ٥، ٧، ...
العدد الزوجيُّ	عدد كامل يمكن قسمته على ٢ بدون باقٍ.	٠، ٢، ٤، ٦، ٨، ...
العدد الأوّلي	عدد كامل أكبر من ١، وله عاملان فقط: العدد نفسه و ١	٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ...
مُربَّع العدد	ناتج ضرب العدد الصحيح في نفسه.	١، ٤، ٩، ١٦، ...
الكسر والعدد العشري	عدد يمثّل جزءًا من عدد كامل، يمكن كتابته في صورة $\frac{ب}{جـ}$ حيث جـ $\neq$ الصفر، أو في صورة عدد عشريّ باستخدام العلامة العشرية.	$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١٣}{٣}$ ، $٢\frac{١}{٢}$ ٠،٥ ، ٠،٢ ، ٠،٠٨ ، ١،٧
المُضاعَف	يتم إيجاد مُضاعَف عدد عندما تضربه في عدد صحيح موجب. أول مُضاعَف لأي عدد هو العدد نفسه (العدد مضروب في العدد ١).	أول ثلاثة مُضاعَفات للعدد ١٢ هي ١٢، ٢٤، ٣٦ لأنها ١ × ١٢، ٢ × ١٢، ٣ × ١٢
العامل	عدد يقسم عددًا آخر بدون باقٍ. العدد ١ هو عامل لكل عدد. أكبر عاملٍ لأي عدد هو العدد نفسه.	٢ عامل للعدد ١٦ لأن ١٦ تقبل القسمة على ٢ بدون باقٍ ١٦ ÷ ٢ = ٨

تمارين ١-١

- = يساوي
- ≠ لا يساوي
- ≈ يساوي تقريبًا
- > أصغر
- ⩾ أصغر أو يساوي
- < أكبر
- ⩽ أكبر أو يساوي
- ∴ إذن
- √ الجذر التربيعي

١) أعد كتابة كل من العبارات الآتية باستخدام **الرموز** الرياضية:

أ ١٢ زائد ١٨ يساوي ٣٠

ب مجموع ٣، ٤ لا يساوي ناتج ضرب ٣، ٤

ج ⁻٣٤ أصغر من ٢ ضرب ⁻١٦

د إذن، العدد س أصغر من الجذر التربيعي للعدد ٧٢، أو يساويه

هـ π تساوي ٣,١٤ تقريبًا

و ٥,١ أكبر من ٥,٠١

ز ناتج ضرب العدد ١٢ في العدد س أكبر من ⁻٤٠

٢) حدِّد أيّ من العبارات الرياضيّة الآتية صحيحة وأي منها خاطئة، ثم صحّح العبارة إن كانت خاطئة:

أ ٦,٠ < ٠,٥٩٩

ب ١٠٠٠٠ ≈ ١٩٩٩ × ٥

ج ٨ $\frac{١}{١٠}$ = ٨,١

د ٦,٢ + ٤,٣ = ٤,٣ + ٦,٢

هـ ٨ × ٢١ ≤ ٩ × ٢٠

و ٦ = ٦,٠

ز ⁻٤ < ⁻١٢

ح ٢٠ ≥ ١٩,٩

ط ٥ × ١٩٩ < ١٠٠٠

ي ٤ = ١٦√

ك ٣٥٠ ≠ ٢ × ٥ × ٣٥

ل ٢٠ ÷ ٥ = ٤ ÷ ٢٠

م ٢٠ − ٤ ≠ ٤ − ٢٠

ن ٢٠ × ٤ ≠ ٤ × ٢٠

٣) اكتب كلاًّ ممّا يلي:

أ مُضاعَفات العدد ٤ الواقعة بين العددَين ٢٩ و٥٣

ب مُضاعَفات العدد ٥٠ الأصغر من ٤٠٠

ج مُضاعَفات العدد ١٠٠ الواقعة بين العددَين ٤٠٠٠ و٥٠٠٠

٤) لديك أربعة أعداد

٣٢٤	٧٨٣	٨١٦	٨٣٧

أ أيٌّ من هذه الأعداد من مُضاعَفات العدد ١٢؟

ب أيٌّ من هذه الأعداد ليس من مُضاعَفات العدد ٢٧؟

٥) اكتب عوامل كلّ من الأعداد التالية:

أ ٤	ب ٥	ج ٨	د ١١	هـ ١٨
و ١٢	ز ٣٥	ح ٤٠	ط ٥٧	ي ٩٠
ك ١٠٠	ل ١٣٢	م ١٦٠	ن ١٥٣	س ٣٦٠

٦) ضع علامة (✓) امام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) امام العبارة الخاطئة فيما يلي:

أ ٣ هو عامل من عوامل العدد ٣١٣

ب ٩ هو عامل من عوامل العدد ٩٩

ج ٣ هو عامل من عوامل العدد ٣٠٠

د ٢ هو عامل من عوامل العدد ٣٠٠

هـ ٢ هو عامل من عوامل العدد ١٢٢٤٨٨

و ١٢ هو عامل من عوامل العدد ٦٠

ز ٢١٠ هو عامل من عوامل العدد ٢١٠

ح ٨ هو عامل من عوامل العدد ٤٢٠

٧) ما أصغر عامل وأكبر عامل لأيّ عدد مُعطى؟ أعطِ مثالاً على ذلك.

١-٢ الأعداد الأوَّلية

العدد الأوّلي هو عدد كامل أكبر من الواحد، وله عاملان فقط: العدد نفسه والواحد، أما **الأعداد غير الأوَّليّة** فلها أكثر من عاملِين.

العدد ١ له عامل واحد فقط (حالة خاصة)، لذلك فهو ليس عددًا أوّليًّا وليس عددًا غير أوّليّ.

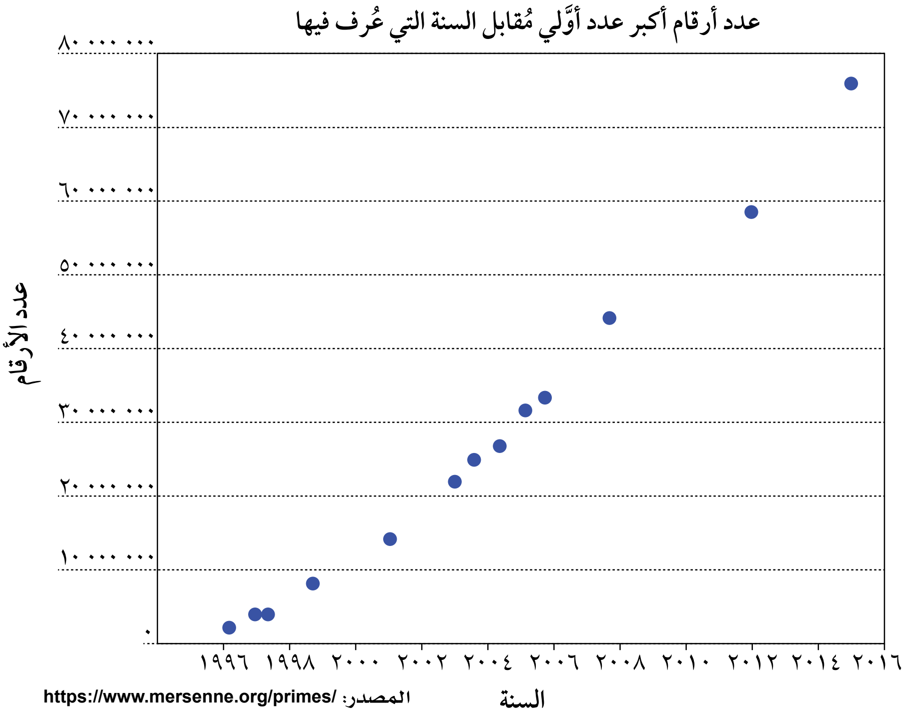
١-٢-أ إيجاد الأعداد الأوَّلية

قبل أكثر من ٢٠٠٠ عام، قام عالم يوناني يُدعى إراتوستينس Eratosthenes بصنع أداة سهلة لفرز الأعداد الأوّليّة. تُسمّى تلك الأداة ‘غربال إراتوستينس‘. يبيّن المُخطَّط أدناه كيف يعمل الغربال على الأعداد حتى ١٠٠

~~١~~	٢	٣	~~٤~~	٥	~~٦~~	٧	~~٨~~	~~٩~~	~~١٠~~	اشطب العدد ١ لأنه ليس أوّليًا.
١١	~~١٢~~	١٣	~~١٤~~	~~١٥~~	~~١٦~~	١٧	~~١٨~~	١٩	~~٢٠~~	ضع دائرة حول العدد ٢، ثمّ اشطب
~~٢١~~	~~٢٢~~	٢٣	~~٢٤~~	~~٢٥~~	~~٢٦~~	~~٢٧~~	~~٢٨~~	٢٩	~~٣٠~~	مُضاعَفات العدد ٢ الأخرى.
٣١	~~٣٢~~	~~٣٣~~	~~٣٤~~	~~٣٥~~	~~٣٦~~	٣٧	~~٣٨~~	~~٣٩~~	~~٤٠~~	ضع دائرة حول العدد ٣، ثمّ اشطب
٤١	~~٤٢~~	٤٣	~~٤٤~~	~~٤٥~~	~~٤٦~~	٤٧	~~٤٨~~	~~٤٩~~	~~٥٠~~	مُضاعَفات العدد ٣ الأخرى.
~~٥١~~	~~٥٢~~	٥٣	~~٥٤~~	~~٥٥~~	~~٥٦~~	~~٥٧~~	~~٥٨~~	٥٩	~~٦٠~~	ضع دائرة حول العدد التالي المتوافر، ثم اشطب جميع مُضاعَفاته الأخرى.
٦١	~~٦٢~~	~~٦٣~~	~~٦٤~~	~~٦٥~~	~~٦٦~~	٦٧	~~٦٨~~	~~٦٩~~	~~٧٠~~	كرِّر العمل حتى يظهر أنّ جميع الأعداد إما
٧١	~~٧٢~~	٧٣	~~٧٤~~	~~٧٥~~	~~٧٦~~	~~٧٧~~	~~٧٨~~	٧٩	~~٨٠~~	وُضع حولها دائرة وإمّا شُطبت.
~~٨١~~	~~٨٢~~	٨٣	~~٨٤~~	~~٨٥~~	~~٨٦~~	~~٨٧~~	~~٨٨~~	٨٩	~~٩٠~~	الأعداد التي وضع دائرة حولها هي الأعداد
~~٩١~~	~~٩٢~~	~~٩٣~~	~~٩٤~~	~~٩٥~~	~~٩٦~~	٩٧	~~٩٨~~	~~٩٩~~	~~١٠٠~~	الأوّلية.

طوّر علماء رياضيّات آخرون عدة طرق لإيجاد أعداد أوليّة أكبر. وحتى العام ١٩٥٥م كان أكبر عدد أولي معروف مُكوَّنًا من أقلّ من ١٠٠٠ رقم. ومنذ سبعينات القرن الماضي، ومع اختراع حواسيب مُتقدِّمة، أصبح من السهولة إيجاد الأعداد الأوّليّة أكثر فأكثر. يُبيِّن الرسم البياني الآتي أعداد أرقام أكبر أعداد أوَّلية عُرِفت خلال الفترة من ١٩٩٦م إلى ٢٠١٦م.

عدد أرقام أكبر عدد أوّلي مُقابل السنة التي عُرف فيها



المصدر: https://www.mersenne.org/primes/

واليوم، يمكن لأيّ شخص أن يتّبع طريقة مرسين للبحث عبر الإنترنت عن الأعداد الأوَّليّة (Great Internet Mersenne Prime Search). يربط هذا المشروع بين آلاف الحواسيب المنزليّة للبحث باستمرار عن أعداد أوليّة أكبر وأكبر، شرط أن تكون سعة الحواسيب كافية.

تمارين ١-٢-أ

١) ما العدد الزوجي الأوّليّ الوحيد؟

٢) أ اكتب الأعداد غير الأوّلية الأكبر من ٤، والأصغر من ٣٠

ب اكتب عددًا زوجيًّا أكبر من ٢ يمكن كتابته في صورة مجموع عددَين أوّليَّين.

مثلًا: ٦ = ٣ + ٣ ، ٨ = ٣ + ٥

٣) توائم الأعداد الأوّلية هي أزواج من أعداد أوَّليّة الفرق بينهما اثنان. اكتب توائم الأعداد الأوَّليّة حتى ١٠٠

٤) هل العدد ١٤٩ عدد أوّلي؟ وضِّح إجابتك.

لاحقًا

يمكن أن تُساعدك المعرفة الجيدة بالأعداد الأوّلية في تبسيط الكسور.

١-٢-ب العوامل الأوَّليّة

العوامل الأوَّليّة هي عوامل للعدد، وهي أيضًا أعداد أوّلية.

يمكن لكل عدد أن يُجزّأ ويُكتب في صورة ناتج ضرب عوامله الأوَّليّة. يُمكن إجراء ذلك باستخدام مُخطَّط الشجرة، أو باستخدام القسمة. يعرض المثال (١) الطريقتين.

مثـــال ١

اكتب كلاً من العددَين الآتيين في صورة ناتج ضرب عوامل أوَّليّة:

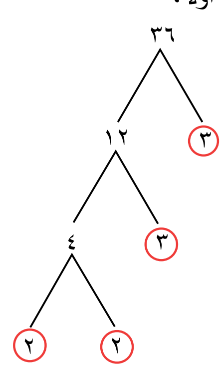
أ ٣٦ ب ٤٨

أولاً: باستخدام شجرة العوامل

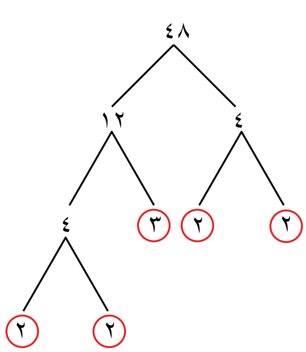
ثانيًا: باستخدام القسمة (التحليل)

الحـــلّ:

أولاً:



٣٦ = ٢ × ٢ × ٣ × ٣



٤٨ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٣

جزِّئ العدد إلى عاملَين.
إذا كان العامل أوّليًّا، ضع دائرة حوله.
إذا كان العامل غير أوليّ، جزِّئه مرَّة أخرى إلى عاملين.
استمر في التجزئة حتى تنتهي جميع فروع الشجرة بعوامل أولية.
اكتب الأعداد الأوّليّة بالترتيب التصاعُدي وافصل بين كل عددَين منهما بإشارة ×

تذكَّر أن ناتج الضرب هو جواب لعملية ضرب. فإذا كتبت عددًا في صورة ناتج ضرب عوامله الأوّليّة، فإنك تكتبه باستخدام إشارات الضرب مثل:
١٢ = ٢ × ٢ × ٣

كل عدد من الأعداد الأوَّليّة له عاملان فقط: ١ والعدد نفسه. بما أن العدد ١ ليس أوّليًّا، فلا تذكره عند التعبير عن عدد بصورة ناتج ضرب عوامله الأوَّليّة.

الحــلّ:

ثانيًا: ٢ | ٣٦ ٢ | ١٨ ٣ | ٩ ٣ | ٣ | ١ ٣٦ = ٢ × ٢ × ٣ × ٣	٢ | ٤٨ ٢ | ٢٤ ٢ | ١٢ ٢ | ٦ ٣ | ٣ | ١ ٤٨ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٣	اقسم على أصغر عدد أوليّ يقسم العدد المُعطى بدون باقٍ. استمر في القسمة مُستخدِمًا أصغر عدد أوَّليّ يقسم العدد الجديد في كلّ مرّة. توقّف عندما تنتهي بالعدد ١ اكتب العوامل الأوَّليّة بالترتيب التصاعُدي، وافصل بين كل عددَين منهما بإشارة ×

اختر الطريقة التي تناسبك، واعتمدها. بيِّن طريقتك دائمًا عند استخدام العوامل الأوَّليّة.

تمارين ١-٢-ب

١) اكتب كل عدد من الأعداد الآتية في صورة ناتج ضرب عوامله الأوَّليّة:

أ ٣٠	ب ٢٤	ج ١٠٠	د ٢٢٥	هـ ٣٦٠
و ٥٠٤	ز ٦٥٠	ح ١١٢٥	ط ٧٥٦	ي ٩٢٤٠

عندما تكتب العدد في صورة ناتج ضرب عوامله الأوَّليّة، اكتب العوامل الأوَّليّة المُتشابهة معًا بالترتيب التصاعدي.

١-٢-ج استخدام العوامل الأوّليّة لإيجاد:

أولاً: المُضاعَف المُشترَك الأصغر (م م ص)

المُضاعَف المُشترَك الأصغر لعددَين أو أكثر هو أصغر عدد مُضاعَف مُشترَك لجميع الأعداد المُعطاة.

مثــال ٢

أوجد المُضاعَف المُشترَك الأصغر (م م ص) للعددَين ٤ و ٧

الحــلّ:

$م_٤$ هي ٤، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤، <u>٢٨</u>، ٣٢، ...	اكتب بعض مُضاعَفات العدد ٤ (ملاحظة: $م_٤$ تعني مُضاعَفات العدد ٤).
$م_٧$ هي ٧، ١٤، ٢١، <u>٢٨</u>، ٣٥، ٤٢، ...	اكتب بعض مُضاعَفات العدد ٧
	أوجد أول عدد مُشترك بين مُضاعَفات العددَين.
م م ص هو ٢٨	هذا هو المُضاعَف المشترك الأصغر (م م ص)

عندما تتعامل مع أعداد كبيرة، يمكنك أن تُحدِّد (م م ص) من خلال تحليل العدد إلى عوامله الأولية.

مثـــال ٣

أوجد المُضاعَف المُشترَك الأصغر (م م ص) للعددين ٧٢ و ١٢٠

الحـــلّ:

٧٢ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٣ ١٢٠ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٥	اكتب كل عدد في صورة حاصل ضرب عوامله الأوَّلية. ضع خطًّا تحت جميع عوامل العدد الأصغر. ضع خطًّا تحت جميع العوامل الأوَّلية للعدد الأكبر غير المُشترَكة مع عوامل العدد الأصغر.
٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٣ × ٥ = ٣٦٠ م م ص هو ٣٦٠	اضرب جميع العوامِل التي تحتها خط للعددَين لتجد (م م ص).

ثانيًا: العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك)

العامل المُشترَك الأكبر لعددَيْن أو أكثر هو العدد الأكبر بين العوامل المُشترَكة لجميع الأعداد المُعطاة.

مثـــال ٤

أوجد العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) للعددَين ٨ و ٢٤

الحـــلّ:

ع$_{٨}$ هي ١، ٢، ٤، ٨ ع$_{٢٤}$ هي ١، ٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ١٢، ٢٤ ع م ك هو ٨	اكتب عوامل كلّ عدد. ضع خطًّا تحت العوامل المُشترَكة في المجموعتَين. حدِّد أكبر عامل تحته خط. هذا هو العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك).

عندما تتعامل مع أعداد كبيرة، يمكنك أن تُحدِّد (ع م ك) من خلال تحليل العدد إلى عوامله الأولية

مثـــال ٥

أوجد العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) للعددَين ١٦٨ و ١٨٠

الحـــلّ:

١٦٨ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٧ ١٨٠ = ٢ × ٢ × ٣ × ٣ × ٥	اكتب كلّ عدد في صورة حاصل ضرب عوامله الأوّلية. ضع خطًّا تحت العوامل المُشترَكة في كلا العدَين.
٢ × ٢ × ٣ = ١٢ ع م ك هو ١٢	أوجد ناتج ضرب تلك العوامل المشتركة لتجد (ع م ك).

لاحقًا

يمكنك أيضًا استخدام العوامل الأوّليّة لإيجاد الجذور التربيعية والتكعيبية للأعداد إن لم يكن لديك آلة حاسبة. وسوف تألف ذلك بشكل أكثر تفصيلاً في هذه الوحدة.

تمارين ١-٢-ج

١) أوجد (ع م ك) لكل زوج من الأعداد التالية:

أ ٤٨ ، ١٠٨ ب ١٢٠ ، ٢١٦ ج ٧٢ ، ٩٠ د ٥٢ ، ٧٨

هـ ١٠٠ ، ١٢٥ و ٨٨ ، ١٥٤ ز ٥٤٦ ، ٦٢٤ ح ٩٥ ، ١٢٠

٢) أوجد (م م ص) لكل زوج من الأعداد التالية:

أ ٥٤ ، ٦٠ ب ٥٤ ، ٧٢ ج ٦٠ ، ٧٢ د ٤٨ ، ٦٠

هـ ١٢٠ ، ١٨٠ و ٩٥ ، ١٥٠ ز ٥٤ ، ٩٠ ح ٩٠ ، ١٢٠

٣) أوجد (ع م ك) و (م م ص) لكل زوج من الأعداد التالية:

أ ٧٢ ، ١٠٨ ب ٢٥ ، ٢٠٠ ج ٩٥ ، ١٢٠ د ٦٠ ، ٨٤

طبّق مهاراتك

٤) أجرت محطّة إذاعية مُسابقة على الهاتف للمُستمعين، بحيث يحصل المُتَّصل الثلاثون على قسيمة بث مباشر، ويحصل المُتَّصل المئة والعشرون على هاتف محمول مجّانًا، فكم مُستمعًا يجب أن يتّصل قبل أن يحصل أحد المستمعين على قسيمة البث المباشر والهاتف المحمول معًا؟

تحتوي المسائل التي تتضمّن (م م ص) عادة على أحداث مُتكرّرة. وتحتوي المسائل التي تتضمّن (ع م ك) عادة على فصل الأشياء إلى قطع أصغر أو ترتيب الأشياء في مجموعات أو صفوف متساوية.

٥) تُكمِل فاطمة الدوران حول مسار ما في ١٢ دقيقة، ويكمل أخوها سعيد الدوران حول المسار نفسه في ١٨ دقيقة، فإذا بدأ الاثنان من الموقع نفسه، وفي الوقت نفسه، فكم دقيقة ستمضي حتّى يعبرا معًا خطّ البداية مرة ثانية؟

٦) تقف سعاد وليلى وجهًا لوجه، لتبدأ الفتاتان الدوران في اللحظة نفسها، فإذا استغرقت سعاد ٣ ثوانٍ لتكمل دورة واحدة، واستغرقت ليلى ٤ ثوانٍ لتكمل دورة واحدة، فكم مرة ستدور سعاد، لتتقابل الفتاتان وجهًا لوجه مرة ثانية؟

١-٢-د قواعد قابلية القسمة لإيجاد العوامل بسُهولة

ترغب أحيانًا في معرفة ما إذا كان عدد صغير يقسم عددًا آخر أكبر منه بدون باقٍ. بمعنى آخر، هل يقبل العدد الكبير القسمة على العدد الصغير؟

لتنفيذ هذا العمل، من المفيد استخدام قواعد قابلية القسمة.

يكون **العدد** قابلاً للقسمة بدون باق على:

مُساعَدة

قابلية القسمة مفيدة عندما تتعامل مع العوامل والأعداد الأوّلية.

(٢) إذا كان رقم آحاد العدد واحدًا من الأرقام ٠ أو ٢ أو ٤ أو ٦ أو ٨ (أي عدد زوجيّ)

(٣) إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد ٣ (يمكن قسمته على العدد ٣)

(٤) إذا كان رقما آحاد العدد وعشراته معًا يقبلان القسمة على العدد ٤

(٥) إذا كان رقم آحاد العدد صفرًا أو ٥
(٦) إذا كان يقبل القسمة على العددَيْن ٢ و ٣ معًا
(٨) إذا كانت أرقام آحاد وعشرات ومئات العدد معًا تقبل القسمة على العدد ٨
(٩) إذا كان مجموع أرقامه من مُضاعفات العدد ٩ (يمكن قسمته على العدد ٩)
(١٠) إذا كان رقم آحاد العدد صفرًا

ليس من السهل إيجاد قاعدة لقابلية القسمة على العدد ٧، رُغم أن مضاعفاته لها خصائص مهمّة يمكنك استقصاؤها على الإنترنت.

تمارين ١-٢-د

١) انظر إلى الأعداد في الإطار أدناه. أيٌّ منها:

٢٣	٦٥	٩٢	١٠	١٠٤	٧٠	٥٠٠	٢١	٦٤	٧٩٨	١٢٢٣

أ يقبل القسمة على العدد ٥؟
ب يقبل القسمة على العدد ٨؟
ج يقبل القسمة على العدد ٣؟

٢) أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خاطئة؟

أ يقبل العدد ٦٢٥ القسمة على ٥
ب يقبل العدد ٨٨ القسمة على ٣
ج يقبل العدد ٦٤٠ القسمة على ٦
د يقبل العدد ٣٤٦ القسمة على ٤
هـ يقبل العدد ٤٧٦ القسمة على ٨
و يقبل العدد ٢٣٤٠ القسمة على ٩
ز يقبل العدد ٢٨٩٠ القسمة على ٦
ح يقبل العدد ٤٥٦٢ القسمة على ٣
ط يقبل العدد ٤٠٠٩٠ القسمة على ٥
ي يقبل العدد ١٢٣٤٥٦ القسمة على ٩

٣) هل يمكن تقسيم المبلغ ٣٤٠٧ ريالاً عمانيًّا بدون باقٍ على:

أ شخصَين؟
ب ثلاثة أشخاص؟
ج تسعة أشخاص؟

٤) يحتوي ملعب رياضي على ٢٠٢٠٨ مقعد. هل يمكن توزيع هذه المقاعد بالتساوي على:

أ خمسة أقسام؟

ب ستة أقسام؟

ج تسعة أقسام؟

٥) أ إذا كان عدد ما يقبل القسمة على ١٢، فما الأعداد الأخرى التي يقبل القسمة عليها؟

ب إذا كان عدد ما يقبل القسمة على ٣٦، فما الأعداد الأخرى التي يقبل القسمة عليها؟

ج كيف يمكنك التحقُّق من أن عددًا ما يقبل القسمة على ١٢ و١٥ و٢٤؟

١-٣ القوى والجذور

سابقًا

تذكَّر أن ناتج ضرب العدد الصحيح في نفسه هو مربع العدد.

مُربّعات الأعداد والجذور التربيعية

يتم تربيع العدد عند ضربه في نفسه. مثلاً: **مربَّع** العدد ٥ هو $٥ \times ٥ = ٢٥$
رمز التربيع هو $(\ ^{٢})$، إذن، يمكن كتابة ٥×٥ في صورة $(٥^{٢})$

الجذر التربيعي لعدد هو العدد الذي تم ضربه في نفسه للحصول على مُربَّع العدد.
ويُرمَز إلى الجذر التربيعي بالرمز $\sqrt{\ }$. تعرف أن $٢٥ = ٥^{٢}$، أي أن $\sqrt{٢٥} = ٥$

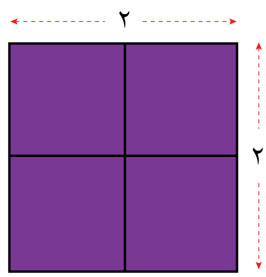
رابط

تُستخدَم الأسس الكسرية والجذور في حسابات ماليّة متنوعة تتضمَّن الاستثمار والتأمين والقرارات الاقتصاديّة.

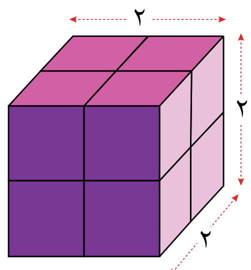
مُكعّبات الأعداد والجذور التكعيبية

يتم تكعيب العدد عند ضربه في نفسه، ثمّ ضرب الناتج في العدد الأصلي مرَّة أخرى.
مثلاً، **مُكعَّب** العدد ٢ هو $٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$. رمز التكعيب هو $(\ ^{٣})$، إذن، يمكن كتابة $٢ \times ٢ \times ٢$ في صورة $(٢^{٣})$

الجذر التكعيبي لعدد هو العدد الذي تم ضربه في نفسه ثم ضرب الناتج في العدد الأصلي مرَّة أخرى للحصول على مُكعَّب العدد. رمز الجذر التكعيبي هو $\sqrt[٣]{\ }$. تعرف أن $٨ = ٢^{٣}$، أي أن $\sqrt[٣]{٨} = ٢$



أ يمكن تنظيم الأعداد المُربَّعة لتكوّن شكلاً مُربَّعًا.



ب يمكن تنظيم الأعداد المُكعَّبة لتكوّن مُجسَّمًا مكعَّب الشكل.

لإيجاد الجذور التربيعية والتكعيبية، يمكنك كتابة العدد المربَّع والعدد المُكعَّب في صورة ناتج ضرب عوامله الأوَّليّة، وتجميع العوامل الأوَّليّة في أزواج أو ثلاثيّات.

مثـال ٦

أوجد قيمة كل ممّا يلي:

أ $\sqrt{٣٢٤}$ ب $\sqrt[٣]{٥١٢}$

الحـلّ:

أ $٣٢٤ = \underbrace{٢ \times ٢}_{٢} \times \underbrace{٣ \times ٣}_{٣} \times \underbrace{٣ \times ٣}_{٣}$

$٢ \times ٣ \times ٣ = ١٨$

$\sqrt{٣٢٤} = ١٨$

حلّل العدد الى عوامله الأولية ثم رتّب العوامل من الأصغر الى الأكبر.
ستلاحظ أن كل عاملَين أوّليَّين مُتتاليَين متساويان. اكتب من كل زوج من العوامل عاملًا واحدًا فقط.
أوجد ناتج الجذر التربيعي بايجاد ناتج ضرب العوامل الأولية التي تم أخذها.

ب $٥١٢ = \underbrace{٢ \times ٢ \times ٢}_{٢} \times \underbrace{٢ \times ٢ \times ٢}_{٢} \times \underbrace{٢ \times ٢ \times ٢}_{٢}$ $٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$ $\sqrt[3]{٥١٢} = ٨$	حلّل العدد الى عوامله الأولية ثم رتِّب العوامل من الأصغر الى الأكبر. ستلاحظ أن كل ثلاثة عوامل أولية متتالية متساوية. اكتب من كل ثلاثة عوامل متساوية عاملًا واحدًا فقط. أوجد ناتج الجذر التكعيبي بايجاد ناتج ضرب العوامل الأوَّلية التي تم أخذها.

إيجاد القوى والجذور باستخدام الآلة الحاسبة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لتربيع الأعداد وتكعيبها بسرعة، وذلك باستخدام المفتاحين $\boxed{x^2}$ و $\boxed{x^3}$ أو المفتاح $\boxed{x^{\square}}$. استخدم المفتاحَين $\boxed{\sqrt{\ }}$ أو $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ لإيجاد الجذور. إذا لم تتوافر الآلة الحاسبة، يمكنك استخدام طريقة ناتج ضرب العوامل الأوَّليّة بعد تجميعها في أزواج أو ثلاثيات لإيجاد الجذر التربيعي أو الجذر التكعيبي للعدد. والطريقتان مُبيّنتان في المِثال التالي:

لا تحتوي جميع الآلات الحاسبة على المفاتيح نفسها. كل المفاتيح $\boxed{x^{\square}}$ و $\boxed{x^y}$ و $\boxed{\wedge}$ تعني الشيء نفسه في مختلف الآلات الحاسبة.

مثـــال ٧

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

أ $١٣^٢$ **ب** $٥^٣$ **ج** $\sqrt{٣٢٤}$ **د** $\sqrt[3]{٥١٢}$

الحـــلّ:

أ $١٣^٢ = ١٦٩$	أدخل $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{169}$
ب $٥^٣ = ١٢٥$	أدخل $\boxed{5}$ $\boxed{x^3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{125}$، إن لم يكن المفتاح $\boxed{x^3}$ موجودًا، أدخل $\boxed{5}$ $\boxed{x^{\square}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{125}$؛ في هذا المفتاح، عليك إدخال القوى.
ج $\sqrt{٣٢٤} = ١٨$	أدخل $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{18}$
د $\sqrt[3]{٥١٢} = ٨$	أدخل $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{5}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{8}$

تأكّد من أنك تعرف وظيفة المفتاح الذي تستخدمه في آلتك الحاسبة، وأنك تعرف كيفية استخدامه. قد يكون لهذه المفاتيح، في بعض الآلات الحاسبة، وظائف أخرى.

لاحقًا

سوف تتعامل من جديد مع قوى وجذور أعلى عندما تتعامل مع الصيغة القياسية والأسس ومُعدَّل النمو والتناقص.

قوى وجذور أخرى

لاحظت أن مربَّعات الأعداد مرفوعة جميعها إلى القوى ٢ (مربَّع ٥ = ٥ × ٥ = $٥^{٢}$) وأن مكعّبات الأعداد مرفوعة جميعها إلى القوى ٣ (مكعّب ٥ = ٥ × ٥ × ٥ = $٥^{٣}$). يمكنك أن ترفع أي عدد إلى أيّ قوى. مثلاً، ٥ × ٥ × ٥ × ٥ = $٥^{٤}$، يُقرأ ذلك في صورة: ٥ مرفوعة إلى القوى ٤، يُطبَّق المبدأ نفسه على إيجاد جذور الأعداد.

$٥^{٢} = ٢٥$ $\sqrt{٢٥} = ٥$

$٥^{٣} = ١٢٥$ $\sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$

$٥^{٤} = ٦٢٥$ $\sqrt[٤]{٦٢٥} = ٥$

يمكنك استخدام آلتك الحاسبة لتنفيذ عمليات حسابية تتضمن جذورًا ومربَّعات.

يحسب المفتاح $\boxed{y^x}$ قيمة أيّ قوى.

لإيجاد $٧^{٥}$: أدخل $\boxed{7}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{5}$، لتحصل على النتيجة ١٦٨٠٧

يحسب المفتاح $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ قيمة أيّ جذر.

لإيجاد قيمة $\sqrt[٤]{٨١}$: أدخل $\boxed{4}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{8}$ $\boxed{1}$ لتحصل على النتيجة ٣

تمارين ١-٣

١) أوجد ناتج ما يلي:

أ $٣^{٢}$ ب $٧^{٢}$ ج $١١^{٢}$ د $١٢^{٢}$ هـ $٢١^{٢}$

و $١٩^{٢}$ ز $٣٢^{٢}$ ح $١٠٠^{٢}$ ط $١٤^{٢}$ ي $٦٨^{٢}$

٢) أوجد ناتج ما يلي:

أ $١^{٣}$ ب $٣^{٣}$ ج $٤^{٣}$ د $٦^{٣}$ هـ $٩^{٣}$

و $١٠^{٣}$ ز $١٠٠^{٣}$ ح $١٨^{٣}$ ط $٣٠^{٣}$ ي $٢٠٠^{٣}$

٣) ضعْ قيمة لـ (س) لتصبح كلّ عبارة من العبارات الآتية صحيحة:

أ س × س = ٢٥   ب س × س × س = ٨   ج س × س = ١٢١

د س × س × س = ٧٢٩   هـ س × س = ٣٢٤   و س × س = ٤٠٠

ز س × س × س = ٨٠٠٠   ح س × س = ٢٢٥   ط س × س × س = ١

ي $\sqrt{س} = ٩$ ك $\sqrt{١} = س$ ل $\sqrt{س} = ٨١$

م $\sqrt[٣]{س} = ٢$ ن $\sqrt[٣]{س} = ١$ س $\sqrt[٣]{٦٤} = س$

ادرس مُربَّعات كل الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٢٠ ضمنيًّا، لتصبح سريعًا في إيجادها. وعندما تحدِّد أنماط مربّعات الأعداد تصبح قادرًا على حلّ مسائل في سياقات مختلفة.

٤) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل جذر من الجذور الآتية:

أ $\sqrt{٩}$ ب $\sqrt{٦٤}$ ج $\sqrt{١}$ د $\sqrt{٤}$ هـ $\sqrt{١٠٠}$

و $\sqrt{٠}$ ز $\sqrt{٨١}$ ح $\sqrt{٤٠٠}$ ط $\sqrt{١٢٩٦}$ ي $\sqrt{١٧٦٤}$

ك $\sqrt[٣]{٨}$ ل $\sqrt[٣]{١}$ م $\sqrt[٣]{٢٧}$ ن $\sqrt[٣]{٦٤}$ س $\sqrt[٣]{١٠٠٠}$

ع $\sqrt[٣]{٢١٦}$ ف $\sqrt[٣]{٥١٢}$ ص $\sqrt[٣]{٧٢٩}$ ق $\sqrt[٣]{١٧٢٨}$ ر $\sqrt[٣]{٥٨٣٢}$

٥) أوجد الجذر التربيعي لكلّ ممّا يلي مُستخدِمًا التحليل للعوامل الأوَّلية المعطى. وضّح خطوات الحل.

أ ٣٢٤ = ٢ × ٢ × ٣ × ٣ × ٣ × ٣ ب ٢٢٥ = ٣ × ٣ × ٥ × ٥

ج ٧٨٤ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٧ × ٧ د ٢٠٢٥ = ٣ × ٣ × ٣ × ٣ × ٥ × ٥

هـ ١٩٦٠٠ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٥ × ٥ × ٧ × ٧

و ٢٥٠٠٠٠ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥

٦) أوجد الجذر التكعيبي لكلّ ممّا يلي مُستخدِمًا التحليل للعوامل الأوَّلية المعطى. وضّح خطوات الحل.

أ ٢٧ = ٣ × ٣ × ٣ ب ٧٢٩ = ٣ × ٣ × ٣ × ٣ × ٣ × ٣

ج ٢١٩٧ = ١٣ × ١٣ × ١٣ د ١٠٠٠ = ٢ × ٢ × ٢ × ٥ × ٥ × ٥

هـ ١٥٦٢٥ = ٥ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥

و ٣٢٧٦٨ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢

٧) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي:

أ $(\sqrt{٤٩})^{٢}$ ب $(\sqrt[٣]{٦٤})^{٣}$ ج $(\sqrt[٣]{٣٢})^{٣}$ د $\sqrt{٩} + \sqrt{١٦}$

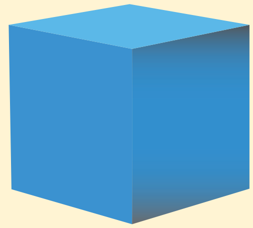
هـ $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ و $\sqrt{١٠٠} - \sqrt{٣٦}$ ز $\sqrt{٢٥} \times \sqrt{٤}$ ح $\sqrt{٢٥ \times ٤}$

ط $\sqrt{٩ \times ٤}$ ي $\sqrt{٩} \times \sqrt{٤}$

تعمل الأقواس عمل تجميع الرموز. احسب ما في داخل الأقواس قبل القيام باحتساب ما في خارجها. تعمل رموز الجذور بنفس طريقة عمل القوس. إذا كان لديك $\sqrt{٢٥ + ٩}$، فعليك جمع ٢٥ و ٩ قبل إيجاد قيمة الجذر.

٨) في كلّ ممّا يلي، أوجد طول ضلع مُكعّب حجمه:

أ ١٠٠٠ سم^{٣} ب ١٩٦٨٣ سم^{٣} ج ٦٨٩٢١ ملم^{٣} د ٦٤٠٠٠ سم^{٣}



في المكعب، يتساوى الطول والعرض والارتفاع.
صيغة حجم المُكعَّب هي ح = س × س × س، حيث ح حجم المُكعَّب، س طول ضلعه.

٩) أوجد قيمة كلّ ممّا يلي:

أ $٢^{٤} \times ٢^{٣}$ ب $٣^{٥} \times \sqrt[٣]{٦٤}$ ج $٣^{٤} + \sqrt[٣]{٥١٢}$

د $٢^{٤} \times \sqrt[٣]{٤٦٦٥٦}$ هـ $\sqrt[٣]{١٥٦٢٥} \times ٢^{٦}$ و $٨^{٤} \div (\sqrt[٣]{٥١٢})^{٣}$

١٠) أيُّهما أكبر؟ ما الفرق بينهما؟

أ $٨^{٠} \times ٤^{٤}$ أم $٢^{٤} \times ٣^{٤}$ ب $\sqrt[٣]{١٥٦٢٥} \times ٣^{٦}$ أم $\sqrt[٣]{٧٢٩} \times ٤^{٤}$

١-٤ الأعداد المُوجَّهة

١-٤-أ تطبيقات على الأعداد المُوجَّهة

عندما يتم اختيار اتّجاه ما موجبًا، يكون الاتّجاه المُضادّ له سالبًا.
وعليه:
- إذا كان الاتّجاه إلى الأعلى موجبًا، يكون الاتّجاه إلى الأسفل سالبًا.
- إذا كان الاتّجاه إلى اليمين موجبًا، يكون الاتّجاه إلى اليسار سالبًا.
- إذا كان الاتّجاه إلى الشمال موجبًا، يكون الاتّجاه إلى الجنوب سالبًا.
- إذا كان ما فوق الصفر موجبًا، فيكون ما تحت الصفر سالبًا.

تُستخدَم إشارة السالب لتدلّ على أن القيمة أقلّ من الصفر. وهي تُستخدَم مثلاً في ميزان الحرارة، وفي كشوف حسابات البنوك، وفي المصاعد.

عندما تستخدم أعدادًا للتعبير عن مواقف حياتية، مثل درجة الحرارة، والارتفاع، والعمق تحت مستوى سطح البحر، والربح والخسارة والاتّجاهات (على الشبكة)، قد تحتاج أحياناً إلى استخدام إشارة السالب لتدلّ على اتجاه العدد. يمكنك مثلاً عرض درجة الحرارة ثلاث درجات تحت الصفر في صورة $^{-}$٣° س. تُسمّى الأعداد التي لها اتّجاهات **أعدادًا مُوجَّهة**. فإذا كتبت نقطة تقع على ارتفاع ٢٥م فوق مستوى سطح البحر في صورة $^{+}$٢٥م، فإن النقطة التي تقع على ارتفاع ٢٥م تحت مستوى سطح البحر تُكتَب في صورة $^{-}$٢٥م.

تمارين ١-٤-أ

١) عبّر عن كلّ حالة من الحالات الآتية باستخدام عدد موجَّه:

أ ربح ١٠٠ ريال عُماني

ب ٢٥ كم تحت مستوى سطح البحر

ج تراجُع بمقدار ١٠ درجات

د زيادة كتلة بمقدار ٢ كغم

هـ فقدان كتلة بمقدار ١,٥ كغم

و ٨٠٠٠ م فوق مستوى سطح البحر

ز درجة الحرارة ١٠° س تحت الصفر

ح هُبوط بمقدار ٢٤ م

ط دَين مقداره ٢٠٠٠ ريال عُماني

ي زيادة بمقدار ٢٥٠ ريالاً عُمانيًّا

ك الوقت ساعتان قبل توقيت جرينتش

ل ارتفاع مقداره ٤٠٠ م

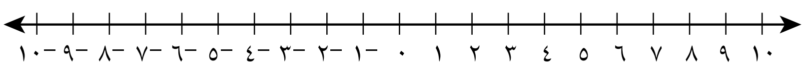
م رصيد في البنك قيمته ٤٥٠ ريالاً عُمانيًّا

لاحقًا

ستستخدم خطوط أعداد مشابهة عندما تحلّ متباينات خطيّة لاحقًا.

١-٤-ب مُقارنة الأعداد المُوجَّهة وترتيبها

الأعداد المُوجَّهة هي أعداد موجبة أو سالبة. يمكنك تمثيل مجموعة الأعداد الصحيحة على خطّ الأعداد، مثل المعروض أدناه.



أي عدد على اليمين يكون أكبر من أي عدد على اليسار

تمارين ١-٤-ب

من المهم أن تفهم كيف تتعامل مع الأعداد المُوجَّهة لوجود موضوعات عدّة مُرتبِطة بها.

١) املأ الفراغ بأحد الرمزَين > أو < لتكون العبارة صحيحة:

أ) ٢ ☐ ٨ ب) ٤ ☐ ٩ ج) ١٢ ☐ ٣

د) ٦ ☐ −٤ هـ) −٧ ☐ ٤ و) −٢ ☐ ٤

ز) −٢ ☐ −١١ ح) −١٢ ☐ −٢٠ ط) −٨ ☐ ٠

ي) −٢ ☐ ٢ ك) −١٢ ☐ −٤ ل) −٣٢ ☐ −٣

م) ٠ ☐ −٣ ن) −٣ ☐ ١١ س) ١٢ ☐ −٨٩

٢) رتِّب مجموعات الأعداد التالية ترتيبًا تصاعُديًّا:

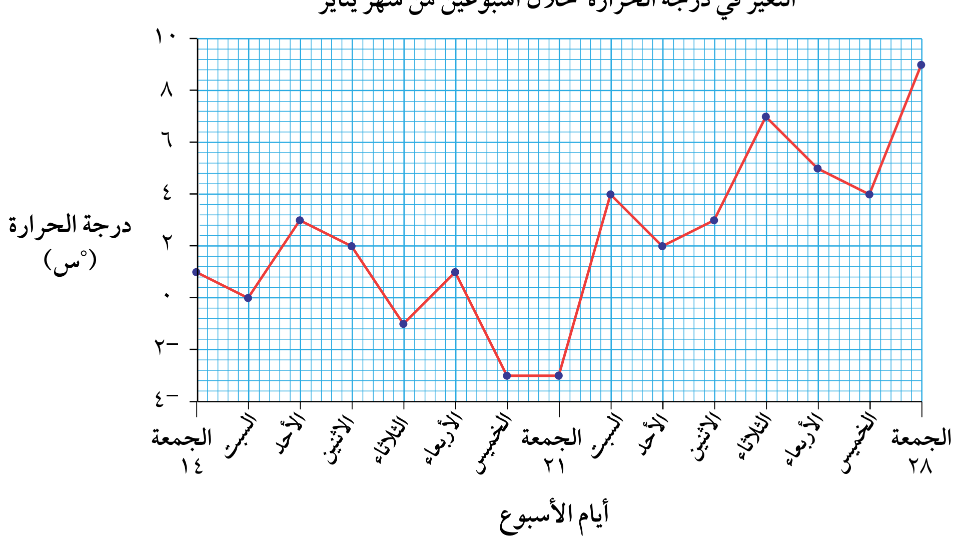
أ) −٨، ٧، ١٠، −١، −١٢ ب) ٤، −٣، −٤، −١٠، ٩، −٨

ج) −١١، −٥، −٧، ٧، ٠، −١٢ د) −٩٤، −٥٠، −٨٣، −٩٠، ٠

طبّق مهاراتك

٣) ادرس الرسم البياني لدرجة الحرارة:

التغيُّر في درجة الحرارة خلال أسبوعين من شهر يناير



أ كم بلغت درجة الحرارة يوم الجمعة في ١٤ يناير؟

ب كم انخفضت درجة الحرارة من يوم الجمعة في ١٤ يناير إلى يوم السبت في ١٥ يناير؟

ج ما أدنى درجة حرارة سُجِّلت خلال الأسبوعين؟

د ما الفرق بين أعلى درجة حرارة وأدنى درجة حرارة خلال الأسبوعين؟

هـ كم تكون درجة الحرارة يوم السبت في ٢٩ يناير، إذا تغيَّرت درجة الحرارة في هذا اليوم بمقدار ‾٢ درجة مئوية عن اليوم السابق؟

يسمّى الفرق بين أعلى درجة حرارة وأدنى درجة حرارة مدى درجات الحرارة.

٤) رصيد حمد في البنك ٤٥,٥٠٠ ريالاً عُمانيًّا، أودع في حسابه ١٥,٠٠٠ ريالاً عُمانيًّا، ثمّ سحب ٣٢,٠٠٠ ريالاً عُمانيًّا. كم ريالاً عُمانيًّا أصبح في رصيد حمدٍ في البنك؟

٥) انكشف رصيد سعيد في البنك ٤٢٠ ريالاً عُمانيًّا.

أ مثّل رصيد سعيد بعدد موجَّه.

ب كم ريالاً عُمانيًّا عليه أن يضع في البنك ليصبح رصيده ٥٠٠ ريال عُماني؟

ج أودع سعيد ٢٠٠ ريال عُماني. كم سيصبح رصيده الجديد؟

٦) ارتفع غطّاس موجود على عمق ٢٧م تحت مستوى سطح الماء بمقدار ١٦م. عند أي عمق أصبح الغطّاس؟

٧) في يوم بارد من الشتاء في مُرتفعات الجبل الأخضر في سلطنة عُمان، كانت درجة الحرارة ‾٥° س عند الساعة ٦ صباحًا. ارتفعت درجة الحرارة بمقدار ٨° س بعد الظهر. وعند الساعة ٧ مساءً، انخفضت بمقدار ١١° س عمّا كانت عليه بعد الظهر. كم كانت درجة الحرارة عند الساعة ٧ مساءً؟

٨) يسبق التوقيت المحلّي في مدينة مسقط توقيت جرينتش بمقدار أربع ساعات، ويتأخَّر التوقيت المحلّي في مدينة ريو دي جانيرو عن توقيت جرينتش بمقدار ثلاث ساعات:

أ عندما تكون الساعة في جرينتش ٤ مساءً، فكم تكون في مسقط؟

ب عندما تكون الساعة في جرينتش ٣ صباحًا، فكم تكون في ريو دي جانيرو؟

ج عندما تكون الساعة في ريو دي جانيرو ٣ مساءً، فكم تكون في مسقط؟

د عندما تكون الساعة ٨ صباحًا في مسقط، فكم تكون في ريو دي جانيرو؟

١-٥ ترتيب العمليّات الحسابيّة

في هذا الدرس، يُتوقَّع أن تقوم بحسابات أكثر تعقيدًا تتضمَّن أكثر من عملية حسابية واحدة (+، −، ×، ÷). عندما تُجري حسابات أكثر تعقيدًا، ينبغي لك اتِّباع سلسلة من القواعد الرياضية ترتبط بترتيب إجراء العمليات الحسابية. والقواعد التي تحكم ترتيب العمليات، هي:

- قم بإكمال عمليات رموز التجميع أوَّلاً (الأسس والأقواس والجذور).
- قم بإجراء عمليتي الضرب والقسمة، مُبتدئًا من اليمين إلى اليسار.
- قم بإجراء عمليتي الجمع والطرح، مُبتدئًا من اليمين إلى اليسار.

يُشير ترتيب العمليات إلى إجراء الأسس (القوى) بعد الأقواس، ولكن قبل جميع العمليّات الحسابية الأخرى.

١-٥-أ رموز التجميع

أكثر رموز التجميع شيوعًا في الرياضيّات هي الأقواس، وإليك بعض الأمثلة على أنواع الأقواس المختلفة المُستخدَمة في الرياضيّات:

(٤ + ٩) × (١٠ ÷ ٢)

[٢(٤ + ٩) − ٤(٣) − ١٢]

[٢ − [٤(٢ − ٧) − ٤(٣ + ٨)] − ٢ × ٨]

عندما تتضمّن العبارة الرياضيّة أكثر من مجموعة أقواس، نفّذ العملية الحسابية في القوس الداخلي أولاً.

بعض الرموز الأخرى التي تُستخدم في تجميع العمليّات هي:

- شرطة الكسر، مثل $\frac{٥ - ١٢}{٣ - ٨}$
- الجذر التربيعيّ والجذر التكعيبيّ، مثل $\sqrt{٩ \times ٦}$ و $\sqrt[3]{٢٧ \times ٤}$
- القوى، مثل $٥^{٢}$ أو $٤^{٣}$

مثـــال ٨

أوجد ناتج كلّ ممّا يلي:

أ ٧ × (٣ + ٤)   ب (١٠ − ٤) × (٤ + ٩)   ج ٤٥ − [٢٠ × (٤ − ٣)]

الحـــلّ:

أ ٧ × ٧ = ٤٩

ب ٦ × ١٣ = ٧٨

ج ٤٥ − [٢٠ × ١] = ٤٥ − ٢٠
= ٢٥

مثـــال ٩

أوجد ناتج كل ممّا يلي:

أ ٣ + ٨^٢   ب (٤ + ٢٨) / (١٧ − ٩)   ج √(٣٦ ÷ ٤) + √(١٠٠ − ٣٦)

الحــلّ:

أ ٣ + (٨ × ٨)
= ٣ + ٦٤
= ٦٧

ب (٤ + ٢٨) / (١٧ − ٩)
= ٣٢ / ٨
= ٤

ج √(٣٦ ÷ ٤) + √(١٠٠ − ٣٦)
= √٩ + √٦٤
= ٣ + ٨
= ١١

تمارين ١-٥-أ

١) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي، موضِّحًا خطوات الحل:

أ (٤ + ٧) × ٣   ب (٢٠ − ٤) ÷ ٤   ج ٥٠ ÷ (٢٠ + ٥)   د ٦ × (٢ + ٩)

هـ (٤ + ٧) × ٤   و (١٠٠ − ٤٠) × ٣   ز ١٦ + (٢٥ ÷ ٥)   ح ١٩ − (١٢ + ٢)

ط ٤٠ ÷ (١٢ − ٤)   ي ١٠٠ ÷ (٤ + ١٦)   ك ١٢١ ÷ (٣٣ ÷ ٣)   ل ١٥ × (١٥ − ١٥)

٢) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي:

أ (٤ + ٨) × (١٦ − ٧)   ب (١٢ − ٤) × (٦ + ٣)   ج (٩ + ٤) − (٤ + ٦)

د (٣٣ + ١٧) ÷ (١٠ − ٥)   هـ (٤ × ٢) + (٨ × ٣)   و (٩ × ٧) ÷ (٢٧ − ٢٠)

ز (١٠٥ − ٨٥) ÷ (١٦ ÷ ٤)   ح (١٢ + ١٣) ÷ ٥^٢   ط (٥٦ − ٦^٢) × (٤ + ٣)

٣) أوجد ناتج كلٍّ ممّا يلي:

أ ٤ + [١٢ − (٨ − ٥)]   ب ٦ + [٢ − (٢ × ٠)]

ج ٨ + [٦٠ − (٢ + ٨)]   د ٢٠٠ − [(٤ + ١٢) − (٦ + ٢)]

هـ ٢٠٠ × [١٠٠ − [٤ × (٢ + ٨)]]   و [٦ + [٥ × (٢ + ٣٠)]] × ١٠

ز [(٣٠ + ١٢) − (٧ + ٩)] × ١٠   ح ٦ × [(٢٠ ÷ ٤) − (٦ − ٣) + ٢]

ط ١٠٠٠ − [٦ × (٤ + ٢٠) − ٤ × (٣ + ٠)]

لاحقًا

سوف تطبِّق قواعد ترتيب العمليات الحسابية على الكسور والكسور العشريّة والعبارات الجبريّة لاحقًا.

١-٥-ب قواعد ترتيب العمليّات

الآن وقد عرفت كيف تتعامل مع تجميع الرموز، سوف تطبِّق قواعد ترتيب العمليّات الحسابية لتُجري الحسابات مع الأعداد.

تمارين ١-٥-ب

١) أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي:

أ ٥ × ١٠ + ٣
ب ٥ × (١٠ + ٣)
ج ٢ + ١٠ × ٣
د (٢ + ١٠) × ٣
هـ ٢٣ + ٧ × ٢
و ٦ × ٢ ÷ (٣ + ٣)
ز $\frac{١٥ - ٥}{٢ \times ٥}$
ح (١٧ + ١) ÷ ٩ + ٢
ط $\frac{١٦ - ٤}{٤ - ٢}$
ي ١٧ + ٣ × ٢١
ك ٤٨ − (٢ + ٣) × ٢
ل ١٢ × ٤ − ٤ × ٨
م ١٥ + ٣٠ ÷ ٣ + ٦
ن ٢٠ − ٦ ÷ ٣ + ٣
س ١٠ − ٤ × ٢ ÷ ٢

٢) أوجد ناتج العمليات الحسابية التالية:

أ ١٨ − ٤ × ٢ − ٣
ب ١٤ − (٢١ ÷ ٣)
ج ٢٤ ÷ ٨ × (٦ − ٥)
د ٤٢ ÷ ٦ − ٣ − ٤
هـ ٥ + ٣٦ ÷ ٦ − ٨
و (٨ + ٣) × (٣٠ ÷ ٣) ÷ ١١

٣) حدِّد فيما إذا كانت كلّ عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خاطئة:

أ (١ + ٤) × ٢٠ + ٥ = ١ + (٤ × ٢٠) + ٥
ب ٦ × (٤ + ٢) × ٣ > (٦ × ٤) ÷ ٢ × ٣
ج ٨ + (٥ − ٣) × ٢ < ٨ + ٥ − (٣ × ٢)
د ١٠٠ + ١٠ ÷ ١٠ < (١٠٠ + ١٠) ÷ ١٠

٤) ضع كل عدد في المكان المُناسِب له لتُكوّن جملة عدديّة صحيحة في كل مما يلي:

أ ٠، ٢، ٥، ١٠ □ − □ ÷ □ = □
ب ٩، ١١، ١٣، ١٨ □ − □ ÷ □ = □
ج ١، ٣، ٨، ١٤، ١٦ □ ÷ (□ − □) − □ = □
د ٤، ٥، ٦، ٩، ١٢ (□ + □) − (□ − □) = □

٥) أوجد ناتج كلٍّ ممّا يلي:

أ ٦ + ٧٢
ب ٢٩ − ٢٣
ج ٨ × ٤٢
د ٢٠ − ٤ ÷ ٢
هـ $\frac{٣١ - ١٠}{١٤ - ٧}$
و $\frac{١٠٠ - ٤٠}{٥ \times ٤}$
ز $\sqrt{٨ + ٨}$
ح $\sqrt[٣]{٧٠ - ٦}$

٦) ضع الأقواس في المكان المُناسِب لها لتكون العمليات الحسابية الآتية صحيحة:

أ) ٣ × ٤ + ٦ = ٣٠　ب) ٢٥ − ١٥ × ٩ = ٩٠　ج) ٤٠ − ١٠ × ٣ = ٩٠

د) ١٤ − ٩ × ٢ = ١٠　هـ) ١٢ + ٣ ÷ ٥ = ٣　و) ١٩ − ٩ × ١٥ = ١٥٠

ز) ١٠ + ١٠ ÷ ٦ − ٢ = ٥　ح) ٣ + ٨ × ١٥ − ٩ = ٦٦　ط) ٩ − ٤ × ٧ + ٢ = ٤٥

ي) ١٠ − ٤ × ٥ = ٣٠　ك) ٦ ÷ ٣ + ٣ × ٥ = ٥　ل) ١٥ − ٦ ÷ ٢ = ١٢

م) ١ + ٤ × ٢٠ ÷ ٥ = ٢٠　ن) ٨ + ٥ − ٣ × ٢ = ٢٠　س) ٣٦ ÷ ٣ × ٣ − ٣ = ٦

ع) ٣ × ٤ − ٢ ÷ ٦ = ١　ف) ٤٠ ÷ ٤ + ١ = ١١　ص) ٦ + ٢ × ٨ + ٢ = ٢٤

١-٥-ج استخدام الآلة الحاسبة

تطبِّق الآلة الحاسبة، التي تتضمَّن منطقًا جبريًّا، قواعد ترتيب العمليات الحسابية آليًّا. فإذا أدخلت ٢ + ٣ × ٤، سوف تجري آلتك الحاسبة عملية الضرب أولاً، وتعطيك الإجابة ١٤ (تحقَّق من أن آلتك الحاسبة تقوم بذلك).

عندما تتضمّن الحسابات أقواسًا، يجب إدخال الأقواس لتتأكَّد من أن آلتك الحاسبة تُجري الحسابات على أقسام التجميع أولاً.

عندما ستستخدم آلتك الحاسبة لإجراء العمليّات الحسابية في الترتيب الصحيح، ستحتاج إلى تذكّر قواعد ترتيب العمليّات الحسابية وتطبيقها بالصورة الصحيحة.

جرّب القيام بعدّة حسابات على آلتك الحاسبة بوجود الأقواس ومن دونها. مثلًا: ٣ × ٢ + ٦ و ٣ × (٢+٦). هل فهمت لماذا تختلف الإجابتان؟

قد تتضمّن آلتك الحاسبة نوعًا واحدًا فقط من الأقواس [ )] و [( ]. إذا وُجِد نوعان مختلفان من أشكال الأقواس في آلتك الحاسبة مثل [٤ × (٢−٣)]، أدخل رمز القوس لكلّ نوع.

مثــال ١٠

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كلّ ممّا يلي:

أ) ٣ + ٢ × ٩　ب) (٣ + ٨) × ٤　ج) (٣ × ٨ − ٤) − (٢ × ٥ + ١)

الحــلّ:

أ) ٢١　أدخل [3] [+] [2] [×] [9] [=]

ب) ٤٤　أدخل [(] [3] [+] [8] [)] [×] [4] [=]

ج) ٩　أدخل [(] [3] [×] [8] [−] [4] [)] [−] [(] [2] [×] [5] [+] [1] [)] [=]

تمارين ١-٥-ج

١) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كلٍّ ممّا يلي:

أ) ١٠ − ٤ × ٣　ب) ١٢ + ٦ ÷ ٣ − ٤

ج) ٣ + ٤ × ٥ − ١٠　د) ١٨ ÷ ٣ × ٥ − ٣ + ٢

هـ) ٥ − ٣ × ٨ − ٦ ÷ ٢　و) ٧ + ٣ ÷ ٣ + ١

ز) (١ + ٤) × ٢٠ ÷ ٥　ح) ٣٦ ÷ ٦ × (٣ − ٣)

ط) (٨ + ٨) − ٦ × ٢　ي) ١٠٠ − ٣٠ × (٤ − ٣)

ك) ٢٤ ÷ (٧ + ٥) × ٦　ل) [(٦٠ − ٤٠) − (٥٣ − ٤٣)] × ٢

تتضمّن بعض الآلات الحاسبة مفتاحين: هما [−] و [(-)]. الأول يعني طرح عدد من آخر، والثاني يعني 'إشارة العدد سالبة'. جرِّب المفتاحين لتتأكد من أن آلتك الحاسبة تُنفّذ ما تتوقّع منها أن تُنفّذه.

م) $[(١٢ + ٦) \div ٩] \times ٤$ ن) $[١٠٠ \div (٤ + ١٦)] \times ٣$

س) $٤ \times [٢٥ \div (١٢ - ٧)]$

٢) استخدم الآلة الحاسبة لتتحقَّق من صحة الإجابات التالية. إذا كانت الإجابة خطأ، اكتب الإجابة الصحيحة:

أ) $١٢ \times ٤ + ٧٦ = ١٢٤$

ب) $٨ + ٧٥ \times ٨ = ٦٩٨$

ج) $١٢ \times ١٨ - ٤ \times ٢٣ = ١٢٤$

د) $(١٦ \div ٤) \times (٧ + ٣ \times ٤) = ٧٦$

هـ) $(٨٢ - ٣٦) \times (٢ + ٦) = ١٦$

و) $(٣ \times ٧ - ٤) - (٤ + ٦ \div ٢) = ١٢$

٣) ضع في المُربَّع العملية الحسابية المُناسبة لتكون العبارات الرياضية التالية صحيحة:

أ) ١٢ ☐ (٢٨ ☐ ٢٤) = ٣ ب) ٨٤ ☐ ١٠ ☐ ٨ = ٤

ج) ٣ ☐ ٧ (٠,٧ ☐ ١,٣) = ١٧ د) ٢٣ ☐ ١١ ☐ ٢٢ ☐ ١١ = ١١

هـ) ٤٠ ☐ ٥ ☐ (٧ ☐ ٥) = ٤ و) ٩ ☐ ١٥ ☐ (٣ ☐ ٢) = ١٢

كلما كنت ماهراً في استخدام الآلة الحاسبة، كانت حساباتك أسرع وأكثر دقّة.

لاحقًا

عندما تعمل بالأسس والصيغة القياسية لاحقًا، يلزمك تطبيق هذه المهارات. وسوف تستخدم آلتك الحاسبة بفاعليّة لتحلّ مسائل تتضمَّن قوى وجذورًا.

٤) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي باستخدام الآلة الحاسبة:

أ) $\frac{٧ \times \sqrt{١٦}}{٢^{٣} + ٧^{٢} - ١}$ ب) $\frac{٥^{٢} \times \sqrt{٤}}{١ + ٦^{٢} - ١٢}$

ج) $\frac{٢ + ٣^{٢}}{٥^{٢} + ٤ \times ١٠ - \sqrt{٢٥}}$ د) $\frac{٦^{٢} - ١١}{٢(١٧ + ٤ + ٤)}$

هـ) $\frac{٣^{٣} - ٣}{٢ \times \sqrt{٨١}}$ و) $\frac{٣^{٢} - ٥ + ٦}{\sqrt{٤} \times ٥}$

ز) $\frac{٣٦ - ٣ \times \sqrt{١٦}}{١٥ - ٣^{٢} \div ٣}$ ح) $\frac{{}^{-}٣٠ + [١٨ \div (٣ - ١٢) + ٢٤]}{٥ - ٨ - ٣^{٢}}$

٥) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كلٍّ مما يلي:

أ $\frac{٠,٣٤٥}{٧ \times ٤,٢ + ١,٣٤}$

ب $\frac{٠,٠٣٧٨ \times ١٢,٣٢}{٨,٠٥ + \sqrt{١٦}}$

ج $\frac{٠,٠٨٧ + \sqrt{١٦}}{٥,٠٩٨ - ٢^{٢}}$

د $\frac{٠,٠٨٧ \times ١٩,٢٣}{١,٠٣^{٢} - ٢,٤٥^{٢}}$

٦) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ ممّا يلي:

أ $\sqrt{١٢٥ \times ٦٤}$

ب $\sqrt{٦ \times ٣^{٢} \times ٢^{٣}}$

ج $\sqrt[٣]{١٩^{٢} + ٨^{٢}}$

د $\sqrt{٣٦^{٢} - ٤١^{٢}}$

هـ $\sqrt{١,١٧^{٣} - ٢,٣^{٢}}$

و $\sqrt[٣]{٠,١٣^{٢} - ١,٤٥^{٣}}$

ز $\sqrt{\sqrt{\frac{١}{٤}} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}}\ \frac{١}{٤}$

ح $\sqrt[٣]{١,٧^{٣} \times \frac{١}{٢} - ٢,٧٥^{٢}}$

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- يمكن تصنيف الأعداد إلى أنواع مختلفة مثل أعداد طبيعيّة وأعداد صحيحة.
- عندما تضرب عددًا صحيحًا في نفسه تحصل على عدد مُربَّع (س^{٢}). إذا ضربته مرة ثانية في نفسه تحصل على عدد مُكعَّب (س^{٣}).
- العدد الذي تضربه في نفسه لتحصل على عدد مُربَّع يُسمّى الجذر التربيعيّ. والعدد الذي تضربه في نفسه، ثم تضرب الناتج في العدد الأصلي مرَّة أخرى لتحصل على عدد مُكعَّب يُسمّى الجذر التكعيبي. رمز الجذر التربيعيّ هو $\sqrt{\ }$، ورمز الجذر التكعيبيّ هو $\sqrt[3]{\ }$.
- يتم الحصول على مُضاعَف العدد عند ضرب العدد في عدد طبيعيّ. المُضاعَف المُشترَك الأصغر (م م ص) لعددَين أو أكثر هو أصغر مُضاعَف مُشترَك بين كل مجموعات المُضاعَفات.
- عامل العدد يقسمه بدون باقٍ. العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) لعددَين أو أكثر، هو أكبر عامل مُشترَك بين مجموعات العوامل.
- العدد الأوّلي له عاملان فقط، هما: العدد ١ والعدد نفسه. العدد ١ ليس عددًا أوَّليًّا وليس عدد غير أوَّلي.
- العامل الأوليّ هو عدد أوَّلي وعامل معًا.
- يمكن التعبير عن جميع الأعداد الطبيعية غير الأوّلية في صورة ناتج ضرب عواملها الأوَّليّة.
- تُسمّى الأعداد الصحيحة أيضًا أعدادًا مُوجَّهة. تدلّ إشارة العدد الصحيح (− أو +) على أن قيمته أكبر من الصفر أو أصغر من الصفر.
- يطبّق الرياضيون مجموعة معياريّة من القواعد ليقرِّروا الترتيب الذي تُجرى فيه العمليّات الحسابية. العمليات في رموز التجميع تُجرى أوّلاً، يليها الضرب والقسمة، ثمّ الجمع والطرح.

يجب أن تكون قادرًا على:

- تحديد الأعداد الطبيعيّة والأعداد الصحيحة والأعداد الأوَّليّة.
- إيجاد مضاعفات وعوامل الأعداد وتحديد المُضاعَف المُشترَك الأصغر (م م ص) والعامل المُشترَك الأكبر (ع م ك).
- كتابة العدد في صورة ناتج ضرب عوامله الأوَّليّة باستخدام مُخطَّط الشجرة والقسمة.
- حساب المُربّعات والجذور التربيعيّة والمُكعَّبات والجذور التكعيبيّة لأعداد مُعطاة.
- التعامُل مع الأعداد الصحيحة في مسائل من واقع الحياة اليومية.
- تطبيق القواعد الأساسيّة لإجراء العمليات الحسابية على الأعداد.
- إجراء عمليات حسابية أساسيّة ذهنيًّا وباستخدام الآلة الحاسبة.

تمارين نهاية الوحدة

١) انظر إلى مجموعة الأعداد الآتية: {⁻٤، ⁻١، ٠، ٣، ٤، ٦، ٩، ١٥، ١٦، ١٩، ٢٠} أي من هذه الأعداد:

أ أعداد طبيعية؟ ب مُربَّعات أعداد؟ ج أعداد صحيحة سالبة؟

د أعداد أوَّلية؟ هـ من مُضاعفات العدد ٢؟ و من عوامِل العدد ٨٠؟

٢) أ اكتب كلّ عوامِل العدد ١٢

ب اكتب كلّ عوامِل العدد ٢٤

ج أوجد العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) للعددَيْن ١٢ و ٢٤

٣) أوجد العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) للعددَيْن ٦٤ و ١٤٤

٤) اكتب أوَّل خمسة مُضاعَفات لكل من الأعداد الآتية:

أ ١٢ ب ١٨ ج ٣٠ د ٨٠

٥) أوجد المُضاعَف المشترك الأصغر (م م ص) للعددَيْن ٢٤ و ٣٦

٦) اكتب جميع الأعداد الأوَّلية الواقعة بين ٠ و ٤٠

٧) أ استخدم شجرة العوامل لكتابة العدد ٤٠٠ في صورة ناتج ضرب عوامله الأوَّلية.

ب استخدم طريقة القسمة لكتابة العدد ١٠٨٠ في صورة ناتج ضرب عوامِله الأوَّلية.

ج استخدم التحليل للأعداد السابقة لإيجاد ما يلي:

(١) المُضاعَف المُشترَك الأصغر (م م ص) للعددَيْن ٤٠٠ و ١٠٨٠

(٢) العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) للعددَيْن ٤٠٠ و ١٠٨٠

(٣) $\sqrt{٤٠٠}$

(٤) هل العدد ١٠٨٠ عدد مُكعَّب ؟ فسر إجابتك.

٨) احسب:

أ $٢٦^{٢}$ ب $٣٤^{٤}$

٩) ما أصغر عدد أكبر من ١٠٠ ويقبل القسمة:

أ على ٢؟ ب على ١٠؟ ج على ٤؟

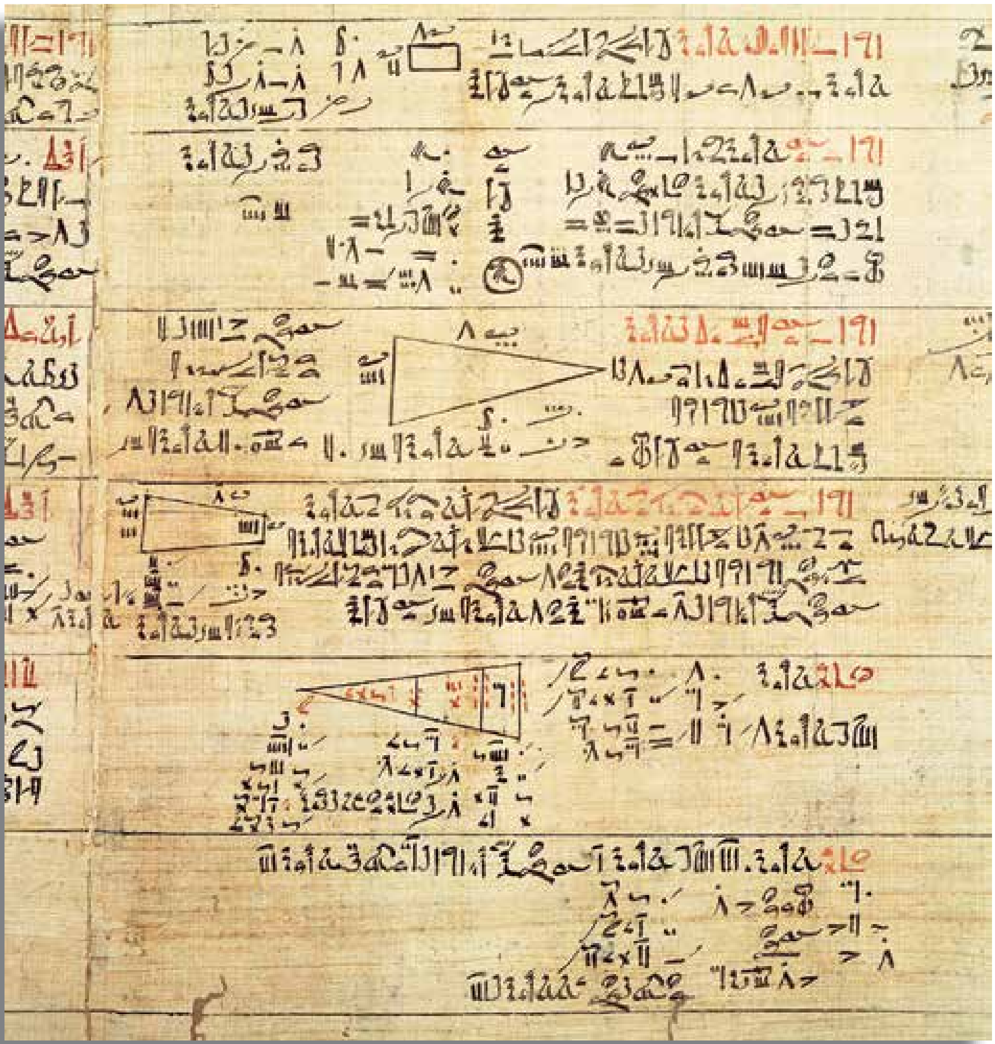
١٠) في صباح أحد الأيام، كانت درجة الحرارة ٤°س. وفي مُنتَصف الليل، انخفضت ٨°س عمّا كانت عليه في الصباح. كم أصبحت درجة الحرارة في مُنتَصف الليل؟

١١) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي:

أ ٦ × ٢ + ٤ × ٥ ب ٤ × (١٠٠ − ١٥) ج (٥ + ٦) × ٢ + (١٥ − ٣ × ٢) − ٦

١٢) ضعْ أقواسًا على الجملة الرياضيّة لتصبح صحيحة. ٧ + ١٤ ÷ ٤ − ١ × ٢ = ١٤

الوحدة الثانية: الكسور والنِّسب المِئويَّة



تعدّ الوثيقة أعلاه مثالاً من أقدم الأمثلة على الوثائق الرياضية التي كتبها المصريون القدماء على ورق البردى. ويُعتقد أن هذه الوثيقة كُتبت بين العامين ١٧٠٠ و١٦٠٠ قبل الميلاد زمن الفرعون أُحمس، رُغم أنها قد تكون نسخة عن وثيقة أقدم. يتحدَّث القسم الأول من الوثيقة عن الكسور.

لا تقتصر فائدة الكسور على تحسين مهاراتك الحسابيّة، بل غالبًا ما تستخدمها في الحياة اليوميّة من دون أن تدرك ذلك. مثلاً: كم كيلومترًا تقطع بسيارتك إذا كان خزّان الوقود يشير إلى النصف؟ إذا كانت حصّتك ثُلثي قرص بيتزا، فهل تبقى جائعًا؟ إذا قطعت ثلاثة أخماس المسافة في رحلتك، فكم تبلغ المسافة المتبقّية التي عليك أن تقطعها في الرحلة؟ تحتاج الأم إلى المقادير الصحيحة لتحضير وجبة الغداء للعائلة.

المُفردات

- الكسر Fraction
- الكسر الاعتيادي Vulgar fraction
- الكسر غير الاعتيادي Improper fraction
- البسط Numerator
- المقام Denominator
- الكسر المُكافئ Equivalent fraction
- أبسط صورة Simplest form
- العدد الكسريّ Mixed number
- المقام المُشترَك Common denominator
- المقلوب Reciprocal
- النسبة المئويّة Percentage
- الصيغة العلمية Scientific notation
- العدد النسبي Rational number
- العدد العشري المُنتهي Terminating decimal
- العدد العشري الدوري Recurring decimal

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تجد كسورًا مُتكافئة.
- تبسّط الكسور.
- تجمع وتطرح وتضرب وتقسم الكسور والأعداد الكسريّة.
- تجد كسور الأعداد.
- تجد عددًا في صورة نسبة مئوية من عدد آخر.
- تجد النسبة المئوية لعدد ما.
- تتعامل مع الصيغة العلمية.
- تكتب الأعداد العشرية الدورية في صورة كسور اعتيادية.

فائدة

يجب أن تكون مفاهيم الكسور الآتية مألوفة لديك:

الكسور المُتكافئة

لإيجاد كسور متكافئة نضرب أو نقسم كلاًّ من البسط والمقام على عدد لا يُساوي الصفر.

$\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٤} = \frac{٤}{٨}$ الكسران $\frac{١}{٢}$، $\frac{٤}{٨}$ متكافئان

$\frac{٤٠}{٥٠} \div \frac{١٠}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ الكسران $\frac{٤٠}{٥٠}$، $\frac{٤}{٥}$ متكافئان

لتبسّط كسرًا اقسم البسط والمقام على عدد لا يُساوي الصفر (هذا العدد يُمثِّل العامل المشترك الأكبر للبسط والمقام).

$\frac{١٨}{٤٠} = \frac{١٨ \div ٢}{٤٠ \div ٢} = \frac{٩}{٢٠}$

الأعداد الكسريّة

حوّل بين الأعداد الكسريّة والكسور غير الاعتياديّة.

$٣\frac{٤}{٧} = \frac{(٣ \times ٧) + ٤}{٧} = \frac{٢٥}{٧}$

العمليات على الكسور

عند جمع الكسور أو طرحها، تأكّد من أن لها المقام نفسه.

$\frac{٧}{٨} + \frac{١}{٣} = \frac{٢١ + ٨}{٢٤} = \frac{٢٩}{٢٤} = ١\frac{٥}{٢٤}$

عند ضرب كسرَين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام. ثم اكتب الناتج في أبسط صورة.

$\frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{٣٢}$

$\frac{٣}{٨}$ من $١٢ = \frac{٣}{٨} \times \frac{١٢}{١}$

$= \frac{٣٦}{٨}$

$= ٤\frac{١}{٢}$

لتقسم على كسر، اضرب في مقلوبه.

$١٢ \div \frac{١}{٣} = ١٢ \times \frac{٣}{١} = ٣٦$ ، $\frac{٢}{٥} \div \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٥} \times \frac{٢}{١} = \frac{٤}{٥}$

النسبة المئوية

الرمز ٪ يعني 'بالمئة'.

يمكن أن تكتب النسبة المئوية في صورة كسر أو كسر عشري.

$٤٥٪ = \frac{٤٥}{١٠٠} = \frac{٩}{٢٠}$

$٤٥٪ = ٤٥ \div ١٠٠ = ٠,٤٥$

العمليات على النسب المئويّة

لإيجاد نسبة مئويّة من مقدار:

استخدم الكسور واختصر ، استخدم الأعداد العشريّة ، استخدم الآلة الحاسبة

٢٥٪ من ٦٠ =

$\frac{\cancel{٢٥}^{١}}{\cancel{١٠٠}_{\cancel{٤}_{١}}} \times \frac{\cancel{٦٠}^{١٥}}{١} = ١٥$ ، $٠,٢٥ \times ٦٠ = ١٥$ ، [2] [5] [%] [×] [6] [0] [=] [15]

٢-١ الكسور المُتكافِئة

سابقًا

قبل البدء بقراءة القسم الآتي من الوحدة، راجع العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) من الوحدة ١

الكسر هو جُزء من الكل.

تُكتَب الكُسور في صورة $\frac{ب}{ج}$. العدد العلوي ب؛ حيث يمكن أن يكون أيّ عدد ويُسمّى **البسط**. أما العدد السفلي جـ فيُمكن أن يكون أيّ عدد عدا الصفر، ويُسمّى **المقام**. يفصل بين البسط والمقام خط أفقيّ.

إذا ضربتَ أو قسمتَ البسطَ والمقام على العدد نفسه، يبقى الكسر الجديد مُمثّلاً للمقدار نفسه من الكلّ كما هو الكسر الأصلي. يُعرّف الكسر الجديد على أنّه **الكسر المُكافئ**.

مثال، $\frac{٢}{٣} = \frac{٢ \times ٤}{٣ \times ٤} = \frac{٨}{١٢}$ ، $\frac{٢٥}{٣٥} = \frac{٢٥ \div ٥}{٣٥ \div ٥} = \frac{٥}{٧}$

لاحظ أن الكسر الأصلي $\left(\frac{٢٥}{٣٥}\right)$ قد أصبح بعد القسمة على ٥ يساوي $\left(\frac{٥}{٧}\right)$ ولا يوجد بين البسط والمقام عامل مُشترَك غير العدد ١، ولاحظ أنه من غير الممكن تقسيم الكسر أكثر من ذلك. ويُعتَبر الكسر الآن في **أبسط صورة**.

يكون **الكسر اعتياديًّا** إذا كان البسط أصغر من المقام.
يكون **الكسر غير اعتيادي** إذا كان البسط أكبر من المقام أو يساويه.

لاحظ أنك تقسم، في كلّ حالة، كلاً من البسط والمقام على العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) لهما.

مثـال ١

اكتب كلاً من الكسور الآتية في أبسط صورة مُمكنة:

أ $\frac{٣}{١٥}$ ب $\frac{١٦}{٢٤}$ ج $\frac{٢١}{٢٨}$ د $\frac{٥}{٨}$

الحـلّ:

أ $\frac{٣}{١٥} = \frac{٣ \div ٣}{١٥ \div ٣} = \frac{١}{٥}$

ب $\frac{١٦}{٢٤} = \frac{١٦ \div ٨}{٢٤ \div ٨} = \frac{٢}{٣}$

ج $\frac{٢١}{٢٨} = \frac{٢١ \div ٧}{٢٨ \div ٧} = \frac{٣}{٤}$

د $\frac{٥}{٨}$ في أبسط صورة (العامل المُشترَك الأكبر للعددَين ٥، ٨ هو ١).

مثـال ٢

أيُّ كسرَين من الكسور الآتية $\frac{٥}{٦}$، $\frac{٢٠}{٢٥}$، $\frac{١٥}{١٨}$ مُتكافئان؟

الحـلّ:

$\frac{٥}{٦}$ في أبسط صورة.

$\frac{٢٠}{٢٥} = \frac{٢٠ \div ٥}{٢٥ \div ٥} = \frac{٤}{٥}$

$\frac{١٥}{١٨} = \frac{١٥ \div ٣}{١٨ \div ٣} = \frac{٥}{٦}$

∴ الكسران $\frac{٥}{٦}$، $\frac{١٥}{١٨}$ متكافئان.

كان بإمكانك أن تكتب:

$\frac{\cancel{١٥}^{٥}}{\cancel{١٨}_{٦}} = \frac{٥}{٦}$

تُسمّى هذه العملية اختصار الكسور وهي طريقة مُختصَرة لتوضيح ما قمت به.

تمارين ٢-١

١) أوجد ثلاثة كسور مُكافئة لكلّ كسر من الكسور الآتية، وذلك بضرب أو قسمة كل من البسط والمقام على العدد نفسه:

أ $\frac{٥}{٩}$ ب $\frac{٣}{٧}$ ج $\frac{١٢}{١٨}$ د $\frac{١٨}{٣٦}$ هـ $\frac{١١٠}{١٢٨}$

٢) اكتب كلّ كسر من الكسور الآتية في أبسط صورة:

أ $\frac{٧}{٢١}$ ب $\frac{٣}{٩}$ ج $\frac{٩}{١٢}$ د $\frac{١٥}{٢٥}$ هـ $\frac{٥٠٠}{٢٥٠٠}$ و $\frac{٢٤}{٣٦}$ ز $\frac{١٠٨}{٣٦٠}$

٢-٢ العمليات على الكسور

جمع الكسور وطرحها

يمكنك جمع الكسور وطرحها عندما يكون لها المقام نفسه.

يُسمّى هذا **بالمقام المُشتَرك**. يجب أن تستخدم ما تعرفه عن الكسور المتكافئة ليساعدك على أن يكون للكسور المقام المُشتَرك نفسه.

يُبيِّن المثال الآتي كيف تستخدم المُضاعَف المُشتَرك الأصغر (م م ص) لكلا المقامَين في صورة مقام مُشترَك.

سابقًا

ستحتاج في هذا الدرس من الوحدة إلى استخدام المُضاعَف المُشترَك الأصغر (م م ص). لقد تعاملت مع (م م ص) في الوحدة ١

مثــال ٣

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي:

أ $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤}$ ب $\frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٦}$ ج $٢\frac{٣}{٤} - ١\frac{٥}{٧}$

الحــلّ:

أ	$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤}$	أوجد المقام المُشترَك.
	$= \frac{٢}{٤} + \frac{١}{٤}$	م م ص للعددين ٢، ٤ هو ٤؛ استخدمه مقامًا مشتركًا وأوجد الكسرَين المكافئَين.
	$= \frac{٣}{٤}$	اجمع البسطَين.
ب	$\frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٦}$	أوجد المقام المُشترَك.
	$= \frac{٩}{١٢} + \frac{١٠}{١٢}$	م م ص للعددين ٤، ٦ هو ١٢؛ استخدمه مقامًا مُشتركًا وأوجد الكسرَين المكافئَين.
	$= \frac{١٩}{١٢}$	اجمع البسطَين.
	$= ١\frac{٧}{١٢}$	حوّل الكسر غير الاعتياديّ إلى عدد كسريّ.

لاحظ أنك عند إيجاد المقام المُشترَك، تجمع البسطَين فقط ولا تجمع المقامَين!

قد تجد أحيانًا أن مجموع كسرَين اعتياديَّين هو كسر غير اعتياديّ (بسطه أكبر من مقامه). وأنت في العادة تُعيد كتابة هذا الكسر في صورة عدد كسري.

تطبق خطوات جمع الكسور نفسها على طرحها.

ج $٢\frac{٣}{٤} - ١\frac{٥}{٧}$	
$= \frac{١١}{٤} - \frac{١٢}{٧}$	حوّل العددَيْن الكسريّين إلى كسرَين غير اعتياديَّيْن لسهولة التعامُل معهما.
$= \frac{٧٧}{٢٨} - \frac{٤٨}{٢٨}$	(م م ص) للعددَين ٤، ٧ هو ٢٨؛ وهو المقام المُشترَك. أوجد الكسرَين المكافئَين.
$= \frac{٧٧ - ٤٨}{٢٨}$	اطرح أحد البسطَين من الآخر.
$= \frac{٢٩}{٢٨}$	
$= ١\frac{١}{٢٨}$	حوّل الكسر غير الاعتياديّ إلى عدد كسريّ.

ضرب الكسور

عند ضرب كسرَين أو أكثر، يمكنك ببساطة ضرب قيَم البسط، ثم ضرب قيَم المقام. قد تحتاج أحيانًا إلى تبسيط الناتج. يمكن أن تكون العملية أسرع إذا قمت بالاختصار أوّلاً قبل إجراء عملية الضرب.

مثـــال ٤

أوجد ناتج كلّ ممّا يلي:

أ $\frac{٣}{٤} \times \frac{٢}{٧}$ ب $\frac{٥}{٧} \times ٣$ ج $\frac{٣}{٨}$ من $٤\frac{١}{٢}$

الحـــلّ:

أ $\frac{٣}{٤} \times \frac{٢}{٧} = \frac{٣ \times ٢}{٤ \times ٧} = \frac{٦}{٢٨} = \frac{٣}{١٤}$	اضرب البسطَين لتحصل على قيمة البسط الجديد. كرر الشيء نفسه مع المقامَين. ثمّ اكتب الكسر في أبسط صورة.
لاحظ أنك تستطيع أيضًا أن تختصر قبل إجراء عملية الضرب: $\frac{٣}{\cancel{٤}_{٢}} \times \frac{\cancel{٢}^{١}}{٧} = \frac{٣ \times ١}{٢ \times ٧} = \frac{٣}{١٤}$	اقسم مقام الكسر الأول وبسط الكسر الثاني على العدد ٢
ب $\frac{٥}{٧} \times ٣ = \frac{٥ \times ٣}{٧ \times ١} = \frac{١٥}{٧}$	لا يوجد عامل مُشترَك بين العددَين ١٥، ٧ غير العدد ١؛ لذا فإن الكسر في أبسط صورة.
ج $\frac{٣}{٨}$ من $٤\frac{١}{٢}$ $\frac{٣}{٨} \times ٤\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨} \times \frac{٩}{٢} = \frac{٢٧}{١٦}$	

لتضرب كسراً في عدد صحيح، اضرب البسط فقط في العدد الصحيح. مثلاً $\frac{٥}{٧} \times ٣ = \frac{٥ \times ٣}{٧} = \frac{١٥}{٧}$

هنا لديك **عدد كسريّ** $(٤\frac{١}{٢})$ تحتاج إلى تحويله إلى كسر غير اعتيادي، وهو كسر بسطه أكبر من مقامه. يُساعدك ذلك على إتمام عملية الضرب.

لاحظ أن الحرف 'من' تم استبداله بإشارة الضرب ×

لاحقًا

لاحقًا ستتعامل مع ضرب وقسمة وجمع وطرح الكسور مرّة ثانية عند التعامُل مع المقادير الجبريّة.

قسمة الكسور

قبل وصف كيفية إجراء عملية قسمة كسرَين، ينبغي التعرف إلى **المقلوب**، حيث يمكن الحصول على مقلوب أي كسر بتبديل البسط والمقام.

مقلوب $\frac{٣}{٤}$ هو $\frac{٤}{٣}$ ومقلوب $\frac{٧}{٢}$ هو $\frac{٢}{٧}$

وأيضًا مقلوب $\frac{١}{٢}$ هو $\frac{٢}{١}$ أو ٢ فقط ومقلوب ٥ هو $\frac{١}{٥}$

ناتج ضرب أيّ كسر في مقلوبه هو العدد ١. مثلاً:

$\frac{١}{٣} \times \frac{٣}{١} = ١$، $\frac{٣}{٨} \times \frac{٨}{٣} = ١$، $\frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{أ} = ١$

لتقسم كسرًا على كسرٍ آخر، اضرب الكسر الأوَّل في مقلوب الكسر الثاني.

انظر إلى القاعدة التاليةً:

$$\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ} = \frac{أ \times د}{ب \times جـ}$$

مثـــال ٥

أوجد ناتج كل ممّا يأتي:

أ $\frac{٣}{٤} \div \frac{١}{٢}$ ب $١\frac{٣}{٤} \div ٢\frac{١}{٣}$ ج $\frac{٥}{٨} \div ٢$ د $\frac{٦}{٧} \div ٣$

الحـــلّ:

أ $\frac{٣}{٤} \div \frac{١}{٢} = \frac{٣}{\cancel{٤}_{٢}} \times \frac{\cancel{٢}^{١}}{١} = \frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢}$

اضرب في مقلوب الكسر $\frac{١}{٢}$؛ استخدم قوانين ضرب الكسور التي تعلَّمتها.

ب $١\frac{٣}{٤} \div ٢\frac{١}{٣} = \frac{٧}{٤} \div \frac{٧}{٣}$

$= \frac{\cancel{٧}^{١}}{٤} \times \frac{٣}{\cancel{٧}_{١}}$

$= \frac{٣}{٤}$

حوّل العدد الكسريّ إلى كسر غير اعتياديّ.
اضرب في مقلوب $\frac{٧}{٣}$

ج $\frac{٥}{٨} \div ٢ = \frac{٥}{٨} \div \frac{٢}{١}$

$= \frac{٥}{٨} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{٥}{١٦}$

اكتب ٢ في صورة كسر غير اعتياديّ.
اضرب في مقلوب $\frac{٢}{١}$

د $\frac{٦}{٧} \div ٣ = \frac{\cancel{٦}^{٢}}{٧} \times \frac{١}{\cancel{٣}_{١}}$

$= \frac{٢}{٧}$

اضرب في مقلوب $\frac{٣}{١}$

لتقسم كسراً على عدد صحيح غير الصفر، تستطيع إمّا أن تضرب المقام في العدد الصحيح، أو أن تقسم البسط على العدد الصحيح نفسه.

الكسور التي تتضمّن أعدادًا عشريّة

ستجد أحيانًا أن البسط أو المقام أو كليهما عددًا عشريًّا؛ لتعبّر عن تلك الكسور في أبسط صورة، تحتاج إلى:

- التأكد من أن كلاًّ من البسط والمقام قد أصبح عددًا صحيحًا، وذلك بإيجاد كسر مُكافئ للكسر المُعطى.
- التحقُّق من أن الكسر المُكافئ في أبسط صورة.

مثــال ٦

بسّط كلاً من الكسور الآتية:

أ $\frac{٠,١}{٣}$ ب $\frac{١,٣}{٢,٤}$ ج $\frac{٣٦}{٠,١٢}$

الحــلّ:

أ	$\frac{٠,١}{٣} = \frac{٠,١ \times ١٠}{٣ \times ١٠} = \frac{١}{٣٠}$	اضرب ٠,١ في ١٠ لتحوّل ٠,١ إلى عدد صحيح. للتأكد من أن الكسر الناتج مكافئ للكسر الأصليّ، تحتاج إلى ضرب كل من البسط والمقام في العدد نفسه، لذا اضرب كذلك المقام ٣ في ١٠
ب	$\frac{١,٣}{٢,٤} = \frac{١,٣ \times ١٠}{٢,٤ \times ١٠} = \frac{١٣}{٢٤}$	اضرب كلاً من البسط والمقام في ١٠ لتحصل على عددَين صحيحَين. لا يوجد (ع م ك) بين العددَين ١٣، ٢٤ غير العدد ١؛ لذا لا يمكن تبسيطهما.
ج	$\frac{٣٦}{٠,١٢} = \frac{٣٦ \times ١٠٠}{٠,١٢ \times ١٠٠} = \frac{٣٦٠٠}{١٢} = ٣٠٠$	اضرب ٠,١٢ في ١٠٠ لتحصل على عدد صحيح. تذكّر أن تضرب البسط أيضًا في ١٠٠، فيكون الكسر الناتج مكافئًا للكسر الأصلي. يمكن تبسيط الكسر النهائي بالاختصار.

المزيد من العمليّات على الكسور

يمكنك استخدام الكسور لتساعدك في حلّ المسائل.

تذكَّر مثلاً أن $\frac{٢}{٣} = ٢ \times \frac{١}{٣}$؛ ورغم أنها تبدو بديهية، فهي تساعدك في حلّ المسائل بسهولة.

مثــال ٧

مدرسة بها ٦٠٠ طالب، إذا كان $\frac{٢}{٥}$ من طلاب المدرسة هم في الصفّين ٩، ١٠، فكم طالبًا في الصفَّين التاسع والعاشر؟

الحــلّ:

$\frac{٢}{٥}$ من ٦٠٠ = $\frac{٢}{٥} \times ٦٠٠ = \frac{٢}{\cancel{٥}_{١}} \times \frac{\cancel{٦٠٠}^{١٢٠}}{١} = ٢ \times ١٢٠ = ٢٤٠$ طالبًا في الصفّين ٩، ١٠.

تذكّر في مثال ٤ الجزئية **ج**، أنك استبدلت 'من' بالإشارة ×.

مثــال ٨

افترضِ الآن أن $\frac{٢}{٥}$ من طلاّب مدرسة أخرى في الحلقة الأولى. وأن عددهم ٣٦٠ طالبًا. ما إجمالي عدد الطلاب في المدرسة؟

الحــلّ:

$\frac{٢}{٥}$ من العدد الكلّي هو ٣٦٠، أي إن $\frac{١}{٥}$ العدد الكلّي هو ١٨٠؛ هذا يعني أن $\frac{٥}{٥}$ من العدد الكلّي لطلاب المدرسة هو $٥ \times ١٨٠ = ٩٠٠$ طالب.

تمارين ٢-٢

١) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة:

أ $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}$ ب $\frac{٥}{٨} - \frac{٣}{٨}$ ج $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٥}$

د $\frac{٢}{٣} - \frac{٥}{٨}$ هـ $٢\frac{٥}{٨} - ١\frac{٣}{٤}$ و $٥\frac{١}{٨} - ٣\frac{١}{١٦}$

ز $٤ - \frac{٢}{٣}$ ح $١١ - ٧\frac{١}{٤}$ ط $٣\frac{١}{٢} - ٤\frac{١}{٣}$

ي $٥\frac{١}{٤} + ٣\frac{١}{١٦} + ٤\frac{٣}{٨}$ ك $٥\frac{١}{٨} - ٣\frac{١}{١٦} + ٤\frac{٣}{٤}$ ل $٢\frac{١}{٤} - ٣\frac{١}{٣} + ٤\frac{١}{٥}$

٢) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة:

أ $\frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٩}$ ب $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٧}$ ج $\frac{١}{٤} \times \frac{٨}{٩}$

د $\frac{٥٠}{١٢٨} \times \frac{٢٥٦}{٥٠٠}$ هـ $١\frac{١}{٢} \times ٢٤$ و $٥\frac{١}{٢} \times ٧\frac{١}{٤}$

ز $\frac{١}{٧} \div \frac{١}{٣}$ ح $\frac{٢}{٥} \div \frac{٣}{٧}$ ط $\frac{٤}{٩} \div ٧$

ي $٤\frac{١}{٥} \div \frac{١}{٧}$ ك $٧\frac{٧}{٨} \div ٥\frac{١}{١٢}$ ل $٣\frac{١}{٤} \div ٣\frac{١}{٢}$

م $\left(٢\frac{١}{٣} - ١\frac{٢}{٥}\right) \div ١\frac{١}{٣}$ ن $٢\frac{١}{٣} - ١\frac{٢}{٥} \div ١\frac{١}{٣}$

تذكَّر أن أيّ كسر يحتوي على عدد عشري في بسطه أو مقامه لا يعتبر في أبسط صورة.

ما الكسر المُستخدَم لتمثّيل ٠,٣؟

٣) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة:

أ $\frac{٠,٣}{١٢}$ ب $\frac{٠,٤}{٠,٥}$ ج $\frac{٠,٧}{٠,١٤}$

د $٠,٣ \times \frac{٥}{١٢}$ هـ $٠,٤ \times \frac{١,٥}{١,٦}$ و $\frac{٢,٨}{٠,٧} \times \frac{١,٤٤}{٠,٦}$

٤) يحتوي صندوق على أشكال هندسية بلاستيكية. $\frac{٣}{٨}$ من الأشكال زرقاء، $\frac{٢}{٧}$ من الأشكال مُثلَّثة.

أ إذا كان $\frac{٤}{٩}$ من الأشكال الزرقاء مُربَّعة، فما الكسر الذي يُمثّل المُربَّعات الزرقاء بالنسبة إلى جميع الأشكال؟

ب إذا كان $\frac{١}{٢}$ من المُثلّثات خضراء، فما الكسر الذي يُمثّل المُثلّثات الخضراء بالنسبة إلى جميع الأشكال؟

ج أيُّهما أكثر في الصندوق: المُربَّعات الزرقاء أم المُثلّثات الخضراء؟

٥) اشترى $\frac{٣}{٤}$ من الأشخاص الحاضرين في المزاد العلني سلعًا. إذا كان عدد الأشخاص في المزاد ١٢٠، فكم عدد الأشخاص الذي اشتروا سلعًا؟

٦) يتضمّن مقال ٤٢٠ جملة، ٨٠ جملة منها تتضمَّن أخطاءً مطبعية. ما الكسر (في أبسط صورة) الذي يدلّ على الجُمَل التي تتضمن أخطاءً مطبعية؟

٧) ما العدد الذي يكون $\frac{٢}{٧}$ منه يساوي ٢٨؟

٨) اشترى $\frac{٣}{٥}$ من الأشخاص الحاضرين في المسرح وجبات سريعة خلال فترة الاستراحة، واشترى $\frac{٥}{٧}$ من أولئك المشترين المُثلَّجات. ما الكسر الذي يدلّ على الأشخاص الحاضرين في المسرح الذين اشتروا المُثلَّجات؟

٩) يُحاول كلّ من أحمد وسعيد وسليم توفير مبلغ من المال لتوزيعه في حفل خيري. إذا وفّر أحمد $\frac{١}{٤}$ المبلغ المطلوب، ووفَّر سعيد $\frac{٢}{٥}$ من المبلغ المطلوب ووفَّر سليم $\frac{١}{١٠}$ من المبلغ المطلوب، فما الكسر المتبقّي عليهم توفيره للوصول إلى المبلغ المطلوب؟

١٠) تحتاج سلمى إلى $٦\frac{١}{٢}$ أكواب من الأرز المطبوخ في وصفة المكبوس. إذا كان كوبان من الأرز غير المطبوخ مع $٢\frac{١}{٢}$ كوب من الماء يُعطي $٤\frac{١}{٣}$ أكواب من الأرز المطبوخ، فكم كوبًا من الأرز غير المطبوخ تحتاج سلمى لوصفتها؟ وكم كوبًا من الماء يجب أن تضيف؟

٢-٣ النِّسب المئوية

رابط

ترتبط النسب المئوية عادة بالخصومات على السلع في الأسواق، حيث يُعبَّر عن نسبة الخصم أو التنزيلات على شكل نسبة مئوية. كما تعتمد بعض الحسابات المصرفية على عمليات، يُعبَّر عنها بنسب مئوية يتم على أساسها احتساب الفوائد المُترتِّبة عليها. وتُعتبر هذه التطبيقات المالية جُزءًا مُهمًّا من الاقتصاد.

النسبة المئويّة هي كسر مقامه العدد ١٠٠؛ والرمز المُستخدَم للدلالة على النسبة المئويّة هو ٪

لتجد ٤٠٪ من ٢٥، تحتاج إلى إيجاد $\frac{٤٠}{١٠٠}$ من ٢٥؛ باستخدام ما تعرفه عن ضرب الكسور:

$$\frac{٤٠}{١٠٠} \times ٢٥ = \frac{\cancel{٤٠}^{٢}}{\cancel{١٠٠}_{٥}} \times \frac{٢٥}{١}$$

$$= \frac{٢}{\cancel{٥}_{١}} \times \frac{\cancel{٢٥}^{٥}}{١}$$

$$= \frac{٢}{١} \times \frac{٥}{١} = ١٠$$

إذن ٤٠٪ من ٢٥ = ١٠

٢-٣-أ الصيَغ المُتكافئة

يمكن تحويل النسبة المئويّة إلى عدد عشريّ بالقسمة على العدد ١٠٠ (لاحظ أن الأرقام تتحرَّك منزلَتين إلى اليمين). إذن، ٤٥٪ = $\frac{٤٥}{١٠٠}$ = ٠,٤٥ و٣,١٪ = $\frac{٣,١}{١٠٠}$ = ٠,٠٣١

يمكن تحويل العدد العشريّ إلى نسبة مئويّة بالضرب في ١٠٠٪ (لاحظ أن الأرقام تتحرَّك منزلَتين اليسار). إذن، ٠,٦٥ = $\frac{٦٥}{١٠٠}$ = ٦٥٪ و٠,٧ × ١٠٠٪ = ٧٠٪

يتطلَّب التحويل من نسبة مئويّة إلى كسر (وبالعكس) إلى خطوات إضافية.

مثـــال ٩

حوّل كلاً من النسب المئويّة الآتية إلى كسر في أبسط صورة:

أ ٢٥٪ ب ٣٠٪ ج ٣,٥٪

الحـــلّ:

أ	٢٥٪ = $\frac{٢٥}{١٠٠}$ = $\frac{١}{٤}$	اكتب النسبة المئوية في صورة كسر مقامه العدد ١٠٠، ثمّ بسّط.
ب	٣٠٪ = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$	
ج	٣,٥٪ = $\frac{٣,٥}{١٠٠}$ = $\frac{٣٥}{١٠٠٠}$ = $\frac{٧}{٢٠٠}$	

تذكَّر أن الكسر الذي يتضمَّن عددًا عشريًّا لا يكون في أبسط صورة.

مثــال ١٠

اكتب كلاًّ من الكسور الآتية في صورة نسبة مئوية:

أ $\frac{١}{٢٠}$ ب $\frac{١}{٨}$

الحــلّ:

أ $\frac{١}{٢٠} = \frac{١ \times ٥}{٢٠ \times ٥} = \frac{٥}{١٠٠} = ٥٪$	أوجد الكسر المُكافئ ذا المقام ١٠٠ (تذكَّر القيام بالإجراءات نفسها على كلّ من البسط والمقام). ($\frac{٥}{١٠٠} = ٠{,}٠٥$؛ $٠{,}٠٥ \times ١٠٠٪ = ٥٪$)
ب $\frac{١}{٨} = \frac{١ \times ١٢{,}٥}{٨ \times ١٢{,}٥}$ $= \frac{١٢{,}٥}{١٠٠} = ١٢{,}٥٪$	أوجد الكسر المُكافئ ذا المقام ١٠٠ (تذكَّر القيام بالإجراءات نفسها على كلّ من البسط والمقام). ($\frac{١٢{,}٥}{١٠٠} = ٠{,}١٢٥$؛ $٠{,}١٢٥ \times ١٠٠٪ = ١٢{,}٥٪$)

ليس من السهل دائمًا إيجاد كسر مُكافئ مقامه العدد ١٠٠ ومع ذلك يمكن تحويل أيّ كسر إلى نسبة مئويّة بالضرب في العدد ١٠٠، ثمّ الاختصار.

مثــال ١١

حوّل كلاًّ من الكسرَين الآتيَين إلى نسبة مئويّة:

أ $\frac{٣}{٤٠}$ ب $\frac{٨}{١٥}$

الحــلّ:

أ $\frac{٣}{٤٠} \times \frac{١٠٠}{١} = \frac{٣٠}{٤} = \frac{١٥}{٢} = ٧{,}٥٪$

أي $\frac{٣}{٤٠} = ٧{,}٥٪$

ب $\frac{٨}{١٥} \times \frac{١٠٠}{١} = \frac{١٦٠}{٣} = ٥٣{,}٣٪$ (مُقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)

أي $\frac{٨}{١٥} = ٥٣{,}٣٪$

تمارين ٢-٣-أ

١) حوّل كلاًّ من النسب المئويّة الآتية إلى كسور في أبسط صورة:

أ ٧٠٪ ب ٧٥٪ ج ٢٠٪ د ٣٦٪ هـ ١٥٪ و ٢,٥٪

ز ٢١٥٪ ح ١٣٢٪ ط ١١٧,٥٪ ي ١٠٨,٤٪ ك ٠,٢٥٪ ل ٠,٠٠٢٪

لاحقًا في هذه الوحدة، سترى أن النسب المئويّة يمكن أن تكون أكبر من ١٠٠

٢) اكتب كلاًّ من الكسور الآتية في صورة نسبة مئويّة:

أ $\frac{٣}{٥}$ ب $\frac{٧}{٢٥}$ ج $\frac{١٧}{٢٠}$ د $\frac{٣}{١٠}$ هـ $\frac{٨}{٢٠٠}$

٢-٣-ب كتابة عدد في صورة نسبة مئويّة من عدد آخر

لكتابة عدد في صورة نسبة مئوية من عدد آخر، ابدأ بكتابة العدد الأول في صورة كسر من العدد الثاني، ثمّ اضرب في ١٠٠

مثــال ١٢

أ اكتب العدد ١٦ في صورة نسبة مئويّة من العدد ٤٨

الحــلّ:

$\frac{١٦}{٤٨} = \frac{١٦}{٤٨} \times ١٠٠\% = ٣٣{,}٣\%$ (مُقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة واحدة)	اكتب أوّلاً العدد ١٦ في صورة كسر من العدد ٤٨، ثمّ اضرب في ١٠٠٪
$\frac{١٦}{٤٨} = \frac{١}{٣} \times ١٠٠\% = ٣٣{,}٣\%$ (مُقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة واحدة)	قد يكون من الأسهل كتابة الكسر في أبسط صورة أولاً.

ب اكتب العدد ١٥ في صورة نسبة مئويّة من العدد ٧٥

الحــلّ:

$\frac{١٥}{٧٥} \times ١٠٠\%$ $= \frac{١}{٥} \times ١٠٠\% = ٢٠\%$	اكتب العدد ١٥ في صورة كسر من العدد ٧٥، ثمّ بسّط واضرب في ١٠٠٪؛ بما أنك تعرف أن ناتج قسمة ١٠٠على ٥ هو ٢٠، فلن تحتاج إلى آلة حاسبة.

ج اكتب العدد ١٨ في صورة نسبة مئويّة من العدد ٢٣

الحــلّ:

تحتاج إلى احتساب $\frac{١٨}{٢٣} \times ١٠٠\%$، ولكن هذه ليست بالمهمة السهلة باستخدام الكسور لأنك لا تستطيع تبسيط الكسر أكثر ولأن العدد ٢٣ لا يقبل القسمة على ١٠٠ لذا يمكنك استخدام الآلة الحاسبة، مُتَّبعًا الخطوات التالية:

1 8 ÷ 2 3 × 1 0 0 = ٧٨,٢٦٪ (مُقرَّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين).

تمارين ٢-٣-ب

اكتب الناتج، في كلّ ممّا يلي، في صورة عدد مكوَّن من ثلاثة أرقام معنويّة:

١) اكتب العدد ١٤ في صورة نسبة مئويّة من العدد ٣٥

٢) اكتب العدد ٣,٥ في صورة نسبة مئويّة من العدد ١٤

٣) اكتب العدد ١٧ في صورة نسبة مئويّة من العدد ٦٣

٤) يعيش ٣٦ شخصًا في مجمّع سكنيّ. إذا كان ٢٨ شخصًا منهم يمشون حول الحديقة كلّ صباح، فما النسبة المئويّة للأشخاص الذين يعيشون في المجمّع ويمشون حول الحديقة كلّ صباح؟

٥) حصل سعيد على درجة $\frac{١٩}{٢٤}$ في اختبار ما. ما النسبة المئويّة لدرجة سعيد؟

٦) اكتب العدد ١,٣ في صورة نسبة مئويّة من العدد ٥,٢

٧) اكتب العدد ٠,١٣ في صورة نسبة مئويّة من العدد ٥٢٠

٤-٢ الصيغة العلمية

عندما يكون العدد صغيرًا جدًا مثل ٠,٠٠٠٠٣٦٢، أو كبيرًا جدًا، مثل ٣٥٨٠٠٠٠٠٠، فقد تكون العمليات الحسابيّة صعبة ويكون سهلاً نسيان بعض الأصفار. تُستخدَم **الصيغة العلمية** للتعبير عن الأعداد الصغيرة جدًّا والكبيرة جدًّا بطريقة فعّالة. تُكتب الأعداد في الصيغة العلمية في صورة عدد أكبر من أو يساوي ١ وأصغر من ١٠ مضروبًا في قوى العدد ١٠

٤-٢أ الصيغة العلمية للأعداد الكبيرة

تذكّر أن الأرقام مُرتَّبة بحسب القيمة المكانية:

أجزاء من ١٠٠٠	أجزاء من ١٠٠	أجزاء من ١٠		آحاد	عشرات ١٠	مئات ١٠٠	آلاف ١٠٠٠
٠	٠	٠	،	٠	٠	٠	٣

يتمثَّل فهم الصيغة العلمية للأعداد الكبيرة من خلال ما يحدث عندما تضرب في قوى موجبة للعدد ١٠؛ وكلّ مرة تضرب فيها عددًا في ١٠ تتحرَّك الفاصلة العشرية منزلة واحدة إلى اليمين.

٣,٢

$٣,٢ \times ١٠ = ٣٢,٠$ تحرَّكت الفاصلة العشرية منزلة واحدة إلى اليمين

$٣,٢ \times ١٠^{٢} = ٣,٢ \times ١٠٠ = ٣٢٠,٠$ تحرَّكت الفاصلة العشرية منزلتَين إلى اليمين

$٣,٢ \times ١٠^{٣} = ٣,٢ \times ١٠٠٠ = ٣٢٠٠,٠$ تحرَّكت الفاصلة العشرية ثلاث منازل إلى اليمين

... وهكذا. لابد من أنك لاحظت أن نمطًا ما قد تشكَّل.

يمكن التعبير عن أيّ عدد كبير في الصيغة العلمية، وذلك بكتابته في صورة عدد أكبر من أو يساوي ١ وأصغر من ١٠ مضروبًا في قوى مناسبة للعدد ١٠

لكتابة الأعداد الكبيرة في الصيغة العلمية نتَّبع الخطوات التالية:

- نضع فاصلة بحيث تكون على يمين أوَّل رقم معنوي (غير الصفر) من جهة اليسار.
- نحسب عدد الأرقام إلى يمين الفاصلة (قوى العدد عشرة).
- اكتب العدد مضروبًا في قوى العدد ١٠، بناءً على عدد المنازل التي تحرَّكتها الفاصلة العشرية.

مثـــال ١٣

اكتب العدد ٣٢٠٠٠٠ بالصيغة العلمية:

الحـــلّ:

ضع فاصلة عشرية على يمين أول رقم معنوي من جهة اليسار (٣)	٣٢٠٠٠٠ = ٣،٢٠٠٠٠
احسب عدد الأرقام على يمين الفاصلة العشرية (٥ أرقام)	$= ٣,٢ \times ١٠^{٥}$ (١ ٢ ٣ ٤ ٥)
الصيغة العلمية للعدد ٣٢٠٠٠٠	$\therefore ٣٢٠٠٠٠ = ٣,٢ \times ١٠^{٥}$

إجراء عمليّات حسابية باستخدام الصيغة العلمية

عندما تُحوِّل الأعداد الكبيرة إلى الصيغة العلمية، يمكنك استخدام قوانين الأسس لتُجري حسابات تتضمَّن الضرب والقسمة.

مثـــال ١٤

أوجد الناتج ثم اكتبه في الصيغة العلمية:

أ $(٣ \times ١٠^{٥}) \times (٢ \times ١٠^{٦})$ ب $(٢ \times ١٠^{٣}) \times (٨ \times ١٠^{٧})$

ج $(٢,٨ \times ١٠^{٦}) \div (١,٤ \times ١٠^{٤})$ د $(٩ \times ١٠^{٦}) + (٣ \times ١٠^{٨})$

الحـــلّ:

أ	$(٣ \times ١٠^{٥}) \times (٢ \times ١٠^{٦}) = (٣ \times ٢) \times (١٠^{٥} \times ١٠^{٦})$ $= ٦ \times ١٠^{٥+٦}$ $= ٦ \times ١٠^{١١}$	بسِّط بوضع الحدود المُتشابهة معًا. استخدم قوانين الأسس حيث يلزم. اكتب العدد في الصيغة العلمية.
ب	$(٢ \times ١٠^{٣}) \times (٨ \times ١٠^{٧}) = (٢ \times ٨) \times (١٠^{٣} \times ١٠^{٧})$ $= ١٦ \times ١٠^{١٠}$ $١٦ \times ١٠^{١٠} = ١,٦ \times ١٠ \times ١٠^{١٠}$ $= ١,٦ \times ١٠^{١١}$	تُعدّ الإجابة ١٦×١٠^{١٠} صحيحة، ولكنها ليست في الصيغة العلمية لأن ١٦ أكبر من ١٠؛ يمكنك تغيير الإجابة إلى الصيغة العلمية بالتفكير في ١٦ على أنه $١,٦ \times ١٠$
ج	$(٢,٨ \times ١٠^{٦}) \div (١,٤ \times ١٠^{٤}) = \frac{٢,٨ \times ١٠^{٦}}{١,٤ \times ١٠^{٤}}$ $= ٢ \times ١٠^{٦-٤}$ $= ٢ \times ١٠^{٢}$	بسِّط بوضع الحدود المُتشابِهة معًا. استخدم قوانين الأسس.

رُغم أن ترتيب المنزلة هو الذي يتغيَّر، لكن يبدو أن الفاصلة العشرية هي التي تتحرَّك إلى اليمين.

عندما تحل مسائل تتضمَّن الصيغة العلمية، يجب أن تتحقَّق من نتائجك بدقَّة. تأكَّد دائمًا من أن الإجابة الأخيرة مكتوبة في الصيغة العلمية. وتأكَّد أيضًا من تحقُّق كل الشروط، ومن أن الجزء العددي أكبر من أو يساوي ١ وأصغر من ١٠

د $(٩ \times ١٠^{٦}) + (٣ \times ١٠^{٨})$

$٩ \times ١٠^{٦} = ٩٠٠٠٠٠٠$

$٣ \times ١٠^{٨} = ٣٠٠٠٠٠٠٠٠$

$(٩ \times ١٠^{٦}) + (٣ \times ١٠^{٨}) = ٩٠٠٠٠٠٠ + ٣٠٠٠٠٠٠٠٠$

$= ٣٠٩٠٠٠٠٠٠$

$= ٣,٠٩ \times ١٠^{٨}$

عند جمع أو طرح عددَين مكتوبَين في الصيغة العلمية، يسهل تحويل كلّ منهما إلى الصورة الاعتيادية أولاً، ثمّ تحويل النتيجة إلى الصيغة العلمية.

لتُسهِّل جمعِ الأعداد، تأكَّد من ترتيب العددين رأسيًّا حسب القيمة المكانية:

$$\begin{array}{r} ٣٠٠٠٠٠٠٠٠ \\ +\ ٩٠٠٠٠٠٠ \end{array}$$

تمارين ٢-٤-أ

١) اكتب كلاًّ من الأعداد الآتية في الصيغة العلميّة:

أ ٣٨٠　　ب ٤٢٠٠٠٠٠　　ج ٤٥٦٠٠٠٠٠٠٠٠　　د ٦٥٤٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

هـ ٢٠　　و ١٠　　ز ١٠,٣　　ح ٥

٢) اكتب كلاًّ من الأعداد الآتية في الصورة الاعتيادية:

أ $٢,٤ \times ١٠^{٦}$　　ب $٣,١ \times ١٠^{٨}$　　ج $١,٠٥ \times ١٠^{٧}$

د $٩,٩ \times ١٠^{٣}$　　هـ $٧,١ \times ١٠^{١}$

عند التحويل من الصيغة العلمية إلى الصورة الاعتيادية، تدلُّك قوى العدد ١٠ على عدد المنازل العشرية التي تتحرّكها الفاصلة العشريّة إلى اليمين، وليس على عدد الأصفار الموجودة في العدد.

٣) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي، واكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

أ $(٢ \times ١٠^{١٣}) \times (٤ \times ١٠^{١٧})$　　ب $(٤,١ \times ١٠^{٨}) \times (٣ \times ١٠^{٤})$

ج $(١٢ \times ١٠^{٥}) \times (١١ \times ١٠^{٢})$　　د $(٠,٢ \times ١٠^{١٧}) \times (٠,٧ \times ١٠^{١٦})$

هـ $(٩ \times ١٠^{١٧}) \div (٣ \times ١٠^{١٦})$　　و $(٨ \times ١٠^{١٧}) \div (٤ \times ١٠^{١٦})$

ز $(٥,١ \times ١٠^{٨}) \div (٥ \times ١٠^{٤})$　　ح $(٤,٢ \times ١٠^{٦٤}) \div (٨ \times ١٠^{٢١})$

ط $(١,٤٤ \times ١٠^{٧}) \div (١,٢ \times ١٠^{٤})$　　ي $\dfrac{(١,٧ \times ١٠^{٨})}{(٣,٤ \times ١٠^{٥})}$

ك $(٤,٩ \times ١٠^{٥}) \times (٣,٦ \times ١٠^{٩})$

٤) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي، واكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

أ) $(٣ \times ١٠^{٤}) + (٤ \times ١٠^{٣})$

ب) $(٤ \times ١٠^{٦}) - (٣ \times ١٠^{٥})$

ج) $(٢,٧ \times ١٠^{٣}) + (٥,٦ \times ١٠^{٥})$

د) $(٧,١ \times ١٠^{٩}) - (٤,٣ \times ١٠^{٧})$

هـ) $(٥,٨ \times ١٠^{٩}) - (٢,٧ \times ١٠^{٣})$

تذكَّر أنك تستطيع كتابة هذه الأعداد في الصورة الاعتيادية قبل إجراء عملية الجمع أو الطرح.

٢-٤-ب الصيغة العلمية للأعداد الصغيرة

لاحظتَ أن الفاصلة العشرية تتحرَّك عددًا من المنازل إلى اليمين بالترتيب عند الضرب في قوى موجبة للعدد ١٠؛ ولكن إذا قسمت على قوى موجبة للعدد ١٠، تتحرَّك الفاصلة العشرية عددًا من المنازل بالترتيب إلى اليسار؛ وبذلك يصبح العدد أصغر.

اعتبر النمط الآتي:

$$٢٣٠٠$$

$$٢٣٠٠ \div ١٠ = ٢٣٠$$

$$٢٣٠٠ \div ١٠^{٢} = ٢٣٠٠ \div ١٠٠ = ٢٣$$

$$٢٣٠٠ \div ١٠^{٣} = ٢٣٠٠ \div ١٠٠٠ = ٢,٣$$

... وهكذا

لاحظت أن الفاصلة العشرية تتحرَّك عددًا من المنازل بالترتيب إلى اليسار، وبما أن تحريك الفاصلة العشرية إلى اليمين يرفع العدد ١٠ إلى قوى بِأُسٍّ موجب، فإن تحريك الفاصلة العشرية إلى اليسار يرفع العدد ١٠ إلى قوى بِأُسٍّ سالب.

تذكُر أيضًا من الصف الثامن أنك تستطيع أن تكتب قوى سالبة لتشير إلى أنك تجري عملية قسمة. وقد لاحظت أعلاه، مع الأعداد الصغيرة، أنك تقسم على العدد ١٠ لتكتب العدد في الصيغة العلمية.

رابط

يتعامل علم الفلك مع الأعداد الكبيرة جدًّا والصغيرة جدًّا. ومن غير المنطقي كتابتها في الصورة الاعتيادية كلّ مرة احتجت فيها إلى كتابتها. تجعل الصيغة العلمية إجراء العمليات الحسابية وكتابتها سهلًا.

مثـــال ١٥

اكتب كلاًّ من الأعداد الآتية في الصيغة العلمية:

أ ٠,٠٠٤ ب ٠,٠٠٠٠٠٠٣٤ ج (٢ × ١٠$^{-٣}$) × (٣ × ١٠$^{-٧}$)

الحـــلّ:

أ	٠,٠٠٤ ٠,٠٠٤ = ٤ × ١٠$^{-٣}$	حرِّك الفاصلة العشرية واكتبها بعد أول رقم معنوي من جهة اليمين (٤). احسب عدد المنازل التي تحرَّكتها الفاصلة العشرية (٣ أرقام) لتكون قوى العدد ١٠ هي (−٣).
ب	٠,٠٠٠٠٠٠٣٤ ٠,٠٠٠٠٠٠٣٤ = ٣,٤ ÷ ١٠^{٧} = ٣,٤ × ١٠$^{-٧}$	لاحظ أن أول رقم معنوي في العدد ٠,٠٠٠٠٠٠٣٤ يقع في المنزلة السابعة بعد الفاصلة العشريّة وأن قوى العدد ١٠ هي −٧
ج	(٢ × ١٠$^{-٣}$) × (٣ × ١٠$^{-٧}$) = (٢ × ٣) × (١٠$^{-٣}$ × ١٠$^{-٧}$) = ٦ × ١٠$^{-٣ + -٧}$ = ٦ × ١٠$^{-١٠}$	بسِّط بتجميع الحدود المُتشابهة معًا. استخدم قوانين الأسس.

تمارين ٢-٤-ب

١) اكتب كلاًّ من الأعداد الآتية في الصيغة العلمية:

أ ٠,٠٠٠٠٥ ب ٠,٠٠٠٠٣٢ ج ٠,٠٠٠٠٠٠٠٥٦٤

٢) اكتب كلاًّ من الأعداد الآتية في الصورة الاعتياديّة:

أ ٣,٦ × ١٠$^{-٤}$ ب ١,٦ × ١٠$^{-٨}$ ج ٢,٠٣ × ١٠$^{-٧}$

د ٨,٨ × ١٠$^{-٣}$ هـ ٧,١ × ١٠$^{-١}$

عند استخدام الصيغة العلمية مع الأسس السالبة، تدلُّك القوى التي يُرفع إليها العدد ١٠ على موقع أول رقم معنوي بعد (يمين) الفاصلة العشريّة.

٣) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي، واكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

أ $(٢ \times ١٠^{-٤}) \times (٤ \times ١٠^{-١٦})$

ب $(١٫٦ \times ١٠^{-٨}) \times (٤ \times ١٠^{-٤})$

ج $(١٫٥ \times ١٠^{-٦}) \times (٢٫١ \times ١٠^{-٣})$

د $(١١ \times ١٠^{-٥}) \times (٣ \times ١٠^{٢})$

هـ $(٩ \times ١٠^{١٧}) \div (٤٫٥ \times ١٠^{-١٦})$

و $(٧ \times ١٠^{-٢١}) \div (١ \times ١٠^{١٦})$

ز $(٤٫٥ \times ١٠^{٨}) \div (٠٫٩ \times ١٠^{-٤})$

ح $(١١ \times ١٠^{-٥}) \times (٣ \times ١٠^{٢}) \div (٢ \times ١٠^{-٣})$

في بعض الحسابات، قد تحتاج إلى تحويل حدّ ما إلى الصيغة العلمية قبل القيام بعملية الضرب أو عملية القسمة.

٤) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي، واكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

أ $(٣٫١ \times ١٠^{-٤}) + (٢٫٧ \times ١٠^{-٢})$

ب $(٣٫٢ \times ١٠^{-١}) - (٣٫٢ \times ١٠^{-٢})$

ج $(٧٫٠١ \times ١٠^{٣}) + (٥٫٦ \times ١٠^{-١})$

د $(١٫٤٤ \times ١٠^{-٥}) - (٢٫٣٣ \times ١٠^{-٦})$

تذكَّر أنك تستطيع كتابة هذه الأعداد في الصورة الاعتيادية قبل الجمع أو الطرح.

طبِّق مهاراتك

٥) أوجد عدد الثواني في يوم واحد، واكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

٦) تبلغ سرعة الضوء حوالي ٣×١٠^{٨} متر في الثانية. ما المسافة التي يقطعها الضوء في:

أ ١٠ ثوانٍ؟ **ب** ٢٠ ثانية؟ **ج** ١٠٢ ثانية؟

٧) تُقاس البيانات المُخزَّنة (في الحواسيب) بالغيغابايت. واحد غيغابايت يساوي $٢^{٣٠}$ بايت.

أ اكتب العدد $٢^{٣٠}$ في الصيغة العلمية مُقرَّبًا إلى عدد مُكوَّن من رقم معنوي واحد.

ب يوجد ١٠٢٤ غيغابايت في كل واحد تيرابايت. كم بايتًا يوجد في التيرابايت الواحد؟ اكتب إجابتك في الصيغة العلمية مُقرَّبة إلى عدد مكوَّن من رقم معنوي واحد.

٥-٢ الآلة الحاسبة والصيغة العلمية

يُمكنك في الآلات الحاسبة العلمية الحديثة أن تُدخِل الأعداد في الصيغة العلمية. أضف إلى ذلك أن الآلة الحاسبة تعرض الأعداد ذات الأرقام الكثيرة على الشاشة في الصيغة العلمية أيضًا.

مفاتيح الآلة الحاسبة المكتوبة في الصيغة العلمية

تحتاج إلى استخدام المفتاح $\times 10^x$ أو أحد المفتاحين Exp أو EE في آلتك الحاسبة. تُعرَف هذه المفاتيح بأنّها مفاتيح الأسس. تعمل جميع مفاتيح الأسس بالطريقة نفسها. لذلك يُمكنك اتِّباع المثال الآتي على آلتك الحاسبة مُستخدِمًا أيّ مفتاح من مفاتيح الأسس موجود عليها، وستحصل على النتيجة نفسها.

عندما تستخدم مفتاح الأسّ الموجود في آلتك الحاسبة، **لا** تُدخِل الجزء المُتعلِّق بـ'$\times$ ١٠' في الحسابات. تعمل الآلة الحاسبة على هذا الجزء من الحسابات آليًّا باعتباره جزءًا من الدالّة.

مثــال ١٦

اكتب كلاًّ ممّا يأتي في الصورة الاعتيادية باستخدام الآلة الحاسبة:

أ $٢,١٣٤ \times ١٠^{٤}$ ب $٣,١٢٤ \times ١٠^{-٦}$

الحــلّ:

أ $٢,١٣٤ \times ١٠^{٤}$

$= ٢١٣٤٠$

انقر: 2 . 1 3 4 $\times 10^x$ 4 =

هذه هي الإجابة التي ستحصل عليها.

ب $٣,١٢٤ \times ١٠^{-٦}$

$= ٠,٠٠٠٠٠٣١٢٤$

انقر: 3 . 1 2 4 Exp − 6 =

هذه هي الإجابة التي ستحصل عليها.

الاستفادة ممّا تعرضه الآلة الحاسبة

بالاعتماد على آلتك الحاسبة، ستُعرض الإجابة في الصيغة العلميّة على خطّ مع أُسّ كما هو مُبيَّن أدناه:

```
5.98E-06
```

وهذا هو $٥,٩٨ \times ١٠^{-٦}$

أو على خطّين: أحدهما للحسابات والآخر للإجابة، كما هو مُبيَّن أدناه:

```
6.23E23*4.11
        2.56E24
```

وهذا هو $٢,٥٦ \times ١٠^{٢٤}$

تعمل الآلات الحاسبة المختلفة بطرائق مختلفة. وأنت في حاجة لتعرف كيف تعمل آلتك الحاسبة. تأكد أنك تعرف المفاتيح المُستخدَمة لإدخال الحسابات في الصيغة العلمية، وكيف تفسّر ما يعرض، وكيف تحوّل الإجابة إلى صورة كسر عشري.

إذا طُلب منك أن تُقدِّم الإجابة في الصيغة العلمية، فإن كل ما عليك القيام به هو تفسير المعروض وكتابة الإجابة بطريقة صحيحة. ولكن إذا طُلب منك تقديم الإجابة في الصورة الاعتيادية (العدد العشري)، فيجب أن تطبِّق القوانين التي تعرفها لتكتب الإجابة بالطريقة الصحيحة.

تمارين ٢-٥

١) استخدم آلتك الحاسبة، واكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

أ $٤٢٣٤^{٥}$

ب $٩٢٠٠ \div ٠,٠٠٠٨^{٣}$

ج $(١,٠٠٩)^{٥}$

د $(٨٧٦ \times ٩٧)^{٤}$

هـ $(٠,٠٠٩٨)^{٤} \times (٠,٠٠٣٢)^{٣}$

و $\dfrac{٩٧٥٤}{(٠,٠٠٠٥)^{٤}}$

ز $٩,٢٧ \times (٢,٨ \times ١٠^{٥})$

ح $(٤,٢٣ \times ١٠^{-٢})^{٣}$

ط $(٣,٢ \times ١٠^{٧}) \div (٧,٢ \times ١٠^{٩})$

ي $(٤,٣ \times ١٠^{٥}) + (٢,٣ \times ١٠^{٧})$

ك $\sqrt{٣,٢٤ \times ١٠^{٧}}$

ل $\sqrt[٣]{٤,١٢٦ \times ١٠^{-٩}}$

٢) تبلغ سرعة الضوء ٣×١٠^{٥} كيلومتر في الثانية. ما المسافة التي يقطعها الضوء في السنة الواحدة؟

٣) تم تذويب سبيكة من الذهب كتلتها ٤ كغم لصناعة خواتم ذهبية كتلة كل منها $٣,٥ \times ١٠^{-٤}$ كغم. كم خاتمًا ذهبيًّا يمكن أن يُصنع من هذه السبيكة بعد تذويبها؟

٤) قطعة مُستطيلة الشكل طولها $٣,٢ \times ١٠^{-٣}$ م وعرضها $٨,٤ \times ١٠^{-٤}$ م. كم يبلغ الفرق بين طول القطعة وعرضها؟

٦-٢ الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية

جميع الأعداد التي استخدمتها حتّى الآن في الرياضيات هي أعداد حقيقية، وهي تتضمَّن الأعداد الصحيحة، والأعداد النسبية والأعداد غير النسبية (وجميعها يمكن أن تكون موجبة أو سالبة).

الأعداد النسبية

عرفت الأعداد العشريّة من قبل وكيفية استخدامها لكتابة أعداد ليست كاملة. ويمكن التعبير عن بعض هذه الأعداد في صورة كسور اعتياديّة أو كسور غير اعتيادية. مثلاً:

$\frac{١}{٢} = ٠,٥$ $\frac{٥}{٢} = ٢,٥$ $\frac{١}{٨} = ٠,١٢٥$ $\frac{١}{٣} = ٠,٣٣٣٣٣٣٣٣ ...$

... وهكذا

أيّ عدد يمكن التعبير عنه في صورة كسر، بسطه ومقامه عددان صحيحان ومقامه لا يُساوي الصفر، يُسمّى **عددًا نسبيًا**.

لاحظ أن هناك نوعَين من الأعداد النسبيّة: **أعداد عشريّة مُنتهية** (وهي الأعداد التي يكون فيها الجزء العشريّ مُنتهيًا) و**أعداد عشريّة دوريّة** (وهي الأعداد التي يكون فيها الجزء العشريّ مُستمرًّا من دون توقُّف، ولكن يُكرِّر نفسه بفترات مُنتظِمة).

يمكن التعبير عن الأعداد العشريّة الدوريّة باستخدام نقطة أعلى الرقم، أو الأرقام التي تتكرَّر:

$٠,\dot{٣} = ٠,٣٣٣٣٣٣٣٣٣ ...$ $٠,\dot{٣}٠\dot{٢} = ٠,٣٠٢٣٠٢٣٠٢٣٠٢ ...$

$٠,\dot{٤}\dot{٥} = ٠,٤٥٤٥٤٥٤٥٤ ...$

تحويل الأعداد العشريّة الدوريّة إلى كسور

كيف نتعامل مع الأعداد العشرية الدورية؟ هل هذا النوع من الأعداد نسبيّ أم غير نسبيّ؟ سنتعامل مثلاً مع العدد $٠,\dot{٤}$

يمكننا استخدام الجبر لإيجاد طريقة أخرى لكتابة العدد العشري الدوريّ:

افترض

$$س = ٠,\dot{٤} = ... ٠,٤٤٤٤٤٤$$

فيكون

$$١٠ س = ... ٤,٤٤٤٤٤٤$$

يمكن أن نطرح س من ١٠س كما يلي:

$$١٠س = ... ٤,٤٤٤٤٤٤$$
$$س = ... ٠,٤٤٤٤٤٤$$
$$٩س = ٤$$
$$\Leftarrow س = \frac{٤}{٩}$$

تذكَّر أن النقطة أعلى رقم واحد تعني أن لديك عددًا عشريًّا دوريًّا. وعند تكرار أكثر من رقم، فإننا نضع نقطة أعلى الرقم المُتكرِّر الأول وأعلى الرقم المتكرِّر الأخير.
مثال $٠,\dot{٤}١\dot{٨} = ... ٠,٤١٨٤١٨٤١٨$
و $٠,٣٤\dot{٢} = ... ٠,٣٤٢٢٢٢$

أيّ عدد عشريّ دوريّ هو عدد نسبيّ. ويمكن على الدوام كتابة العدد العشريّ الدوري في صورة كسر.

لاحظ أن ذلك يُبيِّن كيفية كتابة العدد العشريّ الدوريّ في صورة كسر. وهذا يعني أن ٠,٤̇ عدد نسبيّ. يمكننا في الحقيقة كتابة جميع الأعداد العشريّة الدوريّة في صورة كسور؛ ما يعني أنها أعداد نسبيّة.

مثــال ١٧

استخدم الجبر لتكتب كلاً من الأعداد الآتية في صورة كسور. بسّط الكسور قدر الإمكان:

أ ٠,٣̇ ب ٠,٢̇٤̇ ج ٠,٩̇٣٤̇ د ٠,٥٢٤̇

الحـــلّ:

أ

س = ٠,٣٣٣٣٣ ...	أعد كتابة العدد العشريّ الدوريّ بكتابة الرقم المتكرِّر أكثر من مرة.
١٠س = ٣,٣٣٣٣٣ ...	اضرب في ١٠، بحيث تبقى الأرقام المتكرِّرة مكتوبة بعضها فوق بعض تمامًا.
١٠س = ٣,٣٣٣٣٣ ... س = ٠,٣٣٣٣٣ ... ٩س = ٣	اطرح.
∴ س = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$	اقسم على ٩ ثم بسِّط.

ب

س = ٠,٢٤٢٤٢٤ ...	
∴ ١٠٠س = ٢٤,٢٤٢٤٢٤ ...	اضرب في ١٠٠
٩٩س = ٢٤,٢̇٤̇ − ٠,٢̇٤̇	اطرح.
٩٩س = ٢٤	
∴ س = $\frac{٢٤}{٩٩}$ = $\frac{٨}{٣٣}$	اقسم الطرفَين على ٩٩ ثم بسِّط.
	لاحظ أنك بدأت الضرب في العدد ١٠٠ لتتأكَّد من أن الرقمَين (٢)، (٤) مكتوبان في المنازل الصحيحة بعد الفاصلة العشريّة.

ج

س = ٠,٩٣٤٩٣٤ ...	لدينا الآن ثلاثة أرقام مُتكرِّرة. للتأكُّد من أن هذه الأرقام مكتوبة بعضها فوق بعض تمامًا،
١٠٠٠س = ٩٣٤,٩٣٤٩٣٤ ...	اضرب في العدد ١٠٠٠، بحيث تتحرَّك كلّ الأرقام ثلاث منازل.
١٠٠٠س = ٩٣٤,٩٣٤٩٣٤ ... س = ٠,٩٣٤٩٣٤ ... ٩٩٩س = ٩٣٤ ⇐ س = $\frac{٩٣٤}{٩٩٩}$	اطرح.

مُساعَدة

عندما تتمكَّن من وضع الأرقام المتكرِّرة بعد الفاصلة العشريّة مباشرة، فإنك تحتاج إلى الضرب مرة أخرى في قوى العدد ١٠ يجب أن تكون القوة التي تختارها مساوية لعدد الأرقام المتكرِّرة. تتكرَّر الأرقام ٩، ٣، ٤؛ لذا فإننا نضرب في العدد ١٠^{٣} = ١٠٠٠

د

س = ... ٠,٥٢٤٤٤٤٤٤	
١٠٠س = ... ٥٢,٤٤٤٤٤٤٤	اضرب في العدد ١٠٠ لتبدأ الأرقام المتكرِّرة مباشرة بعد الفاصلة العشريّة.
١٠٠٠س = ... ٥٢٤,٤٤٤٤٤٤	أكمل كما في الفرع الأول من المثال، بالضرب في العدد ١٠ مرّة جديدة لتحريك الأرقام منزلة واحدة إضافية.
١٠٠٠س = ... ٥٢٤,٤٤٤٤٤٤	
١٠٠س = ٥٢,٤٤٤٤٤٤٤...	
٩٠٠س = ٤٧٢	اطرح وبسّط.
⟸ س = $\frac{٤٧٢}{٩٠٠}$ = $\frac{١١٨}{٢٢٥}$	

النقطة الأساسيّة هي الحاجة إلى طرح عددين مُختلفَين، ولكن بطريقة تُمكِّن من حذف الجُزء المُتكرِّر. وهذا يعني أن عليك أحيانًا الضرب في ١٠ أو في ١٠٠ وأحيانًا في ١٠٠٠، بالاستناد إلى عدد الأرقام المُتكرِّرة.

تمارين ٢-٦

١) انسخ كلاًّ من المُعادلات الآتية وأكملها بملء الفراغ بالعدد الصحيح أو الرمز الصحيح:

أ ليكن س = ٠,٦̇

فإن ١٠س = □

باستخدام الطرح:

١٠س = □

− س = ٠,٦̇

□ س = □

∴ س = □

باستخدام التبسيط:

س = □

ب ليكن س = ٠,١̇٧̇

فإن ١٠٠س = □

باستخدام الطرح:

١٠٠س = □

− س = ٠,١̇٧̇

□ س = □

∴ س = □

٢) اكتب كلاً من الأعداد العشريّة الدورية الآتية في صورة كسر في أبسط صورة:

أ $٠,\dot{٥}$ ب $٠,\dot{١}$ ج $٠,\dot{٨}$ د $٠,\dot{٢}\dot{٤}$

هـ $٠,\dot{٦}\dot{١}$ و $٠,\dot{٣}\dot{٢}$ ز $٠,\dot{٦}١\dot{٨}$ ح $٠,\dot{٢}٣\dot{٣}$

ط $٠,\dot{٢}٠\dot{٨}$ ي $٠,٠\dot{٢}$ ك $٠,١\dot{٨}$ ل $٠,٠\dot{٣}\dot{١}$

م $٢,\dot{٣}\dot{٦} + ٣,\dot{٦}\dot{٣}$ ن $٠,\dot{١}\dot{٧} + ٠,\dot{٧}\dot{١}$ س $٠,\dot{٩}$

٣) حدِّد إن كان العدد نسبيًّا أو غير نسبيّ في كل ممّا يلي:

أ $\frac{١}{٤}$ ب ٤ ج -٧ د $٣,١٤٧$

هـ π و $\sqrt{٣}$ ز $\sqrt{٢٥}$ ح ٠

ط $٠,٤٥$ ي $-٠,٦٧$ ك -٢٣٢ ل $\frac{٣}{٨}$

م $٩,\dot{٤}\dot{٥}$ ن $\sqrt{١٢٣}$ س ٢π ع $٣\sqrt{٢}$

٤) وضِّح أن الأعداد الآتية نسبيّة:

أ ٦ ب $٢\frac{٣}{٨}$ ج $١,\dot{١}\dot{٢}$ د $٠,\dot{٨}$ هـ $٠,٤٢٧$ و $٣,\dot{١}\dot{٤}$

٥) أ أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي:

(١) $١ - ٠,٩$ (٢) $١ - ٠,٩٩$ (٣) $١ - ٠,٩٩٩$ (٤) $١ - ٠,٩٩٩٩٩٩٩٩٩٩$

ب دقّق إجابات الجُزئية أ. ماذا يحدث للإجابة عندما يزداد عدد الأرقام في العدد المطروح؟ إلى أي عدد تقترب الإجابة؟

ج استخدم الجبر لتعبّر عن العددين $٠,\dot{٦}$، $٠,\dot{٢}$ في صورة كسرَين في أبسط صورة.

د اكتب ناتج $٠,\dot{٦} + ٠,\dot{٢}$ في صورة عدد عشريّ دوريّ.

هـ استخدم إجابة الجزئية ج لتكتب $٠,\dot{٦} + ٠,\dot{٢}$ في صورة كسر في أبسط صورة.

و كرِّر الآن الجُزئيات ج، د، هـ مستخدمًا العددَين العشريين الدوريَّين $٠,\dot{٤}$، $٠,\dot{٥}$

ز وضِّح كيف يرتبط ما وجدته في الجزئية و بإجابتك للجزئيتين أ، ب.

٦) طلب المعلِّم من طلاب الصف أن يجدوا أكبر عدد أصغر من ٤,٥؛ أجاب وليد أن العدد هو ٤,٤

أ لماذا تُعدّ إجابة وليد خاطئة؟

ب اقترح أحمد أن الإجابة هي ٤,٤٩٩٩٩، لماذا تُعدّ إجابة أحمد خاطئة؟

ج اقترح خالد أن الإجابة هي ٤,٤٩̇ هل تُعدّ إجابة خالد صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

٧) أوجد عددًا في الفترة $^{-}$١ < س < ٣، بحيث يكون:

أ س عددًا نسبيًّا

ب س عددًا حقيقيًّا غير نسبيّ

ج س عددًا صحيحًا

د س عددًا طبيعيًّا

٨) أيّ مجموعة تتضمَّن عناصر أكثر: مجموعة الأعداد النسبيّة أم مجموعة الأعداد غير النسبيّة؟ لماذا؟

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- يمكن إيجاد كسر مكافئ من خلال ضرب أو قسمة البسط والمقام في نفس العدد غير الصفر.
- يمكن جمع الكسور أو طرحها، ولكن يجب أن تتأكد من أن للكسور نفس المقام.
- لضرب كسرَين، اضرب البسطَين واضرب المقامَين.
- لتقسم على كسر، أوجد مقلوبه، ثمّ اضرب الكسرَين.
- النسب المئويّة هي كسور مقام كلّ منها العدد ١٠٠
- يمكن استخدام الصيغة العلميّة لكتابة الأعداد الكبيرة جدًّا والأعداد الصغيرة جدًّا بسهولة.
- العدد النسبيّ هو عدد يمكن كتابته في صورة كسر.
- يتضمَّن العدد النسبيّ الدوري جزءًا عشريًّا يتكرر باستمرار من دون توقُّف.

يجب أن تكون قادرًا على:

- إيجاد كسر العدد.
- إيجاد نسبة مئويّة من عدد.
- إيجاد عدد في صورة نسبة مئويّة من عدد آخر.
- إجراء حسابات على أعداد مكتوبة في الصيغة العلمية.
- كتابة عدد عشري دوري في صورة كسر في أبسط صورة.

تمارين نهاية الوحدة

١) احسب $\left(\frac{١}{٨} + \frac{١}{٤}\right)\frac{٥}{٦}$؛ واكتب إجابتك في صورة كسر في أبسط صورة.

٢) خضع ٩٣٨٠٠ طالب لامتحان دولي:

حصل ١٩٪ من الطلاب على الدرجة (أ)

حصل ٢٤٪ من الطلاب على الدرجة (ب)

حصل ٣١٪ من الطلاب على الدرجة (ج)

حصل ١٥٪ من الطلاب على الدرجة (د)

حصل ١١٪ من الطلاب على الدرجة (هـ)

أ اكتب الكسر الذي يُمثِّل عدد الطلاب الذين حصلوا على الدرجة (ب) في أبسط صورة.

ب كم طالبًا حصل على الدرجة (أ)؟

٣) أوجد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة (دون استخدام الآلة الحاسبة):

أ $١\frac{٢}{٧} \times ٤\frac{٢}{٣}$ ب $١\frac{٢}{٣} \div \frac{٤}{٩}$ ج $١\frac{٢}{٧} - ٤\frac{٢}{٣}$ د $١\frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٩}$

٤) حصل ماجد على الدرجات التالية في ثلاثة اختبارات:

الاختبار الأول: ٢٣ من ٤٠

الاختبار الثاني: ٥٤ من ٩٠

الاختبار الثالث: ٢٠ من ٣٥

أوجد النسبة المئوية لدرجات ماجد في كل اختبار، ثم حدِّد الدرجة الأفضل.

٥) اكتب كل عدد من الأعداد التالية في الصيغة العلمية:

أ ٠,٠٠٠٤٢٥ ب ٦٢٠٠٠٠ ج ٧٥,٢ د ٨,٤

٦) أوجد الناتج في كلّ ممّا يلي في أبسط صورة:

أ $(١٠^{٣} \times ٣) \times (١٠^{٦} \times ٤)$ ب $(١٠^{٣} \times ٣) + (١٠^{٦} \times ٤)$

ج $(١٠^{-٣} \times ٢) \times (١٠^{-٤} \times ٨)$ د $(١٠^{-٣} \times ٢) \div (١٠^{-٤} \times ٨)$

هـ $(١٠^{٤} \times ٨) - (١٠^{٥} \times ٧)$

الوحدة الثالثة: فهم الجبر

المُفردات

الجبر	Algebra
المُتغيِّر	Variable
الثابت	Constant
المعادلة	Equation
الصيغة	Formula
التعويض	Substitution
العبارة	Expression
الحدّ	Term
القوى	Powers
الأس/ الأسس	Index/Indices
المُعامل	Coefficient
الأساس	Base
المقلوب	Reciprocal
فك الأقواس	Expand/expansion
التبسيط	Simplify

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تستخدم الحروف لتُمثّل الأعداد
- تكتب العبارات الجبرية لتُمثّل معلومات رياضيّة
- تعوّض أعدادًا عن حروف لتجد قيمة عبارة جبريّة
- تجمع الحدود المُتشابهة وتطرحها لتُبسّط العبارات الجبريّة
- تضرب وتقسم لتُبسِّط العبارات الجبريّة
- تفك الأقواس في العبارات بالتخلُّص من رموز التجميع
- تستخدم الصيغة الأسّية في الجبر
- تتعلَّم قوانين الأسس وتطبِّقها لتبسّط العبارات الجبريّة
- تتعامل مع الأُسس الكسريّة

تعمل وزارة التجارة والصناعة وترويج الاستثمار في سلطنة عُمان ضمن الرؤية المُستقبلية للسلطنة ’رؤية عمان ٢٠٤٠‘، وبالتعاون مع المنظمات العالمية، على تحديث الاستراتيجية الصناعية ٢٠٤٠، والهادفة إلى المُساهمة في تعزيز تنافسية القطاع الصناعي ونموّه وتعزيز دوره في الاقتصاد المحلّي. يُساعد الجبر في هذا السياق من خلال الصيغ التي يُقدِّمها، ومن خلال ارتباطه المباشر بالمسائل المُتعلِّقة بالنقود والأبنية والإنشاءات والاقتصاد والإحصاء والهندسة، وسوى ذلك الكثير ...

يُمكنك التفكير في **الجبر** على أنه لغة الرياضيّات. يستخدم الجبر الحروف والرموز الأخرى لكتابة المعلومات الرياضيّة بطرق مُختصَرة.

عندما تتعلَّم لغة ما، عليك تعلُّم قواعدها وبنيتها. ولغة الجبر هي أيضًا لها قواعد وبُنية. عندما تعرف ذلك، يمكنك أن ’تتكلَّم‘ بلغة الجبر، وسيفهم كل رياضيّي العالم عليك.

فائدة

يجب أن تكون المفاهيم الجبرية الآتية مألوفة لديك:

أساسيات الجبر

في الجبر، نستخدم الحروف بدلاً من القيَم المجهولة أو القيَم المُتغيِّرة، ويمكن أن تتضمّن العبارة الجبرية أعدادًا ومُتغيِّرات ورموزَ عمليات بما فيها الأقواس. ولا تتضمّن العبارات الجبرية إشارة المساواة. كل العبارات الآتية هي عبارات جبرية:

س + ٤ ‏‏ ‏‏ ٣(س + ص) ‏‏ ‏‏ $\frac{\text{٣م}}{\text{ن}}$ ‏‏ ‏‏ (٤ + أ)(٢ − أ)

تعويض القيَم عن الحروف (المُتغيّرات)

إذا أُعطيت قيمَ الحروف، يُمكنك أن تعوّضها لتجد قيمة العبارة الجبرية.

إذا كان المُعطى س = ٢ ، ص = ٥:

تُصبح قيمة العبارة الجبرية س + ص مُساوية لـ ٢ + ٥

وتُصبح قيمة العبارة الجبرية $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ مُساوية لـ ٢ ÷ ٥

وتُصبح قيمة العبارة الجبرية س ص مُساوية لـ ٢ × ٥

وتُصبح قيمة العبارة الجبرية ٤س مُساوية لـ ٤ × ٢ وقيمة العبارة ٣ص مُساوية لـ ٣ × ٥

٣-١ استخدام الحروف (المُتغيّرات) لتمثيل القِيَم المجهولة

٢ + س = ٨، أ + ب = ١٠ هما مُعادلتان.

في المُعادلة ٢ + س = ٨ هناك قيمة واحدة للمُتغيِّر س، لكن في المعادلة أ + ب = ١٠، يمكن للمتغيِّرين أ، ب أن يمثِّلا عددًا من القيَم المختلفة. يُمكنك أحيانًا حلّ المعادلة بإيجاد القيَم التي تجعلها صحيحة.

في الجبر، عندما تُمثّل الحروف قِيمًا مختلفة، تسمّى الحروف **مُتغيِّرات**.

عندما تعاملت مع مساحة المُستطيل في السنوات السابقة، استخدمتَ الجبر لتُعطي قاعدة عامّة أو **صيغة**، في حساب المساحة م:

مساحة المستطيل = الطول × العرض، أي م = ط ع

لاحظ أنك عندما تضرب حرفَين معًا، تكتبهما متجاورَيْن دون كتابة إشارة الضرب. أي إنك تكتب ط ع بدلاً من ط × ع.

لتستخدم الصيغة، عليك استبدال بعض الحروف أو جميعها بأعداد، وهذا ما يُسمّى **بالتعويض**.

كتابة العبارات الجبرية

العبارة الجبريّة هي مجموعة من الحُروف والأعداد المُرتبطة بإشارات العمليات الحسابية. يُسمّى كلّ جزء في العبارة **حدًّا**.

افترض أن مُتوسِّط أطوال الطلاب (بالسنتيمتر) في صفّك عدد مجهول، ط. تمثِّل طول الطالب الأطول من المُتوسِّط بمقدار ١٠ سم على شكل ط + ١٠، وطول الطالب الأقصر من المُتوسِّط بمقدار ٣ سم على شكل ط − ٣

ط + ١٠، ط − ٣ عبارتان جبريتان، لأن القيمة المجهولة تمثَّلت بالحرف ط، ونقول إن هاتَين العبارتَين مكتوبتان بدلالة ط.

رابط

يظهر الجبر في كل موضوعات العلوم. تتطلب معظم المواقف في الفيزياء حركة أو تغيُّرات فيزيائية أخرى يمكن وصفها في صورة صيغ جبريّة. فإذا كتبنا مثلًا، ق = ك ت، نكون قد وصفنا العلاقة بين قوة جسم وكتلته وتسارعه.

مثــال ١

استخدم الجبر لتكتب عبارة جبرية بدلالة ط لكلّ ممّا يلي:

أ طول أقلّ بـ ١٢ سم من مُتوسِّط الطول.

ب طول يساوي نصف مُتوسِّط الطول.

الحــلّ:

أ	ط − ١٢	أقلّ من تعني أصغر من، أي عليك أن تطرح.
ب	$\frac{ط}{٢}$	نصف يعني مقسومًا على اثنين.

تطبيق القواعد

يجب أن تُكتَب العبارات الجبرية بأقصر وأسهل طريقة ممكنة:

- تُكتَب العبارة (٢ × ط) في صورة (٢ط) والعبارة (س × ص) في صورة (س ص)
- ط يعني (١ × ط)، ولا نكتب العدد ١
- تُكتَب العبارة (ط ÷ ٢) في صورة ($\frac{ط}{٢}$)، العبارة (س ÷ ص) في صورة ($\frac{س}{ص}$)
- عند وجود ناتج ضرب عدد في مُتغيِّر، يُكتب العدد أوَّلاً، مثل ٢ط وليس ط٢. كما تُكتَب المُتغيِّرات عادة بالترتيب الأبجديّ، مثل (س ص)، (٢أب) بدلاً من (ص س)، (٢ب أ)
- تُكتَب العبارة (ط × ط) في صورة $ط^٢$ (مُربَّع ط) والعبارة (ط × ط × ط) في صورة $ط^٣$ (مُكعَّب ط). ويُعتَبر العدد ٢ والعدد٣ مثالَين على **القوى** أو **الأسُ**.
- تُطبَّق القوى على العدد أو على المتغيّر الذي يليها مباشرة، أي أن ($٥أ^٢$) تعني (٥ × أ × أ)
- عندما تكون القوى خارج القوسين، تُطبَّق على كلّ ما في الداخل. مثل $(س ص)^٣$ تعني (س ص) × (س ص) × (س ص)

يكتب الرياضيّون ناتج ضرب عدد في مُتغيِّر بوجود العدد أولًا تجنُّبًا للخلط بين الضرب والقوى. مثلًا، تكتب العبارة س × ٥ في صورة ٥س بدلاً من $س^٥$ لتجنُّب الخلط بينها وبين $س^٥$.

تمارين ٣-١

١) أعد كتابة كلّ عبارة من العبارات الجبريّة التالية في أبسط صورة:

أ ٦ × س × ص	ب ٧ × أ × ب	ج س × ص × ض
د ٢ × ص × ص	هـ أ × ٤ × ب	و س × ص × ١٢
ز ٥ × ب × أ	ح ص × ض × ض	ط ٦ ÷ س
ي ٤س ÷ ٢ص	ك (س + ٣) ÷ ٤	ل ٤ × س + ٥ × ص

سابقًا

تذكّر قواعد ترتيب العمليات الحسابية. أوجد ما بداخل القوسَين أوَّلاً.

سابقًا

تذكَّر أن ’المجموع‘ هو ناتج عملية الجمع.

وتذكَّر أيضًا أن ’الفرق‘ بين عددَين هو ناتج عملية الطرح. الترتيب مهم في الطرح.

٢) اكتب عبارة جبرية لكلٍّ ممّا يلي، مُعتبِرًا أن المُتغيّر هو (م):

أ مجموع المُتغيّر مع العدد ١٣

ب عدد أكبر من المُتغيّر بخمسة

ج الفرق بين ٢٥ والمُتغيّر

د مُكعَّب المُتغيّر

هـ ثُلث المُتغيّر زائد ثلاثة

٣) اكتب عبارة جبرية لكلٍّ ممّا يلي، مُعتبِرًا أن المُتغيّر هو (س):

أ أكثر من المُتغيّر بـ ٣

ب أقلّ من المُتغيّر بـ ٦

ج عشرة أمثال المُتغيّر

د مجموع ⁻٨ والمُتغيّر

هـ مجموع المُتغيّر ومُربَّعه

يسمح لك الجبر بترجمة المعلومات اللفظية إلى صيَغ رياضيّة واضحة ومُختصَرة. هذه استراتيجية مُفيدة لحلّ كثير من أنواع المسائل.

٤) سعر الأسطوانة المضغوطة (CD) والأسطوانة المدمجة (DVD) س ريال عُماني:

أ إذا كان سعر الأسطوانة المضغوطة ١٠ ريالات عُمانيّة، فما سعر الأسطوانة المدمجة بدلالة س؟

ب إذا كان سعر الأسطوانة المدمجة ثلاثة أمثال سعر الأسطوانة المضغوطة، فما سعر الأسطوانة المضغوطة بدلالة س؟

ج إذا كان سعر الأسطوانة المضغوطة (س − ١٥) ريال عُماني، فما سعر الأسطوانة المدمجة؟

٣-٢ التعويض

عند تعويض القيَم، تحتاج إلى كتابة إشارات العمليات الحسابية. ٥ ح تعني ٥ × ح، أي إذا كان ح = ١ أو ح = ٦، فلا يمكنك كتابة ذلك في صورة العددين ٥١ أو ٥٦

للعبارات الجبريّة قيَم مختلفة تعتمد على الأعداد التي تعوِّض بها عن المُتغيِّرات. لنفترض مثلاً أن كل عامل من عمّال مصنع ما يتقاضى ٥ ريالات عُمانيّة عن كلّ ساعة عمل. يمكنك كتابة عبارة جبرية لتمثيل أجرة كلّ عامل منهم في صورة ٥ ح، حيث ح يُمثِّل عدد ساعات العمل. إذا عملت ساعة واحدة، ستحصل على ٥ × ١ = ٥ ريالات عُمانيّة. إذن، قيمة العبارة ٥ح هي ٥ في هذه الحالة. وإذا عملت ٦ ساعات، ستحصل على ٥ × ٦ = ٣٠ ريالاً عُمانيًّا. تبلغ قيمة العبارة ٥ح في هذه الحالة ٣٠

مثال ٢

أوجد قيمة ٣أ(أ + ب) عندما أ = ٢، ب = ٨

الحلّ:

٣أ(أ + ب) = ٣ × أ × (أ + ب)	أعد كتابة إشارات الضرب.
= ٣ × ٢ × (٢ + ٨)	عوّض عن قيمتَيْ أ، ب.
= ٦ × ١٠	في هذه الحالة، يمكنك إجراء خطوتَين في الوقت نفسه: الضرب خارج القوسين والجمع داخلهما.
= ٦٠	احسب الناتج.

سابقًا

تحتاج إلى تذكير نفسك على الدوام بقواعد ترتيب العمليات الحسابية.

مثال ٣

أكمل جدول القيَم للصيغة ب = ٣أ − ٣

أ	٠	١	٢	٣
ب				

الحلّ:

أ	٠	١	٢	٣
ب	−٣	٠	٣	٦

عوّض قيَم أ لتجد قيَم ب.

٣ × ٠ − ٣ = ٠ − ٣ = −٣

٣ × ١ − ٣ = ٣ − ٣ = ٠

٣ × ٢ − ٣ = ٦ − ٣ = ٣

٣ × ٣ − ٣ = ٩ − ٣ = ٦

رابط

يُحتمَل ألاّ تفكّر في الجبر عندما تراقب الرسوم المُتحرِّكة، أو عندما تُدخل صورًا في رسائلك الإلكترونية، أو عندما تلعب لعبًا إلكترونية على هاتفك أو حاسوبك، لكنّ مصمّمي الصور المُتحرِّكة يستخدمون موضوعات جبر مُعقَّدة لتحريك تلك الأشياء على الشاشة.

تمارين ٣-٢

١) أوجد قيمة كل عبارة جبرية عندما تكون س = ٣ في كلّ ممّا يلي:

أ) ٣س　　ب) ١٠س　　ج) ٤س − ٢

د) س^{٣}　　هـ) ٢س^{٢}　　و) ١٠ − س

ز) س^{٢} + ٧　　ح) س^{٣} + س^{٢}　　ط) ٢(س − ١)

ي) $\frac{٤\text{س}}{٣}$ ك) $\frac{٧\text{س}}{٢}$ ل) $\frac{٩٠}{\text{س}}$

م) $\frac{١٠\text{س}}{٦}$ ن) $\frac{(٤\text{س} + ٢)}{٧}$

بيّن على الدوام خطوات التعويض بوضوح. اكتب الصيغة أو العبارة في صورتها الجبريّة بعد تبديل الحروف بالأعداد المُناسبة. يبيّن ذلك لمُعلّمك أو لك وأنت في الامتحان، أنّك قد وضعت الأعداد الصحيحة في الأماكن المناسبة.

٢) أوجد قيمة كلّ من العبارات الجبريَّة التالية عندما تكون أ = ٣، ب = ٥، جـ = ٢:

أ) أ ب جـ   ب) $\text{أ}^{٢}\text{ب}$ ج) ٤أ + ٢جـ

د) ٣ب − ٢(أ + جـ)   هـ) $\text{أ}^{٢} + \text{جـ}^{٢}$ و) ٤ب − ٢أ + جـ

ز) أب + ب جـ + أجـ   ح) $٢(\text{أب})^{٢}$ ط) $٣(\text{أ} + \text{ب})$

ي) (ب − جـ) + (أ + جـ)   ك) (أ + ب) − (ب − جـ)   ل) $\frac{٣\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

م) $\frac{٤\text{ب}^{٢}}{\text{ب جـ}}$ ن) $\frac{٢(\text{أ} + \text{ب})}{\text{جـ}^{٢}}$ س) $\frac{٣\text{أ ب جـ}}{١٠\text{أ}}$

ع) $\frac{٦\text{ب}^{٢}}{(\text{أ} + \text{جـ})^{٢}}$ ف) $(\frac{١}{٢}\text{أ ب جـ})^{٢}$ ص) $\frac{٨\text{أ}}{٧\text{أ}^{٢} + \text{ب}}$

٣) أوجد قيمة ص في كلّ ممّا يلي عندما تكون:

(١) س = ٠   (٢) س = ٣   (٣) س = ٤   (٤) س = ١٠   (٥) س = ٥٠

أ) ص = ٤س   ب) ص = ٣س + ١   ج) ص = ١٠٠ − س

د) ص = $\frac{\text{س}}{٢}$ هـ) ص = $\text{س}^{٢}$ و) ص = $\frac{١٠٠}{\text{س}}$

ز) ص = ٢(س + ٢)   ح) ص = ٢(س + ٢) − ١٠   ط) ص = $٣\text{س}^{٢}$

٤) يبلغ سعر الفطيرة الواحدة ٣ ريالات عُمانيّة، وسعر صندوق العصير ريالَين عُمانيَّين:

أ) اكتب عبارة تُبيّن السعر الكليّ لشراء س فطائر، ص صناديق عصير.

ب) أوجد السعر الكلي لكلّ من الآتي:

(١) أربع فطائر وثلاثة صناديق عصير.

(٢) ٢٠ فطيرة و٢٠ صندوق عصير.

(٣) ١٠٠ فطيرة و٢٥ صندوق عصير.

٥) صيغة مُحيط المُستطيل هي ح = ٢(ط + ع)، حيث يمثّل ط طول المستطيل ويمثّل ع عرضه. أوجد محيط المستطيل عندما يكون:

أ) طول المُستطيل ١٢ سم وعرضه ٩ سم.

ب) طول المُستطيل ٢,٥ م وعرضه ١,٥ م.

ج) طول المُستطيل ٢٠ سم وعرضه نصف طوله.

د) عرض المُستطيل ٢ سم وطوله مُكعَّب عرضه.

٣-٣ تبسيط العبارات الجبريّة

تُسمّى أجزاء العبارة الجبرية حدودًا. تفصل بين كلّ حدَّين إحدى الإشارتين + أو −.
(أ + ب) عبارة جبرية تتألَّف من حدَّين، ولكن (أ ب) عبارة جبرية تتألَّف من حدّ واحد فقط،
و($٢ + \frac{أ^٣}{ب} - \frac{أب}{جـ}$) عبارة جبرية تتألَّف من ثلاثة حدود.

٣-٣-أ جمع الحدود المُتشابهة وطرحها

تُسمّى الحدود التي تتضمَّن المُتغيّرات والأسس المُرتبطة بها حدودًا مُتشابِهة. (٢أ) و (٤أ) حدّان مُتشابِهان؛ (٣س ص^٢) و (−س ص^٢) حدّان متشابهان.

لكي تكون الحدود مُتشابِهة، يجب أن تكون المُتغيِّرات والأسس المرتبطة بها مُتماثِلة.
لا تنسَ أن المُتغيِّرات المكتوبة بترتيب مختلف تعني الشيء نفسه، لذا، فإن (س ص) و(ص س) هما حدّان مُتشابِهان (س × ص = ص × س).

يمكن جمع الحدود المُتشابِهة وطرحها لتبسيط العبارات الجبريّة.

تذكّر أن الإشارتين ×، ÷ لا تفصلان بين الحدود. تذكّر أيضًا أن شرطة الكسر تعني القسمة، أي إن أجزاء الكسر جميعها تحسب حدًّا واحدًا، حتى وإن وُجدت إشارتا +، − في البسط أو المقام.

وبناءً على ذلك فإن $\frac{أ + ب}{جـ}$ حدّ واحد.

تذكّر أن العدد في الحدّ يُسمّى **مُعاملاً**. المُعامل في الحدّ ٢ أ هو العدد ٢؛ وفي الحدّ −٣أ^٣ ب هو −٣ الحدّ المكوّن من أعداد فقط يُسمى الثابت. إذن، الثابت في العبارة أ^٢ + ٤ هو العدد ٤

مثــال ٤

بسِّط كلاًّ من ممّا يلي:

أ) ٤أ + ٦ب + ٣أ ب) ٢ق + ٥ك + ٣ك − ٧ق ج) ٢أب + ٣أ^{٢}ب − أب + ٣أب^٢

الحــلّ:

أ	٤أ + ٦ب + ٣أ = ٧أ + ٦ب	عيّن الحدود المُتشابِهة (٤أ، ٣أ). اجمع مُعامِلَي الحدّين المتشابهين. اكتب الحدود بالترتيب الأبجديّ.
ب	٢ق + ٥ك + ٣ك − ٧ق = −٥ق + ٨ك	عيِّن الحدود المُتشابِهة (٢ق، −٧ق؛ ٥ك، ٣ك). اجمع المُعامِلات واطرحها. اكتب الحدود.
ج	٢أب + ٣أ^{٢}ب − أب + ٣أب^٢ = أب + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^٢	عيِّن الحدود المُتشابِهة؛ انتبه للحدود التي تتضمَّن التربيع لأن أ، أ^٢ ليسا متشابهَين. تذكّر أن أ ب تعني ١أ ب.

لاحظ أن إشارة '+' أو إشارة '−' التي تظهر في العبارة الجبريّة ترافق الحدّ الموجود إلى يسارها. فمثلاً: تتضمّن العبارة ٣س − ٤ص حدّين هما ٣س و −٤ص. إذا لم يسبق الحدّ أي إشارة، عندئذ تُعتبَر إشارته '+'.

لاحظ أنك تستطيع إعادة تنظيم الحدود شرط أن تتذكّر أن تأخذ إشارتي الـ '−' والـ '+' مع الحدود الموجودة إلى يسارها. مثلاً:
٣س − ٢ص + ٥ع
= ٣س + ٥ع − ٢ص
= ٥ع + ٣س − ٢ص
= −٢ص + ٣س + ٥ع

تمارين ٣-٣-أ

١) عيّن الحدود المُتشابِهة في كلّ مجموعة من المجموعات التالية:

أ ٦س، −٢ص، ٤س، س
ب س، −٣ص، $\frac{٣}{٤}$ص، −٥ص
ج أب، ٤ب، −٤ب أ، ٦أ
د ٢، −٢س، ٣س ص، ٣س، −٢ص
هـ ٥أ، ٥أب، أب، ٦أ، ٥
و −٢س ص، −ص س، −٢ص، ٣، ٣س

٢) بسّط كلاًّ ممّا يلي من خلال جمع الحدود المُتشابِهة أو طرحها:

أ ٢ص + ٦ص
ب ٩س − ٢س
ج ١٠س + ٣س
د ٢١س + س
هـ ٧س − ٢س
و ٤ص − ٤ص
ز ٩س−١٠س
ح ص − ٤ص
ط ٥س − س
ي ٩س ص − ٢س ص
ك ٦ق ك − ٢ك ق
ل ١٤س ص ع − س ص ع
م ٤س^{٢} − ٢س^{٢}
ن ٩ص^{٢} − ٤ص^{٢}
س ص^{٢} − ٢ص^{٢}
ع ١٤أب^{٢} − ٢أب^{٢}
ف ٩س^{٢}ص − ٤س^{٢}ص
ص ١٠س ص^{٢} − ٨س ص^{٢}

لاحقًا

يُفترض أن تكون قادرًا على تبسيط العبارات الجبريّة عند حلّ المُعادلات والمُتباينات، وعند تبسيط العبارات الجبريّة في دراستك للجبر.

٣) بسِّط كلاًّ ممّا يلي:

أ ٢س + ص + ٣س
ب ٤ص − ٢ص + ٤س
ج ٦س − ٤س + ٥س
د ١٠ + ٤س − ٦
هـ ٤س ص − ٢ص + ٢س ص
و ٥س^{٢} − ٦س^{٢} + ٢س
ز ٥س + ٤ص − ٦س
ح ٣ص + ٤س − س
ط ٤س + ٦ص + ٤س^{٢}
ي ٩س − ٢ص − س
ك ١٢س^{٢} − ٤س + ٢س^{٢}
ل ١٢س^{٢} − ٤س^{٢} + ٢س^{٢}
م ٥س ص − ٢س + ٧س ص
ن س ص − ٢س ع + ٧س ص
س ٣س^{٢} − ٢ص^{٢} − ٤س^{٢}
ع ٥س ص^{٢} + ٣س^{٢}ص − ٢س ص
ف ٤س ص − س + ٢ص س
ص ٥س ص − ٢ + س ص

٤) بسِّطْ العبارات الجبرية في كلّ ممّا يلي:

أ ٨ص − ٤ − ٦ص − ٤

ب س^{٢} − ٤س + ٣س^{٢} − س

ج ٥س + ص + ٢س + ٣ص

د ص^{٢} + ٢ص + ٣ص − ٧

هـ س^{٢} − ٤س − س + ٣

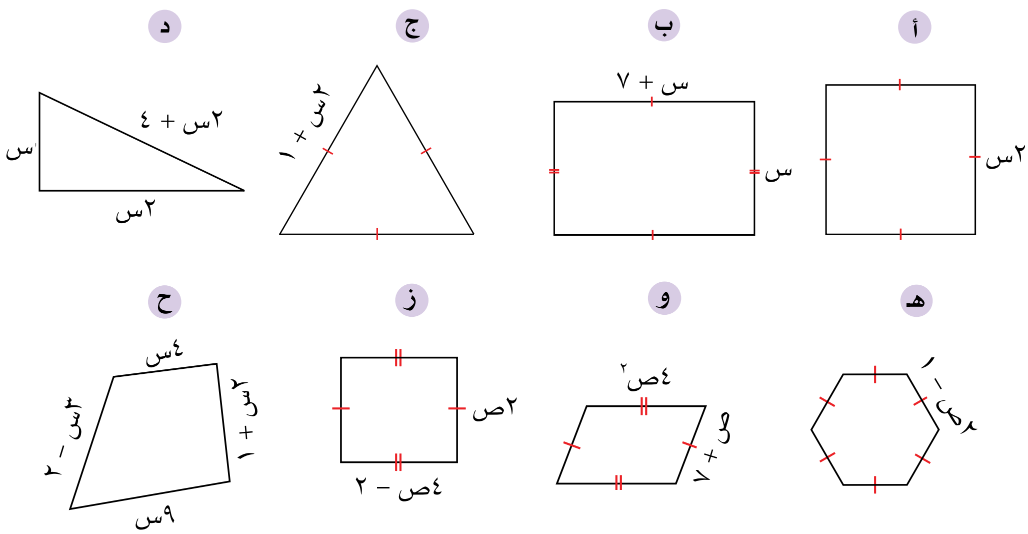
و س^{٢} + ٣س − ٧ + ٢س

ز ٤س ص ع − ٣س ص + ٢س ع − س ص ع

ح ٥س ص − ٤ + ٣ س ص − ٦

ط ٨س − ٤ − ٢س − ٣س^{٢}

٥) اكتب عبارة جبرية لمُحيط (ح) كلّ شكل، ثمّ بسّطها لتعطي (ح) في أبسط صورة مُمكنة:



٣-٣-ب ضرب العبارات الجبريّة وقسمتها

رُغم أن الإشارتَين ×، ÷ لا تفصلان بين الحدود، لا تزال العبارة الجبرية بحاجة إلى كتابتها في أبسط صورة ممكنة ليسهُل التعامُل معها.

مثـــال ٥

بسِّطْ كلاً ممّا يلي:

أ ٤س × ٣ص ب ٤أب × ٢ب جـ

الحـــلّ:

أ ٤س × ٣ص = ٤ × س × ٣ × ص	أدخل إشارات × المفقودة.
= ١٢ × س × ص	اضرب الأعداد.
= ١٢ س ص	اكتب الحد في أبسط صورة.

يمكنك ضرب الأعداد أولًا، ثمّ المُتغيّرات ثانيًا، لأن بالإمكان عكس الترتيب في الضرب دون أن تتغيّر الإجابة.

ب ٤أب × ٢ ب جـ = ٤ × أ × ب × ٢ × ب × جـ = ٨ × أ × ب × ب × جـ = ٨ أب^{٢} جـ	أدخل إشارات × المفقودة. اضرب الأعداد ثمّ اضرب المُتغيّرات. اكتب في أبسط صورة.

مثـــال ٦

بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي:

أ $\frac{\text{١٢س ص}}{\text{٣س}}$ **ب** $\frac{\text{٢س}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٤س}}{\text{٢}}$

الحـــلّ:

أ $\frac{\text{١٢س ص}}{\text{٣س}} = \frac{\overset{\text{٤}}{\cancel{\text{١٢}}}\cancel{\text{س}}\text{ ص}}{\underset{\text{١}}{\cancel{\text{٣}}}\cancel{\text{س}}} = \frac{\text{٤ × ص}}{\text{١}} = \text{٤ص}$	اقسم البسط والمقام على ٣ (إن جعل البسط والمقام أصغر، حتّى يصبح الكسر في أبسط صورة، يُسمّى التبسيط). بسّط ثمّ اضرب.
ب $\frac{\text{٢س}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٤س}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢ × س × ٤ × س}}{\text{٣ × ٢}}$ $= \frac{\overset{\text{٤}}{\cancel{\text{٨}}}\text{س}^{٢}}{\underset{\text{٣}}{\cancel{\text{٦}}}}$ $= \frac{\text{٤س}^{٢}}{\text{٣}}$	اضرب أوّلاً ثم بسِّطْ.
أو $\frac{\overset{\text{١}}{\cancel{\text{٢}}}\text{س}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٤س}}{\underset{\text{١}}{\cancel{\text{٢}}}} = \frac{\text{١س}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٤س}}{\text{١}} = \frac{\text{٤س}^{٢}}{\text{٣}}$	بسِّطْ أولاً ثمّ اضرب.

تمارين ٣-٣-ب

١) أوْجِد ناتج ضرب كلاًّ ممّا يلي:

أ ٢ × ٦س **ب** ٤ص × ٢ **ج** ٣م × ٤

د ٢س × ٣ص **هـ** ٤س × ٢ص **و** ٩س × ٣ص

ز ٨ص × ٣ع **ح** ٢س × ٣ص × ٢ **ط** ٤س ص × ٢س ص

ي ٤س ص × ٢س **ك** ٩ص × ٣س ص **ل** ٤ص × ٢س × ٣ص

م ٢أ × ٤أب **ن** ٣أب × ٤ب جـ **س** ٦أ ب جـ × ٢أ

ع ٨أ ب جـ × ٢أب **ف** ٤ × ٢أب × ٣جـ **ص** ١٢س^{٢} × ٢ × ٨ص^{٢}

٢) بسِّط كلاًّ ممّا يلي:

أ ٣ × ٢س × ٤
ب ٥س × ٢س × ٣ص
ج ٢س × ٣ص × ٢س ص
د س ص × س ع × س
هـ ٢ × ٢ × ٣س × ٤
و ٤ × ٢س × ٣س^{٢}ص
ز س × ص^{٢} × ٤س
ح ٢أ × ٣أب × ٢جـ
ط ١٠س × ٢ص × ٣
ي ٤ × س × ٢ × ص
ك ٩ × س^{٢} × س ص
ل ٤س ص^{٢} × ٢س^{٢}ص
م ٧س ص × ٢س ع × ٣ص ع
ن ٤س ص × ٢س^{٢}ص^{٢} × ٧
س ٩ × س ص ع × ٤س ص
ع ٣س^{٢}ص × ٢س ص^{٢} × ٣س ص
ف ٩س × ٢س ص × ٣س^{٢}
ص ٢س × س ص^{٢} × ٣س ص

٣) بسِّط كلاًّ ممّا يلي:

أ $\frac{\text{١٥س}}{\text{٣}}$
ب $\frac{\text{٤٠س}}{\text{١٠}}$
ج $\frac{\text{٢١س}}{\text{٧}}$
د $\frac{\text{٢١س ص}}{\text{٢س}}$
هـ $\frac{\text{١٤س ص}}{\text{٢ص}}$
و $\frac{\text{١٨س}^{٢}\text{ص}}{\text{٩س}^{٢}}$
ز $\frac{\text{١٠س ص}}{\text{٤٠س}}$
ح $\frac{\text{١٥س}}{\text{٦٠س ص}}$
ط $\frac{\text{٧س ص ض}}{\text{١٤س ص}}$
ي $\frac{\text{٦س ص}}{\text{س}}$
ك $\frac{\text{س}}{\text{٤س}}$
ل $\frac{\text{س}}{\text{٩س}}$

٤) بسِّط كلاًّ ممّا يلي:

أ ٨س ÷ ٢
ب ١٢س ص ÷ ٢س
ج ١٦س^{٢} ÷ ٤س ص
د ٢٤س ص ÷ ٣س ص
هـ ١٤س^{٢} ÷ ٢ص^{٢}
و ٢٤س ص ÷ ٨ص
ز ٨س ص ÷ ٢٤ص
ح ٩س ÷ ٣٦س ص
ط $\frac{\text{٧٧س ص}}{\text{١١س ص}}$
ي $\frac{\text{٤٥س ص}}{\text{٢٠س}}$
ك $\frac{\text{٦٠س}^{٢}\text{ص}^{٢}}{\text{١٥س ص}}$
ل $\frac{\text{١٠٠س ص}}{\text{٢٥س}^{٢}}$

٥) بسِّط العبارات الجبرية في كلّ ممّا يلي:

أ $\frac{\text{س}}{\text{٢}} \times \frac{\text{ص}}{\text{٣}}$
ب $\frac{\text{س}}{\text{٣}} \times \frac{\text{س}}{\text{٤}}$
ج $\frac{\text{س ص}}{\text{٢}} \times \frac{\text{٥س}}{\text{٣}}$
د $\frac{\text{٢س}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٥}}{\text{ص}}$
هـ $\frac{\text{٢س}}{\text{٤}} \times \frac{\text{٣ص}}{\text{٤}}$
و $\frac{\text{٥س}}{\text{٢}} \times \frac{\text{٥س}}{\text{٢}}$
ز $\frac{\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{٢ص}}{\text{س}}$
ح $\frac{\text{س ص}}{\text{٣}} \times \frac{\text{س}}{\text{ص}}$
ط $\text{٥ص} \times \frac{\text{٢س}}{\text{٥}}$
ي $\text{٤} \times \frac{\text{٢س}}{\text{٣}}$
ك $\frac{\text{س}}{\text{٦}} \times \frac{\text{٣}}{\text{٢س}}$
ل $\frac{\text{٥س}}{\text{٢}} \times \frac{\text{٤س}}{\text{١٠}}$

٣-٤ التعامُل مع الأقواس

٣-٤-أ فكّ الأقواس

عندما تتضمّن العبارة الجبرية أقواسًا، عليك التخلّص من الأقواس قبل أن تبسِّط العبارة. يُسمّى ذلك فكّ الأقواس (الضرب خارج الأقواس).

للتخلص من الأقواس، اضرب كل حد داخل القوس في العدد (أو المُتغيّر أو كليهما) خارج القوس. عندما تقوم بذلك عليك الانتباه للإشارات الموجبة والسالبة التي تقع قبل الحدود:

س(ص + ع) = س ص + س ع

س(ص − ع) = س ص − س ع

يُعتَبر فكّ الأقواس مجرّد عملية ضرب، لذا يمكنك أن تطبِّق على هذه الأمثلة القواعد نفسها التي استخدمتها من قبل في الضرب.

مثـــال ٧

فُكّ الأقواس لتبسيط العبارات التالية:

أ ٢(٢س + ٦)
ب ٤(٧ − ٢س)
ج ٢س(س + ٣ص)
د س ص(٢ − ٣س)

الحـــلّ:

أ ٢(٢س + ٦) = ٢ × ٢س + ٢ × ٦
= ٤س + ١٢

ب ٤(٧ − ٢س) = ٤ × ٧ − ٤ × ٢س
= ٢٨ − ٨س

ج ٢س(س + ٣ص) = ٢س × س + ٢س × ٣ص
= ٢س^{٢} + ٦س ص

د س ص(٢ − ٣س) = س ص × ٢ − س ص × ٣س
= ٢س ص − ٣س^{٢}ص

اتَّبع الخطوات الآتية عند الضرب في حدّ خارج القوسَين:

- اضرب الحدّ الذي يقع على اليمين داخل القوسين أولاً، كما هو موضّح بالسهم الأحمر المُسمّى (١).
- ثمّ اضرب الحدّ الذي يقع إلى اليسار داخل القوسين، كما هو موضّح بالسهم الأزرق المُسمّى (٢).
- اجمع أو اطرح الناتجين (١) و(٢)

تمارين ٣-٤-أ

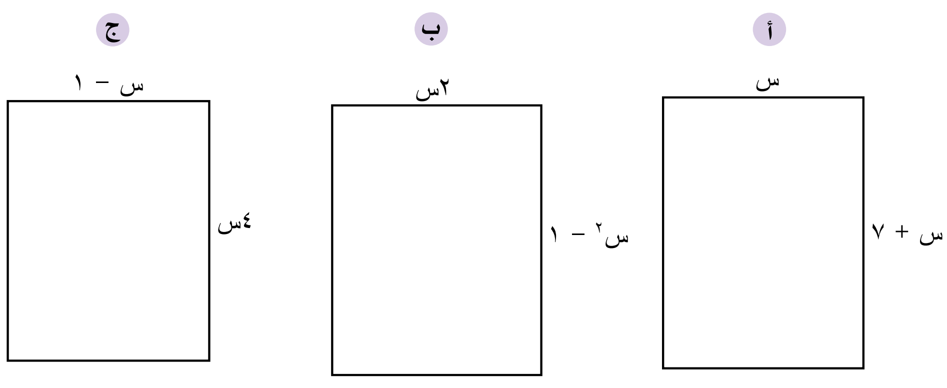
١) فُكَّ الأقواس في كلّ ممّا يلي:

أ ٢(س + ٦)	ب ٣(س + ٢)	ج ٤(٢س + ٣)
د ١٠(س − ٦)	هـ ٤(س − ٢)	و ٣(٢س − ٣)
ز ٥(ص + ٤)	ح ٦(٤ + ص)	ط ٩(ص + ٢)
ي ٧(٢س − ٢ص)	ك ٢(٣س − ٢ص)	ل ٤(س + ٤ص)
م ٥(٢س − ٢ص)	ن ٦(٣س − ٢ص)	س ٣(٤ص − ٢س)
ع ٤(ص − ٤س^{٢})	ف (س^{٢} − ص)	ص ٧(٤س + س^{٢})

٢) فُكَّ الأقواس في كلّ ممّا يلي:

أ ٢س (س + ص)	ب ٣ص (س − ص)	ج ٢س (س + ٢ص)
د ٤س (٣س − ٢ص)	هـ س ص (س − ص)	و ٣ص (٤س + ٢)
ز ٢س ص (٩ − ٤ص)	ح ٢ س^{٢} (٣ − ٢ص)	ط ٣س^{٢} (٤ − ٤س)
ي ٤س (٩ − ٢ص)	ك ٥ص (٢ − س)	ل ٣س (٤ − ص)
م ٢س^{٢} ص (ص − ٢س)	ن ٤س ص^{٢} (٣ − ٢س)	س ٣س ص^{٢} (س + ص)
ع س^{٢} ص (٢س + ص)	ف ٩س^{٢} (٩ − ٢س)	ص ٤س ص^{٢} (٣ − س)

٣) صيغة مساحة المستطيل هي م = الطول × العرض. اكتب صيغة للمساحة م بدلالة س لكلّ من المُستطيلات التالية. فُكَّ العبارة لتكتب م في أبسط صورة.



٣-٤-ب فكّ الحدود وتجميعها

عند فكّ الأقواس، قد تنتهي بحدود متشابهة. عندها، جمّع الحدود المُتشابِهة معًا واجمع أو اطرح الحدود لتكتب العبارة في أبسط صورة.

مثــال ٨

فُكّ الأقواس وبسِّط العبارة الجبرية حيث أمكن:

أ ٦(س + ٣) + ٤   ب ٢(٦س + ١) − ٢س + ٤   ج ٢س(س + ٣) + س(س − ٤)

الحــلّ:

أ	٦(س + ٣) + ٤ = ٦س + ١٨ + ٤ = ٦س + ٢٢	فُكَّ الأقواس. اجمع الحدود المُتشابِهة.
ب	٢(٦س + ١) − ٢س + ٤ = ١٢س + ٢ − ٢س + ٤ = ١٠س + ٦	فُكَّ الأقواس. اجمع الحدود المُتشابِهة أو اطرحها.
ج	٢س(س + ٣) + س(س − ٤) = ٢س^{٢} + ٦س + س^{٢} − ٤س = ٣س^{٢} +٢س	فُكَّ الأقواس. اجمع الحدود المُتشابِهة أو اطرحها.

تمارين ٣-٤-ب

١) فُكَّ الأقواس وبسِّط العبارة الجبرية في كلّ ممّا يلي:

أ ٢(٥ + س) + ٣س   ب ٣(ص − ٢) + ٤ص

ج ٢س + ٢(س − ٤)   د ٤س + ٢(س − ٣)

هـ ٢س(٤ + س) − ٥   و ٤(س + ٢) − ٧

ز ٦ + ٣(س − ٢)   ح ٤س + ٢(٢س + ٣)

ط ٢س + ٣ + ٢(٢س + ٣)   ي ٣(٢س + ٢) − ٣س − ٤

ك ٦س + ٢(س + ٣)   ل ٧ص + ص(س − ٤) − ٤

م ٢س(س + ٤) − ٤   ن ٢ص(٢س − ٢ص + ٤)

س ٢ص(٥ − ٤ص) − ٤ص^{٢} ع ٣س(٢س + ٤) − ٩

ف ٣ص(ص + ٢) −٤ص^{٢} ص ٢(س − ١) + ٤س − ٤

٢) بسِّط العبارات التالية بفكّ الأقواس وتجميع الحدود المُتشابِهة:

- أ ٤(س + ٤٠) + ٢(س − ٣)
- ب ٢(س − ٢) + ٢(س + ٣)
- ج ٣(س + ٢) + ٤(س + ٥)
- د ٨ (س + ١٠) + ٤(٣ − ٢س)
- هـ ٤(س^{٢} + ٢) + ٢(٤ − س^{٢})
- و ٤س (س + ١) + ٢س(س + ٣)
- ز ٣س (٤ص − ٤) + ٤(٣س ص + ٤س)
- ح ٢س (٥ص − ٤) + ٢(٦س − ٤س ص)
- ط ٣س (٤ − ٨ص) + ٣(٢س ص − ٥س)
- ي ٣(٦س − ٤ص) + س (٣ − ٢ص)
- ك ٣س^{٢}(٤ − س) + ٢(٥س^{٢} − ٢س^{٣})
- ل س (س − ص) + ٣(٢س − ص)
- م ٤(س − ٢) + ٣س (٤ − ص)
- ن س (س + ص) + س (س − ص)
- س ٢س (س + ص) + ٢(س^{٢} + ٣س ص)
- ع س (٢س + ٣) + ٣(٥ − ٢س)
- ف ٤(٢س − ٣) + (س − ٥)
- ص ٣(٤س ص − ٢س) + ٥(٣س − س ص)

٣-٥ الأُسس

جمع 'أس' هو 'أُسس'

أصبحتَ الآن تعرف كيف تُكتب القوى الثانية والثالثة باستخدام الأسس:

$٥ \times ٥ = ٥^{٢}$ ، ص × ص = $ص^{٢}$

$٥ \times ٥ \times ٥ = ٥^{٣}$ ، ص × ص × ص = $ص^{٣}$

عندما تكتب عددًا باستخدام الأسس (القوى)، تكون قد كتبته بالصيغة الأُسّية. يمكن لأيّ من الأعداد أن يُستخدَم كأسّ، بما فيها الصفر والأعداد الصحيحة السالبة، والكسور.

يخبرك الأسّ عن عدد المرّات التي تم فيها ضرب **الأساس** في نفسه. أي إن:

أ × أ × أ × أ × أ = $أ^{٥}$

القوى تعبير آخر عن 'الأسس'. يمكن إحلال أحدهما محل الآخر، لكن تعبير 'الأس' مستخدم أكثر في هذا الكتاب.

مثـــال ٩

اكتب كلّ عبارة مُستخدِمًا الصيغة الأُسّيّة:

أ س × س × س × س **ب** س × س × س × ص × ص × ص × ص

الحــلّ:

أ	س × س × س × س = $س^{٤}$	أوجد عدد المرّات التي تم فيها ضرب س في نفسه، ليعطيَك قيمة الأسّ.
ب	س × س × س × ص × ص × ص × ص = $س^{٣}ص^{٤}$	أوجد عدد المرّات التي تم فيها ضرب س في نفسه ليعطيَك قيمة الأسّ للمُتغيِّر س، ثم أوجد قيمة الأسّ للمُتغيِّر ص باستخدام الطريقة نفسها.

عندما تكتب القوى في صورة ناتج ضرب، فإنك تكتبها بالصيغة التفصيلية.

٣-٥أ قوانين الأسس

تُعدّ قوانين الأسس من القوانين المُهمّة جدًّا في الجبر، لأنها تدلُّك على طرائق سريعة لتبسيط العبارات الجبريّة. سوف تستخدم هذه القوانين أكثر فأكثر كلما تعمّقت في تعلّم الجبر. لذا من المهم أن تفهم تلك القوانين وأن تكون قادرًا على تطبيقها في مواقف مختلفة.

جمع الأسس

انظر إلى عمليتَي الضرب التاليتَين:

$٣^{٢} \times ٣^{٤}$ ، $س^{٤} \times س^{٣}$

في عمليّة الضرب الأولى، 'الأساس' هو ٣، وفي عمليّة الضرب الثانيّة 'الأساس' هو س.

أنت تعرف من قبل أنك تستطيع تبسيط هاتَين العمليتَين عبر تفكيكهمّا على النحو الآتي:

$\overbrace{٣ \times ٣}^{٣^{٢}} \times \overbrace{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣}^{٣^{٤}} = ٣^{٦}$ ، $\overbrace{س \times س \times س \times س}^{س^{٤}} \times \overbrace{س \times س \times س}^{س^{٣}} = س^{٧}$

بطريقة أخرى:

$٣^{٢} \times ٣^{٤} = ٣^{٢ + ٤} = ٣^{٦}$ ، $س^{٤} \times س^{٣} = س^{٤ + ٣} = س^{٧}$

يقود ذلك إلى قانون ضرب الأسس:

> عندما تضرب عبارات أُسّية لها الأساس نفسه، يمكنك جمع الأسس: $س^{م} \times س^{ن} = س^{م + ن}$

مثـــال ١٠

بسِّطْ كلاً ممّا يلي:

أ $٥^{٣} \times ٥^{٦}$ ب $س^{٢} \times س^{٣}$ ج $٢س^{٢}ص \times ٣س ص^{٤}$

الحـــلّ:

أ	$٥^{٣} \times ٥^{٦} = ٥^{٣+٦} = ٥^{٩}$	اجمع الأسس.
ب	$س^{٢} \times س^{٣} = س^{٢+٣} = س^{٥}$	اجمع الأسس.
ج	$٢س^{٢}ص \times ٣س ص^{٤} = ٢ \times ٣ \times س^{٢+١} \times ص^{١+٤}$ $= ٦س^{٣}ص^{٥}$	اضرب الأعداد أوّلاً، ثمّ اجمع أُسس المُتغيِّرات المُتشابِهة.

> تذكَّر عندما يكون أسّ العدد (١) فإنه عادة لا يكتب. إذن، س تعني $س^{١}$ وص تعني $ص^{١}$.

طرح الأسس

انظر إلى عمليتَي القسمة التاليتَين:

$٣^{٤} \div ٣^{٢}$ ، $س^{٦} \div س^{٢}$

أنت تعرف من قبل أنك تستطيع تبسيط هاتَين العبارتَين بعد كتابتهما بالصورة التفصيلية، ثمّ تبسيطهما كما يأتي:

$\dfrac{\cancel{٣} \times \cancel{٣} \times ٣ \times ٣}{\cancel{٣} \times \cancel{٣}}$ $\dfrac{\cancel{س} \times \cancel{س} \times س \times س \times س \times س}{\cancel{س} \times \cancel{س}}$

$= ٣ \times ٣$ $= س \times س \times س \times س$

$= ٣^{٢}$ $= س^{٤}$

بطريقة أخرى:

$٣^{٤} \div ٣^{٢} = ٣^{٤ - ٢} = ٣^{٢}$ ، $س^{٦} \div س^{٢} = س^{٦ - ٢} = س^{٤}$

يقود ذلك إلى قانون قسمة الأسس:

> عندما تقسم عبارات أُسّية لها الأساس نفسه، يمكنك طرح الأسس: $س^{م} \div س^{ن} = س^{م - ن}$

مثـــال ١١

بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي:

أ $\text{س}^{٧} \div \text{س}^{٢}$ ب $\frac{٦\text{س}^{٥}}{٣\text{س}^{٢}}$ ج $\frac{١٠\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢}}{٥\text{س ص}}$

الحـلّ:

أ	$\text{س}^{٧} \div \text{س}^{٢} = \text{س}^{٧-٢} = \text{س}^{٥}$	اطرح الأُسس.
ب	$\frac{٦\text{س}^{٥}}{٣\text{س}^{٢}} = \frac{٦}{٣} \times \frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٢}} = \frac{٢}{١} \times \text{س}^{٥-٢} = ٢\text{س}^{٣}$	اقسم (بسط) المُعامِلات. اطرح الأُسس.
ج	$\frac{١٠\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢}}{٥\text{س ص}} = \frac{١٠}{٥} \times \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}} \times \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ص}}$	اقسم المُعامِلات.
	$= \frac{٢}{١} \times \text{س}^{٣-١} \times \text{ص}^{٢-١}$	اطرح الأُسس.
	$= ٢\text{س}^{٢}\text{ص}$	

تذكّر أن 'المُعامل' هو العدد الذي يقع إلى جانب المُتغيّر في الحدّ.

الأُس صفر (٠)

يجب أن تتذكَّر أن ناتج قسمة أيّ قيمة على نفسها يساوي ١

لذا فإن $٣ \div ٣ = ١$، $\text{س} \div \text{س} = ١$، $\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٤}} = ١$

إذا استخدمنا قانون قسمة الأُسس، سنرى أن:

$$\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٤}} = \text{س}^{٤-٤} = \text{س}^{٠}$$

يقود ذلك إلى قانون الأُسّ (٠):

أيّ قيمة مرفوعة إلى الأسّ (٠) تساوي ١. إذن، $\text{س}^{٠} = ١$

تقنيًّا، هناك استثناء لهذا القانون عندما تكون س = ٠ وإلى الآن نقول إن $٠^{٠}$ غير معرَّف.

قانون قوى القوى

انظر إلى المثالَين الآتيَين:

$$(\text{س}^{٣})^{٢} = \text{س}^{٣} \times \text{س}^{٣} = \text{س}^{٣+٣} = \text{س}^{٦}$$

$$(٢\text{س}^{٣})^{٤} = ٢\text{س}^{٣} \times ٢\text{س}^{٣} \times ٢\text{س}^{٣} \times ٢\text{س}^{٣} = ٢^{٤} \times \text{س}^{٣+٣+٣+٣} = ١٦\text{س}^{١٢}$$

عند كتابة المثالَين في الصورة التفصيلية، يمكن مُلاحَظة أن $(\text{س}^{٣})^{٢} = \text{س}^{٦}$ وأن $(٢\text{س}^{٣})^{٤} = ١٦\text{س}^{١٢}$

يقود ذلك إلى قانون قوى القوى:

عندما نرفع قوى إلى قوى أُخرى، فإننا نضرب الأُسس: $(\text{س}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{م ن}}$

مثـــال ١٢

بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي:

أ $(س^{٣})^{٦}$ ب $(٣س^{٤}ص^{٣})^{٢}$ ج $(س^{٣})^{٤} \div (س^{٦})^{٢}$

الحـــلّ:

أ	$(س^{٣})^{٦} = س^{٣\times٦}$ $= س^{١٨}$	اضرب الأُسس.
ب	$(٣س^{٤}ص^{٣})^{٢}$ $= ٣^{٢} \times س^{٤\times٢} \times ص^{٣\times٢}$ $= ٩س^{٨}\ ص^{٦}$	اضرب الأس الخارجي في الأس الداخلي لكل مُعامِل ومُتغيِّر للتخلُّص من الأقواس، واضرب الأُسس.
ج	$(س^{٣})^{٤} \div (س^{٦})^{٢}$ $= س^{٣\times٤} \div س^{٦\times٢}$ $= س^{١٢} \div س^{١٢}$ $= س^{١٢-١٢}$ $= س^{٠}$ $= ١$	فكّ الأقواس أولاً عبر ضرب الأُسس. اطرح الأُسس.

الخطأ الشائع هنا هو عدم أخذ الأُسّ للحدود العدديّة. مثلاً، في الجزئية (ب)، يجب إيجاد مربَّع العدد '٣' ليعطي العدد '٩'.

تمارين ٣-٥-أ

١) بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي:

أ $٣^{٢} \times ٣^{٦}$ ب $٤^{٢} \times ٤^{٩}$ ج $٨^{٢} \times ٨^{٠}$ د $س^{٩} \times س^{٤}$

هـ $ص^{٢} \times ص^{٧}$ و $ص^{٣} \times ص^{٤}$ ز $ص \times ص^{٥}$ ح $س \times س^{٤}$

ط $٣س^{٤} \times ٢س^{٣}$ ي $٣ص^{٢} \times ٣ص^{٤}$ ك $٢س \times س^{٣}$ ل $٣س^{٣} \times ٢س^{٤}$

م $٥س^{٣} \times ٣$ ن $٨س^{٤} \times س^{٣}$ س $٤س^{٦} \times ٢س$ ع $س^{٣} \times ٤س^{٥}$

٢) بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي:

أ $س^{٦} \div س^{٤}$ ب $س^{١٢} \div س^{٣}$ ج $ص^{٤} \div ص^{٣}$ د $س^{٣} \div س$ هـ $\frac{س^{٥}}{س}$

و $\frac{س^{٦}}{س^{٤}}$ ز $\frac{٦س^{٥}}{٢س^{٣}}$ ح $\frac{٩س^{٧}}{٣س^{٤}}$ ط $\frac{١٢ص^{٢}}{٣ص}$ ي $\frac{٣س^{٤}}{٦س^{٣}}$

ك $\frac{١٥س^{٣}}{٥س^{٣}}$ ل $\frac{٩س^{٤}}{٣س^{٣}}$ م $\frac{٣س^{٣}}{٩س^{٤}}$ ن $\frac{١٦س^{٢}ص^{٢}}{٤س\ ص}$ س $\frac{١٢س^{٢}ص}{١٢س\ ص^{٢}}$

٣) بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي:

أ $(س^{٢})^{٢}$	**ب** $(س^{٢})^{٣}$	**ج** $(س^{٢})^{٦}$
د $(ص^{٣})^{٢}$	**هـ** $(٢س^{٢})^{٥}$	**و** $(٣س^{٢}ص^{٢})^{٢}$
ز $(س^{٤})^{٠}$	**ح** $(٥س^{٢})^{٣}$	**ط** $(س^{٢}ص^{٢})^{٣}$
ي $(س^{٢}ص^{٤})^{٥}$	**ك** $(س\,ص^{٤})^{٣}$	**ل** $(٤س\,ص^{٢})^{٢}$
م $(٣س^{٢})^{٤}$	**ن** $(س\,ص^{٦})^{٤}$	**س** $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٢^{٠}}$

٤) استخدم قانون الأُسس المُناسِب لتبسيط العبارات التالية:

أ $٢س^{٢} \times ٣س^{٢} \times ٢س$	**ب** $٤ \times ٢س \times ٣س^{٢}ص$
ج $٤س \times س \times س^{٢}$	**د** $(س^{٢})^{٢} \div (٤س^{٢})$
هـ $١١س^{٣} \times ٤(أ^{٢}ب)^{٢}$	**و** $٤س\,(س^{٢} + ٧)$
ز $س^{٢}\,(٤س - س^{٣})$	**ح** $س^{٨} \div (س^{٣})^{٢}$
ط $٧س^{٢}ص^{٢} \div (س^{٣}ص)^{٢}$	**ي** $\frac{(٤س^{٢} \times ٣س^{٤})}{٦س^{٤}}$
ك $\left(\frac{س^{٤}}{ص^{٢}}\right)^{٣}$	**ل** $\frac{س^{٨} \times (س\,ص^{٢})^{٤}}{(٢س^{٢})^{٤}}$
م $(٨س^{٢})^{٠}$	**ن** $٤س^{٢} \times ٢س^{٣} \div (٢س)^{٠}$
س $\frac{(٤س^{٢}ص^{٣})^{٢}}{(٢س\,ص)^{٣}}$	

عند وجود مزيج من المُعاملات والمُتغيّرات، تعامَل مع المُعامِلات أوّلًا، ثم طبِّق قوانين الأُسس على المُتغيّرات، مُراعيًا الترتيب الأبجدي.

٣-٥-ب الأُسس السالبة

درست سابقًا أن بالإمكان استخدام الأعداد السالبة للتعبير عن الأُسس. ولكن ماذا يعني عندما يكون الأُسّ سالبًا؟

انظر إلى الطريقتَين المعروضتَين أدناه لإيجاد $س^{٣} \div س^{٥}$.

بلغة مباشرة، يمكن القول إن العدد المرفوع إلى أُسّ سالب يساوي ١ مقسومًا على العدد مرفوعًا إلى الأسّ الموجب نفسه. أي يمكن كتابة $ب^{-٢}$ في صورة مقلوب $ب^{٢}$، أيّ $ب^{-٢} = \frac{١}{ب^{٢}}$.

استخدام الصورة التفصيلية:

$$س^{٣} \div س^{٥} = \frac{س \times س \times س}{س \times س \times س \times س \times س}$$

$$= \frac{١}{س \times س}$$

$$= \frac{١}{س^{٢}}$$

استخدام قانون قسمة الأسس:

$$س^{٣} \div س^{٥} = س^{٣-٥}$$

$$= س^{-٢}$$

يُثبِت ذلك أن $\frac{١}{س^{٢}} = س^{-٢}$. ويُعطي أيضًا قاعدة للتعامُل مع الأُسس السالبة:

$$\boxed{س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}\ (\text{حيث } س \neq ٠)}$$

عندما تتضمَّن العبارة أُسسًا سالبة، طبِّق قوانين الأسس الأُخرى نفسها لتبسيطها.

لاحقًا

هذه أمثلة بسيطة. عندما تتعلم أكثر عن التعامل مع الأعداد الموجَّهة لاحقًا، ستطبِّق ما تعلَّمته لتبسيط عبارات أكثر تعقيدًا.

مثال ١٣

١) أوجد قيمة كلٍّ ممّا يلي:

أ $٤^{-٢}$ ب $٥^{-١}$

الحلّ:

أ $٤^{-٢} = \frac{١}{٤^{٢}} = \frac{١}{١٦}$

ب $٥^{-١} = \frac{١}{٥^{١}} = \frac{١}{٥}$

٢) اكتب كلاًّ من العبارات التالية مُستخدِمًا أسًّا موجبًا:

أ $س^{-٤}$ ب $ص^{-٣}$

الحلّ:

أ $س^{-٤} = \frac{١}{س^{٤}}$

ب $ص^{-٣} = \frac{١}{ص^{٣}}$

٣) بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي. اكتب الإجابة باستخدام أُسس موجبة:

أ $\frac{٤س^{٢}}{٢س^{٤}}$ ب $٢س^{-٢} \times ٣س^{-٤}$ ج $(٣ص^{٢})^{-٣}$

الحلّ:

أ $\frac{٤س^{٢}}{٢س^{٤}} = \frac{٤}{٢} \times س^{٢-٤}$

$= ٢س^{-٢}$

$= \frac{٢}{س^{٢}}$

ب $٢س^{-٢} \times ٣س^{-٤}$

$= \frac{٢}{س^{٢}} \times \frac{٣}{س^{٤}}$

$= \frac{٦}{س^{٢+٤}}$

$= \frac{٦}{س^{٦}}$

ج $(٣ص^{٢})^{-٣} = \frac{١}{(٣ص^{٢})^{٣}}$

$= \frac{١}{٣^{٣} \times ص^{٢\times٣}}$

$= \frac{١}{٢٧ص^{٦}}$

تمارين ٣-٥-ب

١) أوجِدْ قيمة كلٍّ ممّا يلي:

أ $٤^{-١}$ ب $٣^{-١}$ ج $٨^{-١}$ د $٥^{-٣}$ هـ $٦^{-٢}$ و $٢^{-٥}$

٢) أي جُملة من الجُمَل الآتية صحيحة؟

أ $٤^{-٢} = \frac{١}{١٦}$ ب $٨^{-٢} = \frac{١}{١٦}$ ج $س^{-٣} = \frac{١}{س^{٣}}$ د $٢س^{-٢} = \frac{١}{س}$

٣) أعد كتابة كلّ عبارة باستخدام أُسس موجبة فقط:

أ $س^{-٣}$ ب $ص^{-٣}$ ج $(س ص)^{-٢}$ د $٢س^{-٢}$

هـ $١٢س^{-٣}$ و $٧ص^{-٣}$ ز $٨س ص^{-٣}$ ح $١٢س^{-٣}ص^{-٤}$

٤) بسِّط كلاًّ ممّا يلي. اكتب إجابتك باستخدام أُسس موجبة فقط:

أ $س^{-٣} \times س^{٤}$ **ب** $٢س^{-٣} \times ٣س^{-٣}$ **ج** $٤س^{٣} \div ١٢س^{٧}$ **د** $\frac{س^{-٧}}{س^{٤}}$

هـ $(٢س^{٢})^{-٣}$ **و** $(س^{-٢})^{٣}$ **ز** $\frac{س^{-٣}}{س^{-٤}}$ **ح** $\frac{س^{-٢}}{س^{٣}}$

٣-٥-ج الأُسس الكسرية

تُطبَّق قوانين الأُسس أيضًا عندما يكون الأسّ كسرًا. انظر إلى الأمثلة الآتية بعناية لتدرك معنى الأُسس الكسريّة في الجبر:

- $س^{\frac{١}{٢}} \times س^{\frac{١}{٢}}$

  $= س^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}}$ استخدم قانون ضرب الأُسس.

  $= س^{١}$

  $= س$

  لتفهم معنى $س^{\frac{١}{٢}}$، اسأل نفسك عن العدد الذي إذا ضُرب في نفسه يُعطي س.

  $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = س$، حيث س أكبر من أو يساوي الصفر

  $\therefore س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$

- $ص^{\frac{١}{٣}} \times ص^{\frac{١}{٣}} \times ص^{\frac{١}{٣}}$

  $= ص^{\frac{١}{٣}+\frac{١}{٣}+\frac{١}{٣}}$ استخدم قانون ضرب الأُسس.

  $= ص^{١}$

  $= ص$

  ما العدد الذي إذا ضُرب في نفسه، ثمّ ضُرِب الناتج في العدد نفسه مرّة ثانية، يُعطي النتيجة ص؟

  $\sqrt[٣]{ص} \times \sqrt[٣]{ص} \times \sqrt[٣]{ص} = ص$

  $\therefore ص^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{ص}$

يُبيّن ذلك أن أيّ جذر لعدد يمكن كتابته باستخدام الأُسس الكسريّة. $\therefore س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

مثـــال ١٤

١) أعد كتابة كلٍّ مما يلي مُستخدِمًا رموز الجذور:

أ $ص^{\frac{١}{٢}}$ **ب** $س^{\frac{١}{٥}}$ **ج** $س^{\frac{١}{ص}}$

الحــلّ:

أ $ص^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{ص}$ **ب** $س^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{س}$ **ج** $س^{\frac{١}{ص}} = \sqrt[ص]{س}$

٢) اكتب ما يلي مُستخدِمًا الصيغة الأسيّة:

أ $\sqrt{٩٠}$ ب $\sqrt[٣]{٦٤}$ ج $\sqrt[٤]{س}$ د $\sqrt[٥]{(س - ٢)}$

الحــلّ:

أ $\sqrt{٩٠} = ٩٠^{\frac{١}{٢}}$

ب $\sqrt[٣]{٦٤} = ٦٤^{\frac{١}{٣}}$

ج $\sqrt[٤]{س} = س^{\frac{١}{٤}}$

د $\sqrt[٥]{(س - ٢)} = (س - ٢)^{\frac{١}{٥}}$

قد تتعامل أحيانًا مع أُسس كسريّة غير كسور الوحدة، مثل $س^{\frac{٢}{٣}}$ أو $ص^{\frac{٣}{٤}}$. لتجد قاعدة للتعامُل مع تلك الأُسس، عُد إلى قانون الأُسس عند رفع القوى إلى قوى أُخرى. مثلاً:

$س^{\frac{٢}{٣}} = (س^{\frac{١}{٣}})^{٢}$ $\qquad \frac{١}{٣} \times ٢ = \frac{٢}{٣}$

$ص^{\frac{٣}{٤}} = (ص^{\frac{١}{٤}})^{٣}$ $\qquad \frac{١}{٤} \times ٣ = \frac{٣}{٤}$

كسر الوحدة هو كسر بسطه (العدد في الأعلى) العدد ١. مثلًا: $\frac{٢}{٣}$ و $\frac{٥}{٧}$ ليسا كسرَيْ وحدة.

عرفت من قبل أن الأُسّ في صورة كسر الوحدة يتمثّل بجذر. لذا يمكننا إعادة كتابة هاتَين العبارتَين باستخدام رموز الجذور.

يمكن هنا أن تعكس ترتيب الحسابات، وستكون النتيجة نفسها: $س^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{٢٧})^{م} = \sqrt[ن]{٢٧^{م}}$، لكن الصيغة الأولى أفضل للحلّ.

بشكل عام: $س^{\frac{م}{ن}} = س^{م \times \frac{١}{ن}} = (س^{\frac{١}{ن}})^{م} = (\sqrt[ن]{س})^{م}$

مُلخَّص قوانين الأُسس

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$	عند ضرب الحدود اجمع الأُسس.
$س^{م} \div س^{ن} = س^{م-ن}$	عند قسمة الحدود اطرح الأُسس.
$(س^{م})^{ن} = س^{م ن}$	عند إيجاد قوى القوى اضرب الأُسس.
$س^{٠} = ١$	أيّ قيمة مرفوعة لقوى ٠ تساوي ١
$س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$	(حيث $س \neq ٠$)

مثــال ١٥

بسِّطْ كلاً ممّا يلي:

أ $٢٧^{\frac{٢}{٣}}$ ب $٦٢٥^{٠,٥}$

الحــلّ:

أ $٢٧^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{٢٧})^{٢}$
$= (٣)^{٢}$
$= ٩$

$\frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣} \times ٢$، إذن أوجد مُربّع الجذر التكعيبي للعدد ٢٧

ب $٢٥^{١,٥} = ٢٥^{\frac{٣}{٢}}$

$= (\sqrt{٢٥})^{٣}$

$= (٥)^{٣}$

$= ١٢٥$

حوّل العدد العُشريّ إلى كسر.

$\frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢} \times ٣$، إذن تحتاج إلى إيجاد مكعّب الجذر التربيعيّ للعدد ٢٥

تمارين ٣-٥-ج

١) أوجد قيمة كلٍّ ممّا يلي:

أ $٨^{\frac{١}{٣}}$ **ب** $٣٢^{\frac{١}{٥}}$ **ج** $٨^{\frac{٤}{٣}}$ **د** $٢١٦^{\frac{٢}{٣}}$ **هـ** $٢٥٦^{٠,٧٥}$

٢) بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي:

أ $\text{س}^{\frac{١}{٢}} \times \text{س}^{\frac{١}{٣}}$ **ب** $\text{س}^{\frac{١}{٢}} \times \text{س}^{\frac{٢}{٣}}$ **ج** $\left(\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{١٠}}\right)^{\frac{١}{٢}}$ **د** $\left(\frac{\text{س}^{٦}}{\text{ص}^{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}}$

هـ $\frac{\text{س}^{\frac{٦}{٧}}}{\text{س}^{\frac{٢}{٧}}}$ **و** $\frac{٧}{٨}\text{س}^{\frac{١}{٢}} \div \left(\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{٣}{٢}}\right)$ **ز** $\frac{٢\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}{\text{س}^{\frac{٨}{٣}}}$ **ح** $\frac{٩\text{س}^{\frac{١}{٣}}}{١٢\text{س}^{\frac{٤}{٣}}}$

ط $\frac{١}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}} \div (٢\text{س}^{٢})$ **ي** $-\frac{١}{٢}\text{س}^{\frac{٣}{٤}} \div (-٢\text{س}^{-\frac{١}{٤}})$ **ك** $\frac{٣}{٤}\text{س}^{\frac{١}{٢}} \div \left(\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٤}}\right)$ **ل** $-\frac{١}{٤}\text{س}^{\frac{٣}{٤}} \div (-٢\text{س}^{-\frac{١}{٤}})$

تذكَّر أن كلمة بسِّط تعني الكتابة في أبسط صورة. لكي تبسِّط

$\text{س}^{\frac{١}{٥}} \times \text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

اكتب:

$= \text{س}^{\frac{١}{٥} - \frac{١}{٢}}$

$= \text{س}^{\frac{٢}{١٠} - \frac{٥}{١٠}}$

$= \text{س}^{-\frac{٣}{١٠}}$

$= \frac{١}{\text{س}^{\frac{٣}{١٠}}}$

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- يتضمّن الجبر قوانين خاصّة تسمح لنا بكتابة المعلومات الرياضيّة بطُرق مختصرة.
- تُسمّى الحروف في الجبر مُتغيِّرات ويُسمّى العدد الذي يسبق المُتغيِّر مُباشرة مُعامِلاً وتُسمّى الأعداد المُنفردة لوحدها ثوابت.
- المُتغيِّر حرف أو رمز يُستخدَم في المعادلة أو الصيغة لتمثيلِ عدَّة قيم.
- تُسمّى مجموعة الأعداد والمُتغيّرات حدودًا. ويفصل بين الحدود إشارتا +، −، ولا تفصل الإشارتان × أو ÷ بينها.
- 'الحدود المُتشابِهة' تتألف من نفس المُتغيِّرات والقوى. يمكنك جمع الحدود المُتشابِهة وطرحها. ويمكنك ضرب الحدود المُتشابِهة وغير المُتشابِهة وقسمتها.
- تُطبَّق قوانين ترتيب العمليات الحسابية في الجبر بالطريقة نفسها التي تُطبَّق فيها على الأعداد.
- يُسمّى التخلُّص من الأقواس (إجراء عملية الضرب) فكَّ العبارة الجبرية. ويُسمّى تجميع الحدود المُتشابِهة تبسيط العبارة.
- تُسمّى القوى أيضًا الأُسس. ويدلّ الأُسّ على عدد المرّات التي يتم فيها ضرب المُتغيِّر في نفسه.
- قوانين الأُسس هي مجموعة من القواعد لتبسيط عبارات جبرية تتضمَّن أُسسًا. وتُطبَّق هذه القوانين على الأُسس الموجبة والسالبة والصفر والأسس الكسريّة.
- فكّ القوسين يعني ضرب كل الحدود داخل القوسَين بالحد الذي يقع خارجهما.

يجب أن تكون قادرًا على:

- استخدام الحروف لتمثيل الأعداد.
- كتابة عبارات لتمثيل المعلومات الرياضيّة.
- إيجاد قيمة عبارة جبرية من خلال التعويض بأعداد محلّ الحروف (المُتغيِّرات).
- جمع الحدود المُتشابِهة وطرحها لتبسيط العبارات الجبرية.
- ضرب الحدود وقسمتها لتبسيط العبارات.
- فكّ العبارات بالتخلُّص من الأقواس ومن رموز التجميع الأُخرى.
- استخدام الأُسس الموجبة والسالبة والصفرية وفهمها.
- تطبيق قوانين الأُسس لتبسيط العبارات الجبرية
- التعامُل مع الأُسس الكسريّة.

تمارين نهاية الوحدة

١) اكتب عبارة جبرية بدلالة ن لكل من الجمل التالية:

أ مجموع عدد مع ١٢

ب ضعف عدد ناقص أربعة

ج مُربَّع ناتج ضرب عدد في العدد س

د تكعيب مُربَّع عدد ما

٢) بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي:

أ ٩س ص + ٣س + ٦س ص − ٢س

ب ٦س ص − س ص + ٣ص

٣) بسِّطْ كلاًّ ممّا يلي:

أ $\frac{\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٤}}{\text{أب}^{٣}}$

ب $٢(\text{س}^{٣})^{٢}$

ج $٣\text{س} \times ٢\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢}$

د $(٤\text{أس}^{٢})^{٠}$

هـ $٤\text{س}^{٢}\text{ص} \times \text{س}^{٣}\text{ص}^{٢}$

٤) فُكّ كلّ عبارة جبرية واكتبها في أبسط صورة:

أ ٥(س − ٢) + ٣(س + ٢)

ب ٥س(س + ٧ص) − ٢س(٢س − ص)

٥) أوجد قيمة (س + ٥) − (س − ٥) عندما:

أ س = ١

ب س = ٠

ج س = ٥

٦) بسِّطْ واكتب الإجابات باستخدام أسس موجبة فقط:

أ $\text{س}^{٥} \times \text{س}^{-٢}$

ب $\frac{٨\text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٤}}$

ج $(٢\text{س} - ٢)^{-٣}$

٧) بسِّطْ علمًا بأن س $\neq$ ٠:

أ $٣\text{س}^{\frac{١}{٢}} \times ٥\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

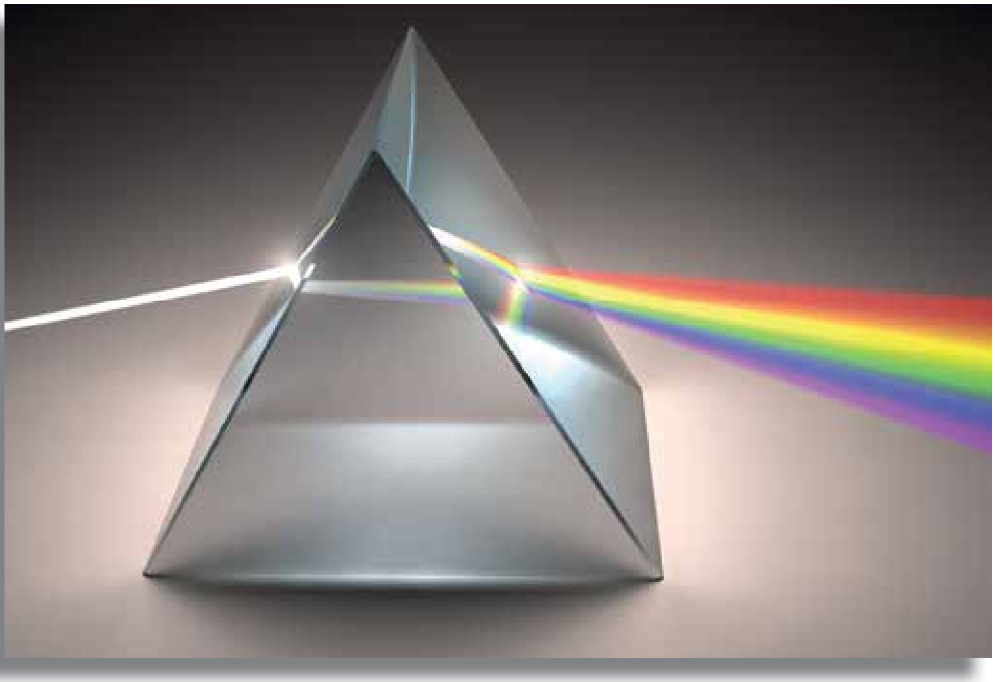
ب $(٨١\text{س}^{٦})^{\frac{١}{٢}}$

ج $(٦٤\text{س}^{٣})^{\frac{١}{٣}}$

الوحدة الرابعة: الدوائر والخطوط المستقيمة والزوايا والأشكال الهندسيّة

المُفردات

- المستقيم Line
- التوازي Parallel
- الزاوية Angle
- التعامد Perpendicular
- الحادّة Acute
- القائمة Right
- المنفرجة Obtuse
- المنعكسة Reflex
- المتقابلتان بالرأس Vertically oppsite
- المتناظرتان Corresponding
- المتبادلتان Alternate
- المتحالفتان Co-interior
- المثلّث Triangle
- الشكل الرباعيّ Quadrilateral
- المضلّع Polygon
- الدائرة Circle
- الزاوية الداخليّة Interior angle
- الزاوية الخارجيّة Exterior angle
- المنتظم Regular
- غير المنتظم Irregular
- مُنصِّف الزاوية Bisector
- الوتر Chord
- المماس Tangent
- القطاع Sector
- القوس Arc
- نصف القطر Radius
- القطر Diameter
- الزاوية المحيطية Inscribed angle
- الزاوية المركزية Central angle
- الزاوية المستقيمة Straight angle
- الدورة الكاملة Revolution
- القطعة الصغرى Minor segment
- القطعة الكبرى Major segment



في هذه الصورة، ينكسر الضوء الأبيض في المنشور الزجاجي، وينفصل إلى ألوان الطيف المختلفة. عندما يدرس العلماء خصائص الضوء، يستخدمون الرياضيات المتعلقة بالخطوط المستقيمة والزوايا.

تُعدّ الهندسة أحد أقدم مجالات الرياضيات المعروفة، فقد عرف الفلّاحون المصريون القدماء الخطوط المستقيمة والزوايا، واستخدموها في رسم حدود الحقول بعد الفيضانات. واستخدم البنّاؤون في مصر وبلاد ما بين النهرين معرفتهم بالخطوط المستقيمة والزوايا والأشكال الهندسيّة لبناء المعابد الضخمة والأهرامات، وقام الرياضيون اليونانيون بتطوير العديد من الأساليب التي استُخدمت في هذه الوحدة.

تُستَخدم الهندسة اليوم في الإنشاءات والمسح والعمارة، لتخطيط وبناء الطرقات والجسور والبيوت ومُجمعات المكاتب. ونحن بدورنا نستخدم الخطوط المستقيمة والزوايا، لنجد طريقنا على الخرائط، وفي برمجيات نظام تحديد المواقع العالمية (GPS)، كما يستخدم الفنّانون الخطوط المستقيمة والزوايا للحصول على المنظور الصحيح في رسم اللوحات. ويستخدمها أيضًا مختصّو البصريات في صنع العدسات، وحتى لاعبو البلياردو يستخدمونها لتحديد كيفية ضرب الكرات.

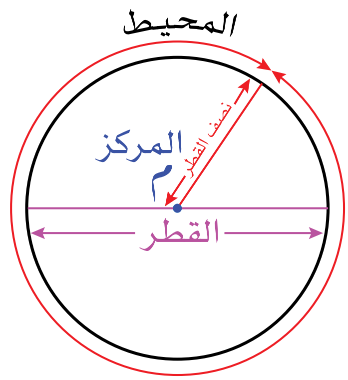
سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

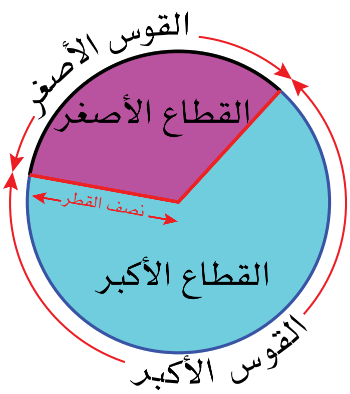
- تستخدم المصطلحات الصحيحة لتتحدث عن النقاط والخطوط المستقيمة والزوايا والأشكال الهندسيّة.
- تصنِّف الزوايا وتقيسها وترسمها.
- تحسب قياس الزوايا المجهولة باستخدام العلاقات بين الزوايا.
- تتحدّث عن خصائص المُثلّثات والأشكال الرباعيّة والدوائر والمُضلّعات.
- تستخدم الأدوات الهندسية في إنشاء المُثلَّثات.
- تحسب قياس الزوايا المجهولة في المُضلّعات غير المنتظمة.

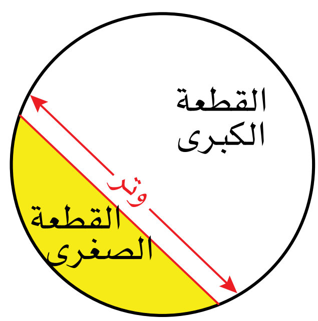
٤-١ الدائرة

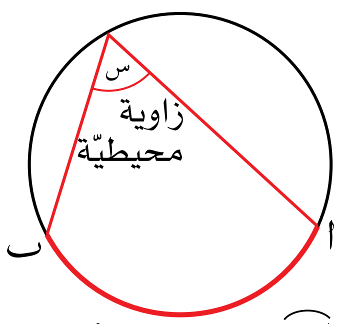
تُعرَّف **الدائرة** على أنها مجموعة من النقاط المستوية التي تبعد مسافة واحدة عن نقطة ثابتة مُعطاة تُسمّى مركز الدائرة. بمعنى آخر، أن كلّ نقطة على الخطّ المنحني الخارجيّ للدائرة تبعد نفس المسافة عن مركز الدائرة.

أجزاء الدائرة



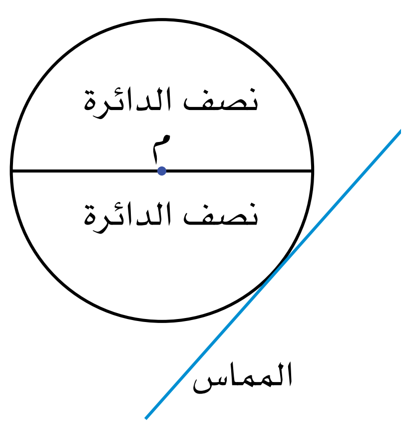


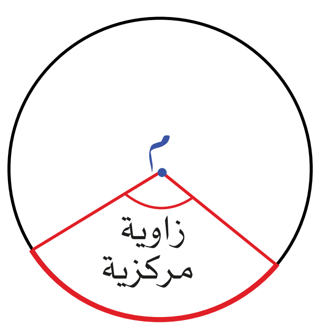




$\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ هو القوس الأصغر

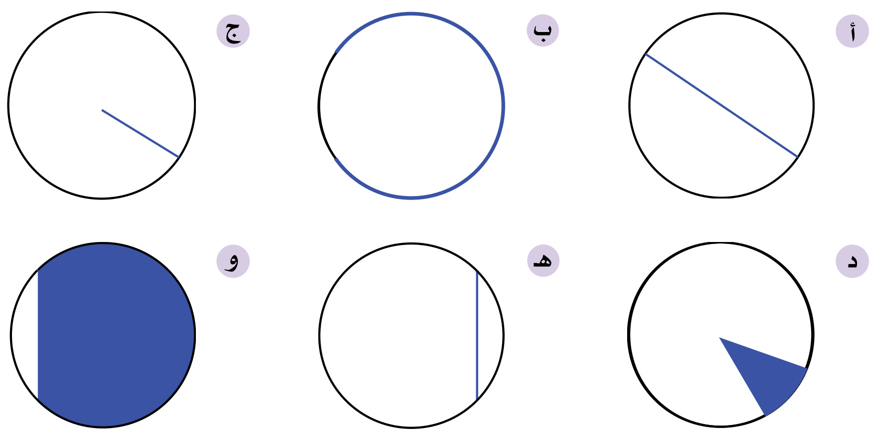
والزاوية س تقابل $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$





تمارين ٤-١

١) سمّ العُنصر المُبيَّن باللون الأزرق على كل دائرة فيما يلي:



٢) ارسم أربع دوائر صغيرة، ثم استخدم التظليل أو ارسم خطوطًا لتبيّن:

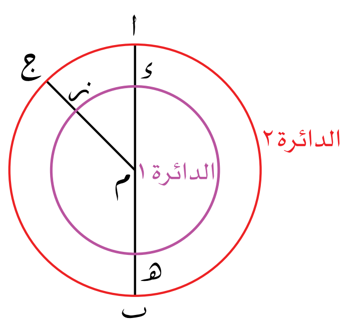
أ نصف دائرة

ب القطعة الصغرى

ج مماسًّا للدائرة

د زاوية ص تقابل القوس الأصغر ا ب.

٣) الدائرة (١) والدائرة (٢) لهما نفس المركز (م). استخدم المصطلح الصحيح أو الرموز الصحيحة لتُكمِل كلّ عبارة فيما يلي:



أ م ب ـــــ في الدائرة ٢

ب د هـ ـــــ في الدائرة ١

ج ا ع ـــــ في الدائرة ٢

د ـــــ نصف قطر في الدائرة ١

هـ ع ا ب ـــــ في الدائرة ٢

و ز م د هي ـــــ في الدائرة ١

لاحقًا

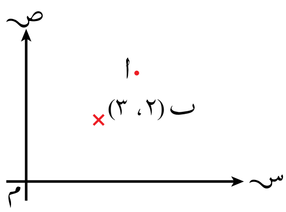
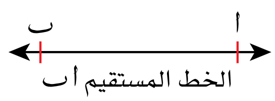
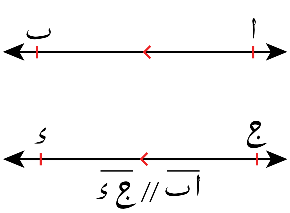
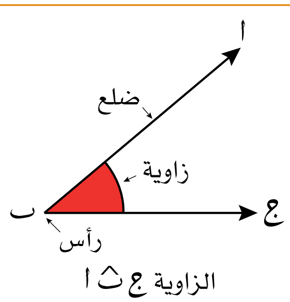
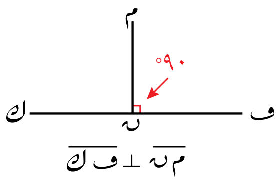
ستتعلم أكثر عن خصائص الدوائر وخصائص الزوايا في الدوائر عندما تدرس النظريات في هندسة الدائرة.

٤-٢ الزوايا

يستخدم الرياضيون مصطلحات وتعريفات مُحدَّدة للحديث عن الأشكال الهندسيّة. ويتوقَّع منك أن تعرف معنى تلك المصطلحات، وأن تكون قادرًا على استخدامها بطريقة صحيحة خلال عملك على الأشكال الهندسية.

٤-٢-أ قياس الزوايا

المصطلحات المستخدمة للحديث عن الخطوط المستقيمة والزوايا

المصطلح	ماذا يعني	أمثلة
النقطة	يتم عرض النقطة على الورقة بصورة (.) أو (×). بشكل عام، ستستخدم كلمة نقطة لتصف تقاطعَ خطّين مستقيمَين. كما ستتحدث أيضًا عن النقاط على شبكة الإحداثيات (مواقع) وتسمّي تلك النقاط في صورة أزواج مُرتَّبة مستخدمًا الإحداثيات (س، ص). تُسمّى عادة النقاط باستخدام الحروف.	
المُستقيم	المستقيم هو خط مستقيم يمتد إلى ما لا نهاية من كلا الاتِّجاهَين، والقطعة المستقيمة هي أقصر مسافة بين نقطتين.	
التوازي	عندما تكون المسافة بين خطّين مستقيمين هي نفسها دائمًا يكون الخطّان مُتوازيَين. يُستخدَم الرمز // للدلالة على توازي المستقيمات. مثلًا، أب // ج د. للدلالة على توازي الخطوط المستقيمة، يتمّ وضع أسهم على رسوماتها.	
الزاوية	تتشكَّل الزاوية عند تقاطع شُعاعَين أو خطّين مستقيمَين في نقطة واحدة. تُسمى نقطة التقاطع رأس الزاوية، ويُسمّى الخطّان المستقيمان ضلعَي الزاوية. تُسمّى الزوايا باستخدام ثلاثة أحرف: حرف عند نهاية أحد ضلعَي الزاوية، وحرف الرأس، وحرف عند نهاية الضلع الآخر للزاوية. يدل الحرف في منتصف الزاوية على رأس الزاوية.	
التعامُد	عندما يتقاطع شعاعان أو خطّان مستقيمان ويشكّلان زاوية قائمة، فإن كلًّا منهما عمودي على الآخر. يُستخدم الرمز ⊥ ليبيّن أن الخطّين المستقيمَين متعامدان. مثل م ن ⊥ ف ك	

لاحقًا

ستستخدم هذه المصطلحات خلال هذا العام، وخاصة في الوحدة ١٥، عندما تدرس حلّ المعادلات الخطيّة الآنيّة بيانيًّا.

رابط

تظهر الدوائر والمُضلَّعات في كلّ مكان تقريبًا، بما في ذلك الرياضة والموسيقى. على سبيل المثال، فكِّر في الرموز المرسومة في ملعب كرة القدم، أو في أشكال الأدوات الموسيقيّة.

المصطلح	ماذا يعني	أمثلة
الزاوية الحادّة	هي زاوية قياسها ٠° > س > ٩٠°	ق(اب̂ج) < ٩٠° ، ق(ده̂ز) < ٩٠° ، ق(من̂ع) < ٩٠°
الزاوية القائمة	هي زاوية قياسها ٩٠° بالضبط. يُستخدَم عادة مُربَّع ليمثّل ٩٠° تتشكّل الزاوية القائمة بين خطّين مستقيمَيْن مُتعامدَين.	ق(سص̂ع) = ٩٠° ، س ص ⊥ ص ع
الزاوية المنفرجة	هي زاوية قياسها ٩٠° > س > ١٨٠°	ق(اب̂ج) > ٩٠° ، ق(كن̂ز) > ٩٠°
الزاوية المستقيمة	هي زاوية قياسها ١٨٠°. ويمثّل الخط المستقيم زاوية مستقيمة.	ق(من̂ز) = ١٨٠° ، م ز خط مستقيم
الزاوية المُنعكِسة	هي زاوية قياسها ١٨٠° > س > ٣٦٠°	ق(اب̂ج) المنعكسة > ١٨٠° ، ق(ده̂ز) المنعكسة > ١٨٠°
الدورة الكاملة	قياس الدورة الكاملة ٣٦٠°	م ، ٣٦٠°

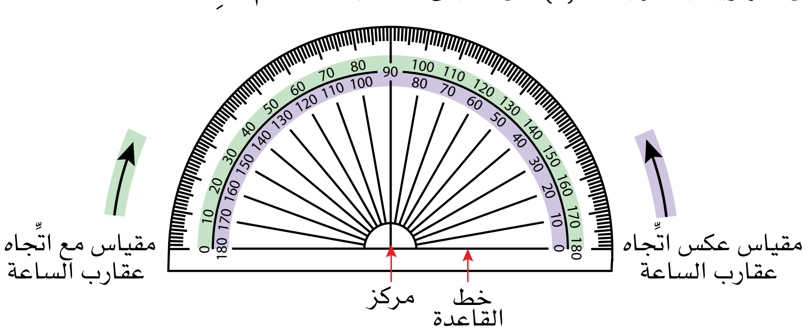
رابط

يستخدم البنّاؤون والمصمِّمون والمهندسون المعماريون والمهندسون والفنانون، وحتى صنّاع المجوهرات، الأشكال الهندسية والفضاء والقياس خلال تنفيذ أعمالهم. وتستخدم الكثير من هذه المهن حزمًا حاسوبية لتخطيط وتصميم أشياء متنوعة. تبدأ أغلب أعمال التصميم في مستوٍ ذي بعدَيْن على ورقة أو على شاشة، ثم تنتقل إلى ثلاثيّة الأبعاد للعرض النهائي. تحتاج إلى فهم جيد للخطوط المستقيمة والزوايا والأشكال الهندسيّة والفضاء لتستخدم حزم التصميم الحاسوبية المُساعِدة (CAD).

قياس الزوايا باستخدام المنقلة

قياس الزاوية هو مقدار الدوران من أحد ضلعَي الزاوية إلى الضلع الآخر.
تُقاس الزاوية بالدرجات (°) من ٠ إلى ٣٦٠ باستخدام المنِقلة.

قد تحتاج إلى معرفة قياس الزاوية في العمليات الحسابية، فإن أي خطأ في القياس يؤدي إلى إجابة خاطئة.



يوجد مقياسان لمنقلة الـ ١٨٠°. عليك اختيار المقياس المُناسِب عند قياس الزاوية.

إذا لم يمتد ضلع الزاوية ليصل إلى مقياس المنقلة، مدّ ضلع الزاوية ليتجاوز المقياس (طول ضلعَي الزاوية لن يؤثّر على قياس الزاوية).

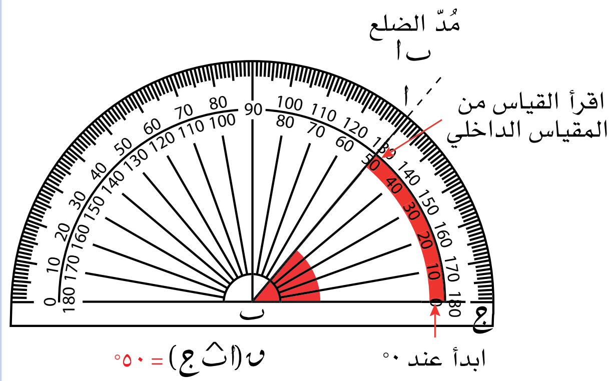
قياس الزوايا الأصغر من ١٨٠°

- ضع مركز المنقلة على رأس الزاوية.
- حاذِ خطّ القاعدة حتى يقع على أحد ضلعَي الزاوية.
- استخدم المقياس الذي يبدأ من ٠° لتقرأ قياس الزاوية.
- تحرّك حول المقياس حتى تصل إلى الضلع الآخر للزاوية.

مثــال ١

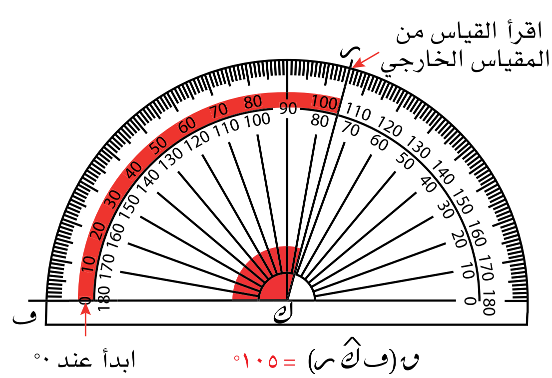
أوجد ق(ا بَ ج) و ق(ف كَ ر) باستخدام المنقلة.

الحــلّ:



ضع مركز المنقلة عند النقطة ب، حاذِ خطّ القاعدة مع الضلع ب ج. مدّ الضلع ب ا ليتجاوز المقياس. البدء من الصفر يعني أن تقرأ المقياس الداخلي للمنقلة.

ق(ا بَ ج) = ٥٠°



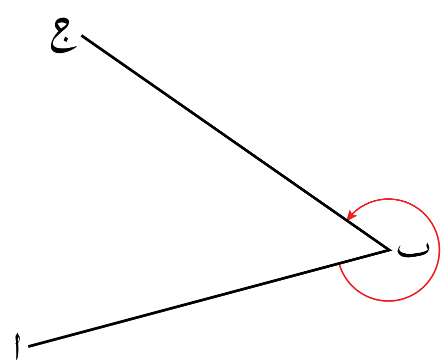
ضع مركز المنقلة عند النقطة ك، حاذِ خطّ القاعدة مع الضلع ف ك. البدء من ٠° يعني أن تقرأ المقياس الخارجي للمنقلة.

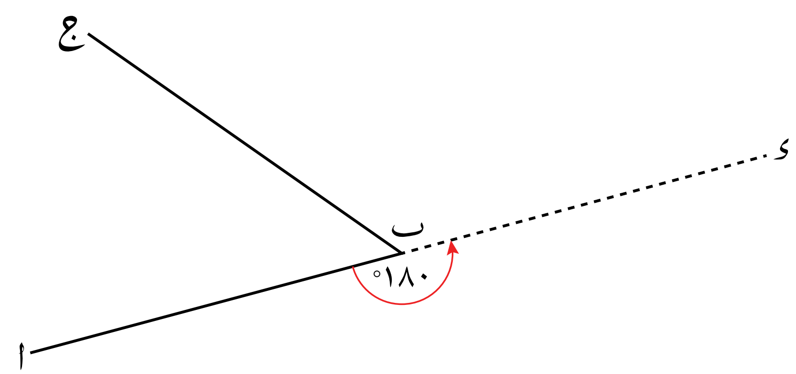
ق(ف كَ ر) = ١٠٥°

قياس الزوايا الأكبر من ١٨٠°

هناك طريقتان مختلفتان لقياس الزاوية المُنعكِسة باستخدام منقلة الـ ١٨٠°؛ عليك استخدام الطريقة التي تجدها أسهل بالنسبة إليك. افترض أنك تريد إيجاد قياس (ا بٖ ج) المُنعكِسة:

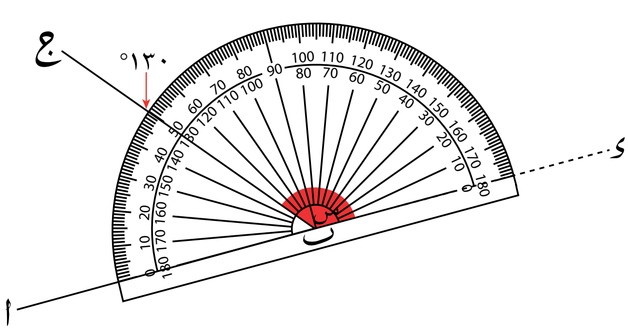
الطريقة ١: مدّ أحد ضلعي الزاوية لتشكّل خطًا مستقيمًا (زاوية ١٨٠°)، ثم أوجد قياس «الزاوية الإضافية». أضف قياس «الزاوية الإضافية» إلى ١٨٠° لتحصل على القياس الكلّي للزاوية المُنعكِسة.





مدّ الضلع ا ب إلى النقطة ى. تعرف أن قياس الزاوية المستقيمة هو ١٨٠°؛

∴ ں (ا بٖ ى) = ١٨٠°



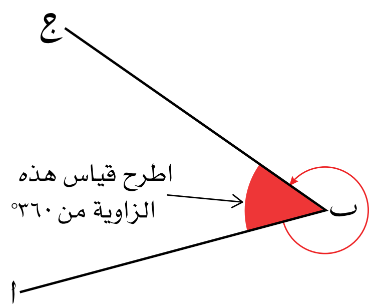
استخدم المنقلة لتقيس الجزء المُتبقّي (ى بٖ ج) (المسمى س).

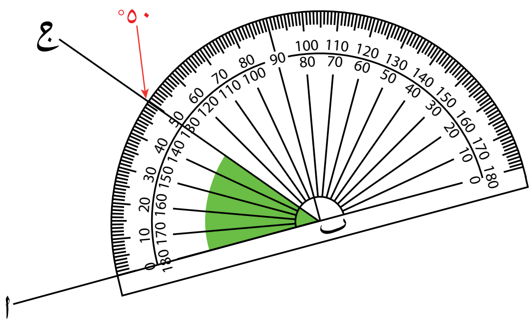
أضف هذا القياس إلى ١٨٠° لتجد ں (ا بٖ ج) المنعكسة.

١٨٠° + ١٣٠° = ٣١٠°

∴ ں (ا بٖ ج) المنعكسة = ٣١٠°

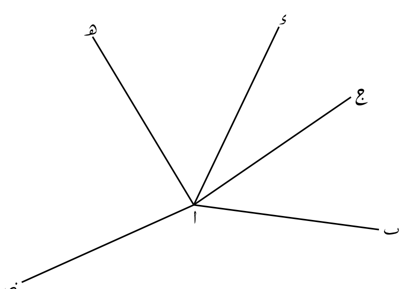
الطريقة ٢: أوجد قياس الزاوية الداخليّة (غير المُنعكِسة) واطرح الناتج من ٣٦٠°.





ق (أ بَ̂ ج) المُنعكِسة = ٣٦٠° − ٥٠° = ٣١٠°

تمارين ٤-٢-أ



١) لكلّ زاوية من الزوايا التالية:

(١) ب أ̂ ج　　(٢) ب أ̂ د　　(٣) ب أ̂ هـ

(٤) ج أ̂ د　　(٥) ج أ̂ ز　　(٦) ج أ̂ هـ

(٧) د أ̂ ب المُنعكِسة　　(٨) د أ̂ هـ　　(٩) د أ̂ ز

أ حدِّد نوع الزاوية.

ب قدّر قياس كل زاوية بالدرجات.

ج استخدم المنقلة لتجد القياس الحقيقي لكلّ زاوية مُقرَّبًا إلى أقرب درجة.

٤-٢-ب رسم الزوايا

لرسم زاوية قياسها معطى، تحتاج إلى مسطرة ومنقلة وقلم. نفّذ المثال أدناه لتتذكّر كيف ترسم زوايا قياسها > ١٨٠° أو < ١٨٠°.

مثــال ٢

ارسم:

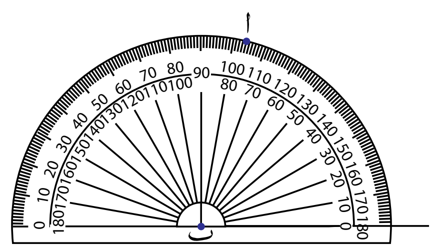
أ ا $\widehat{ب}$ ج التي قياسها ٧٦°   ب س $\widehat{ص}$ ع التي قياسها ١٩٥°

الحــلّ:

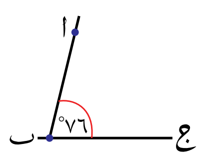
أ

استخدم مسطرة لترسم خطًّا مستقيمًا يمثّل أحد ضلعَي الزاوية. تأكّد من أن الخطّ يمتد أبعد من المنقلة.

سمّ رأس الزاوية ب



ضع المنقلة على الخط المستقيم، بحيث يكون مركز المنقلة على النقطة ب. حدِّد قِياس الزاوية التي ترغب في رسمها، وضعْ نقطة صغيرة وسمّها أ.



أبعد المنقلة واستخدم مسطرة لترسم خطًّا مستقيمًا يصل بين الرأس ب والنقطة أ.

سمّ الزاوية بطريقة صحيحة.

ب لترسم زاوية مُنعكِسة، عليك أن ترسم زاوية قياسها أقلّ من ١٨٠° أولاً. لكي ترسم زاوية قياسها ١٩٥°، ارسم أولاً زاوية قياسها ١٥°، ثمّ مدّ أحد ضلعَيها لتضيف إليها زاوية قياسها ١٨٠°، أو ارسم زاوية قياسها ٣٦٠° − ١٩٥° = ١٦٥°، ويمكنك عندها تسمية الزاوية المُنعكِسة.

تمارين ٤-٢-ب

١) استخدم مسطرة ومنقلة لترسم بدقّة كل زاوية من الزوايا الآتية:

أ ق (ا $\widehat{ب}$ ج) = ٨٠°   ب ق (ن $\widehat{ك}$ ر) = ٣٠°   ج ق (س $\widehat{ص}$ ع) = ١٣٥°

د ق (هـ $\widehat{م}$ ع) = ٩٠°   هـ ق (ك $\widehat{ل}$ م) = ٢١٠°   و ق (ج $\widehat{ك}$ ل) = ٣٥٥°

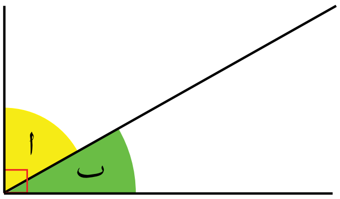
٤-٢-ج العلاقة بين الزوايا

تأكَّد من معرفتك بالحقائق الآتية عن الزوايا:

> **مُساعَدة**
>
> عمومًا:
>
> في الزاويتَين المتتامّتَين، إذا كان قياس إحداهما س°، فإن قياس الزاوية الأخرى يجب أن يكون ٩٠° − س°، والعكس صحيح.
>
> في الزاويتَين المُتكامِلتَين، إذا كان قياس إحداهما س°، فإن قياس الزاوية الأخرى يجب أن يكون ١٨٠° − س°، والعكس صحيح.

الزاويتان المُتتامَّتان

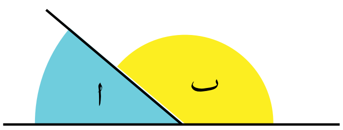
عندما يكون مجموع قياسَي زاويتين يساوي ٩٠°، تكون هاتان الزاويتان متتامَّتَين.



ا + ب = ٩٠°

الزاويتان المُتكامِلتان (زاويتان على خطّ مُستقيم)

عندما يكون مجموع قياسي زاويتين يساوي ١٨٠°، تكون هاتان الزاويتان مُتكامِلتين.

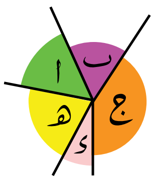


ا + ب = ١٨٠°

الزوايا حول نقطة

تشكّل الزوايا حول نقطة دورة كاملة.

مجموع قياسات الزوايا حول نقطة يساوي ٣٦٠°



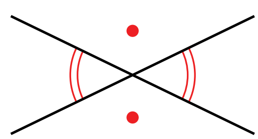
ا + ب + ج + ء + هـ = ٣٦٠°

الزوايا المتقابلة بالرأس

عندما يتقاطع خطّان مستقيمان، يتشكَّل زوجان من زاويتَيْن **مُتقابِلتَين بالرأس**.

تكون الزوايتان المُتقابلتان بالرأس متساويتين في القياس.

> تُشكِّل أزواج الزوايا المُتجاورة الناتجة من رسم الزوايا المُتقابِلة بالرأس أزواجًا من الزوايا المُتكامِلة، لأنها أيضاً زوايا على خطّ مستقيم.



زوجان من زاويتَين مُتقابلتَين بالرأس

ر = ص ، س = ز

استخدام العلاقات بين الزوايا لإيجاد قياسات الزوايا المجهولة

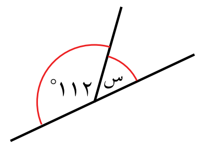
يمكن استخدام العلاقات بين الزوايا لاحتساب قياسات الزوايا المجهولة.

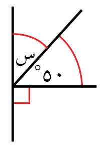
اتبّع الخطوات البسيطة الآتية:

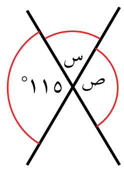
- حدِّد نوع العلاقة.
- اكتب معادلة.
- أعطِ تبريرات للعبارات التي تكتبها.
- حلّ المعادلة لتجد قياس الزاوية المجهولة.

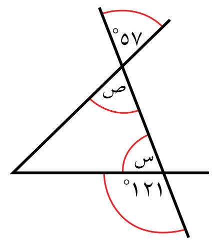
تمارين ٤-٢-ج

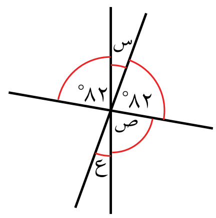
١) أوجد قياس كل زاوية من الزوايا المشار إليها بحرف في كلّ ممّا يلي. برِّر إجاباتك.

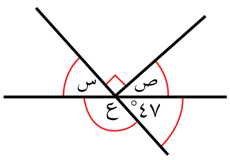
أ


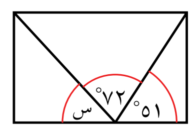
ب


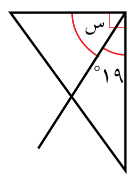
ج


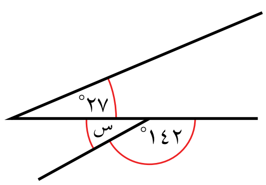
د


هـ


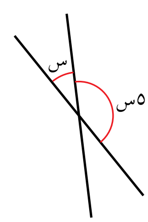
و


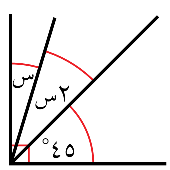
ز


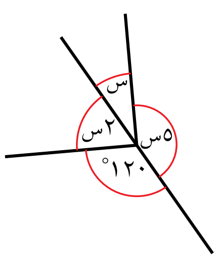
ح


ط


٢) أوجد قيمة س في كلّ شكل من الأشكال الآتية:

أ


ب


ج


٣) زاويتان متكاملتان. قياس الزاوية الأولى يساوي ضعف قياس الزاوية الثانية. ما قياس كلّ منهما؟

٤) إذا علمت أن قياس إحدى الزوايا الناتجة من تقاطُع خطَّين مستقيمين ١٢٧°، فما قياس الزوايا الثلاث الأخرى؟

٤-٢-د الزوايا والخطوط المُستقيمة المتوازية

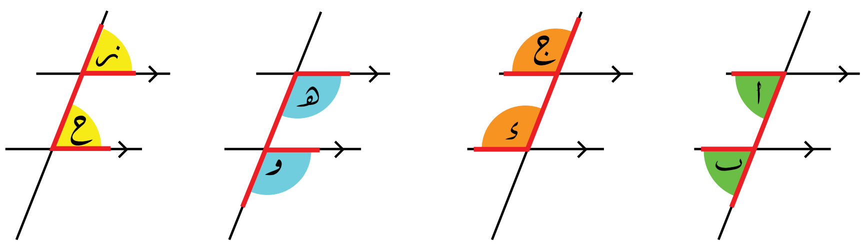
عندما يقطع قاطع خطَّين مُستقيمَين متوازيَين (القاطع هو خطّ ثالث)، تتشكَّل ثماني زوايا تجمع بين بعضها خصائص مُحدَّدة.

مُساعَدة

رُغم أن الأشكال «F» و«Z» و«C» تساعدك على تذكُّر هذه الخصائص، فإن عليك استخدام المصطلحات الآتية «زاويتان مُتناظرتان» و«زاويتان متبادلتان» و«زاويتان متحالفتان» لتصفها عندما تجيب عن الأسئلة.

الزوايا المتناظرة (شكل F)

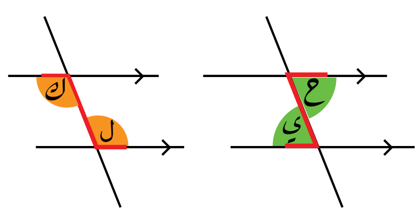
عندما يقطع قاطع خطَّين مُستقيمَين مُتوازيَين، تتشكّل أربعة أزواج من **الزوايا المُتناظِرة**. بحيث تكون كل زاويتَين مُتناظرتَين مُتساويتين في القياس.



أ = ب   ج = د   هـ = و   ز = ع

الزوايا المُتبادَلة (شكل Z)

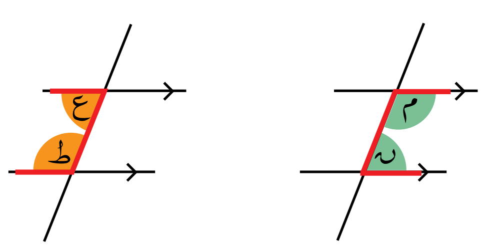
عندما يقطع قاطع خطَّين مُستقيمَين متوازيَين، يتشكَّل زوجان من **الزوايا المُتبادَلة**. تكون الزاويتان المُتبادَلتان مُتساويتين في القياس.



ع = ي   ك = ل

الزوايا المتحالفة (شكل C)

عندما يقطع قاطع خطَّين مُستقيمَين متوازيّين، يتشكَّل زوجان من **الزوايا المتحالفة**. تكون الزاويتان المتحالفتان متكاملتين (مجموع قياسيهما ١٨٠°) وتقعان في جهة واحدة من القاطع.

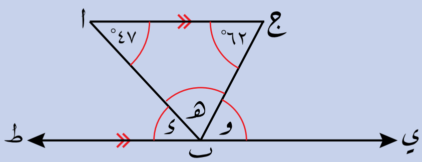


م + ن = ١٨٠°   ع + ط = ١٨٠°

يتساوى قياس الزاويتين المتحالفتين فقط عندما يتعامد القاطع مع الخطّين المستقيمين المتوازيين. (عندما يكون قياس كلّ منهما ٩٠°).

مثـــال ٣

في الشكل المقابل، أوجد قيمة كل من ى، هـ، و:

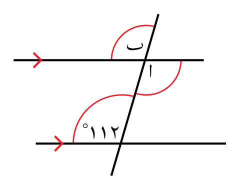


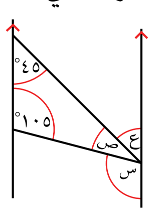
الحـــلّ:

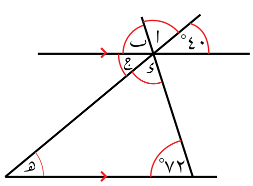
ى = ق (ط بَ ا) = ٤٧°	(ج أَ ب)، (ط بَ ا) زاويتان متبادلتان، أي إنهما متساويتان في القياس.
و = ق (ج بَ ي) = ٦٢°	(ا جَ ب)، (ج بَ ي) زاويتان متبادلتان، أي إنهما متساويتان في القياس.
هـ = ق (ج بَ ا)	
∵ ى + هـ + و = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)	مجموع قياس الزوايا على مستقيم واحد = ١٨٠°. عوّض عن ى، و ، لإيجاد قيمة هـ.
∴ هـ = ١٨٠° − ٤٧° − ٦٢°	
هـ = ٧١°	

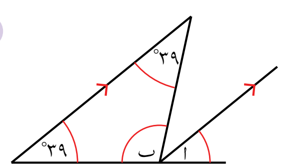
تمارين ٤-٢-د

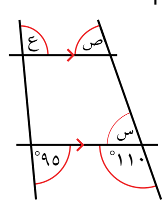
١) أوجد قياس الزوايا المُشار إليها بأحرف في الأشكال الآتية. برِّر إجاباتك.

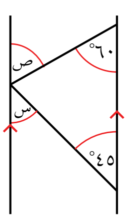
أ


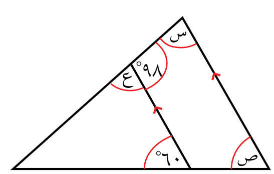
ب


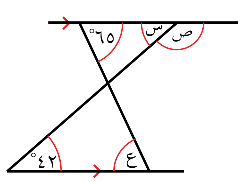
ج


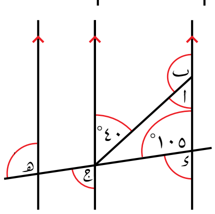
د


هـ


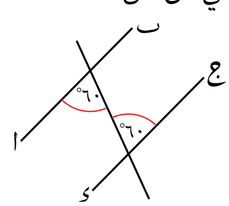
و


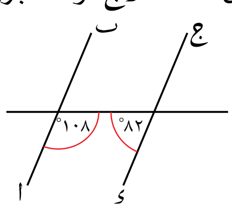
ز


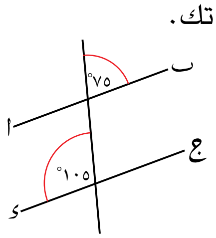
ح


ط


٢) قرِّر في كلّ من الأمثلة الآتية إن كان $\overline{\text{اب}}$ // $\overline{\text{ىج}}$ أو لا. برِّر إجاباتك.

أ


ب


ج


٤-٣ الإنشاءات الهندسية

تُعدّ الإنشاءات الهندسيّة رسومًا هندسيّة دقيقة. ولا بُدّ لك من استخدام الأدوات الهندسيّة لتنشىء رسومًا هندسيّة.

تبيّن لك الصورة الأدوات الأساسيّة المُتوقَّع منك استخدامها.

٤-٣-أ الإنشاءات الهندسية باستخدام المسطرة و الفرجار

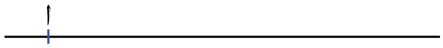
تُعدّ المسطرة (التي تسمّى أحيانًا الحافة المستقيمة) والفرجار من أكثر الأدوات المفيدة في الإنشاءات الهندسية، حيث تُستخدَم المسطرة لرسم الخطوط المستقيمة؛ ويُستخدم الفرجار لقياس الطول وتحديده ولرسم الأقواس والدوائر التي تسمح لك بتنصيف الزوايا والقطع المستقيمة.

هل تتذكَّر كيف تستخدم الفرجار لتحدِّد طولاً مُعطى؟ إليك المثال الآتي الذي يبيّن لك كيف تُنشىء قطعة مستقيمة طولها ٤,٥ سم. (الرسوم المعطاة **ليست مرسومة بمقياس**).

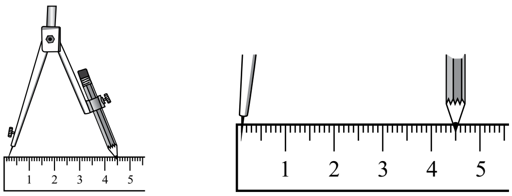
من المهم أن يكون رأس قلم الرصاص الذي تستخدمه مدببًا وأن يكون عمودا الفرجار الذي تستخدمه ثابتين.

عندما تستطيع استخدام مسطرة وفرجار لتقيس طول قطعة مستقيمة وترسمها، يصبح من السهل إنشاء المُثلّثات والأشكال الهندسيّة الأخرى.

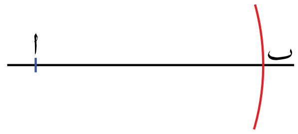
- استخدم مسطرة وقلم رصاص مُدبَّب الرأس لترسم خطًّا مستقيمًا أطول من الطول الذي تحتاج إليه. ضع شرطة رأسيّة قصيرة (أو نقطة) على الخط المستقيم، وسمّها ا.



- استخدم المسطرة لتفتح الفرجار فتحة طولها ٤,٥ سم.



- ضع رأس الفرجار عند النقطة ا. أدر الفرجار لترسم قوسًا قصيرًا يقطع الخط المستقيم على بعد ٤,٥ سم. سمّ هذه النقطة ب. تكون الآن قد رسمتَ القطعة المستقيمة اب التي طولها ٤,٥ سم.



إنشاء المثلثات

يمكنك رسمُ مُثلَّث إذا عرفت أطوال أضلاعه الثلاثة.

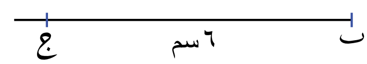
اقرأ المثال ٤ لتعرف كيف تنشىء مُثلّثًا أطوال أضلاعه الثلاثة معطاة.

مثـــال ٤

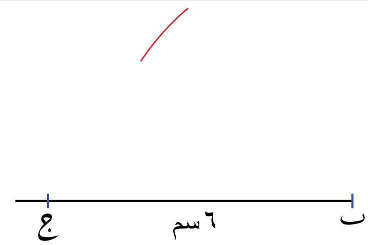
ارسم المثلث ا ب ج، حيث ا ب = ٥ سم، ب ج = ٦ سم، ج ا = ٤ سم.

الحــلّ:

في معظم الحالات يكون من الأسهل البدء بالضلع الأكبر. ارسم الضلع ($\overline{\text{ب ج}}$ = ٦ سم) وسمّه.

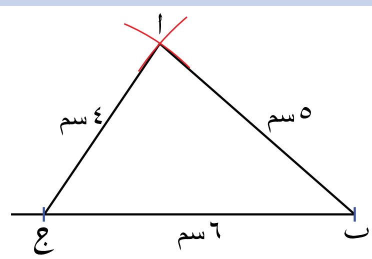


افتح الفرجار فتحة طولها ٥ سم وهو طول $\overline{\text{ا ب}}$. ضع رأس الفرجار عند النقطة ب وارسم قوسًا. كلّ جزء من القوس يبعد عن النقطة ب مسافة ٥ سم. لذا يمكن أن تكون النقطة ا أي نقطة على القوس.



افتح الفرجار فتحة طولها ٤ سم وهو طول $\overline{\text{ج ا}}$. ضع رأس الفرجار عند النقطة ج وارسم قوسًا. كلّ جزء من هذا القوس يبعد عن النقطة ج مسافة ٤ سم. لذا يمكن أن تكون النقطة ا أي نقطة على القوس.

النقطة ا هي نقطة تقاطع القوسين.
صِل $\overline{\text{ب ا}}$، $\overline{\text{ج ا}}$.



من المفيد أن ترسم الخط المستقيم أطول مما تحتاج إليه، ثمّ تقيس الطول الصحيح عليه. عند إنشاء شكل هندسي، يساعدك تحديد النقاط بشرطة صغيرة على تحديد مكان تثبيت رأس الفرجار.

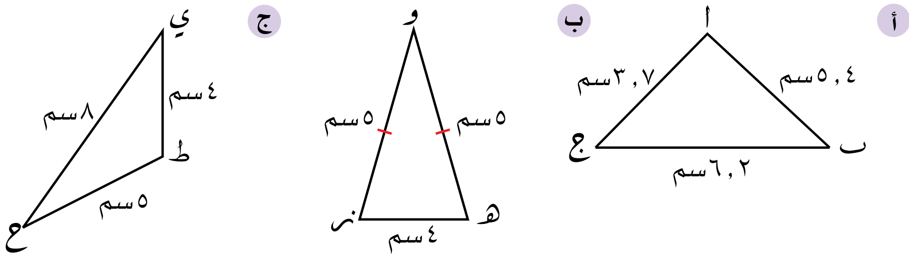
لاحظ أن هذه الأشكال الهندسية **ليست مرسومة بدقة**. ولكن **يجب** استخدام قياسات دقيقة في الأشكال الهندسية التي ترسمها.

تمارين ٤-٣-أ

١) ارسم كل قطعة من القطع المستقيمة الآتية:

أ) ا ب = ٦ سم ب) ج د = ٧٥ مم ج) هـ ز = ٥,٥ سم

٢) ارسم كل مثلَّث من المثلَّثات الآتية بدقَّة:



٣) ارسم كل مثلَّث من المُثلّثات الآتية:

أ المُثلَّث اب ج، حيث ب ج = ٨,٥سم، اب = ٧,٢سم، ا ج = ٦,٩سم.

ب المُثلَّث س ص ع، حيث ص ع = ٨٦مم، س ص = ١٢٠مم، س ع = ٦٦مم.

ج المُثلَّث ى هـ ز المُتطابق الأضلاع، طول كلّ ضلع من أضلاعه ٦,٥سم.

د المُثلَّث ن ك ر المُتطابق الضلعين، طول قاعدته ٤ سم، ن ك = ن ر = ٦,٥ سم.

٤-٣-ب الإنشاءات الهندسيّة باستخدام الحافة المستقيمة

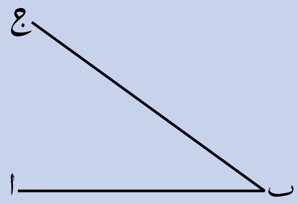
في هذا الدرس، لن تستخدم المسطرة المدرّجة لتقيس الأطوال، بل ستستخدمها فقط لترسم خطوطًا مستقيمة.

تنصيف الزاوية

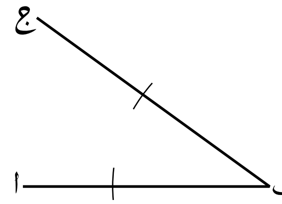
قد تُعطى زاوية ويُطلب إليك تنصيفها، أي تقسيمها إلى نصفين متساويين في القياس.

مثال ٥

نصّف ا بَ ج



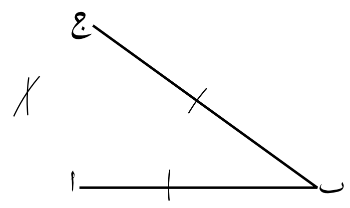
الحــلّ:



افتح الفرجار فتحة بطول مناسب وضع رأس الفرجار على رأس الزاوية ب.

ارسم قوسين يقطعان ضلعَي الزاوية.

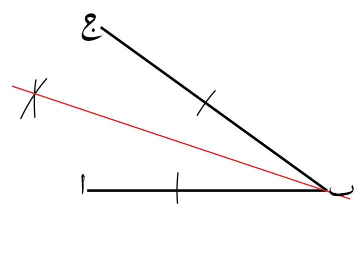
الآن ضع رأس الفرجار من جديد عند كلّ من القوسين السابقين (من دون تغيير فتحة الفرجار) وارسم قوسين آخرين كما هو مبيّن.



صِل بين نقطة تقاطع القوسين ورأس الزاوية.

هذا هو منصّف الزاوية.

من المهم ترك الأقواس على الرسم لأنها تبيّن أنك أنشأت ذلك مستخدمًا الحافة المستقيمة والفرجار.

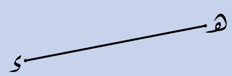


المُنصِّف العموديّ للقطعة المُستقيمة

يمكن أن تُعطى قطعة مستقيمة ويطلب إليك أن ترسم مُنصِّفًا عموديًّا لها. وهو خطّ مستقيم يقطعها مشكّلاً معها زاوية قائمة، ويقسمها إلى نصفين متساويين.

مثــال ٦

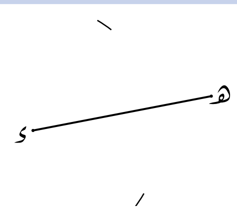
ارسم منصفًا عموديًّا للقطعة المستقيمة ى هـ.



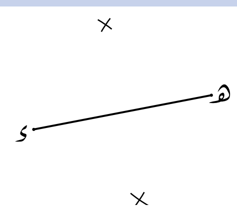
الحــلّ:

افتح الفرجار فتحة بطول أكبر من نصف طول القطعة المستقيمة، وضع رأسه عند النقطة ى.

ارسم قوسين، أحدهما فوق منتصف القطعة المستقيمة والآخر تحتها.



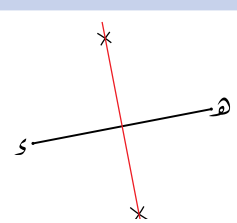
ضع رأس الفرجار عند النقطة هـ (من دون تغيير فتحة الفرجار) وارسم قوسين آخرين كما هو مبيّن.



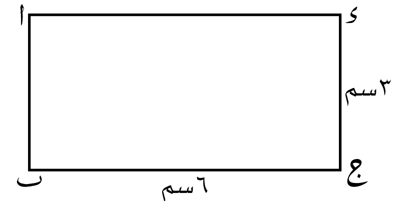
صِل بين نقطتي تقاطع الأقواس.

هذا الخط المستقيم هو المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة ى هـ.

من المهم أن تبقي الأقواس على الرسم.



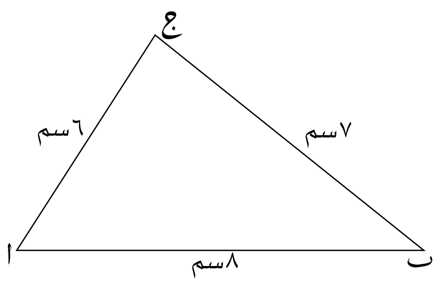
تمارين ٤-٣-ب



١) انسخ المستطيل المعروض في الشكل المجاور:

أ) أنشئ المنصِّف العمودي للضلع ب ج.

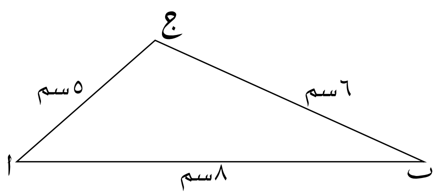
ب) نصّف ج ب̂ ا.



٢) استخدم المسطرة والفرجار لتنشىء نسخة دقيقة للمُثلَّث المعروض في الشكل المجاور:

نصّف الزوايا الثلاث (على نفس الرسم).

ماذا تلاحظ؟



٣) باستخدام المسطرة والفرجار. أنشئ نسخة دقيقة للمُثلَّث المعروض في الشكل المجاور، ثم أنشئ المُنصِّف العمودي لكلّ ضلع من أضلاع المُثلَّث (على نفس الرسم).

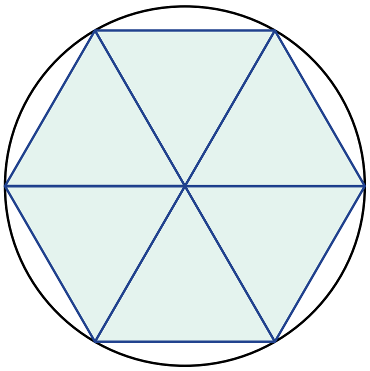
ماذا تلاحظ؟

٤) ارسم دائرة كبيرة، وارسم أيّ وترين غير متوازيين فيها، ثم أنشئ المُنصِّف العمودي لكلّ وتر. ماذا تلاحظ على نقطة تقاطع المُنصِّفين العموديين؟ فسّر ذلك.

٤-٣-ج رسم مُضلَّعات مُنتظِمة باستخدام الدائرة

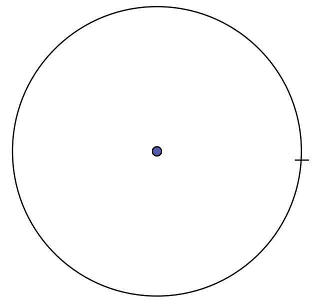
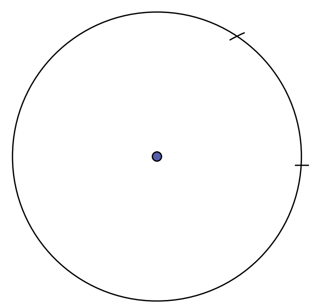
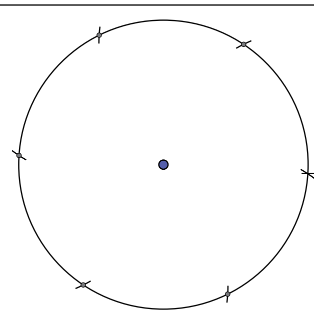
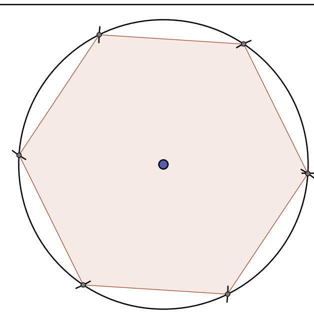
عليك أن تكون قادرًا على رسم مُضلَّع منتظم له ٣ أو ٤ أو ٦ أو ٨ أضلاع في دائرة.

السداسي المُنتظِم



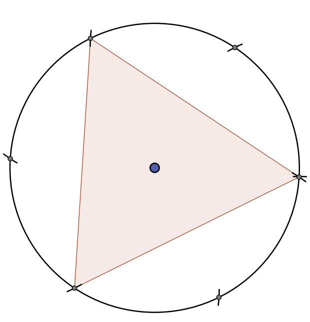
استخدم حقيقة أن ستّة مُثلَّثات متطابقة الأضلاع تتواءم معًا لتشكِّل سداسيًّا مُنتظِمًا.

خطوات العمل:

	ارسم دائرة
	من دون تغيير فتحة الفرجار عند رسم الدائرة، ضع رأس الفرجار عند الإشارة المبيّنة على المحيط. ارسم قوسًا جديدًا على الدائرة.
	ضع رأس الفرجار عند القوس الجديد وارسم قوسًا جديدًا آخر. انقل رأس الفرجار إلى القوس الجديد وكرِّر العملية حتى تعود إلى إشارة البدء الأصلية الموجودة على محيط الدائرة.
	صِل بين هذه النقاط بالترتيب لترسم سداسيًّا مُنتظِمًا. كما في السابق، لا تُزِلْ الأقواس التي رسمتها.

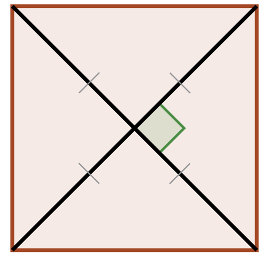
المُثلَّث متطابق الأضلاع

لترسم مُثلّثًا متطابق الأضلاع (مُضلَّع مُنتظِم له ثلاثة أضلاع)، ارسم الأقواس كما لو كنت تُنشىء سُداسيًّا منتظمًا. صِل بين كل نقطتين غير متتاليتين على محيط الدائرة.

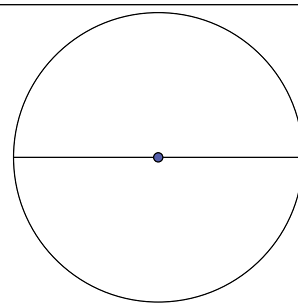
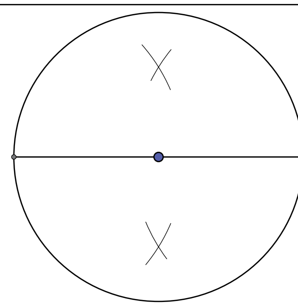
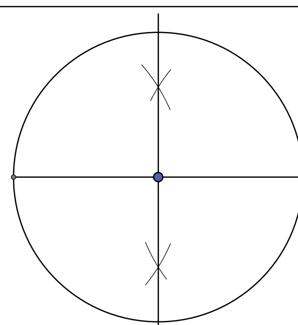
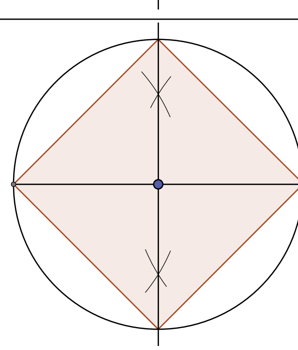


المربع

يمكنك استخدام حقيقة أن قُطرَي المُربَّع يُنصِّف كل منهما الآخر ويُعامِده.



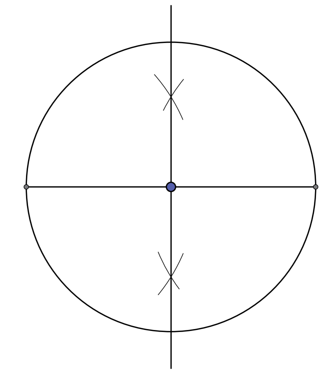
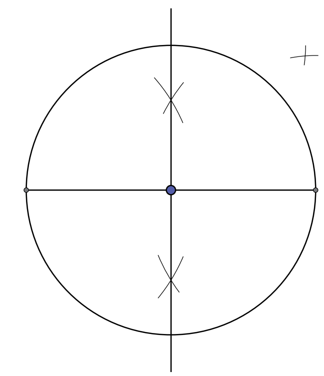
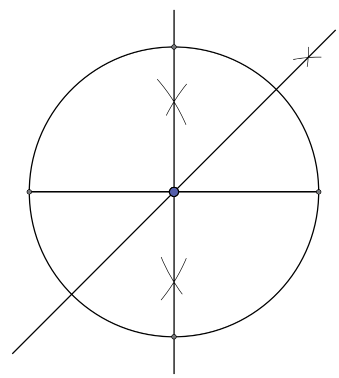
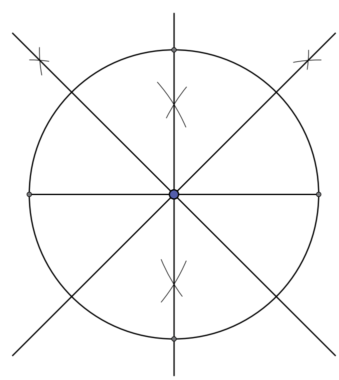
خطوات العمل:

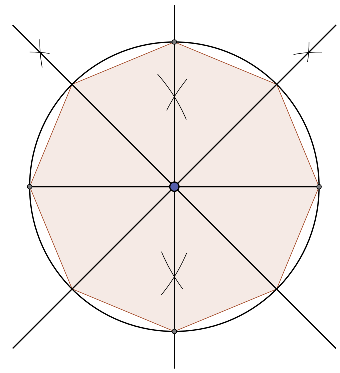
	ارسم دائرة وارسم قطرا فيها.
	عليك الآن إنشاء المُنصِّف العمودي للقُطر. اضبط الفرجار بقدر أطول من نصف القطر. ضع رأس الفرجار عند كلّ نقطة من نهايتَي القُطر، وارسم الأقواس كما هو مبيّن.
	صِل بين نقطتَي تقاطع الأقواس لتُشكِّل المُنصِّف العمودي.
	صِل بين النقاط الموجودة على محيط الدائرة بالترتيب لتُشكِّل مُربَّعًا.

الثُّماني المُنتظِم

ابدأ برسم مُربَّع، ثمّ نصِّف الزوايا الموجودة عند مركز الدائرة.

خطوات العمل:

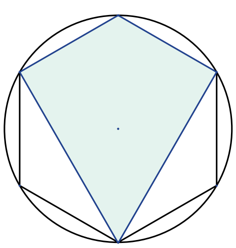
	بعد رسم الخطَّين المستقيمَيْن المُتعامدَين، عليك تنصيف الزوايا القائمة الموجودة عند مركز الدائرة.
	اضبط الفرجار بقدر طول نصف قطر الدائرة الأصليّة. ضع رأس الفرجار عند نقطة النهاية اليُمنى لضلع الزاوية، وارسم قوسًا، ثمّ كرِّر الأمر نفسه بوضع رأس الفرجار عند نقطة تقاطع ضلع الزاوية الآخر مع الدائرة.
	صِل بين نقطة تقاطع القوسين ومركز الدائرة؛ ومدّ المستقيم ليقطع الدائرة مرَّتَين.
	كرِّر الخطوات السابقة لترسم القطر الآخر.

	صِل بين هذه النقاط لتشكّل المضلّع الثماني المُنتظِم.

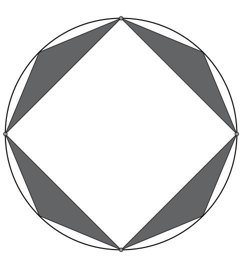
تمارين ٤-٣-ج

١) ارسم أربع دوائر منفصلة نصف قطر كل منها ٥ سم، وارسم في داخل كل دائرة شكلاً من الأشكال التالية:

- **أ** مُضلّع سُداسيّ مُنتظِم
- **ب** مُثلَّث متطابق الأضلاع
- **ج** مُربَّع
- **د** مُضلَّع ثُمانيّ مُنتظِم



٢) يُبيِّن الشكل المجاور طائرة ورقية (الدالتون) داخل مُضلَّع سُداسيّ مُنتظِم. ارسمها بصورة دقيقة مبتدئًا بدائرة قطرها ٨ سم.



٣) يُظهر الشكل المجاور أربعة مُثلَّثات متطابقة الضلعين تحيط بمربَّع. نفِّذ الرسم بدقَّة مبتدئًا بدائرة قطرها ٧ سم.

٤-٤ المُثلَّثات

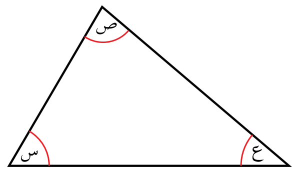
المُستوي يعني المُسطَّح. الأشكال المستوية هي أشكال مسطّحة أو ذات بُعدين.

المثلث هو شكل مستوٍ له ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا.

تُصنَّف المُثلَّثات بحسبِ أطوال أضلاعها وقياس زواياها (أو الاثنين معًا).

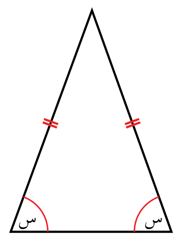
- **حسب أطوال الأضلاع**

مُثلَّث مُختلِف الأضلاع



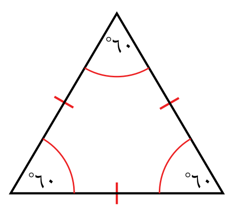
- أطوال اضلاعه مختلفة.
- قياسات زواياه مختلفة.

مُثلَّث مُتطابِق الضلعين



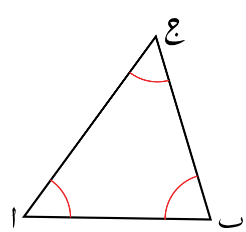
- له ضلعان متطابقان
- الزاويتان المقابلتان للضلعين المتطابقين متساويتان في القياس.

مُثلَّث مُتطابِق الأضلاع



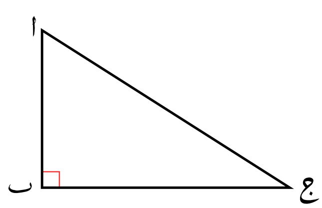
- له ثلاثة أضلاع متطابقة
- زواياه الثلاث متساوية في القياس.

- **حسب قياس الزوايا**



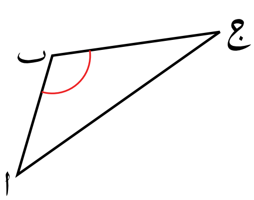
مُثلَّث حاد الزوايا

جميع قياسات زواياه أقل من ٩٠°



مُثلَّث قائم الزاوية

توجد زاوية واحدة فيه قياسها ٩٠°



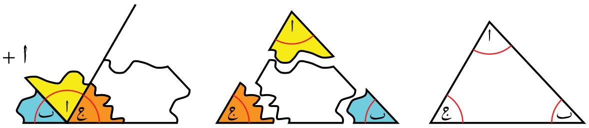
مُثلَّث منفرج الزاوية

توجد زاوية واحدة فيه قياسها أكبر من ٩٠°

تُسمّى الزوايا الثلاث في المُثلَّث زوايا داخلية. إذا مددت ضلعًا من أضلاع المُثلَّث، فإنك تشكل زاوية خارج المُثلَّث. تُسمّى تلك الزاوية بالزاوية الخارجية.

خصائص زوايا المُثلَّثات

انظر إلى الأشكال الآتية. ستلاحظ خاصّيَّتين مُهمَّتين لزوايا المُثلَّث:

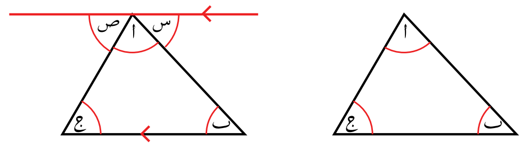


- مجموع قياسات زوايا المُثلَّث الداخلية يساوي ١٨٠°.
- قياس الزاوية الخارجية في المُثلَّث يساوي مجموع قياسَيِ الزاويتَين الداخليتَين المقابلتَين لها.

ليس مطلوبًا أن تعرف كيفية إثبات تلك الخصائص، ولكن عليك أن تتذكَّر القوانين المرتبطة بها.

مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°

لإثبات هذه الخاصّية، عليك رسم خطّ مستقيم موازٍ لأحد أضلاع المُثلَّث:



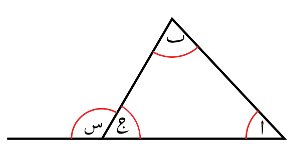
س + أ + ص = ١٨٠° (زوايا على خطّ مستقيم)

بما أن:

ب = س، ج = ص (الزاويتان المُتبادلتان متساويتان في القياس)

∴ أ + ب + ج = ١٨٠°

قياس الزاوية الخارجية للمُثلَّث يساوي مجموع قياسَي الزاويتَين الداخليتَين المُقابلتَين لها



تعلَّمت سابقًا أن:

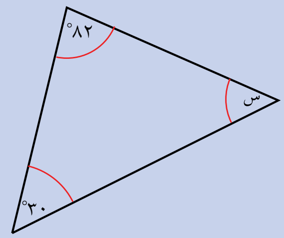
س = أ + ب

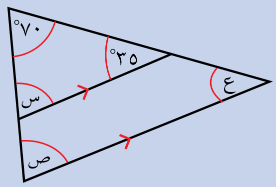
لاحقًا

بعض العمليات الجبرية التي استُخدِمت هنا هي أمثلة على حلول المعادلات الخطيّة. لقد قمت بذلك سابقًا، لكنها ستغطّى لاحقًا بتفصيل أكبر في الوحدة ١٥

مثـــال ٧

أوجد قيمة كل من: س، ص، ع فيما يلي، وفسّر إجابتك.

أ


ب


الحــلّ:

أ

٨٢° + ٣٠° + س = ١٨٠° (مجموع قياسات زوايا المُثلَّث = ١٨٠°)

س = ١٨٠° − ٨٢° − ٣٠°

س = ٦٨°

ب

٧٠° + ٣٥° + س = ١٨٠° (مجموع قياسات زوايا المُثلَّث = ١٨٠°)

س = ١٨٠° − ٧٠° − ٣٥°

س = ٧٥°

ص = ٧٥° (زاويتان مُتناظِرتان)

٧٠° + ص + ع = ١٨٠°

٧٠° + ٧٥° + ع = ١٨٠°

ع = ١٨٠° − ٧٥° − ٧٠° (مجموع قياسات زوايا المُثلَّث = ١٨٠°)

ع = ٣٥°

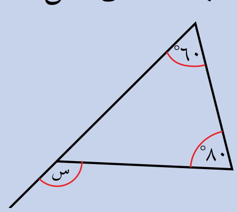
أو ع = ٣٥° (زاويتان مُتناظِرتان)

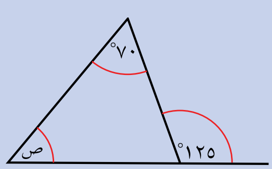
لاحقًا

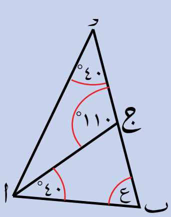
يتطلب عدد كبير من أسئلة علم المُثلَّثات منك إجراء حسابات شبيهة بهذه الحسابات قبل ان تنتقل إلى حلّ المسائل.

مثـــال ٨

أوجد قيمة كل من: س، ص، ع.

أ


ب


ج


الحــلّ:

أ

س = ٦٠° + ٨٠° (زاوية خارجية في المُثلَّث)

س = ١٤٠°

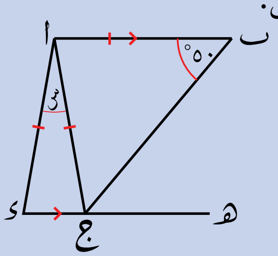
ب	١٢٥° = ص + ٧٠° ص = ١٢٥° − ٧٠° ص = ٥٥°	(زاوية خارجية في المُثلَّث)
ج	١١٠° = ع + ٤٠° ع = ١١٠° − ٤٠° ع = ٧٠°	(زاوية خارجية في المُثلَّث ا ب ج)

قد تكون إحدى الزوايا الخارجية في مُثلَّث ما زاوية داخلية في مُثلَّث آخر، كما في المثال ٨ الجزء ج .

تُعدّ الأمثلة أعلاه أمثلة بسيطة، لأنك تستطيع تقرير أيّ قاعدة أو قانون سيُطبّق بسهولة. في أغلب الحالات، يُتوقّع أن تطبّق هذه القواعد لتجد قياسات الزوايا في رسومات أكثر تعقيدًا. ستحتاج إلى تنفيذ علاقات الزوايا ودمجها معًا لتجد الحلّ.

مثـــال ٩

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



الحـــلّ:

ق (ا ج^ ب) = ٥٠°	(ا ب ج مثلّث متطابق الضلعين)
∴ ق (ج ا^ ب) = ١٨٠° − ٥٠° − ٥٠° ق (ج ا^ ب) = ٨٠°	(مجموع قياسات زوايا المُثلَّث)
ق (ا ج^ د) = ٨٠°	(زاويتان متبادلتان)
∴ ق (ا د^ ج) = ٨٠° ∴ س = ١٨٠° − ٨٠° − ٨٠° س = ٢٠°	(المُثلَّث ا د ج متطابق الضلعين) (مجموع قياسات زوايا المُثلَّث ا د ج)

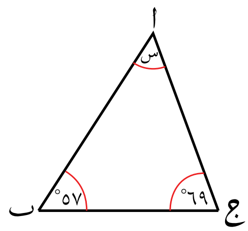
سابقًا

يوجد في المثلّث متطابق الضلعين ضلعان متساويان في الطول وزاويتان (زاويتا القاعدة) متساويتان في القياس. لذا إذا علمت أن المثلّث متطابق الضلعين، يمكنك وضع علامتَين على زاويتَي قاعدة الضلعَين المتساويين على أن لهما القياس نفسه.

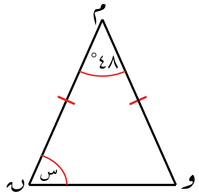
تمارين ٤-٤

١) أوجد قياس الزوايا المشار إليها بأحرف في كلّ ممّا يلي. برِّر إجاباتك.

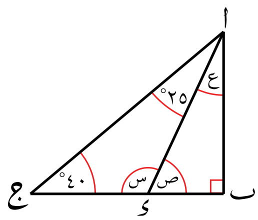
أ



ب

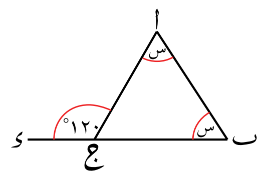


ج

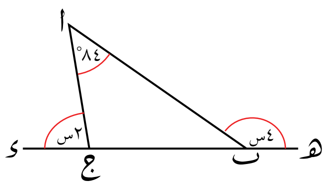


٢) أوجد قيمة س في كلّ ممّا يلي. برِّر إجاباتك.

أ

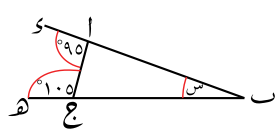


ب

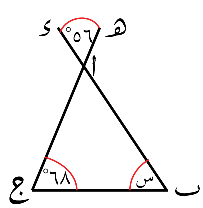


٣) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف س في الأشكال الآتية. وضِّح خطوات الحلّ.

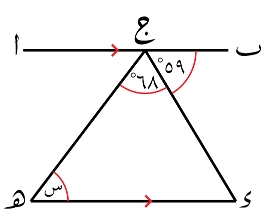
أ



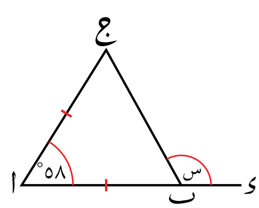
ب



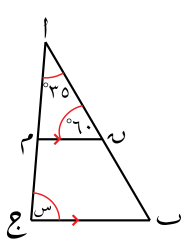
ج



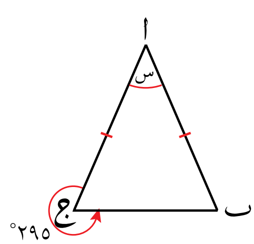
د



هـ

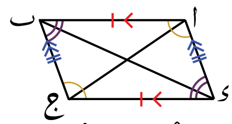
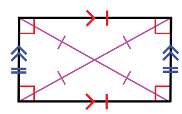
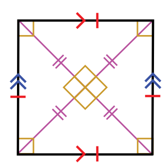
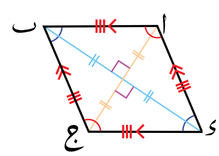
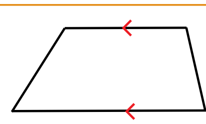
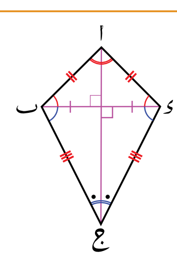


و



٤-٥ الأشكال الرباعيّة

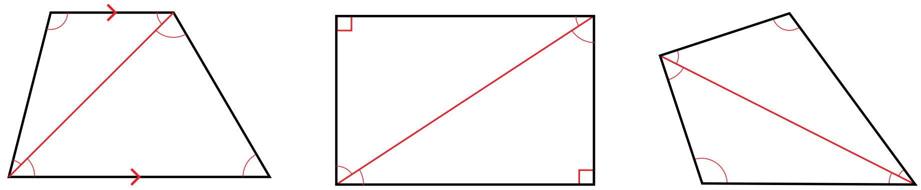
الأشكال الرباعيّة هي أشكال مستوية لها أربعة أضلاع وأربع زوايا داخلية. تُسمّى الأشكال الرباعية بحسب خصائصها كما في الجدول التالي:

اسم الشكل الرُّباعي	أمثلة	ملخَّص الخصائص
مُتوازي الاضلاع	 ن(أ̂) = ن(ج̂) ن(ب̂) = ن(د̂)	الأضلاع المتقابلة متوازية ومتساوية في الطول. الزوايا المتقابلة متساوية في القياس. القطران ينصِّف كل منهما الآخر.
المُستطيل		الأضلاع المتقابلة متوازية ومتساوية في الطول. قياس كلّ زاوية =٩٠° القُطران متساويان في الطول، وينصِّف كل منهما الآخر.
المُربَّع		جميع الأضلاع متساوية في الطول. قياس كلّ زاوية = ٩٠° القطران متساويان في الطول. القطران متعامدان وينصِّف كل منهما الآخر، وينصِّف القُطران الزوايا المتقابلة.
المُعيَّن	 ن(أ̂) = ن(ج̂) ن(ب̂) = ن(د̂)	جميع الأضلاع متساوية في الطول. الأضلاع المتقابلة متوازية. الزوايا المتقابلة متساوية في القياس. القطران متعامدان وينصِّف كل منهما الآخر، وينصِّف القُطران الزوايا المتقابلة.
شبه المُنحرِف		زوج واحد من الأضلاع المتوازية.
الطائرة الورقية (الدالتون)	 ن(أ ب̂ د) = ن(أ د̂ ب) ن(ج ب̂ د) = ن(ج د̂ ب)	زوجان من الأضلاع المتجاورة متساويان في الطول. زوج واحد من الزوايا المتقابلة متساوية في القياس. يتقاطع القُطران ويُشكِّلان زاوية قياسها ٩٠°

في الحقيقة، تعدّ بعض هذه الأشكال 'حالات خاصة' من الأشكال الأخرى. فالمربَّع مثلاً، أيضًا مستطيل لأن أضلاعه المتقابلة متوازية ومتساوية في الطول وقياس كلّ من زواياه يساوي ٩٠°. كما أن كلّ مُعيَّن هو متوازي أضلاع. من جهة أخرى، لا يكون العكس في هذين المثالين صحيحًا! فالمستطيل ليس مُربَّعًا. ما الحالات الخاصة الأخرى التي يمكن أن تفكّر بها؟

مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي

يمكن تقسيم الشكل الرباعي إلى مُثلَّثين من خلال رسم قُطر واحد، وقد عرفت سابقًا أن مجموع قياسات زوايا المُثلَّث ١٨٠°، لذا يكون مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ١٨٠° + ١٨٠° = ٣٦٠°

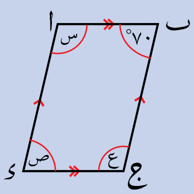


ويمكن استخدام خاصّية مجموع قياسات زوايا الشكل الرُّباعي بالإضافة إلى الخصائص الأخرى للأشكال الرباعيَّة، لإيجاد قياسات الزوايا المجهولة.

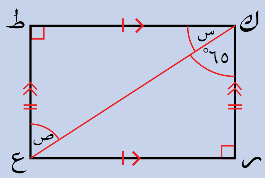
مثــال ١٠

أوجد قياس الزوايا المشار إليها بحرف في كلّ شكل من الأشكال الآتية:

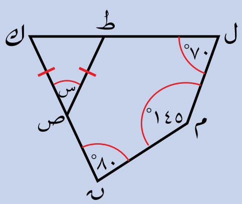
أ متوازي أضلاع



ب مستطيل



ج شكل رباعيّ



الحــلّ:

أ س = ١١٠°	(أ̂ ، ت̂ متحالفتان)
ص = ٧٠°	(ت̂ ، ءَ̂ متقابلتان في متوازي الأضلاع)
ع = ١١٠°	(أ̂ ، ع̂ متقابلتان في متوازي الأضلاع)
ب س + ٦٥° = ٩٠°	(ك̂ زاوية قائمة في المستطيل)
∴ س = ٩٠° − ٦٥°	
س = ٢٥°	
ص = ٦٥°	(زاويتان متبادلتان)

ج) ق(ل كَ ن) = ٣٦٠° − ٧٠° − ١٤٥° − ٨٠° (مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي)

ق(ل كَ ن) = ٦٥°

∴ ق(ك طَ ص) = ٦٥° (مُثلَّث متطابق الضلعين)

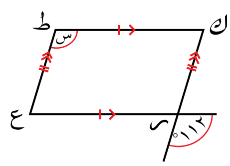
∴ س = ١٨٠° − ٦٥° − ٦٥° (مجموع قياسات زوايا المُثلَّث ك ط ص)

س = ٥٠°

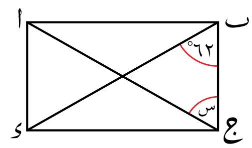
تمارين ٤-٥

١) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف (س) في كل مما يأتي. برِّر إجاباتك.

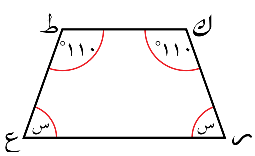
أ



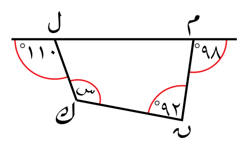
ب



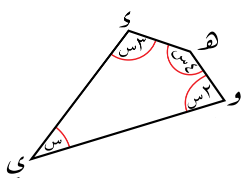
ج



د



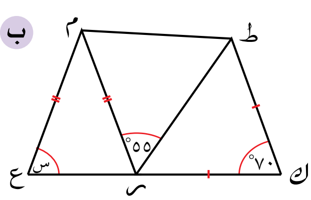
هـ



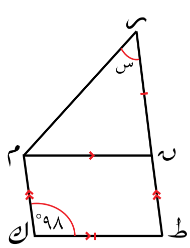
٢) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف (س) في كلّ شكل من الأشكال الآتية. برِّر إجاباتك.

قد تحتاج إلى إيجاد زوايا مجهولة قبل أن تجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف س. في هذه الحالة، اكتب قياس الزاوية الذي وجدته وقدِّم التبريرات اللازمة.

أ

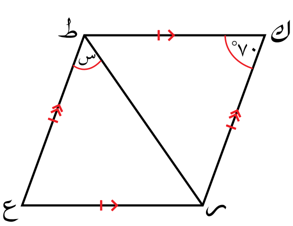


ب



ك ط = م ن

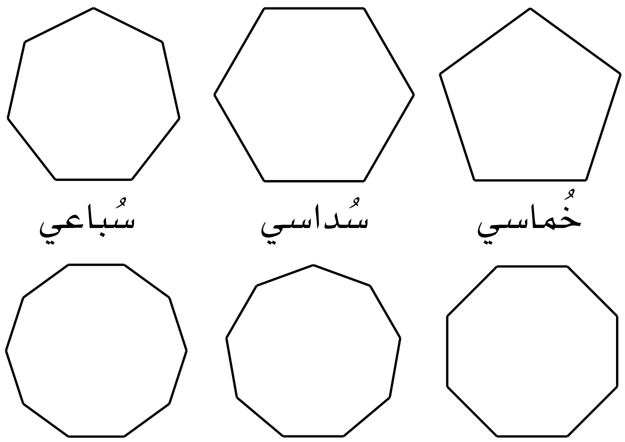
ج



٤-٦ مُضلَّعات أخرى

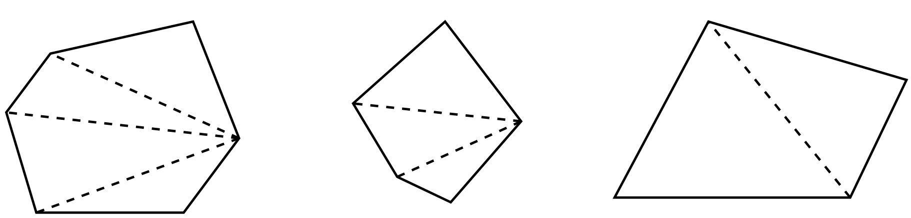
المُضلَّع هو شكل مستوٍ له ثلاثة أضلاع أو أكثر، فالمُثلَّثات مُضلَّعات لها ثلاثة أضلاع، والأشكال الرباعيّة مُضلَّعات لها أربعة أضلاع، وقد تسمّى المضلّعات الأخرى بحسب عدد أضلاعها، والمُضلَّعات المُنتظِمة تكون جميع أضلاعها مُتساوية في الطول وجميع زواياها متساوية في القياس.

تأكَّد من أنك تعرف أسماء هذه المُضلّعات:



مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع

يمكننا إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمُضلَّعات من خلال تقسيمها إلى مُثلَّثات:



هل يمكنك ملاحظة النمط الموجود في الأشكال أعلاه؟

لاحظ أنه يمكن تقسيم المضلّع إلى مجموعة من المُثلَّثات يكون عددها أقلَّ من عدد الأضلاع بمقدار ٢ دائمًا، فإذا كان عدد الأضلاع (ن)، فإن عدد المُثلَّثات هو (ن − ٢).

بما أن مجموع قياسات زوايا المُضلَّع يساوي (١٨٠° × عدد المُثلَّثات) فإنه يمكننا إيجاد مجموع قياسات زوايا أيّ مُضلَّع باستخدام الصيغة الآتية:

مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمُضلَّع = (ن − ٢) × ١٨٠°

مثــال ١١

أوجد مجموع قياسات زوايا المضلّع العُشاري، ثمّ أوجد قياس كلّ زاوية إذا كان هذا المضلّع مُنتظِمًا.

الحــلّ:

مجموع قياسات الزوايا الداخلية = (ن − ٢) × ١٨٠° = (١٠ − ٢) × ١٨٠° = ١٤٤٠°	للمُضلَّع العشاري ١٠ أضلاع، أي أن: ن = ١٠
قياس كل زاوية في العُشاري المُنتظِم = $\frac{١٤٤٠°}{١٠}$ = ١٤٤°	للمُضلَّع العشاري المنتظم ١٠ زوايا متساوية في القياس.

مثــال ١٢

إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمُضلَّع ما ٢٣٤٠°، فما عدد أضلاعه؟

الحــلّ:

٢٣٤٠° = (ن − ٢) × ١٨٠° $\frac{٢٣٤٠}{١٨٠}$ = ن − ٢	عوّض القيم في صيغة مجموع قياسات الزوايا للمُضلَّع.
١٣ = ن − ٢ ١٣ + ٢ = ن	حل المعادلة لتحصل على قيمة ن.
∴ ن = ١٥	عدد أضلاع المُضلّع ١٥ ضلعًا.

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمُضلّع المُحدّب

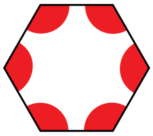
مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة في المُضلّع المُحدّب يساوي ٣٦٠° دائمًا، مهما كان عدد أضلاعه.

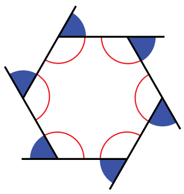
يكون المضلّع مقعَّرًا عندما يتضمن زاوية مُنعكسة. تكون كل المضلّعات الباقية مُحدَّبة.

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمُضلّع السُّداسي = (ن − ٢) × ١٨٠°

= ٤ × ١٨٠°

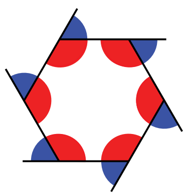
= ٧٢٠°





إذا مددت كلّ ضلع من أضلاع السداسي، ستحصل على ست زوايا خارجية، زاوية واحدة بجانب كلّ زاوية داخليّة. مجموع قياس كلّ زوج من الزوايا الداخليّة والخارجية ١٨٠° (زوايا على خط مستقيم).
هناك ستة رؤوس، أي يوجد ستة أزواج من الزوايا الداخلية والخارجيّة مجموع قياس زوايا كلّ زوج منها ١٨٠°.

∴ مجموع قياسات (الزوايا الداخلية + الزوايا الخارجية) = ١٨٠° × ٦
= ١٠٨٠°



ولكن مجموع قياس الزوايا الداخلية = (ن − ٢) × ١٨٠ °
= ٤ × ١٨٠°
= ٧٢٠°

وهكذا فإن: ٧٢٠° + مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة = ١٠٨٠°
مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة = ١٠٨٠° − ٧٢٠°
مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة = ٣٦٠°

تمارين ٤-٦

المُضلَّع المُنتظِم مُضلَّع جميع أضلاعه متساوية في الطول وجميع زواياه متساوية في القياس.
المضلّع غير المُنتظِم أضلاعه غير متساوية في الطول وزواياه غير متساوية في القياس.

١) أكمل الجدول الآتي:

عدد أضلاع المُضلَّع	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١٢	٢٠
مجموع قياسات الزوايا الداخليّة								

٢) أوجد قياس زاوية داخليّة واحدة في كلّ مُضلّع من المضلّعات الآتية:

أ) خُماسي مُنتظِم
ب) سُداسي مُنتظِم
ج) ثُماني مُنتظِم
د) عُشاري مُنتظِم
هـ) مُضلَّع مُنتظِم له ١٢ ضلعًا
و) مُضلَّع مُنتظِم له ٢٥ ضلعًا

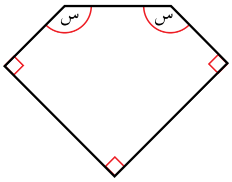
٣) مُضلَّع مُنتظِم له ١٥ ضلعًا. أوجد:

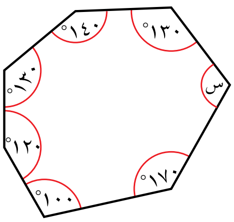
أ) مجموع قياسات زواياه الداخليّة.
ب) مجموع قياسات زواياه الخارجية.
ج) قياس كلّ زاوية داخليّة.
د) قياس كلّ زاوية خارجيّة.

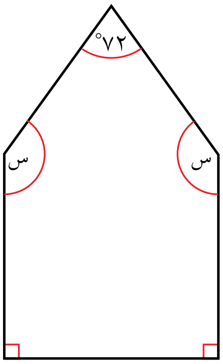
تصحّ قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية وقانون الزوايا الخارجية في كلّ المضلّعات المُنتظِمة وغير المنتظمة. لكن، في المَضلّعات غير المُنتظِمة، لا يمكنك قسمة مجموع قيَاس الزوايا الداخلية على عدد الأضلاع لتجد قياس زاوية داخلية، فقد تكون قياسات الزوايا الداخلية كلّها مختلفة.

٤) مضلّع منتظم له ں زاوية خارجيّة قياس كلّ منها ١٥°. ما عدد أضلاعه؟

٥) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف (س) في كلّ مُضلَّع من المُضلّعات غير المنتظمة الآتية:

أ


ب


ج


مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

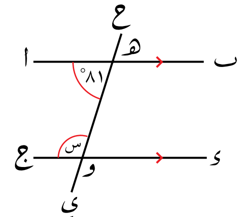
- المصطلحات المتعلّقة بأجزاء الدائرة. النقطة هي موقع على شبكة الإحداثيات والقطعة المستقيمة هي أقصر مسافة بين نقطتين.
- يبعد المُستقيمان المتوازيان كل منهما عن الآخر بنفس المسافة.
- يتقاطع الخطان المستقيمان المتعامدان بزاوية قائمة.
- قياس الزوايا الحادة > ٩٠° وقياس الزوايا القائمة يساوي ٩٠° بالضبط وقياس الزوايا المنفرجة > ٩٠°، > ١٨٠° قياس الزوايا المستقيمة يساوي ١٨٠°. قياس الزوايا المنعكسة > ١٨٠°، > ٣٦٠°. قياس الدورة الكاملة يساوي ٣٦٠°
- المثلّثات مختلفة الأضلاع لا تتضمّن أضلاعًا متساوية في الطول ولا زوايا متساوية في القياس. المثلّثات متطابقة الضلعين تتضمّن ضلعين متساويين في الطول وزاويتين متساويتين في القياس. المثلّثات متطابقة الأضلاع فيها ثلاثة أضلاع متساوية في الطول، وثلاث زوايا متساوية في القياس.
- مجموع قياسَي الزاويتين المتتامّتين يساوي ٩٠°، ومجموع قياسَي الزاويتَين المُتكامِلتين يساوي ١٨٠°
- مجموع قياسات الزوايا على خطّ مستقيم يساوي ١٨٠°
- مجموع قياسات الزوايا حول النقطة يساوي ٣٦٠°
- تتشكّل الزاويتان المُتقابلتان بالرأس عند تقاطع خطّين مستقيمَين وهما مُتساويتان في القياس.
- عندما يقطع قاطع خطّين مستقيمين متوازيَين، تتشكَّل أزواج متنوعة من الزوايا. الزاويتان المتناظرتان متساويتان في القياس. والزاويتان المُتبادلتان مُتساويتان في القياس، والزاويتان المُتحالفتان مُتكاملتان.
- مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°
- قياس الزاوية الخارجيّة في المثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتَين الداخليتين المُقابلتَين لها.
- يمكن تصنيف الأشكال الرباعية إلى متوازي أضلاع ومستطيل ومربَّع ومعيَّن وشبه مُنحرِف وطائرة ورقية (الدالتون)، بحسب خصائصها.
- مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي يساوي ٣٦٠°
- المُضلَّعات أشكال مستوية لها عدة أضلاع. يمكن تسمية المُضلَّعات بحسب عدد أضلاعها، مثل الخُماسي (٥)؛ السُّداسي (٦)؛ الثُّماني (٨)؛ والعُشاري (١٠).
- جميع أضلاع المضلّعات المُنتظِمة متساوية في الطول وجميع زواياها متساوية في القياس.
- المُضلّعات غير المُنتظِمة أضلاعها غير متساوية في الطول، وزواياها غير متساوية في القياس.
- مجموع قياسات زوايا المُضلَّع يساوي (ن − ٢) × ١٨٠°، حيث ن عدد الأضلاع.
- مجموع قياسات زوايا المُضلَّع المُحدَّب الخارجيّة يساوي ٣٦٠°

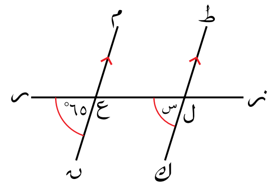
يجب أن تكون قادرًا على:

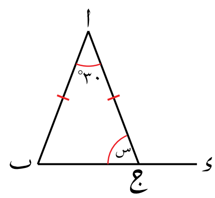
- حساب قياسات الزوايا المجهولة على الخطّ المستقيم وحول النقطة.
- حساب قياسات الزوايا المجهولة باستخدام خصائص الزوايا المُتقابِلة بالرأس، وعلاقات الزوايا المتعلِّقة بالخطوط المستقيمة المتوازية.
- حساب قياسات الزوايا المجهولة باستخدام خصائص زوايا المُثلَّثات والأشكال الرباعية والمضلّعات.
- رسم الخطوط المستقيمة والزوايا، وقياسها بدقَّة.
- رسم مُثلَّث باستخدام قياسات معطاة.
- رسم المنصِّف العمودي لقطعة مستقيمة معطاة.
- رسم منصِّف زاوية مُعطاة.
- رسم مُضلّع مُنتظِم عدد أضلاعه ٣ أو ٤ أو ٦ أو ٨ في دائرة.

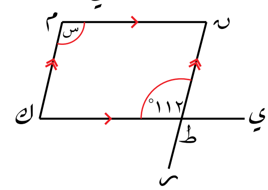
تمارين نهاية الوحدة

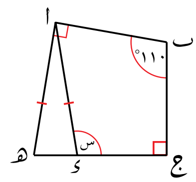
١) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف (س) في كل شكل فيما يلي. برِّر إجاباتك.

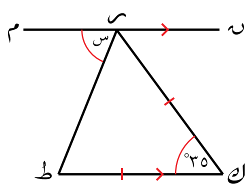
أ


ب


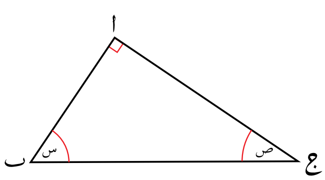
ج


د


هـ


و


٢) ادرس المُثلَّث المجاور ثم:



أ اشرح لماذا س + ص = ٩٠°؟

ب أوجد قيمة ص عندما س = ٣٧°

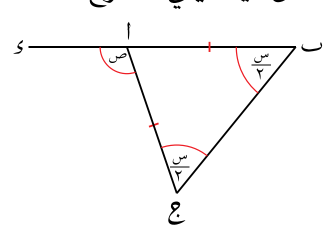
٣) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في المُضلّع الثماني المُنتظِم؟

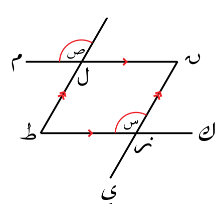
٤) مضلع محدَّب عدد أضلاعه ٢٠ :

أ ما مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة؟

ب إذا كان المُضلّع مُنتظِمًا، فما قياس كلّ زاوية خارجية فيه؟

٥) في كل شكل فيما يلي، اشرح لماذا س = ص؟

أ


ب


٦) أ باستخدام المسطرة والفرجار أنشئَ القطعة المستقيمة اب بنفس طول القطعة المستقيمة في الشكل المجاور، ثم:

ب ارسم (ب ا̂ ج) قياسها ٧٥°

ج ارسم (ا ب̂ ى) قياسها ١٢٥°

٧) أنشئَ المثلث ط ك ر الذي أطوال أضلاعه ط ك = ٤,٥ سم، ك ر = ٥ سم، ط ر = ٧ سم.

الوحدة الخامسة: التقدير والتقريب

المُفردات

- التقدير Estimate
- الحد الأدنى Lower bound
- الحد الأعلى Upper bound

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تُجري التقديرات من دون استخدام الآلة الحاسبة.
- تجد الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى للأعداد حتى درجة مُحدَّدة من الدقّة.
- تحلّ مسائل تتضمّن حدودًا عُليا وحدودًا دنيا.

تولي وزارة الأوقاف والشؤون الدينية في سلطنة عُمان اهتمامًا كبيرًا لبناء المساجد والجوامع التي لها دور رئيسيّ في حياة سُكّان السلطنة. ففي العام ١٩٩٢م، أمر السلطان قابوس بن سعيد طيب اللّه ثراه ببناء جامع «السلطان قابوس الأكبر» في العاصمة مسقط، والذي يُعدّ في غاية الإبداع، خاصّة في قبابه وممرّاته وجداريّاته ومنائره ومداخله ونوافذه وحدائقه. يُغطّي بناء الجامع مساحة ٤٠٠٠٠ متر مُربّع، ويستوعب ما يزيد على عشرين ألف مُصلٍّ.

تصادفك أحيانًا أمور لا يكون مُهمًّا فيها الحصول على إجابة دقيقة. قد تقرأ أن بناء جامع «السلطان قابوس الأكبر» يُغطّي مساحة ٤٠ ألف متر مُربَّع، ولكن من غير المرجَّح أن تكون تلك المساحة ٤٠ ألف متر مربع بالضبط، فقد تكون أقلّ من ذلك بقليل أو أكثر بقليل. ومن المُهمّ أن تكون قادرًا على تقريب الأعداد، وأن تعرف كيف يُؤثّر التقريب على دقّة الحسابات.

١-٥ تقريب الأعداد

تصادفك عمليات حسابية عديدة لا تكون فيها بحاجة إلى إيجاد الإجابة الدقيقة، وخاصة مع الأعداد العشريّة. ولكن قد يطلَب منك إعطاء الإجابة إلى مستوى معيّن من الدقّة. كأن يُطلب منك تقريب العدد إلى أقرب منزلتين عشريتين، أو تقريبه إلى عدد مكوّن من ثلاثة أرقام معنويّة.

لتقرّب العدد إلى أقرب منزلة عشرية مُحدَّدة، انظر إلى قيمة الرقم الذي يقع إلى يمين المنزلة التي تُقرِّب إليها. إذا كانت تلك القيمة أكبر من العدد ٥ أو تساويه، قرِّب إلى العدد الأعلى وإذا كانت أصغر من العدد ٥ يبقى العدد كما هو (لا يتغيَّر الرقم).

مثـــال ١

قرّب العدد ٦٤,٨٣٩٩٠٦ إلى أقرب:

أ عدد كامل ب منزلة عشريّة واحدة ج ٣ منازل عشرية

الحـــلّ:

أ	٦٤,٨٣٩٩٠٦ ٦٤,٨٣٩٩٠٦ = ٦٥ (إلى أقرب عدد كامل)	الرقم الذي يقع في منزلة الآحاد هو ٤ الرقم الذي على يمينه هو ٨، لذا ستقرِّب إلى الأعلى لتحصل على ٥ إجابة مقرَّبة إلى أقرب عدد كامل
ب	٦٤,٨٣٩٩٠٦ ٦٤,٨٣٩٩٠٦ = ٦٤,٨ (منزلة عشرية واحدة)	الرقم الذي يقع في المنزلة العشريّة الأولى هو ٨ الرقم الذي على يمينه هو ٣، لذا لا يتغيّر الرقم ٨ إجابة مقرَّبة إلى أقرب منزلة عشريّة واحدة.
ج	٦٤,٨٣٩٩٠٦ ٦٤,٨٣٩٩٠٦ = ٦٤,٨٤٠ (٣ منازل عشرية)	الرقم الذي يقع في المنزلة العشريّة الثالثة هو ٩ الرقم الذي على يمينه هو ٩، لذا ستقرّب إلى الأعلى. عندما تقرِّب ٩ إلى الأعلى، تحصل على ١٠، لذا يمكنك أن تضيف ١ إلى الرقم ٣ وتكتب الصفر مكان الرقم ٩ إجابة مقرَّبة إلى أقرب ٣ منازل عشرية.

لتقريب عدد إلى عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية، أوجد الرقم المعنوي الثالث، وانظر إلى الرقم الذي يقع إلى يمينه، إذا كان ٥ أو أكبر، أضف واحدًا إلى الرقم المعنوي الثالث واحذف جميع الأرقام الأخرى الواقعة إلى يمينه، وإذا كان أصغر من ٥، دع الرقم المعنوي الثالث من دون تغيير، واحذف جميع الأرقام الأخرى الواقعة إلى يمينه. وللتقريب إلى رقم معنوي آخر، استخدم الخطوات نفسها ولكن أوجد الرقم المعنوي المناسب لتبدأ به: الرقم الرابع للدلالة على ٤ أرقام معنوية، والرقم السابع للدلالة على ٧ أرقام معنوية، وهكذا.

الرقم المعنوي الأول في العدد هو أول رقم غير صفري من جهة اليسار. الرقم الذي على يمينه هو الرقم المعنوي الثاني، والرقم الذي على يمينه هو الرقم المعنوي الثالث، وهكذا.

مثـــال ٢

قرّب:

أ ١,٠٧٦ إلى عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية

ب ٠,٠٠٧٣٦ إلى عدد مُكوَّن من رقم معنوي واحد.

الحـــلّ:

أ	١,٠٧٦ = ١,٠٨ (٣ أرقام معنوية)	الرقم المعنوي الثالث هو ٧؛ الرقم الذي على يمينه هو ٦، لذا قرّب ٧ إلى الرقم الأعلى ليصبح ٨ إجابة مقرَّبة إلى عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية.
ب	٠,٠٠٧٣٦ = ٠,٠٠٧ (رقم معنوي واحد)	الرقم المعنوي الأول هو ٧؛ الرقم الذي على يمينه هو ٣، لذا الرقم ٧ لن يتغيّر. إجابة مقرَّبة إلى عدد مُكوَّن من رقم معنوي واحد.

تمارين ٥-١

١) قرّب كلّ عدد إلى أقرب منزلتَيْن عشريَّتَيْن في كل مما يأتي:

أ ٣,١٨٥ ب ٠,٠٦٤ ج ٣٨,٣٤٥٦ د ٢,١٤٩ هـ ٠,٩٩٩

و ٠,٠٤٥٦ ز ٠,٠٠٥ ح ٤١,٥٦٧ ط ٨,٢٩٩ ي ٠,٤٢٣٦

ك ٠,٠٦٢ ل ٠,٠٠٩ م ٣,٠١٦ ن ١٢,٠١٦٤ س ١٥,١١٥٧٩

٢) اكتب كل عدد فيما يلي مُقرَّبًا إلى عدد مُكوَّن من:

(١) ٤ أرقام معنويّة (٢) ٣ أرقام معنويّة (٣) رقم معنوي واحد

أ ٤٥١٢٦ ب ١٢٣٠٥ ج ٦٥٢٣٨ د ٣٢٠,٥٥

هـ ٢٥,٧١٦ و ٠,٠٠٠٧٦٥ ز ١,٠٠٨٧ ح ٧,٣٤٨٧٦

ط ٠,٠٠٩٨٠١٢ ي ٠,٠٢٨١٤ ك ٣١,٠٠٧٧ ل ٠,٠٠٦٤٧٣٥

٣) حوّل العدد الكسري $٢\frac{٥}{٩}$ إلى عدد عشريّ مستخدمًا الآلة الحاسبة في كل مما يأتي، ثم اكتب إجابة مقرَّبة إلى أقرب:

أ ٣ منازل عشرية ب منزلتَيْن عشريَّتَيْن ج منزلة عشريّة واحدة

د ٣ أرقام معنويّة هـ رقمين معنويَّين و رقم معنوي واحد

الرقم المعنوي الأول في العدد هو أول رقم غير صفري موجود فيه عند قراءته من اليسار إلى اليمين.

لاحقًا

سوف تستخدم التقريب إلى عدد مُحدَّد من المنازل العشريّة أو إلى عدد مُعيَّن من الأرقام المعنويّة في أغلب المهام الرياضية التي ستقوم بها في هذا العام.

٢-٥ التقدير

من المُهِمّ أن تعرف فيما إذا كانت الإجابة التي حصلت عليها قريبة ممّا توقَّعته أو لا. يعرض هذا الدرس كيف تحصُل على ناتج تقريبي للعمليات الحسابية بسهولة.

تتمثَّل إحدى الطرق لإيجاد **التقدير** في تقريب الأعداد التي تستخدمها قبل أن تجري الحسابات عليها. ورغم أنَّك تستطيع استخدام أيّ درجة للدقّة، إلا أن الأعداد في العمليات الحسابية تُقرَّب عادة إلى عدد مُكوَّن من رقم معنويّ واحد:

$$٣,٩ \times ٢,١ \approx ٤ \times ٢ = ٨$$

لاحظ أن $٣,٩ \times ٢,١ = ٨,١٩$، مما يعني أن القيمة المُقدَّرة ٨ ليست بعيدة عن القيمة الدقيقة!

مثـــال ٣

قدّر قيمة كلّ من:

أ $\dfrac{٤,٦ + ٣,٩}{\sqrt{٣٩٨}}$ ب $\sqrt{٤٢,٢ - ٥,١}$

الحـــلّ:

أ $\dfrac{٤,٦ + ٣,٩}{\sqrt{٣٩٨}} \approx \dfrac{٥ + ٤}{\sqrt{٤٠٠}}$ $= \dfrac{٩}{٢٠} = \dfrac{٤,٥}{١٠} = ٠,٤٥$	قرّب الأعداد إلى عدد مُكوَّن من رقم معنوّي واحد.
تحقَّق من التقدير: $\dfrac{٤,٦ + ٣,٩}{\sqrt{٣٩٨}} = ٠,٤٢٦$ (٣ أرقام معنويّة)	إذا استخدمت الآلة الحاسبة الآن، فسوف تجد الإجابة الدقيقة، وتلاحظ أن التقدير كان قريبًا جدًّا.
ب $\sqrt{٤٢,٢ - ٥,١} \approx \sqrt{٤٠ - ٥}$ $= \sqrt{٣٥}$ $\approx \sqrt{٣٦}$ $= ٦$	في هذا السؤال، ابدأ بتقريب كلّ قيمة إلى عدد مُكوَّن من رقم معنوي واحد، ولكن لاحظ أنك لا تستطيع إيجاد الجذر التربيعيّ بسهولة إلا للأعداد المُربَّعة فقط! لذا قرِّب العدد ٣٥ إلى ٣٦ لتحصُل على عدد مُربَّع.

مُساعَدة

لاحظ أن الرمز ($\approx$) يُستخدَم عند التقريب فقط. في الحالات الأخرى، أي عندما يتساوى عددان بالضبط، يجب استخدام رمز (=).

عند البدء بحلّ التمارين الآتية، يُفضَّل البدء بتقريب الأعداد إلى عدد مُكوَّن من رقم معنوي واحد. تذكَّر أنك تستطيع أحيانًا جعل حساباتك أكثر سهولة من خلال تعديل الأعداد مرّة أخرى.

تمارين ٥-٢

١) قدّر ناتج كلّ ممّا يلي (حدِّد درجة الدقّة التي استخدمتها):

أ $\frac{٢٣,٦}{٦,٣}$ **ب** $\frac{٤,٣}{٠,٠٨٧ \times ٣,٨٩}$

ج $\frac{٧,٢١ \times ٠,٤٦}{٩,٠٩}$ **د** $\frac{٤,٨٢ \times ٦,٠١}{٢,٥٤ + ١,٠٩}$

هـ $\frac{\sqrt{٤٨}}{٢,٥٤ + ٤,٠٩}$ **و** $(٠,٤٥ + ١,٨٩)(٦,٥ - ١,٩)$

ز $\frac{٢٣,٨ + ٢٠,٢}{٤,٧ + ٥,٧}$ **ح** $\frac{١٠٩,٦ - ٤٥,١}{١٩,٤ - ١٣,٩}$

ط $(٢,٥٢)^{٢} \times \sqrt{٤٨,٩٩}$ **ي** $\sqrt{٢٢٣,٨ \times ٤٥,١}$

ك $\sqrt{٩,٢٦} \times \sqrt{٩٩,٨٧}$ **ل** $(٤,١)^{٣} \times (١,٩)^{٤}$

٢) أوجد الناتج الدقيق لكل جزئية في التمرين (١) باستخدام الآلة الحاسبة.

٣) زجاجة مشروبات غازيّة كتلتها ٦٤٣ غم. قدّر كتلة ٩٥٤ زجاجة من النوع نفسه.

٤) إذا كان طول الرف الواحد في مكتبة أحمد ١,١٦ م. وأراد أن يضع عُلَبًا من الأقراص المدمجة (CD) جنبًا إلى جنب على أحد رفوف المكتبة، حيث يبلغ سُمك العلبة الواحدة من الأقراص المُدمجة (CD) ٠,٨٢ سم. قدِّر عدد علب الأقراص المدمجة (CD) التي يمكن أن يضعها أحمد على رفّ واحد.

٥-٣ الحدود العُليا والحدود الدُّنيا

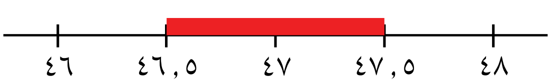
اشترى عبد الرحمن أريكة وهو يرغب في معرفة إن كان قياسها متناسبًا مع قياس الباب أو لا. قاس عرض الباب (٤٧ سم) وعرض الأريكة (٤٦,٩ سم) واستنتج أن عرض الأريكة مناسب مع وجود ١ مم زيادة. لكن لسوء الحظ، وصلت الأريكة، ولم يكن عرضها مُتناسبًا مع عرض الباب. ما الخطأ الذي حصل؟

بالنظر مرة أخرى إلى القيمة ٤٧ سم، أدرك عبد الرحمن أنه قرّب القياس إلى أقرب سنتيمتر. أظهر قياس جديد وأكثر دقّة أن عرض الباب، في الحقيقة، قريب من ٤٦,٧ سم. وأدرك أيضًا أنه قد قرّب قياس الأريكة إلى أقرب ملّيمتر. قاسها مرة أخرى، ووجد أن قيمتها الفعليّة قريبة من ٤٦,٩٥ سم، وهي أكبر من عرض الباب بمقدار ٢,٥ مم.

٥-٣-أ إيجاد أكبر قيمة مُمكِنة لقياس تمّ تقريبه وأصغر قيمة مُمكِنة له

فلنعد من جديد إلى باب عبد الرحمن. لو تم تقريب عرضه (٤٧ سم) إلى أقرب سم لكان من المفيد إيجاد أكبر قيمة وأصغر قيمة ممكنة للقياس الفعلي.

إذا وضعت القياس ٤٧ سم على خط الأعداد، سوف تلاحظ المجال الممكن للقيم بكلّ وضوح:



لاحظ أن مجال القيم الممكنة يتوقَّف، في النهاية العليا، عند العدد ٤٧,٥ سم. وإذا قرّبت العدد ٤٧,٥ سم إلى أقرب سنتيمتر، فستكون الإجابة ٤٨ سم. رغم أن العدد ٤٧,٥ لا يقرّب إلى ٤٧ (إلى أقرب سم)، لكنه يظلّ يُستخدَم كقيمة عليا. وعليك أن تدرك أن القيمة الصحيحة لقياس العرض قد تكون أيّ عدد لغاية ٤٧,٥ سم من دون تضمين العدد ٤٧,٥؛ تُسمّى أصغر قيمة ممكنة لقياس عرض الباب **الحدّ الأدنى**. وبالطريقة نفسها تُسمّى أكبر قيمة ممكنة لقياس عرض الباب **الحد الأعلى**.

عند إيجاد الحدود الدنيا والعليا للأعداد السالبة فإن الحد الأعلى هو المتضمن في الفترة

افترض أن عرض الأريكة (ع)، يُعبّر عن مدى القياسات الممكنة على النحو الآتي:

$$\text{٤٦,٥} \leqslant \text{ع} < \text{٤٧,٥}$$

يبيّن هذا أن قيَم ع تقع بين ٤٦,٥ (متضمَّنة) و ٤٧,٥ (من دون تضمين ٤٧,٥).

مثـــال ٤

أوجد الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى لكلّ من الأعداد الآتية، مراعيًا مُستوى التقريب المبيّن في كلّ حالة.

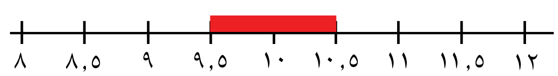
أ ١٠ سم، إلى أقرب سم

ب ٢٢,٥، إلى أقرب منزلة عشريّة واحدة

ج ١٢٨٠٠٠، إلى أقرب عدد مكوَّن من ٣ أرقام معنويّة

الحـــلّ:

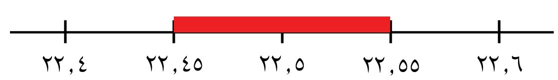
أ



مثِّل ١٠سم على خطّ الأعداد مع قيمتَي أقرب عددَيْن كاملَيْن.

القيمة الحقيقية ستكون الأقرب إلى ١٠سم إذا وقعت بين الحدّ الأدنى ٩,٥سم والحدّ الأعلى ١٠,٥سم.

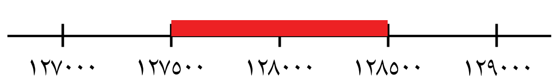
ب



انظر إلى العدد ٢٢,٥ على خطّ الأعداد.

القيمة الحقيقية ستكون الأقرب إلى ٢٢,٥ إذا وقعت بين الحدّ الأدنى ٢٢,٤٥ والحدّ الأعلى ٢٢,٥٥

ج



يبيّن خط الأعداد العدد ١٢٨٠٠٠

يقع العدد ١٢٨٠٠٠ بين الحدّ الأدنى ١٢٧٥٠٠ والحدّ الأعلى ١٢٨٥٠٠

> إذا اختلطت عليك الأمور عند التعامل مع الحدّ الأدنى والحدّ الأعلى، ارسم خط أعداد ليساعدك على إيجاد الإجابة.

تمارين ٥-٣-أ

١) أوجدِ الحدّ الأدنى والحدّ الأعلى لكلّ عدد مقرَّبًا إلى أقرب عدد كامل في كلّ ممّا يأتي:

أ ١٢ ب ٨ ج ١٠٠ د ٩ هـ ٧٢ و ١٢٧

٢) أوجدِ الحدّ الأدنى والحدّ الأعلى لكلّ عدد مقرِّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة في كلّ ممّا يأتي:

أ ٢,٧ ب ٣٤,٤ ج ٥,٠ د ١,١ هـ $^-$٢,٣ و $^-$٧,٢

٣) أوجد الحدّ الأدنى والحدّ الأعلى لكلّ ممّا يلي، مقرِّبًا إلى درجة الدقة المبيَّنة بين قوسين:

أ ١٣٢ (إلى أقرب عدد كامل) ب ٣٠٠ (إلى أقرب مئة)

ج ٤٠٥ (إلى أقرب عشرة) د ١٥ مليون (إلى أقرب مليون)

هـ ٣٢,٣ (منزلة عشريّة واحدة) و ٢٦,٧ (منزلة عشريّة واحدة)

ز ٠,٥ (منزلة عشريّة واحدة) ح ١٢,٣٤ (منزلتَيْن عشريتين)

ط ١٣٢ (٣ أرقام معنوية) ي ٠,١٣٤ (٣ أرقام معنوية)

طبِّق مهاراتك

٤) قدّرت آمنة أن كتلة الأسد ٤٠٠ كغم. إذا كان تقديرها صحيحًا مُقرَّبًا إلى أقرب ١٠٠ كغم، ما الحد الأدنى والحد الأعلى للكتلة الفعلية للأسد؟

٥) في سباق الركض، ركض نايف مسافة ١٠٠ م في ١٥,٣ ثانية، إذا علمت أن المسافة مقرَّبة إلى أقرب متر، والزمن مقرّب إلى أقرب منزلة عشريّة واحدة. اكتب الحدّين الأدنى والأعلى لكل من:

أ المسافة الفعليّة التي ركضها نايف ب الزمن الفعليّ الذي استغرقه نايف.

٦) حبل طوله ٤,٥ م مُقرَّب إلى أقرب ١٠سم. الطول الفعلي للحبل (ل) سم. أوجد الحد الأدنى والحد الأعلى للقيم الممكنة للطول الفعلي (ل)، واكتب الإجابة في صورة ... $\leqslant$ ل $<$ ...

٥-٣-ب حَلّ مسائل تتضمَّن الحدّ الأدنى والحدّ الأعلى

تُستخدَم في بعض الحسابات أكثر من قيمة واحدة مُقرّبة. يُعطي الاستخدام الدقيق للحدّ الأدنى والحدّ الأعلى لكلّ قيمة حدًّا أدنى وحدًّا أعلى صحيحين للإجابة التي يتم إيجادها.

مثـــال ٥

إذا كان أ = ٣,٦ (مقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)، ب = ١٤ (مقرَّبًا إلى أقرب عدد كامل)، أوجد الحدّ الأدنى والحدّ الأعلى لكلّ من العبارات الآتية:

أ أ + ب ب أ ب ج ب − أ د $\frac{أ}{ب}$

الحـــلّ:

٣,٥٥ ⩽ أ > ٣,٦٥ ١٣,٥ ⩽ ب > ١٤,٥	أولاً، أوجد الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى لكل من (أ)، (ب)
أ الحدّ الأعلى لـ (أ + ب)	
= الحدّ الأعلى لـ (أ) + الحدّ الأعلى لـ (ب)	عوِّض
= ٣,٦٥ + ١٤,٥	اجمع
= ١٨,١٥	
الحدّ الأدنى لـ (أ + ب)	
= الحدّ الأدنى لـ (أ) + الحدّ الأدنى لـ (ب)	عوِّض
= ٣,٥٥ + ١٣,٥	اجمع
= ١٧,٠٥	
∴ ١٧,٠٥ ⩽ (أ + ب) > ١٨,١٥	
ب الحدّ الأعلى لـ (أ ب)	
= الحدّ الأعلى لـ (أ) × الحدّ الأعلى لـ (ب)	عوِّض
= ٣,٦٥ × ١٤,٥	اضرب
= ٥٢,٩٢٥	
الحد الأدنى لـ (أ ب)	
= الحدّ الأدنى لـ (أ) × الحدّ الأدنى لـ (ب)	عوِّض
= ٣,٥٥ × ١٣,٥	اضرب
= ٤٧,٩٢٥	
∴ ٤٧,٩٢٥ ⩽ أ ب > ٥٢,٩٢٥	

مُساعَدة

فكِّر جيدًا في ب − أ. لتجد الحدّ الأعلى، يلزمك أن تطرح أصغر عدد ممكن من أكبر عدد ممكن.

ج الحدّ الأعلى لـ (ب − أ)

= الحدّ الأعلى لـ ب − الحدّ الأدنى لـ أ	عوِّض
= ١٤,٥ − ٣,٥٥	اطرح
= ١٠,٩٥	
الحد الأدنى لـ (ب − أ)	
= الحدّ الأدنى لـ (ب) − الحدّ الأعلى لـ (أ)	عوِّض
= ١٣,٥ − ٣,٦٥	اطرح
= ٩,٨٥	
∴ ٩,٨٥ ⩽ (ب − أ) < ١٠,٩٥	

مُساعَدة

لتجد الحدّ الأعلى لـ ($\frac{أ}{ب}$)، تحتاج لأن تقسم أكبر قيمة ممكنة لـ (أ) على أصغر قيمة ممكنة لـ (ب):

د الحدّ الأعلى لـ $\frac{أ}{ب}$

$= \frac{\text{الحدّ الأعلى لـ (أ)}}{\text{الحدّ الأدنى لـ (ب)}}$	
$= \frac{٣,٦٥}{١٣,٥}$	عوِّض
= ٠,٢٧٠٣...	اقسم
≈ ٠,٢٧٠	قرِّب إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية
الحدّ الأدنى لـ $\frac{أ}{ب}$	
$= \frac{\text{الحدّ الأدنى لـ (أ)}}{\text{الحدّ الأعلى لـ (ب)}}$	
$= \frac{٣,٥٥}{١٤,٥}$	عوِّض
≈ ٠,٢٤٤٨٢٧٥	اقسم
= ٠,٢٤٥	قرِّب إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية
∴ ٠,٢٤٥ ⩽ $\frac{أ}{ب}$ < ٠,٢٧٠	

تمارين ٥-٣-ب

١) إذا كانت: أ = ٥,٦ ، ب = ٢٤,١ ، جـ = ١٤٥ ، د = ٠,٣٤

احسب الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى لكلّ من العبارات الجبرية الآتية مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنويّة:

- **أ** $أ^{٢}$
- **ب** $ب^{٣}$
- **ج** $جـ\ د^{٢}$
- **د** $أ^{٢} + ب^{٢}$
- **هـ** $\frac{جـ}{ب^{٢}}$
- **و** $\frac{أ\ ب}{جـ\ د}$
- **ز** $\frac{جـ}{أ} - \frac{ب}{د}$
- **ح** $\frac{أ}{د} \div \frac{جـ}{ب}$
- **ط** $د\ جـ + \sqrt{\frac{أ}{ب}}$
- **ي** $د\ جـ - \sqrt{\frac{أ}{ب}}$

طبِّق مهاراتك

٢) يريد سعيد وضع غسّالة جديدة تتناسب مع مطبخ المنزل. يبلغ عرض إحدى الغسّالات ٧٩ سم مقرَّبًا إلى أقرب سنتيمتر. لوضع هذه الغسّالة في المكان المناسب، يجب عليه تفريغ مكان بإزالة بعض الخزائن بهدف الحصول على أصغر مكان فارغ ممكن.

- **أ** ما العرض الأقلّ للمكان الفارغ الذي يمكن أن يتناسب مع عرض الغسّالة؟
- **ب** ما العرض الأكثر للمكان الفارغ الذي يمكن أن يتناسَب مع عرض الغسّالة؟

٣) كيس من السكَّر يحتوي على ٥٠ كغم أُخِذ منه ١٢ كغم، وهذا القياس مقرَّب إلى أقرب كيلوغرام. أوجد الحدّ الأدنى والحدّ الأعلى لكتلة السكَّر المُتبقّية في الكيس.

٤) وتد خيمة طوله ٢٠ سم مُقرَّبًا إلى أقرب سنتيمتر، إذا كان طول الجزء الظاهر منه فوق سطح الأرض ٦,٤ سم مُقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشريّة واحدة. احسب الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى لطول الجزء الذي يقع تحت سطح الأرض من الوتد.

٥) رفّ طوله ٥٠ سم مقرَّبًا إلى عدد مكوَّن من رقمين معنويين، إذا علمت أن موسوعة علمية تحتوي على ١٢ مُجلّدًا، سُمك كلّ مجلد منها ٤,١ سم مُقرَّبًا إلى أقرب ملّيمتر، فهل يتَّسع هذا الرف لجميع مُجلَّدات الموسوعة؟

٦) سعة كأس ٢٠٠ مل مقرَّبة إلى أقرب مليلتر وسعة وعاء كبير ٨٦ لترًا مقرَّبة إلى أقرب لتر. ما العدد الأكبر المُمكن من الكؤوس المملوءة بالماء اللازمة، لملء الوعاء؟ ما العدد الأصغر الممكن من الكؤوس المملوءة بالماء اللازمة لملء الوعاء؟

٧) عمود خشبي طوله ٢ م مقرَّبًا إلى أقرب سنتيمتر، تقسم إحدى الآلات الأعمدة الخشبية إلى قطع طول كل منها ١٥ سم مقرَّبًا إلى أقرب عدد مُكوَّن من رقمَين معنويَّين. ما أكبر عدد وأصغر عدد مُمكنَين من القطع التي يمكن أن يُقسم إليهما العمود؟

٨) يلعب عُبَيد وأحمد لعبة تستدعي من كل منهما رمي كرة إلى أبعد مسافة. يُسمَح لكلّ منهما رمي الكرة ثلاث رميات.

بلغَت رميات عُبَيد: ١٤,٢ م، ١٦,٣ م، ١٢,٨ م

وبلغَت رميات أحمد: ١٢,٤ م، ١٧,٢ م ، ١٣,٨ م

جميع الرميات مقرَّبة إلى عدد مكوَّن من ٣ أرقام معنوية. جمع كلّ منهما كل رمياته ليحصُل على المجموع الكلّي للمسافات. هل يمكنك تحديد اسم الرابح؟

٩) كُتب على مصعد: 'الحمولة القصوى ٥٠٠ كغم' إذا دخل المصعد ستة أشخاص كتلهم: ٨٥ كغم، ٩٨ كغم، ٧٩ كغم، ٦٩ كغم، ٧٥ كغم، ٩٢ كغم، جميعها مقرَّبة إلى أقرب كيلوغرام. هل الأشخاص الستة آمنون إذا ركبوا في المصعد معًا؟

١٠) الكمّية (س) تساوي ٤٥ مقرَّبة إلى أقرب عدد صحيح. والكمّية (ص) تساوي ٩٨ مقرَّبة إلى أقرب عدد صحيح. احسب الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى للكمّية (س) في صورة نسبة مئوية من (ص) مقرَّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- إجراء التقدير بتقريب الأعداد في الحسابات إلى عدد مُكوَّن من رقم معنوي واحد.
- لكلّ قياس مُحدَّد بدرجة دقَّة معطاة حدّ أدنى وحدّ أعلى، تكون قيمة القياس الفعليّة أكبر من الحدّ الأدنى أو تساويه، وأصغر من الحدّ الأعلى.

يجب أن تكون قادرًا على:

- إيجاد تقدير لعملية حسابية.
- احتساب الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى لأعداد قرّبت إلى درجة مُحدَّدة من الدقَّة.
- احتساب الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى في مسألة عندما يتم استخدام أكثر من عدد تم تقريبه.

تمارين نهاية الوحدة

١) إذا كانت: أ = ٢٩,٧، ب = ٣١٢,٦، جـ = ٠,١٩٦

قدّر قيمة كل من العبارات الجبرية الآتية:

أ أ × ب

ب أ × جـ

ج $\frac{\text{أ × ب}}{\text{جـ}}$

٢) إذا كانت: أ = ٦,٥٤، ب = ١٢٣. احسب الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى لكلّ من العبارات الجبرية الآتية. قرِّب إجاباتك إلى عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية.

أ أ + ب

ب أ ب

ج $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

د $\frac{\text{ب} - ١}{\text{أ}}$

٣) إذا كانت قيمة كلّ من: س = ٢,٥، ص = ٣,٤، ع = ٨,٢

(١) قدِّر في كل جزئية من الجُزئيّات الآتية قيمة العبارة الجبرية (مُقرَّبة إلى أقرب عدد كامل).

(٢) أوجد في كل جُزئيَّة الحد الأعلى والحد الأدنى للعبارة الجبرية.

أ س × ص

ب س + ص

ج س × ص × ع

د س + ص + ع

هـ ٣س − ٢ص + ع

و $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

ز $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

ح س − ص

ط ع − ٢ص

الوحدة السادسة: المُعادَلات والمُتباينات والصيَغ

المُفردات

- المُعادَلة الخطّيَّة Linear equation
- العامِل المُشترَك Common factor
- التحليل إلى عوامل Factorise/Factorisation
- المُعادَلات الآنيّة Simultaneous equations
- المُتبايِنة Inequality
- الصيغَة Formula

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تفكّ الأقواس المضروبة في عدد سالب
- تحلّ مُعادلة خطّية
- تُحلّل عبارة جبرية إلى عوامل، عندما تتضمَّن عوامل مُشترَكة بَين جميع الحدود
- تعيد تنظيم صيغة بدلالة مُتغيِّر
- تحلّ مُعادلات آنيّة باستخدام التعويض والحذف
- تحلّ مُتباينات خطّية وتعرض النّتائج على خطّ الأعداد

يعدّ المُتحف الوطني في سلطنة عُمان من الصروح الثقافية البارزة في السلطنة، حيث تتجلّى فيه مكوِّنات التراث الثقافي منذ ظهور الأثر البشري في شبه الجزيرة العُمانية حتى يومنا الحالي، أُنشئَ المُتحف الوطني في العام ٢٠١٣ م مُراعيًا المعايير العالمية المُتعارَف عليها في تصنيف المتاحف، أما رسوم الدخول إليه فتعتمد على عدَّة عوامل، منها الجنسية (مواطن عُماني، مواطن في مجلس التعاون لدول الخليج العربي، مُقيم، غير مقيم) والفئة العمرية (كبار السن فوق ٦٠ عامًا، بين ٦ و ٦٠ عامًا، الأطفال دون ٦ أعوام)، وغيرها من العوامل، ولإيجاد المبالغ (الرسوم) التي يجنيها المُتحف عند دخول الزائرين من جنسيات وأعمار مختلفة، تُستخدم العبارات الجبرية والمُعادلات.

٦-١ فكّ الأقواس

درست سابقًا عملية فكّ الأقواس، وهنا ستتعلَّم فكّ الأقواس عند التعامُل مع الأعداد السالبة.

يجب أن تتذكَّر أن (+) أو (–) تُرافق الحد الذي يليها مباشرة ويجب تضمينها عند فكّ القوسين.

مُساعَدة

انتبه للأعداد السالبة التي تسبق الأقواس لأنها تحتاج دائماً إلى اهتمام مضاعف. تذكَّر:

(+) × (+) = (+)

(+) × (–) = (–)

(–) × (–) = (+)

مثــال ١

فُكَّ الأقواس وبسِّط العبارات الجبرية في كل ممّا يلي:

أ ‎⁻٣(س + ٤)‎ ب ٤(ص – ٧) – ٥(٣ص + ٥) ج ٨(ل + ٤) – ١٠(٩ل – ٦)

الحــلّ:

أ ‎⁻٣(س + ٤)‎ ‎⁻٣(س + ٤) = ⁻٣س – ١٢‎	تذكَّر أنّ عليك ضرب العدد خارج القوس في كلّ حد داخله، وأن الإشارة السالبة مُرفَقة بالعدد ٣ لأن ‎⁻٣ × س = ⁻٣ س‎، ‎⁻٣ × ٤ = ⁻١٢‎
ب ٤(ص – ٧) – ٥(٣ص + ٥) ٤(ص – ٧) = ٤ص – ٢٨ ‎⁻٥(٣ص + ٥) = ⁻١٥ص – ٢٥‎ ٤(ص – ٧) – ٥(٣ص + ٥) = ٤ص – ٢٨ – ١٥ص – ٢٥ = ‎⁻١١ص – ٥٣‎	فكّ كلّ قوس أولاً تذكَّر أن تُحافِظ على الإشارة السالبة في (‎⁻٥‎) عند الضرب في القوس الثاني. جمّع الحدود المُتشابِهة وبسّطها.
ج ٨(ل + ٤) – ١٠(٩ل – ٦) ٨(ل + ٤) = ٨ل + ٣٢ ‎⁻١٠(٩ل – ٦) = ⁻٩٠ل + ٦٠‎ ٨(ل + ٤) – ١٠(٩ل – ٦) = ٨ل + ٣٢ – ٩٠ل + ٦٠ = ‎⁻٨٢ل + ٩٢‎	من المُهمّ أن تلاحظ عند فك القوس الثاني، يحتاج إلى ضرب العدد (‎⁻١٠‎) في العدد (‎⁻٦‎)، حيث تكون النتيجة موجبة للحد الثاني. جمّع الحدود المُتشابِهة وبسّطها.

تمارين ٦-١

١) فُكَّ الأقواس في كلٍّ من العبارات الجبريَّة التالية وبسِّط إجابتك قدْر الإمكان:

أ −١٠(٣ل + ٦)
ب −٣(٢س + ٥ص)
ج −٥(٤ص + ٠,٢)
د −٩(٣ح − ٦ك)
هـ −١٢(٢ت − ٧)
و −٤(٢أ − ٣ب − ٦جـ + ٤د)

٢) فُكَّ الأقواس في كلٍّ من العبارات الجبريَّة التالية وبسِّط إجابتك قدْر الإمكان:

أ ٢ − ٥(س + ٢)
ب ٤س (س − ٤) − ١٠س (٣س + ٦)
ج ١٤(س − ٣) − ٤(س − ١)
د س^{٢} − ٥س(٢س − ٦)
هـ ٣ع − ٧(٧ع − ٧) + ٢(٥ع − ٦)
و ١٨ح ك − ١٢ح(٥ك − ٧)

٣) فُكَّ الأقواس في كلٍّ من العبارات الجبريَّة التالية وبسِّط إجابتك قدْر الإمكان:

أ ٨س − ٢ (٣ − ٢س)
ب ٤س + ٥ − ٣(٢س − ٤)
ج ١٥ − ٤(س − ٢) − ٣ س
د ٣(س + ٥) − ٤(٥ − س)
هـ ٣س(س − ٢) − (س − ٢)
و ٣(س − ٥) − (٣ + س)

حاول ألّا تجري عدّة خطوات دفعة واحدة. بيِّن كلَّ حدٍ في المفكوك، ثمّ بسِّط.

٦-٢ تحليل العبارات الجبرية إلى عوامل

تعلّمت بالتفصيل فك الأقواس وكيفية استخدام ذلك في حلّ بعض المعادلات. قد يكون من المفيد أحياناً تنفيذ العملية العكسية من خلال إعادة وضع الأقواس في العبارة الجبريَّة.

لنأخذ العبارة الجبريَّة ١٢س − ٤ التي تمّ تبسيطها، لكن لاحظ أن للعددَين ١٢، ٤ **عاملاً مُشترَكًا** هو العدد ٤

الآن، ١٢ = ٤ × ٣، ٤ = ٤ × ١

∴ ١٢س − ٤ = ٤ × ٣س − ٤ × ١

= ٤(٣س − ١)

لاحظ أنَّه تمّ 'أخذ' العامل المُشترَك الأكبر (ع م ك) خارج القوسَين وكتابته قبلهما.

تُعرَف عملية إعادة كتابة العبارة الجبريَّة بهذه الطريقة **بالتحليل إلى عوامل**. وقد تم تحليل العبارة ١٢س − ٤ إلى عوامل وأخذ العامل المشترك لتُعطي ٤(٣س − ١)

مثــال ٢

حلِّل كلاًّ من العبارات التالية إلى عوامِل:

أ ١٥س + ١٢ص

ب ١٨م ن − ٣٠م

ج ٣٦ ب^{٢}ك − ٢٤ب ك^{٢}

د ١٥(س − ٢) − ٢٠(س − ٢)^{٣}

الحــلّ:

أ ١٥س + ١٢ص ١٥س + ١٢ص = ٣(٥س + ٤ص)	(ع م ك) للعددَين ١٢، ١٥ هو ٣، ولا يوجد بين س، ص عامِل مُشترَك. لأن ٣ ×٥س = ١٥س، ٣ ×٤ص = ١٢ص
ب ١٨م ن − ٣٠م ١٨م ن − ٣٠م = ٦م(٣ن − ٥)	(ع م ك) للعددَين ١٨، ٣٠ هو ٦، (ع م ك) لِـ م ن، م هو م لأن ٦م × ٣ن = ١٨م ن، ٦م × ٥ = ٣٠م

تأكد من أنك أخذت كل العوامل المُشترَكة. إن لم تأخذها كلها، فإن العبارة الجبرية لن تكون مُحلَّلة إلى عوامِلها بشكل كامل.

ج) ٣٦ ب^{٢}ك – ٢٤ب ك^٢ ٣٦ ب^{٢}ك – ٢٤ب ك^٢ = ١٢ب ك(٣ب – ٢ك)	(ع م ك) للعددَين ٣٦، ٢٤ هو ١٢، والعامل المُشترَك لِـ ب^٢ ك، ب ك^٢ هو ب ك لأن ١٢ب ك × ٣ب = ٣٦ب^٢ ك، ١٢ب ك × $^-$٢ك = $^-$٢٤ب ك^٢

قد تتضمّن الحدود عبارة مُشترَكة لكلا الحدَّين تحوي أقواسًا.

انتبه لوضع كل رموز الأقواس.

د) ١٥(س – ٢) – ٢٠(س – ٢)^٣ ١٥(س – ٢) – ٢٠(س – ٢)^٣ = ٥(س – ٢)[٣ – ٤(س – ٢)^٢]	(ع م ك) للعددَين ١٥، ٢٠ هو ٥، (ع م ك) لِـ (س – ٢)، (س – ٢)^٣ هو (س – ٢) لأن ٥ × (س – ٢) × ٣ = ١٥(س – ٢)، ٥ × (س – ٢) × $^-$٤(س – ٢)^٢ = ٢٠(س – ٢)^٣

تمارين ٦-٢

١) حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التالية إلى عوامِل إن أمكن:

أ) ٣س + ٦	ب) ١٥ص – ١٢	ج) ٨ – ١٦ع	د) ٣٥ + ٢٥ت
هـ) ٢س – ٤	و) ٣س + ٢٧	ز) ١٨ك – ٦٤	ح) ٣٣ب + ٢٢
ط) ٢س + ٤ص	ي) ٣ب – ١٥ك	ك) ١٣ر – ٢٦هـ	ل) ٢ب + ٤ك + ٦ر

٢) حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التالية إلى عوامِل:

أ) ٢١ي – ٤٩ص + ٣٥ع	ب) ٣س ص + ٣س
ج) ٣س^٢ + ٣س	د) ١٥ب ك + ٢١ب
هـ) ٩م^٢ – ٣٣م	و) ٩٠م^٢ – ٨٠ م^٢
ز) ٣٦س^٣ + ٢٤س^٥	ح) ٣٢ب^{٢}ك – ٤ب ك^٢

عندما تأخذ عاملاً مُشترَكًا، قد تبقى إحدى العبارات في حاجة إلى تبسيط أكثر.

٣) حلِّل كلاًّ من العبارات الجبرية التالية إلى عوامِل:

أ) ١٤م^{٢}ن^٢ + ٤م^{٢}ن^٣	ب) ١٧أ ب ج + ٣٠ أ ب^{٢}ج^٢
ج) م^{٢}ن^٢ + ٦م^{٢}ن^٢(٨م + ن)	د) $\frac{١}{٢}$أ + $\frac{٣}{٢}$ب
هـ) $\frac{٣}{٤}$س^٤ + $\frac{٧}{٨}$ س	و) ٣(س – ٤) + ٥(س – ٤)
ز) ٥(س + ١)^٢ – ٤(س + ١)^٣	ح) ٦س^٣ + ٢س^٤ + ٤س^٥
ط) ٧س^{٣}ص – ١٤س^{٢}ص^٢ + ٢١س ص^٢	ي) س(٣ + ص) + ٢(ص + ٣)

٦-٣ استخدام الصيَغ وإعادة تنظيمها

٦-٣-أ صيغ تتضمّن عمليات حسابية بسيطة

قد يطلب منك أحيانًا كتابة الصيغة بدلالة مُتغيِّر ما، وللقيام بذلك عليك إعادة تنظيم هذه الصيغة مُتَّبعًا الخطوات التالية:

- فكّ الأقواس إن وجدت.
- استخدام العمليات العكسية لكتابة مُتغيِّر ما بدلالة باقي المُتغيِّرات.

تُستخدَم العمليات العكسيَّة عندما يكون المطلوب 'العودة' إلى 'العمليات الأصلية'.

مثـــال ٣

اكتب الصيغة جـ = أ س + ب بدلالة المُتغيِّر س

الحـــلّ:

أ س + ب = جـ	أعدْ تنظيم الصيغة بحيث يصبح الحد الذي يتضمَّن المُتغيِّر س على يمين إشارة (=).
أ س = جـ − ب	اطرح ب من كلا الطرفَين.
س = $\frac{\text{جـ} - \text{ب}}{\text{أ}}$	اقسم كلا الطرفَين على أ

إذا كان المطلوب الحلّ من أجل كتابة الصيغة بدلالة (س) أو إيجاد (س)، هذا يعني أن المطلوب هو إعادة تنظيم الصيغة بدلالة المتغيِّر (س)

مثـــال ٤

اكتب الصيغة م = $\frac{١}{٢}$ (س + ص) بدلالة المُتغيِّر س.

الحـــلّ:

م = $\frac{١}{٢}$ (س + ص)	
∴ ٢م = س + ص	اضرب كلا الطرفَين في العدد ٢ للتخلُّص من الكسر.
∴ ٢م − ص = س	اطرحْ ص من كلا الطرفَين.
س = ٢م − ص	أعد كتابة الصيغة بحيث تصبح س على يمين إشارة (=).

مثـــال ٥

اكتب الصيغة $\text{م} = ٢\pi \times \text{نق}(\text{نق} + \text{أ})$ بدلالة المُتغيِّر أ.

الحـــلّ:

$\text{م} = ٢\pi \times \text{نق}(\text{نق} + \text{أ})$	
$\therefore \text{م} = ٢\pi\,\text{نق}^{٢} + ٢\pi\,\text{نق أ}$	فكَّ القوسَين.
$\therefore \text{م} - ٢\pi\,\text{نق}^{٢} = ٢\pi\,\text{نق أ}$	اطرحْ ٢ π نق^{٢} من كلا الطرفين.
$\therefore \dfrac{(\text{م} - ٢\pi\,\text{نق}^{٢})}{٢\pi\,\text{نق}} = \text{أ}$	اقسمْ كلا الطرفين على ٢ π نق.
$\therefore \text{أ} = \dfrac{(\text{م} - ٢\pi\,\text{نق}^{٢})}{٢\pi\,\text{نق}}$	اكتُب الصيغة بدلالة (أ).

تمارين ٦-٣-أ

١) اكتب كل صيغة فيما يلي بدلالة المُتغيِّر (س):

أ) $\text{م} = \text{س} + \text{ب د}$ ب) $\text{ن} = \text{د ر} - \text{س}$

ج) $٤\text{س} = \text{م}$ د) $\text{أ س} - \text{ب} = \text{جـ}$

هـ) $\text{د} - ٢\text{ب} = \text{م س} + \text{جـ}$ و) $\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = ٣\text{ب}$

ز) $\text{م} = \dfrac{\text{د}}{\text{س}}$ ح) $\dfrac{\text{م س}}{\text{ن}} = \text{د}$

ط) $\text{م} = \dfrac{٢\text{س}}{\text{ق}}$ ي) $\text{د} = \dfrac{٢٠}{\text{س}}$

٢) اكتب كل صيغة فيما يلي بدلالة المُتغيِّر (س):

أ) $\text{م} = ٣(\text{س} + \text{ص})$ ب) $\text{جـ} = ٤(\text{ت} - \text{س})$ ج) $\text{ص} = ٣(\text{س} - ٥)$

د) $\text{ر} = ٢\text{ر}(٣ - \text{س})$ هـ) $\text{م} = ٤\text{جـ}(\text{س} - \text{ص})$ و) $\text{أ} = \pi\,\text{نق}(٢\,\text{نق} - \text{س})$

٣) اكتب كلّ صيغة من الصيغ التالية بدلالة المُتغيِّر (أ):

أ) $\text{س أ} + \text{أ} = \text{أس} + \text{ب}$ ب) $\text{ل} = \text{ب أ} + \text{أ}(١ + \text{جـ})\text{أ}$ ج) $\text{ب} = \dfrac{\text{أ}}{\text{أ} - ٥}$

د) $\text{ص} = \dfrac{\text{أ} + \text{س}}{\text{أ} - \text{س}}$ هـ) $\text{ص} = \dfrac{\text{أ} + ٣}{\text{أ} + ١}$ و) $\text{م أ} = \text{ن أ} + ٢$

٤) اكتبِ الصيغة $\text{ط} = \text{ل} \times \text{س}^{٢}$ بدلالة المُتغيِّر (ل).

٥) اكتبِ الصيغة $\text{ف} = \dfrac{\text{ر س ع}}{١٠٠}$ بدلالة المُتغيِّر (س).

٦) اكتبِ الصيغة ط = $\frac{١}{٢}$ ل س^{٢} بدلالة المُتغيِّر (ل).

٧) اكتبِ الصيغة م = $\frac{أ(د + ب)}{٢}$ بدلالة المُتغيِّر (ب).

٨) اكتبِ الصيغة ح = $\frac{م^{أ}}{٣}$ بدلالة المُتغيِّر (أ).

٩) اكتبِ الصيغة ح = $\frac{\pi \times نق^{٢} \times أ}{٣}$ بدلالة المُتغيِّر (أ).

١٠) اكتب الصيغة ص = $\frac{أ}{أ + ٢}$ بدلالة المُتغيِّر (أ).

١١) اكتب الصيغ الآتية بدلالة المُتغيِّر (ص):

أ $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٢} - ١$ ب س = $\frac{ص + جـ}{٣}$ ج $\frac{س + ع}{٣} = \frac{ص + ع}{٤}$ د أ = ب − $\frac{٣ص}{٢}$

طبِّق مهاراتك

١٢) إذا كان ح = ط × ع × أ، أوجدْ قيمة ع عندما ح = ٦٠٠، ط = ٣٤، أ = ٢٦ قرِّب إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين.

١٣) إذا علمت أن ح = م × أ. أوجدْ قيمة أ عندما ح = ١,٢٦، م = ٠,٤١؛ قرِّب إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين.

١٤) صيغة تحويل درجات الحرارة من الدرجات السيليزية إلى درجات الحرارة بالفهرنهايت هي ف = ٣٢ + $\frac{٩س}{٥}$. أوجدْ درجة الحرارة بالدرجة السيليزية مقرَّبة إلى أقرب درجة عندما ف يساوي:

أ ١٠٠ ب ٢١٢ ج ٣٢

١٥) أوجد نصف قطر كل قرص من الأقراص الدائرية ذات المساحات (م) المعطاة فيما يلي إذا علمت أن π = ٣,١٤ مستخدمًا الصيغة م = π × نق^{٢}:

أ ١٤ ب ١٢٠ ج ٠,٥

٦-٣-ب صيَغ تتضمَّن مُربعَّات وجذورًا تربيعية

تتضمَّن بعض الصيغ حدودًا مُربَّعة وجُذورًا تربيعية. عند حلّ المُعادلات الآتية، عليك أن تتذكَّر أن للعدد المُربَّع جذرًا تربيعيًّا موجبًا وجذرًا تربيعيًّا سالبًا.

العملية العكسية للجذر التربيعي $\sqrt{\text{س}}$ هي $\text{س}^{٢}$، ولكن لاحظ أن $(\sqrt{\text{س}})$ تعني الجذر التربيعي الموجب، أي إن هناك قيمة واحدة فقط. إذن، $\sqrt{٩} = ٣$ وفقط ٣ ولكن، إذا كان $\text{س}^{٢} = ٩$، فسيكون $\text{س} = \pm\sqrt{٩} = \pm ٣$. تستخدم $\pm$ فقط عندما تريد التخلُّص من التربيع.

مثـــال ٦

اكتب الصيغة $\text{أ س}^{٢} = \text{ب}$ بدلالة المتغيِّر س

الحـــلّ:

$\text{أ س}^{٢} = \text{ب}$	
$\text{س}^{٢} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$	اقسم كلا الطرفين على أ
$\text{س} = \pm\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}$	خذ الجذر التربيعي للطرفَين للحصول على س

مثـــال ٧

إذا كان $\text{نق} = \sqrt{\frac{\text{م}}{\pi}}$، اكتب الصيغة بدلالة المتغيِّر (م).

الحـــلّ:

$\text{نق} = \sqrt{\frac{\text{م}}{\pi}}$	
$\text{نق}^{٢} = \frac{\text{م}}{\pi}$	ربّع كلا الطرفَين للتخلُّص من الجذر التربيعي.
$\pi \times \text{نق}^{٢} = \text{م}$	اضربْ كلا الطرفَين في العدد π
$\text{م} = \pi \times \text{نق}^{٢}$	

تمارين ٦-٣-ب

١) اكتب كل صيغة فيما يلي بدلالة (س):

أ $\text{م} = \text{أ س}^{٢}$

ب $\text{س}^{٢} - \text{ص} = \text{م}$

ج $\text{م} = \text{ن} - \text{س}^{٢}$

د $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}} = \text{أ}$

هـ $\text{أ} = \frac{\text{ب س}^{٢}}{\text{جـ}}$

و $\text{أ} = \text{س}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

ز $\text{م} = \frac{\text{ن}}{\text{س}^{٢}}$

ح $\sqrt{\text{س ص}} = \text{م}$

ط $\text{أ} = \sqrt{٥\text{س}}$

ي $\text{ص} = \sqrt{\text{س} - \text{ع}}$

ك $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} - \text{ع}$

ل $\text{أ} = \text{ب} + \frac{\text{جـ}}{\sqrt{\text{س}}}$

م $أ - ب\sqrt{س} = م$ **ن** $\sqrt{٣س - ١} = ص$

س $أ = \sqrt{ص - ٢س}$ **ع** $ص = \frac{أ}{\sqrt{٤س} - ب}$

٢) طوّر آينشتاين الصيغة هـ = ك $س^{٢}$ عندما عمل على النظرية النسبيّة. اكتب هذه الصيغة بدلالة (س).

٣) يمكن التعبير عن نظرية فيثاغورث باستخدام الصيغة $أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$. اكتب هذه الصيغة بدلالة (أ).

٤) يمكن التعبير عن مساحة المُربَّع باستخدام الصيغة م = $ل^{٢}$. أعد تنظيم هذه الصيغة لإيجاد طول أحد الأضلاع (ل).

طبِّق مهاراتك

٥) في الفيزياء، يمكن إيجاد الطاقة الحركية (ط) للجُزيء باستخدام الصيغة ط = ك $س^{٢}$، حيث (ك) كتلة الجُزيء، و(س) سرعة الجُزيء:

أ أوجد قيمة ط عندما ك = ٨، س = ٣,٥

ب بيّن كيف تُعيد تنظيم الصيغة لكتابتها بدلالة س.

٦) يتمّ إيجاد حجم الأسطوانة (ح) باستخدام الصيغة ح = π × $نق^{٢}$ × أ، حيث (نق) نصف قطر قاعدة الأسطوانة و(أ) ارتفاع الأسطوانة:

أ أوجد حجم أسطوانة نصف قطرها ٠,٨ م وارتفاعها ١ م، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب $سم^{٣}$.

ب اكتب الصيغة بدلالة المُتغيِّر (نق).

٧) يمكنك استخدام الصيغة م = $\frac{\pi ق^{٢}}{٤}$ لإيجاد (م) مساحة الدائرة، حيث (ق) قطر الدائرة.

أ أوجد مساحة دائرة قطرها ١,٢ م.

ب استخدم الصيغة م = π $نق^{٢}$ لإيجاد مساحة الدائرة نفسها.

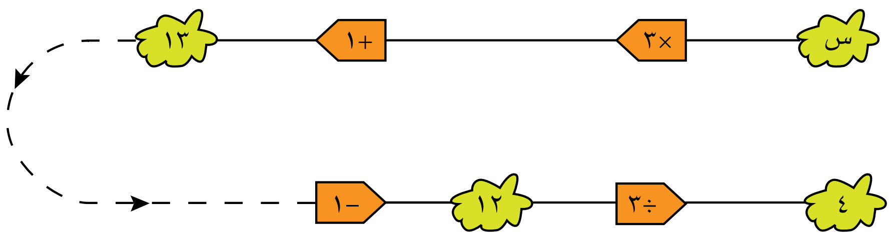
ج عبِّر عن الصيغة م = $\frac{\pi ق^{٢}}{٤}$ بطريقة تسمح لك بإيجاد قطر الدائرة بمعلومية مساحتها.

٦-٤ حلّ المُعادلات

أفكِّر في عدد (س)؛ إذا ضُرب في ثلاثة، ثم أُضيف إليه واحد يكون الناتج ١٣

لإيجاد العدد (س)، عليك أوّلاً فهم مراحل ما يحدث للعدد س، ثمّ تنفيذ الخطوات بالترتيب العكسي:

يوضّح المُخَطَّط التالي (الذي يُسمّى أحيانًا آلة الدالّة) مراحل ما يحدث للعدد س، مبيّنًا الطريقة العكسيّة المكتوبة أدناه. لاحظ كيف تظهر الإجابة على المسألة بسهولة:



إذن س = ٤

يمكن الحصول على إجابة مُحكمَة وفعّالة باستخدام الجبر. اتَّبع التعليمات في المسألة:

١) العدد هو س: س

٢) اضرب هذا العدد في ثلاثة: ٣س

٣) ثمّ أضف واحدًا: ٣س + ١

٤) الإجابة هي ١٣: ٣س + ١ = ١٣

تُسمّى هذه المُعادلة **بالمُعادلة الخطّية**. تُشير كلمة 'خطّية' إلى حقيقة عدم وجود قوى لِـ س غير العدد ١

النقطة التالية التي عليك تعلُّمها هي أنك تستطيع تغيير المُعادلة من دون تغيير الحل (قيمة س التي تجعل المعادلة صحيحة) شرط تنفيذ الأمر نفسه لطرفَي المعادلة في آن واحد.

اتَّبع الطريقة العكسيّة المُبيّنة في مخطَّط آلة الدالّة السابق، شرط تنفيذ التعليمات نفسها على طرفَي المعادلة:

٣س + ١ = ١٣

٣س + ١ − ١ = ١٣ − ١ (اطرح واحدًا من كلا الطرفَين)

٣س = ١٢

$\frac{٣س}{٣} = \frac{١٢}{٣}$ (اقسم كلا الطرفَين على ٣)

س = ٤

سابقًا

من المهم أن تتذكَّر قواعد ترتيب العمليات الحسابية قبل البدء بهذا الدرس.

رابط

تُستخدَم الرياضيات في المُحاسبة بشكل كبير. حيث يستخدم المحاسبون جداول البيانات الحاسوبية ليحسبوا البيانات الماليّة ويحلِّلوها. ورغم أن البرامج تقوم بالحسابات، إلا أن على المستخدِم معرفة المُعادَلات والصيَغ التي يجب عليه إدخالها ليخبرها بالمطلوب منها.

حتى وإن كان بإمكانك معرفة الحلّ بسهولة، فعليك إظهار خطوات العمل.

حاوِل دائمًا مُحاذاة إشارة (=) رأسيًّا، لأن ذلك يُبيّن عملك بشكل أوضح.

ستجد أحيانًا أن المُعادلات الخطّية تتضمّن أقواسًا، وقد تتضمّن قيمًا مجهولة (مثل س، بالرغم من إمكانية استخدام أيّ حرف أو رمز آخر) في الطرفَين معًا.

يوضِّح المثال الآتي عددًا من أنواع المُعادلات المُمكنة.

مثـــال ٨

مُعادلة تتضمَّن س في طرفَيها، وتكون للحدود س الإشارة نفسها:

أ حلّ المعادلة ٥س − ٢ = ٣س + ٦

الحـــلّ:

٥س − ٢ = ٣س + ٦	ابحث عن أصغر مُعامِل لـ س
٥س − ٢ − ٣س = ٣س + ٦ − ٣س	واطرحه من كلا الطرفَين. اطرح ٣س من كلا الطرفَين.
٢س − ٢ = ٦	
٢س − ٢ + ٢ = ٦ + ٢	أضف ٢ الى كلا الطرفين.
٢س = ٨	
$\frac{\text{٢س}}{\text{٢}} = \frac{\text{٨}}{\text{٢}}$	اقسم كلا الطرفَين على ٢
س = ٤	

معادلة تتضمَّن س في طرفَيها وتكون للحدود س إشارات مختلفة:

ب حلّ المعادلة ٥س + ١٢ = ٢٠ − ١١س

الحـــلّ:

٥س + ١٢ = ٢٠ − ١١س	
٥س + ١٢ + ١١س = ٢٠ − ١١س + ١١س	أضف ١١س إلى كلا الطرفَين.
١٦س + ١٢ = ٢٠	
١٦س + ١٢ − ١٢ = ٢٠ − ١٢	اطرح ١٢ من كلا الطرفَين.
١٦س = ٨	
$\frac{\text{١٦س}}{\text{١٦}} = \frac{\text{٨}}{\text{١٦}}$	اقسم كلا الطرفَين على ١٦
س = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$	بسِّط الكسر

عند إضافة ١١س إلى الطرفين، ستلاحظ أن ما تبقّى هو حدّ س موجب. يساعدك ذلك على تجنُّب الأخطاء عند وجود إشارة (−).

مُعادلة تتضمَّن أقواسًا في أحد الطرفَين على الأقلّ:

ج حلّ المعادلة ٢(ص − ٤) + ٤(ص + ٢) = ٣٠

الحــلّ:

٢(ص − ٤) + ٤(ص + ٢) = ٣٠ ٢ص − ٨ + ٤ص + ٨ = ٣٠	فُكّ الأقواس وجمّع الحدود المُتشابهة معًا.
٦ص = ٣٠ $\frac{٦ص}{٦} = \frac{٣٠}{٦}$ ص = ٥	اقسم كلا الطرفَين على ٦

مُعادلة تتضمَّن كسورًا:

د حلّ المعادلة $\frac{٦}{٧}$ل = ١٠

الحــلّ:

$\frac{٦}{٧}$ل × ٧ = ١٠ × ٧	اضرب كلا الطرفَين في ٧
٦ل = ٧٠	اقسم كلا الطرفَين على ٦
ل = $\frac{٧٠}{٦} = \frac{٣٥}{٣}$	اكتب الكسر في أبسط صورة.

ما لم يطلب منك السؤال أن تجد الجواب إلى درجة محددَّة من الدقة، فإن من المقبول أن تترك الجواب في صورة كسر.

يُطلب إليك أحيانًا إيجاد قيمة الأسّ الذي يُعطي نتيجة معطاة. والمُعادَلة التي تطلب منك إيجاد الأسّ تُسمّى المُعادلة الأُسيّة.

مثــال ٩

أوجد قيمة س إذا كان ٢^{س} = ١٢٨

الحــلّ:

٢^{س} = ١٢٨ ٢^{٧} = ١٢٨ ∴ س = ٧	يمكنك هنا استخدام طريقتَين: ١) إعادة كتابة ١٢٨ في صورة أُسّ لأساس (العدد ٢ في هذه الحالة)، أي ٢^{س} = ٢^{٧} وس = ٧ ٢) إيجاد قيمة س عن طريق التجربة والخطأ.

تمارين ٦-٤

١) حلّ كلاً من المعادلات التالية:

- أ ٤س + ٣ = ٣١
- ب ٨س + ٤٢ = ٢
- ج ٦س − ١ = ٥٣
- د ٧س − ٤ = −٦٦
- هـ ٩ص + ٧ = ٥٢
- و ١١ن − ١٩ = ١٠٢
- ز ١٢ك − ٧ = ١٤
- ح ٢٠٦ت + ٣ = ١٠٦
- ط $\frac{\text{٢س + ١}}{\text{٣}}$ = ٨
- ي $\frac{\text{٢س}}{\text{٣}}$ + ١ = ٨
- ك $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$س + ١١ = ٢١
- ل $\frac{\text{س + ٣}}{\text{٢}}$ = س
- م $\frac{\text{٢س − ١}}{\text{٣}}$ = ٣س
- ن $\frac{\text{٣س}}{\text{٢}}$ + ٥ = ٢س

٢) حلّ كلاً من المعادلات التالية:

- أ ١٢س + ١ = ٧س + ١١
- ب ٦س + ١ = ٧س + ١١
- ج ٦ص + ١ = ٣ص − ٨
- د ١١س + ١ = ١٢ − ٤س
- هـ ٨ − ٨ل = ٩ − ٩ل
- و $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$س − ٧ = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$س + ٨

٣) حلّ كلاً من المعادلات التالية:

- أ ٤(س + ١) = ١٢
- ب ٢(٢ل + ١) = ١٤
- ج ٨(٣ت + ٢) = ٤٠
- د ٥(م − ٢) = ١٥
- هـ −٥(ن − ٦) = −٢٠
- و ٢(ب − ١) + ٧(٣ب + ٢) = ٧(ب − ٤)
- ز ٣(٢س + ٥) − (٣س + ٢) = ١٠

٤) حلّ كلاً من المعادلات التالية لتجد قيمة س:

- أ ٧(س + ١) = ٤(س + ٥)
- ب ٤(س − ٢) + ٢(س + ٥) = ١٤
- ج ٧س − (٣س + ١١) = ٦ − (٥ − ٣س)
- د −٢(س + ٢) = ٤س + ٩
- هـ ٣(س + ١) = ٢(س + ١) + ٢س
- و ٤ + ٢(٢ − س) = ٣ − ٢(٥ − س)

مُساعَدة

تكون بعض الأعداد في كلّ مُعادلة قوى لأساس العدد نفسه. أعد كتابتها في صورة قوى واستخدم قوانين الأسس.

٥) حلّ كلاًّ من المعادلات التالية لتجد قيمة س:

أ $٣^{٣س} = ٢٧$

ب $٢^{٣س + ٤} = ٣٢$

ج $٥^{٢(٣س + ١)} = ٦٢٥$

د $٤^{٣س} = ٢^{س + ١}$

هـ $٩^{٣س + ٤} = ٢٧^{٤س + ٣}$

٦) أوجد قيمة س في كلّ من المُعادَلات التالية:

أ $٢^{س} = ٦٤$

ب $١٩٦^{س} = ١٤$

ج $٣^{س} = ٨١$

د $٤^{س} = ٢٥٦$

هـ $٢^{-س} = \frac{١}{٦٤}$

و $٣^{س-١} = ٨١$

ز $٩^{-س} = \frac{١}{٨١}$

ح $٣^{-س} = ٨١$

ط $٦٤^{س} = ٢$

ي $٤^{-س} = \frac{١}{٦٤}$

٦-٥ المُعادَلات الخطّيَّة الآنيَّة

سبق لك أن تعلّمت كيف تحلّ مُعادلات خطيّة بمجهولٍ واحد جبريًّا. تحتاج الآن إلى مُتابعة كيفية حلّ زوج من المُعادلات التي تتضمّن مجهولَين.

سوف تتعلّم طريقتَين لحلّ المُعادلات الخطّيَّة الآنيّة:

- الحلّ باستخدام التعويض
- الحلّ باستخدام الحذف

حلّ المُعادلات الخطّيَّة الآنّية باستخدام التعويض

يمكنك حلّ المُعادلات باستخدام التعويض، وذلك بكتابة أحد المُتغيِّرَين (س) بدلالة المُتغيِّر الآخر (ص) باستخدام إحدى المعادلتين، ثم تعويضه في المعادلة الأخرى.

تم ترقيم المُعادلات بحيث يمكنك التعرُّف إلى كل منها بطريقة فعّالة. عليك أن تفعل ذلك دائمًا.

مثـــال ١٠

حلّ أنيًّا باستخدام التعويض:

٣س − ٢ص = ٢٩ (١)

٤س + ص = ٢٤ (٢)

الحـــلّ:

٤س + ص = ٢٤	اكتب ص بدلالة س
ص = ٢٤ − ٤س (٣)	
٣س − ٢ص = ٢٩ (١)	عوّض المعادلة (٣) في المعادلة (١) باستبدال ص بِـ ٢٤ − ٤س
٣س − ٢(٢٤ − ٤س) = ٢٩	
٣س − ٤٨ + ٨س = ٢٩	تخلَّص من القوسَين.
٣س + ٨س = ٢٩ + ٤٨	اجمع ٤٨ إلى طرفَي المعادلة.
١١س = ٧٧	اجمع الحدود المُتشابهة.
س = ٧	اقسِم كلا الطرفَين على ١١
ص = ٢٤ − ٤(٧)	الآن عوّض عن قيمة س في أيّ من المعادلتَين لتجد قيمة ص. المعادلة (٣) هي الأسهل، لذلك استخدمها.
ص = ٢٤ − ٢٨	
ص = ⁻٤	
س = ٧، ص = ⁻٤	اكتب قيمتي س، ص

٣س − ٢ص = ٢٩ ٣(٧) − ٢(−٤) = ٢٩ ✓ ٤س + ص = ٢٤ ٤(٧) + (−٤) = ٢٤ ✓	تحقَّق من قيمتي س، ص بالتعويض في المُعادَلتَين الأصليَّتَين.

حلّ المُعادلات الآنيَّة الخطّيَّة باستخدام الحذف

يمكنك أيضًا حلّ المُعادَلتَين بحذف أحد المُتغيِّرَين، وذلك بجمع المُعادَلتَين معًا أو طرحهما بهدف التخلص من أحد المُتغيِّرَين.

مثــال ١١

حلّ المعادلتين الخطّيتين الآتيتين آنيًّا باستخدام الحذف:

س − ص = ٤ (١)

س + ص = ٦ (٢)

الحــلّ:

س − ص = ٤ (١) س + ص = ٦ (٢) ٢س = ١٠	اجمع المعادلتين.
٢س = ١٠ ⇐ س = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ س = ٥	لاحظ أن المُعادَلة الناتجة من عملية الجمع لم تعد تحتوي على (ص)، ونتجت معادلة خطّية بمُتغيِّر واحد.
س + ص = ٦ ⇐ ٥ + ص = ٦ ص = ١	عوِّض عن قيمة س في إحدى المعادلتين، المعادلة (٢) لإيجاد قيمة ص.
س − ص = ٥ − ١ = ٤	تحقَّق من أن قيمتَي (س) و(ص) تحقّقان المعادلة (١)

يعرض المثال التالي حالة مختلفة، تحتاج فيها إلى طرح المُعادلتَين بدلاً من جمعهما، أو تحتاج إلى ضرب إحداهما أو كلتيهما في عدد ما، قبل اعتماد الجمع أو الطرح.

مثــال ١٢

حلّ المعادلتين الخطّيتين الآتيتين آنيًّا:

٤س + ص = ⁻١ (١)

٧س + ص = ⁻٤ (٢)

الحــلّ:

٧س + ص = ⁻٤ (٢) ٤س + ص = ⁻١ (١) ٣س = ⁻٣ ⇐ س = ⁻١	لاحظ الآن أن لديك المُعامِلات نفسها لـ ص، ولكن هذه المرَّة كان للحدود (ص) الإشارة نفسها. تستخدم الآن حقيقة أن ص − ص = ٠، وبناء على ذلك اطرح إحدى المُعادلتَين من الأخرى. مُعامِل (س) في المعادلة (٢) أكبر ممّا هو في المعادلة (١) لذا اطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢)
٤س + ص = ⁻١ ⇐ ٤(⁻١) + ص = ⁻١ ص = ٣	عوّض بقيمة س= ⁻١ في المعادلة (١)
٧س + ص = ٧(⁻١) + ٣ = ⁻٧ + ٣ = ⁻٤	تحقَّق من أن القيمتَين س = ⁻١، ص = ٣ تُحقِّقان المُعادَلة (٢)

وضِّح دائمًا المُعادلة التي تختارها لتطرحها من المُعادلة الأخرى.
هنا استخدمت حقيقة أن
⁻٤ − (⁻١) = ⁻٣

مُعالجة المُعادلات قبل حلّها

تحتاج أحيانًا إلى المُعالجة أو إعادة التنظيم لإحدى المُعادَلتَين أو كلتيهما، قبل أن تحلّهما آنيًّا باستخدام الحذف.

مثال ١٣

حلّ المعادلتين الخطّيتين الآتيتَين آنيًّا:

٢س − ٥ص = ٢٤ (١)

٤س + ٣ص = −٤ (٢)

الحلّ:

٢ × (٢س − ٥ص = ٢٤) ٤س − ١٠ص = ٤٨ (٣)	في هذه المُعادلات الآنيّة، لم يتساوى مُعامِلا س وكذلك مُعامِلا ص. لكن إذا ضربت المعادلة (١) في العدد ٢، سيتساوى مُعامِلا س في كلّ منهما. تُسمّى هذه المُعادلة بالمُعادلة (٣)، ويكون فيها مُعامِل س هو مُعامِل س نفسه في المعادلة (٢)
٤س + ٣ص = −٤ ٤س − ١٠ص = ٤٨ ١٣ص = −٥٢ ⇐ ص = −٤	بطرح المعادلة (٣) من المعادلة (٢) اقسم كلا الطرفَين على ١٣
٢س − ٥ص = ٢٤ ⇐ ٢س − ٥(−٤) = ٢٤ ٢س + ٢٠ = ٢٤ س = ٢	عوّض عن قيمة ص في المعادلة (١) لإيجاد قيمة س
٤س + ٣ص = ٤(٢) + ٣(−٤) = ٨ − ١٢ = −٤	تحقَّق باستخدام المُعادلة (٢)

مثـــال ١٤

حلّ المعادلتين الخطّيتين الآتيتَين آنيًّا:

٢س − ٢١ = ٥ص

٣ + ٤ص = −٣س

الحـــلّ:

٢س − ٥ص = ٢١ (١) ٣س + ٤ص = −٣ (٢)	في هذا النوع من المُعادلات، لا يكمن الاختلاف في مُعاملَي س فحسب، بل في مُعامِلَي ص أيضًا. لذلك فإن ضرب إحدى المُعادَلتَين فقط لا يحل المسألة.
٤ × (٢س − ٥ص) = ٤ × ٢١ ⇐ ٨س − ٢٠ص = ٨٤ (٣) ٥ × (٣س + ٤ص) = ٥ × −٣ ⇐ ١٥س + ٢٠ص = −١٥ (٤)	هنا تحتاج إلى ضرب طرفَي كلّ معادلة بقيمة مُختلِفة ليتطابق مُعامِلا س أو مُعامِلا ص. من الأفضل هنا أن تختار مُعامِلَي ص لأن لهما إشارتَين مختلفتَين، ولأن جمع المُعامِلين أسهل من طرحهما.
٨س − ٢٠ص = ٨٤ ١٥س + ٢٠ص = −١٥ ٢٣س = ٦٩ س = ٣	بجمع المعادلتين (٣)، (٤)
٢س − ٥ص = ٢١ ⇐ ٢(٣) − ٥ص = ٢١ ٥ص = −١٥ ص = −٣	عوِّض عن قيمة س في المعادلة (١) لإيجاد قيمة ص.
٣س + ٤ص = ٣(٣) + ٤(−٣) = ٩ − ١٢ = −٣	تحقَّق باستخدام المُعادلة (٢)

مثــال ١٥

حلّ المعادلتين الخطّيتين الآتيتَين آنيًّا:

$\frac{٣س - ٤ص}{٢} = ١٠$ (١)

$\frac{٣س + ٢ص}{٤} = ٢$ (٢)

الحــلّ:

٣س − ٤ص = ٢٠ (٣)	في هذا النوع من المُعادلات يُعدّ منطقيًّا التخلُّص من الكسور قبل التعامُل معهما. اضرب طرفَي المعادلة (١) في ٢
٣س + ٢ص = ٨ (٤)	اضرب طرفَي المعادلة (٢) في ٤
٣س − ٤ص = ٢٠ (٣) ٣س + ٢ص = ٨ (٤) ـــــــــــــــــــ $^-$٦ص = ١٢ ص = $^-$٢	اطرح المعادلة (٤) من المُعادلة (٣)
٣س − ٤($^-$٢) = ٢٠ ٣س + ٨ = ٢٠ ٣س = ١٢ س = ٤	عوِّض عن قيمة ص في المُعادلة (٣) لإيجاد قيمة س.
٣(٤) + ٢($^-$٢) = ١٢ − ٤ = ٨ ∴ س = ٤، ص = $^-$٢	تحقَّق باستخدام المعادلة (٤)

تمارين ٦-٥

١) حلّ المعادلتين الخطيتين الآنيَّتين في كلّ ممّا يأتي باستخدام التعويض، ثم تحقَّق من صحَّة الحل:

أ ص + س = ٧
ص = س + ٣

ب ٢س + ص = $^-$١٤
ص = ٦

ج ٣س − ٢ = $^-$٢ص
٢س − ص = $^-$٨

د ٤س − ١ = ٢ص
س + ١ = ٣ص

> تذكّر أنك تحتاج إلى المُعامل نفسه لـ (س) أو لـ (ص). إذا كانت لهما الإشارة نفسها، عليك طرح إحدى المُعادلَتين من الأخرى. لكن إذا كانت لهما إشارتان مُختلفتان، فعليك أن تجمع.

٢) حلّ المعادلتين الخطّيتين الآنيَّتين في كل ممّا يأتي باستخدام الحذف ثم تحقَّق من صحَّة الحل:

أ ٢س − ص = ٤
٥س + ص = ٢٤

ب −٣س + ٢ص = ٦
٣س + ٥ص = ٣٦

ج ٢س + ٥ص = ١٢
٢س + ٣ص = ٨

د ٥س − ٢ص = ٢٧
٣س + ٢ص = ١٣

هـ س + ٢ص = ١١
س + ٣ص = ١٥

و −٢س + ٥ص = ١٣
٢س + ٣ص = ١١

٣) حلّ كلاًّ ممّا يلي آنيًّا. استخدم الطريقة الأسهل لك ثم تحقَّق من من صحَّة الحل:

أ ٥س + ٣ص = ٢٢
١٠س − ص = ١٦

ب ٤س + ٣ص = ٢٥
س + ٩ص = ٣١

ج −٣س + ص = ٥
−٦س + ٥ص = −٢٠

د س + ص = ١٠
٣س + ٥ص = ٤٠

هـ ٦س + ص = ١١
−٢س + ٢ص = ١

و ٤س − ٣ص = ١١
٥س − ٩ص = −٢

ز س = ١٢ + ص
٢س = ٣ − ص

ح ٣س + ٤ص = −١
٣س + ١٠ = ٢ص

ط ٢س + ص = ٧
١١ + س = ٢ص

> إذا تضمَّنت المُعادلة كسوراً، يمكنك جعل الأمور أكثر سهولة بأن تضرب كلّ حدّ في عدد مُناسب (مقام مُشترَك). كي 'تتخلص' من الكسور أوّلا.

٤) حلّ المعادلتَين الخطّيتين الآنيَّتين في كل مما يأتي:

أ $\frac{١}{٢}$س + $\frac{٢}{٣}$ص = ٦$\frac{١}{٥}$
$\frac{٣}{٤}$س − $\frac{١}{٧}$ص = ١٢$\frac{٣}{٥}$

ب $\frac{٣}{٧}$س − $\frac{٥}{٨}$ص = ٣٢$\frac{١}{٣}$
٦٤س − ١٧ص = ١٢$\frac{١}{٢}$

ج ٤٥٦$\frac{٢}{١٧}$س + ٩٨٧$\frac{٣}{٤}$ص = ١
٢٣٣$\frac{١٣}{٢٢}$س − ٩٤$\frac{٢}{٣}$ص = ٤

د ٣س + $\frac{٢ص}{٣}$ = ٠
٢س − $\frac{ص}{٤}$ = ١٤

هـ ٤ص + س + ٥ = ٠
ص = س − ٥

و ٣ص + $\frac{٦}{٢}$ = −٣
ص − $\frac{س}{٢}$ = ٢

ز ٢س + $\frac{ص}{٢}$ = ٣
٦س = −٢ص

ح ص = ٣س − ٦
٢س + $\frac{٣ص}{٧}$ = −٥

ط $\frac{٣س}{٧}$ + $\frac{٢ص}{١٣}$ = ٥
س + $\frac{١}{٣}$ص = $\frac{٣}{٥}$

فكّر برويّة في هذه المسائل وفي كيفية تمييز المسائل التي تتضمَّن مُعادلات آنيّة، خاصّة إذا لم يطلب منك استخدام طريقة مُحدَّدة في حلّها.

٥) اكتب زوجًا من المُعادَلات الآنيَّة لكلّ موقف مما يلي، واستخدمه لحلّ المسألة. سمِّ الأعداد المجهولة (س)، (ص):

أ عددان مجموعهما ١٢٠ وأحدهما يساوي ٣ أمثال الآخر. أوجدِ العددَين.

ب عددان مجموعهما ⁻٣٤ والفرق بينهما ٥، أوجدِ العددَين.

ج عددان مجموعهما ٥٢ والفرق بينهما ١١، أوجد العددَين.

د شخصان مجموع عُمرَيهما ٣٤. إذا كان أحدهما أصغر من الآخر بـِ ٦ سنوات، فكم يبلغ عُمر كل منهما؟

٦) باع متجر حواسيب ٤ مُحرِّكات أقراص صلبة و١٠ مُحرِّكات حفظ صغيرة بمبلغ ٢٠٠ ريالٍ عُماني. وباع ٦ مُحرِّكات أقراص صلبة و١٤محرِّك حفظ صغيرًا بـِ ٢٩٠ ريالاً عُمانيًّا. أوجدْ ثمن مُحرِّك القرص الصلب وثمن مُحرِّك الحفظ الصغير.

٧) ملعب رياضي كبير يحتوي على ٢١٠٠٠ مقعدُ. رتِّبت المقاعد في أقسام يتّسع بعضًا منها على لـ ٤٠٠ مقعد كما يتسع بعض أقسامها لـ ٤٥٠ مقعدًا. إذا علمت أن عدد الأقسام التي تتَّسع لـ ٤٥٠ مقعدًا يساوي ثلاثة أمثال عدد الأقسام التي تتَّسع لـ ٤٠٠ مقعد، فكم قسمًا يتضمَّن الملعب؟

٦-٦ كتابة المُعادَلات لحلّ المسائل

٦-٦-أ حل مسائل بسيطة

تعلَّمت سابقًا أنّك تستطيع تحويل المسائل اللفظية إلى **مُعادَلات** باستخدام المُتغيِّرات، لتمثيل الكمّيات المجهولة. وتستطيع بعد ذلك حلّ المُعادَلة لإيجاد حل المسألة.

سيساعدك العمل على التمارين ٦-٦-أ لتتذكَّر كيف تكتب المُعادَلات التي تُمثِّل المجموع والفرق وناتج الضرب وناتج القسمة للكمّيات، واستخدامها في حلّ المسائل.

تمارين ٦-٦-أ

١) اكتُب لكُلّ جملة من الجمل الآتية مُعادَلة بدلالة س، ثم حلّها:

- أ عدد مضروب في العدد ٤ يُعطي ٣٢
- ب ناتج ضرب عدد في العدد ١٢ يُعطي ٩٦
- ج إضافة عدد إلى العدد ١٢ يُعطي ٥٥
- د مجموع عدد مع العدد ١٣ هو ٢٥
- هـ ناتج طرح ستة من عدد يُعطي ١٤
- و ناتج طرح عدد من تسعة يُعطي ⁻٥
- ز ناتج قسمة عدد على سبعة هو ٢,٥
- ح ناتج قسمة ٢٨ على عدد هو أربعة.

يُعتَبر تحويل المعلومات من صيَغ لفظية إلى مُخطّطات أو مُعادلات من الاستراتيجيات المُفيدة لحل المسائل.

٢) حوّل كُلّ موقف من المواقف الآتية إلى مُعادَلة بدلالة ص. حلّ كلّ معادلة لإيجاد قيمة ص:

- أ عدد مضروب في ثلاثة، ثم إضافة خمسة إلى الناتج للحصول على ١٤
- ب ناتج طرح ستة من خمسة أمثال عدد هو ٥٤
- ج إضافة ٤ إلى عدد، ثم ضرب الناتج في ثلاثة للحصول على ١٥٠
- د ناتج طرح ثمانية من نصف عدد هو ٢٧

رابط

تُطبِّق فكرة أخذ المُدخَلات ومُعالجتها للحصول على المُخرَجات في البرمجة الحاسوبية.

٣) حلّ كل مسألة فيما يلي بكتابة مُعادَلة:

- أ عند إضافة خمسة إلى أربعة أمثال عدد، يكون الناتج ٥٧؛ ما العدد؟
- ب إذا طُرح ستة من ثلاثة أمثال عدد، يكون الناتج ٢١؛ ما العدد؟
- ج إذا أضيف أربعة إلى عدد، ثم قسم الناتج على ثلاثة، ثم ضرب الناتج في اثنين للحصول على أربعة. ما العدد؟
- د إذا أُضيف ستة إلى ضعفَي عدد، ثم قُسم الناتج على أربعة للحصول على سبعة. ما العدد؟

٦-٦-ب حلّ مسائل مُتعدِّدَة الخطوات

المسائل المطروحة في تمارين ٦-٦-أ هي مسائل جبرية بسيطة. عليك أن تكون قادرًا على كتابة المُعادَلات لحلّ أيّة مسألة. للقيام بذلك، عليك قراءة المسألة المكتوبة والتحقُّق من معقوليتها، وتمثيل الموقف في صورة مُعادَلة، ثم حلّها.

لحلّ المسائل من خلال كتابة المُعادَلات، نفِّذ الخطوات الآتية:

- اقرأ المسألة بدقّة منتبهًا للمُفردات المُستخدَمة.
- حدِّد المطلوب إيجاده والمعلومات المُعطاة.
- اسأل نفسك إن كان هناك أي شيء يمكن فرضه أو استنتاجه من المعلومات المُعطاة.
مثلًا، إذا بيّنت المسألة أطوالًا متساوية وأعراضًا متساوية في قياسات غرفة، هل يمكنك القول إن الغرفة مستطيلة؟
- خذ في الحساب وجود أية صيغة أو علاقة رياضية يمكنك استخدامها لربط المعلومات في المسألة. مثلًا، إذا كان المطلوب إيجاد المسافة حول شكل دائري، يمكنك استخدام الصيغة م = π × ق، وإذا كانت المسألة تتضمَّن زمنًا ومسافة وسرعة، يمكنك استخدام مثلَّث الزمن-المسافة-السرعة لتشكيل المعادلة.

مثـــال ١٦

كانت والدتي تبلغ من العمر ٢٦ عامًا عندما ولدتني. عمر والدتي الآن ثلاثة أمثال عمري. كم عمري الحالي؟ وكم عمر والدتي الحالي؟

الحـــلّ:

ليكن عمري الحالي س.	
∴ عمر والدتي الحالي ٣س	عُمر والدتي يساوي ٣ أمثال عمري.
الفرق بين العمرين ٢٦ سنة، أي:	الوالدة أكبر من الولد بمقدار ٢٦ سنة.
٣س − س = ٢٦	
٢س = ٢٦	
∴ س = ١٣	
عُمري الآن ١٣، وعُمر والدتي الحالي ٣٩	

مثـــال ١٧

متوازي أضلاع طول ضلعه الأكبر يساوي خمسة أمثال طول ضلعه الأصغر. ما طول ضلعه الأكبر وطول ضلعه الأصغر إذا كان محيط متوازي الأضلاع ٩,٦ م؟

الحـلّ:

ليكن س طول ضلعه الأصغر (بالأمتار).

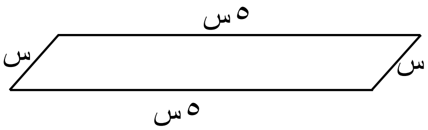
∴ طول الضلع الأكبر ٥س

٥س + س + ٥س + س = ٩,٦ م

١٢س = ٩,٦ م

∴ س = $\frac{٩,٦}{١٢}$ = ٠,٨ م

طول ضلعه الأصغر ٠,٨ م وطول ضلعه الأكبر ٥ × ٠,٨ = ٤ م



طول ضلعه الأكبر يساوي خمسة أمثال طول ضلعه الأصغر.

المحيط هو مجموع أطوال الأضلاع.

تمارين ٦-٦-ب

١) عُمر وليد ثلاثة أمثال عمر ابنته ليلى. إذا كان وليد أكبر من ليلى بمقدار ٣٠ سنة، فما عُمر وليد؟ وما عُمرُ ليلى؟

٢) لدى أحمد ومحمود ٤٢٠ كُرة زجاجية. إذا كان لدى أحمد ٥ أمثال ما لدى محمود من الكُرات الزجاجية، فكم كرة زجاجية يوجد مع كل منهما؟

٣) يمتلك سامح مبلغًا يقلّ بمقدار ٥ ريالات عمانيَّة عمّا يمتلكه سليمان، إذا كان مجموع ما يمتلكانه معًا ٩٧,٥٠٠ ريالاً عُمانيًّا، فكم المبلغ لدى كل منهما؟

٤) أراد مُتسابِقان تقاسُم جائزة مقدارها ٧٥٠ ريالاً عُمانيًّا. إذا حصل المُتسابِق الأوَّل على مِثلَي ما حصَل عليه المُتسابِق الثاني، فكم المبلغ الذي حصل عليه كل منهما؟

٥) مُستطيل محيطه ٧٤ سم وطوله أكبر من عرضه بمقدار ٧ سم. ما طول المُستطيل وعرضه؟

عندما تُواجِه مسألة لفظية، تذكَّر اتِّباع الخطوات الأساسية لحل المسائل.

٦) تقع ولاية صحم العُمانية بين ولايتَي صحار وبركاء، إذا كان طول مسار القيادة بين ولايتَي صحم وبركاء يساوي أربعة أمثال طول مسار القيادة بين ولايتَيّ صحم وصحار، وكان طول مسار القيادة بين ولايتَي صحار وبركاء يساوي ١٥٠ كم، فما طول مسار القيادة بين ولايتَي صحم وصحار؟

٧) عُمر أميرة يساوي ضعف عُمر أخيها بلال. منذ تسعة أعوام، كان مجموع عُمر أميرة وعُمَر بلال يساوي ١٨ عامًا. ما العُمْر الحالي لكل منهما؟

٨) سافر جابر بالسيارة من المدينة (أ) إلى المدينة (ب) عند الساعة ٦:٠٠ صباحًا، وقاد سيّارته بمُعدَّل سرعة ٨٠ كم/ساعة. سافر سامر بالسيّارة من المدينة (أ) إلى المدينة (ب) عند الساعة ٨:٣٠ صباحًا. قاد سيارته بمُعدَّل سرعة ١٠٠ كم/ساعة. في أي وقت سيلتقي سامر بجابر؟

٩) قطعت سناء مسافةً ما خلال ٤٠ دقيقة. إذا قطعت نصف المسافة بسرعة ١٠٠ كم/ساعة وقطعت نصفها الآخر بسرعة ٦٠ كم/ساعة، فما المسافة التي قطعَتها سناء؟

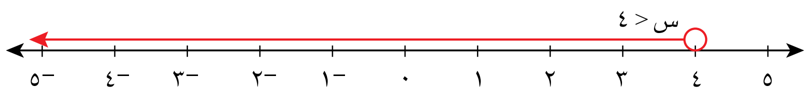
٦-٧ المُتبايِنات الخطّيّة

لقد تعرفت على إيجاد قيمة واحدة لكل مُتغيِّر في المعادلات الخطّيّة، ولكن قد تنشأ أحيانًا مواقف لها مدى من الحلول المُمكِنة. يوسِّع هذا الدرس العمل السابق مع المُعادَلات الخطّيّة لتبحث في **المُتبايِنات الخطّيّة**.

٦-٧-أ خطّ الأعداد

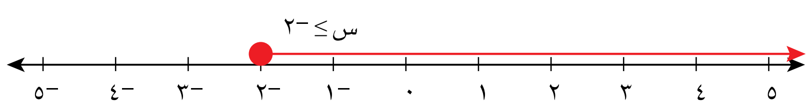
افترضْ أنك علمتَ أن س < ٤، هذا يعني أن كلّ قيمة ممكنة لِـ (س) يجب أن تكون أقلّ من ٤، وعليه يمكن لقيم (س) أن تكون ٣، ٢، ١، ٠، −١، −٢... ولكن هذه ليست جميع القيم ذلك أن ٣,٢ أيضًا أقلّ من ٤، وكذلك ٣,٩٩٩، ٢,٤٣، −٣,٤، −١٠٠...

إذا رسمت خطّ الأعداد، يمكنك استخدام سهمٍ لتمثيل مجموعة الأعداد:



يسمح لك خط الأعداد بعرض قيمَ س المُمكنة بوضوح من دون أن تكتبها كلّها (يوجد عدد غير منتهٍ من القيم، لذلك لا تستطيع كتابتها كلها). لاحظ أن 'الدائرة المفتوحة' فوق العدد ٤ فارغة، يُستخدَم هذا الرمز لأن من غير الممكن لـ (س) أن تكون مساوية للعدد ٤.

الآن افترض أن س ≥ −٢، يدلّك ذلك على أن قيم س يمكن أن تكون أكبر من −٢ أو تساويه. يمكنك أن تبيّن أن س قد تساوي −٢ بتظليل الدائرة أعلى العدد −٢ على خطّ الأعداد:



يُبيّن المثال الآتي أنه من الممكن أن يظهر في المسألة أكثر من رمز واحد للمُتبايِنة.

مثــال ١٨

(١) بيّن مجموعة القيم التي تحقّق كلاً من المُتبايِنات التالية على خطّ الأعداد.

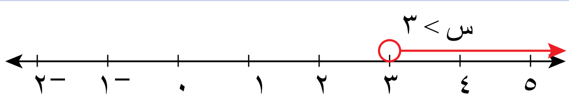
أ س > ٣ ب ٤ < ص < ٨ ج −١,٤ < س ≤ ٢,٨

(٢) اكتب جميع الأعداد الصحيحة التي تُحقِّق المُتبايِنة ٤,٢ < س ≤ ١٠,٤

الحــلّ:

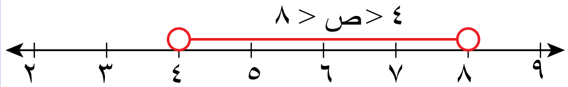
(١)

أ



يجب أن تكون قيمَ س أكبر من ٣ ولا يمكن لـ (س) أن تساوي ٣، لذلك لا تُظلل الدائرة. 'أكبر' تعني 'إلى اليمين' على خطّ الأعداد.

ب



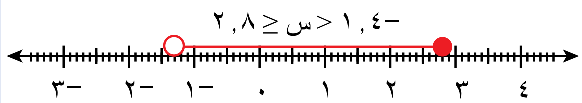
لاحظ أن المُتغيِّر المُستخدَم هنا هو ص، ويجب أن يوضَّح ذلك على خطّ الأعداد. وقد استُخدم أيضًا رمزا مُتبايِنات، اللذان يدلّان على أن هناك مُتبايِنتَين، ويجب أن تتحقّقا معًا.

تدلّك ٤ < ص على أن ص أكبر من ٤ (ولا تساويها).

تدلّك ص < ٨ على أن ص أصغر من ٨ (ولا تساويها).

إذن تقع ص بين ٤، ٨ (ولا تتضمَّنهما).

ج



يحتوي المثال على مُتبايِنتَين يجب أن تتحقَّقا معًا. س أكبر من −١,٤ (ولا تساويها)، وس أصغر من ٢,٨ (أو تساويها)

(٢) هنا يجب أن تكون قيم (س) أعدادًا صحيحة أكبر من ٤,٢ ولا تساويها، لذا ستكون أصغر قيمة ممكنة لـ (س) هي ٥. كما يجب أن تكون قيم (س) أعدادًا صحيحة أصغر من ١٠,٤ أو تساويها. فتكون أكبر قيمة لـ (س) هي ١٠؛ إذن تكون القيم الممكنة لـ (س) هي ٥ أو ٦ أو ٧ أو ٨ أو ٩ أو ١٠

تمارين ٦-٧-أ

١) بيِّن مجموعة القيم التي تُحقِّق كلًّا من المُتبايِنات التالية على خطّ الأعداد:

أ س < ٥ — ب س > ٢ — ج ل ≤ ٦

د ص > −٨ — هـ ك ≥ −٥ — و س < −٤

ز ١,٢ < س < ٣,٥ — ح −٣,٢ < س ≤ ٢,٩ — ط −٤,٥ ≤ ك ≤ −٣,١

٢) اكتب جميع الأعداد الصحيحة التي تحقّق كلًّا من المُتبايِنات التالية:

أ ٣ < ب < ١٣ — ب ٧ < ح ≤ ١٩ — ج ١٨ ≤ هـ ≤ ٢٧

د −٣ ≤ ف < ٠ — هـ −٣ ≤ ف ≤ ٠ — و ٢,٥ < م < ١١,٣

ز −٧ < س ≤ −٤ — ح π < ر ≤ ٢π — ط √٥ ≤ و ≤ √١٨

٦-٧-ب حلّ المُتبايِنات جبريًّا

لتكن المُتباينة ٣س > ٦

افترض أن س = ٢، عندها ٣س = ٦ ولكن ذلك لا يحقِّق المُتباينة! من جهة أخرى، أيّ قيمة لِـ (س) أكبر من ٢ تحقِّق المُتباينة. مثلاً:

إذا كانت س = ٢,١، فإن ٣س = ٦,٣، وهي أكبر من ٦

بالطريقة نفسها التي تسمح لك بقسمة طرفَيِ المعادلة على ٣، يمكنك قسمة طرفَي المُتبايِنة على ٣ لتحصل على الحلّ:

٣س > ٦

$\frac{\text{٣س}}{\text{٣}} > \frac{\text{٦}}{\text{٣}}$

س > ٢

لاحظ أن الحلّ هو مجموعة من الأعداد وليس قيمة واحدة، حيث أن أيّ قيمة لِـ (س) أكبر من ٢ تكون صحيحة.

يمكنك أن تحلّ المُتبايِنات الخطّيّة كما تحلّ المعادلات الخطّيّة، رُغم وجود بعض الاستثناءات المُهمَّة، وهذا موضّح في قسم 'التنبيه' الوارد في الصفحة الآتية. الأهم هو أن تتذكَّر أن ما تنفِّذه في أحد طرفَيِ المُتبايِنة يجب أن تنفِّذه في طرفها الآخر.

مثال ١٩

أوجِدْ مجموعة قيَم س التي تُحقِّق كلّ مُتبايِنة من المُتبايِنات التالية:

أ ٣س − ٤ < ١٤

ب ٤(س − ٧) ≥ ١٦

ج ٥س − ٣ ≤ ٢س + ١٨

د ٤ − ٧س ≤ ٥٣

الحــلّ:

أ ٣س − ٤ < ١٤

٣س < ١٨ — أضف ٤ إلى كلا الطرفَين.

$\frac{\text{٣س}}{\text{٣}} < \frac{\text{١٨}}{\text{٣}}$ — اقسمِ كلا الطرفَين على ٣

∴ س < ٦

مجموعة قيم س هي مجموعة الأعداد الأصغر من ٦

ب ٤(س − ٧) ≥ ١٦

٤س − ٢٨ ≥ ١٦ — فُكَّ الأقواس.

٤س ≥ ٤٤ — أضف ٢٨ إلى كلا الطرفَين.

$\frac{\text{٤س}}{\text{٤}} \geq \frac{\text{٤٤}}{\text{٤}}$ — اقسمِ كلا الطرفَين على ٤

∴ س ≥ ١١

مجموعة قيم س هي مجموعة الأعداد الأكبر من العدد ١١ أو المُساوية له

	حلّ آخر: ٤(س − ٧) ≥ ١٦ س − ٧ ≥ ٤ س ≥ ١١ مجموعة قيم س هي مجموعة الأعداد الأكبر من العدد ١١ أو المُساوية له	لاحظ أنك تستطيع أيضًا حلّ المُتبايِنة بقسمة كلا الطرفَين على ٤ منذ البداية: اقسم كلا الطرفَين على ٤. أضف ٧ إلى كلا الطرفين لتحصل على الإجابة نفسها كما سبق.
ج	٥س − ٣ ≤ ٢س + ١٨ ٥س − ٣ − ٢س ≤ ٢س + ١٨ − ٢س ٣س − ٣ ≤ ١٨ ٣س ≤ ٢١ س ≤ ٧ مجموعة قيم س هي مجموعة الأعداد الأصغر من العدد ٧ أو المُساوية له	اطرحِ الحد س ذا المُعامِل الأصغر (٢س) من كلا الطرفَين. بسّط. أضفْ ٣ إلى كلا الطرفَين. اقسمِ كلا الطرفَين على ٣
د	٤ − ٧س ≤ ٥٣ −٧س ≤ ٤٩ (−٧س)/(−٧) ≥ ٤٩/(−٧) ∴ س ≥ −٧ مجموعة قيم س هي مجموعة الأعداد الأكبر من العدد −٧ أو المُساوية له	اطرح ٤ من كلا الطرفَين اقسم كلا الطرفين على −٧ واقلب رمز المتباينة

تنبيه

قبل البدء بحلّ التمرين التالي، يجب الانتباه لوجود قاعدة أخرى عليك تذكُّرها، كما هو مُبيَّن في المُتبايِنة:

٣ − ٥س > ١٨

⇐ −٥س > ١٥

إذا قسمت طرفَي المُتبايِنة على العدد −٥، يظهر أن الحلّ سيكون:

س > −٣

وهذا يعني أن أيّ قيمة لـِ (س) أكبر من −٣ تُحقِّق المُتبايِنة، مثل −٢، ١، ٢٫٤، ٣٫٥، ١٠...

إذا حسبت قيمة ٣ − ٥س لكلّ قيمة من هذه القيَم، ستحصل على ١٣، ٨، −٩، −١٤٫٥، −٤٧... ولا تُحقّق أيّ من هذه القيَم المُتبايِنة الأصليّة، لأن جميعها أصغر من ١٨

حاولْ، إذا أمكن، تجُنب إشارة السالب بجمع الحدود أو طرحها.

والحلّ الصحيح هو:

$٣ - ٥س < ١٨$

$\Leftarrow ٣ < ١٨ + ٥س$

$-١٥ < ٥س$

$-٣ < س$

أو $س > -٣$

هذا حلّ صحيحٌ والإجابة النهائية شبيهة بالإجابة أعلاه. الفرق الوحيد هو أن إشارة المُتباينة قد عُكِست. عليك تذكّر الآتي:

إذا ضربتَ طرفَي المُتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه، فعليك عكس رمز المتباينة.

تمارين ٦-٧-ب

أوجد حلّ كلّ متباينة من المُتباينات الآتية في أبسط صورة ممكنة:

١) أ $١٨س > ٣٦$ ب $١٣س < ٣٩$

ج $١٥ص \leqslant ١٤$ د $٧ص < -١٤$

هـ $٤ + ٨جـ \leqslant ٢٠$ و $٢س + ١ > ٩$

ز $\frac{س}{٣} > ٢$ ح $٥ف - ٣ < ١٢$

ط $\frac{س}{٣} + ٧ < ٢$ ي $١٢د - ١٤ \leqslant ٣٤$

ك $٢٢(س - ٤) > ٨٨$ ل $١٠ - ١٠ك < ٣$

٢) أوجد حلّ كلّ متباينة من المُتباينات الآتية في أبسط صورة ممكنة:

أ $\frac{ص + ٦}{٤} < ٩$ ب $١٠ف - ١٢ > ٤٨ + ٥ف$

ج $٣جـ - ٧ \leqslant ٥جـ - ١٨$ د $٣(هـ - ٤) < ٥(هـ - ١٠)$

هـ $\frac{ص + ٦}{٤} \geqslant ٩$ و $\frac{١}{٢}(س + ٥) \geqslant ٢$

ز $٣ - ٧هـ \leqslant ٦ - ٥هـ$ ح $٢(ص - ٧) + ٦ \leqslant ٥(ص + ٣) + ٢١$

ط $٦(ن - ٤) - ٢(ن + ١) > ٣(ن + ٧) + ١$ ي $٥(٢ف - ٣) - ٢(٤ف - ٥) \leqslant ٨(ف + ١)$

ك $\frac{ز - ٢}{٣} - ٧ < ١٣$ ل $\frac{٣ك - ١}{٧} - ٧ < ٧$

م $\frac{٢هـ + ١}{٩} < ٧ - ٦هـ$

٣) أوجد حلّ كلّ متباينة من المُتباينات الآتية في أبسط صورة ممكنة:

أ $٢ف - \frac{٢ف + ١}{٣} < ١٢$ ب $\frac{٢}{٣}ف - \frac{٢ف + ١}{٩} < ١٢$

ج $\frac{٢}{٧}ف - \frac{٢ف + ١}{٩} < ١٢$ د $\frac{ق}{٢} + \frac{١}{٣} > ٢$

هـ $\frac{٣}{٨}(٢د - \frac{١}{٣}) - \frac{٢}{٩}(٧ - ٣د) < \frac{١}{٤}د + \frac{٢(د - ٨)}{٧}$

مُساعَدة

تحتاج إلى تذكُّر كيفية إعادة كتابة الكسر.

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- المُعادَلة الخطيَّة لا تتضمَّن مُتغيِّرات ذات قوة أكبر من واحد.
- حلّ مُعادَلة بمُتغيِّر واحد يعني إيجاد قيمته.
- عند حلّ المعادلات، يجب التأكُّد من تنفيذ العمليات نفسها على الطرفَين.
- التحليل إلى عوامل هو عكس فكّ الأقواس.
- يمكن إعادة تنظيم الصيغة لكتابتها بدلالة أحد المُتغيّرات الموجودة ضمنها.
- آنيٌّ يعني في الوقت نفسه.
- يمكن حلّ المُعادلات الخطّية الآنيّة جبريًّا.
- للمُتباينات مدى من الحلول.
- يمكن تمثيل المُتباينات الخطّية على خطّ الأعداد.
- تُفيد العبارات الجبرية والمُعادَلات في تمثيل المواقف وحلّ المسائل اللفظية.
- عندما تكتب معادلتك الخاصّة لتمثيل المسائل، عليك ذكر ما تمثِّله المُتغيِّرات.
- الصيغة هي معادلة تربط بين المُتغيّرات.

يجب أن تكون قادرًا على:

- فكّ الأقواس مع مُراعاة وجود إشارات سالبة.
- حلّ معادلة خطّية.
- تحليل عبارات جبرية إلى عوامل بأخذ العوامل المُشترَكة.
- إعادة تنظيم صيغة.
- حلّ مُعادَلات خطّية آنيّة جبريًّا باستخدام التعويض والحذف.
- حلّ مُتباينة بمُتغيِّر واحد باستخدام خطّ الأعداد.
- كتابة مُعادَلاتك الخاصّة واستخدامها لحلّ المسائل اللفظية.
- كتابة وإعادة تنظيم صيَغ أكثر تعقيدًا مثل تلك التي تتضمَّن مربعات وجُذورًا تربيعية، أو تلك التي يظهر فيها المتغيِّر في أكثر من حدّ.

تمارين نهاية الوحدة

١) تم مزج ستّة لترات من الطلاء الأبيض مع ثلاثة لترات من الطلاء الأزرق، إذا علمت أن سعر الطلاء الأزرق يزيد بمقدار ٢ ريال عُماني للتر الواحد عن سعر الطلاء الأبيض، وأنّ السعر الكلّي للمزيج ٢٤ ريالاً عُمانيًّا، أوجد سعر الطلاء الأبيض.

٢) لدى سارة مجموعة من العُملات المعدِنية العُمانية من فئة ٥ بيسات و١٠ بيسات. وكان إجمالي ما لديها هو ٥٠٠ قطعة نقود معدنية. إذا علمت أن قيمتها الكلّية ٤,٢٠٠ ريالات عُمانية، فكم قطعة لديها من كل فئة؟

٣) إذا كان ف = $\frac{ب}{١ - ر}$ ، أوجد ب عندما ف = ٥,٢، ر = ٠,٣

٤) حلِّل إلى عوامل: ٢س − ١٢س ص

٥) اكتب الصيغة التالية بدلالة المُتغيِّر (ر):

ب = $\sqrt{س + ر}$

٦) فُكَّ القوسين: ٢س(٤ − س^{٢})

٧) حلِّل إلى عوامل: ٦ ف ت + ٨ ف ر

٨) حلّ المُعادَلة: ٤(٣س − ٢) = ٢٨

٩) حلّ المُعادَلة: $\frac{٢س}{٣}$ + ٧ = س + ١

١٠) إذا علمت أن: ت = ٣ع − ٥، احسب (ت) عندما ع = ١٢

١١) يُصبح الطقس أكثر برودةً كلّما ارتفعْتَ وأنت تصعَدُ جبلاً. تُبيِّن الصيغة الآتية العلاقة بين الارتفاع ودرجة الحرارة.

انخفاض درجة الحرارة (°س) = $\frac{\text{التزايد في الارتفاع (م)}}{٢٠٠}$

أ) إذا كانت درجة الحرارة تساوي ٢٣°س عند ارتفاع ٥٠٠ م، فكم ستكون درجة الحرارة عندما تتسلَّق وتصل إلى ارتفاع ١٣٠٠ م؟

ب) ما الارتفاع الذي يجب أن تتسلَّقه للوصول إلى درجة حرارة ٥°س؟

١٢) يمكن استخدام الصيغة ح = ٣ع لربط (ع) عدد أضلاع قاعدة المنشور، مع (ح) عدد أضلاع المنشور.

أ) اكتب الصيغة بدلالة المُتغيِّر (ع).

ب) أوجد قيمة (ع) في منشور يتضمَّن ٢١ حرفًا.

الوحدة السابعة: المُستقيمات

المُفردات

- مُعادلة المُستقيم Equation of a line
- المَيل Gradient
- الجزء المقطوع من المحور الصادي y-intercept
- الثابت Constant
- الجزء المقطوع من المحور السيني x-intercept
- القطعة المُستقيمة Line segment
- نقطة المُنتَصف Midpoint

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تكوِّن جدْوَل قيَم وتعيِّن نقاطًا لتُنشئَ تمثيلات بيانية
- تجد مَيل المُستقيم
- تجد مُعادلة المُستقيم وتُحدِّدها
- تُحدِّد مُعادلة المُستقيم موازٍ لمُستقيم آخر مُعطى
- تحسب مَيل مُستقيم باستخدام إحداثيات نقاط واقعة عليه
- تجد مَيل المُستقيمات المُتوازية ومَيل المُستقيمات المُتعامِدة
- تجد طول قطعة مُستقيمة وإحداثيات نقطة مُنتصَفها

تُعدّ مدينة صلالة، إحدى ولايات محافظة ظفار، من أهمّ الوجهات السياحية في سلطنة عُمان، حيث تستقطب السياح من داخل السلطنة وخارجها. تُشتهر صلالة بطبيعتها الرائعة وجبالها المُرتفعة الممتلئة بالأشجار ومياهها وشواطئها وأماكنها الأثرية القديمة.

عندما تجري مياه الأودية وتصل إلى بعض الأماكن المُرتفعة، يتشكّل ما يُسمّى بالشّلال أو المسقط المائي (كما في الصورة أعلاه). وكلّما كان انحدار الأماكن المُرتفِعة أكبر، كان مَيل الشلال أكبر، وقد يُصبح رأسيًّا في بعض الحالات.

٧-١ رسم المستقيمات

٧-١-أ استخدام المُعادلات لرسم المُستقيمات

يمتلك محمود شركة لتأجير القوارب. قدّم عرضًا للاستئجار يقضي بدفع مبلغ ثابت قيَمته ٤٠ ريالاً عُمانيًّا ومبلغ آخر قيمَته ١٥ ريالاً عُمانيًّا بدل كلّ ساعة استئجار. يُمكنك إيجاد صيغة للتكلفة الكلّيّة (ص) ريال عُماني بعد مرور زمن (س) ساعة استئجار.

التكلفة الكلّيّة = الرسوم الثابتة + الرسوم الإجمالية لجميع الساعات

ص = ٤٠ + ١٥ × س

ص = ١٥س + ٤٠

فكّر الآن في التكلفة الكلّيّة لعدد من ساعات الاستئجار المختلفة.

تكلفة ساعة واحدة = ١٥ × ١ + ٤٠ = ٥٥ ريالاً عُمانيًّا

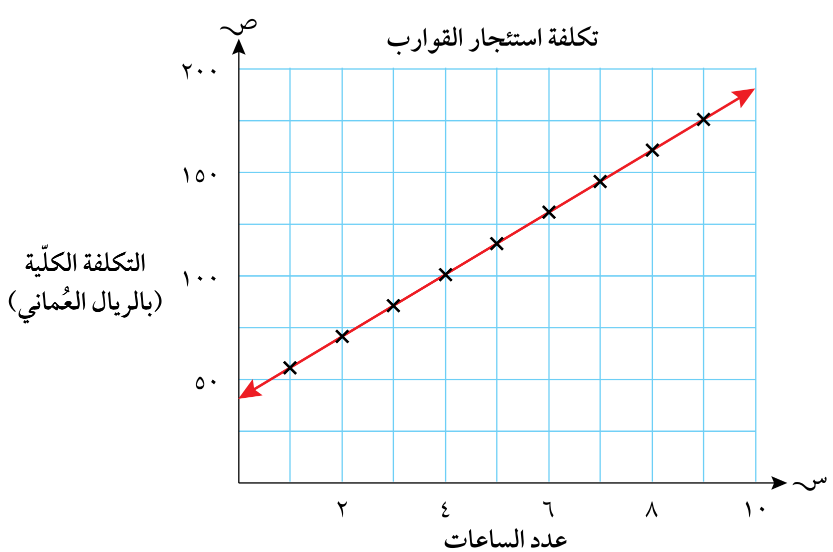
تكلفة ساعتين = ١٥ × ٢ + ٤٠ = ٧٠ ريالاً عُمانيًّا

ثلاث ساعات: التكلفة = ١٥ × ٣ + ٤٠ = ٨٥ ريالًا عُمانيًّا

وهكذا.

إذا وضعت هذه القيَم في جدْوَل (بالإضافة إلى قيَم أخرى)، يمكنك أن تُمثّل التكلفة الكلّيّة لعدد ساعات الاستئجار برسم بياني.

عدد الساعات (س)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
التكلفة الكلّيّة (ص)	٥٥	٧٠	٨٥	١٠٠	١١٥	١٣٠	١٤٥	١٦٠	١٧٥



يُبيّن التمثيل البياني التكلفة الكلّيّة لاستئجار القارب (حُدِّدت على المحور الرأسيّ) مع عدد ساعات الاستئجار (على المحور الأفقي). لاحظ أن جميع النقاط تقع على مُستقيم.

تُخبِرك الصيغة ص = ١٥س + ٤٠ عن العلاقة بين الإحداثيات (ص) لجميع النقاط الواقعة على المُستقيم مع الإحداثيات (س). تُسمّى هذه الصيغة **مُعادلة المُستقيم**. وتبيّن الأمثلة الآتية كيف يمكن رسْم المستقيمات باستخدام مُعادلات مُعطاة.

لتمثيل المستقيم بيانيًّا باستخدام مُعادلته:

- كوِّن جدْوَل قيَم باستخدام الإحداثيات (س)، (ص) لنقطتين على الأقلّ (مع أنك قد تُعطى نقاطًا أكثر).
- ارسم المحورَين السيني والصادي، وحدِّد مدى قيم (س)، (ص) التي تحتاج إلى استخدامها.
- مثِّل كلّ نقطة على المُستوى الإحداثي.
- ارسم مُستقيمًا يصل بين النقاط (استخدم مِسطرة).

قبل أن تبدأ برسم المحورَين، تحقَّق دائمًا من معرفة قيم (ص) التي تحتاج إلى استخدامها.

مثـــال ١

مُستقيم مُعادلته ص = ٢س + ٣؛ كوِّن جدْوَل قيَم لِـ (س)، (ص) وارسم المُستقيم في المستوى الإحداثي. استخدم أعدادًا صحيحة لقيَم (س) تقع من ⁻٣ إلى ٢

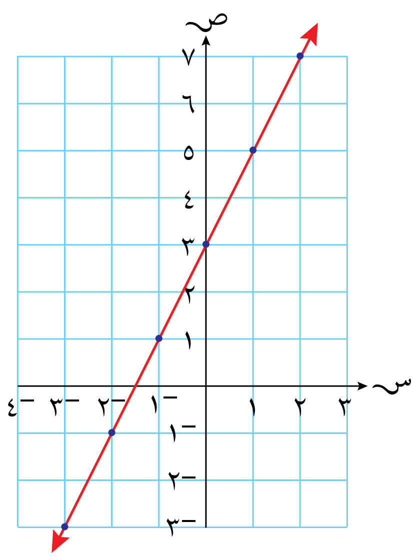
الحـــلّ:

عند تعويض القيَم ⁻٣، ⁻٢، ⁻١، ٠، ١، ٢ في المُعادلة، تحصل على القيَم المعروضة في الجدْوَل التالي:

س	⁻٣	⁻٢	⁻١	٠	١	٢
ص	⁻٣	⁻١	١	٣	٥	٧

لاحظ أن قيَم (ص) تتراوح بين ⁻٣ و ٧

التمثيل البيانيّ للمُعادلة ص = ٢س + ٣



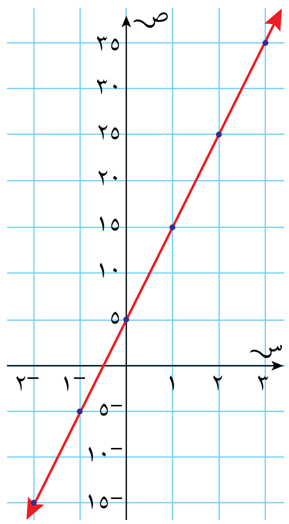
مثـــال ٢

مثل بيانيًّا المستقيم الذي معادلته ص = ١٠س + ٥

الحـــلّ:

كوّن جدول قيم (يمكن استخدام قيم س من ⁻٢ إلى ٣):

س	⁻٢	⁻١	٠	١	٢	٣
ص	⁻١٥	⁻٥	٥	١٥	٢٥	٣٥



يتبع جدْوَل التمثيل البياني للمستقيم نمطًا مُعيّنًا، لذا يكون من السهل الآن إكمال جدْوَل القيَم.

انظر إلى قيَم ص: ستجد أنّها كبيرة جدًّا مقارنة بقيم س. لذا، فإن وجود نفس مقياس الرسم على المحور السيني والمحور الصادي سيُعطي رسمًا طويلاً جدًا ورفيعًا جدًا، تصعب قراءته. في هذا السياق، من الطبيعي استخدام مقياسي رسم مُختلفيْن على المحورَين.

تمارين ٧-١-أ

١) كوِّن جدول القيَم لكلّ مُعادلة من المُعادلات الآتية، حيث تقع س بين ⁻٣، ٣، ثم مثِّل كل معادلة بيانيًّا.

أ ص = ٣س + ٢ ب ص = ٢س − ١

ج ص = ⁻٢س + ١ د ص = ٦ − س

هـ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ١ و ص = ⁻٣

ز س + ص = ٤ ح ص = س

٢) كوِّن جدْوَل القيَم لكلّ من المُعادلات الآتية. استخدم قيَم س: ⁻٣، ٠، ٣، ثم مثل كل معادلة بيانيًّا.

أ ص = س + ٢ ب ص = ⁻س + ٢

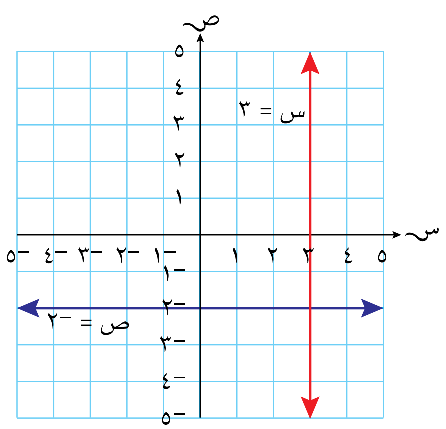
ج ص = س − ٢ د ص = ⁻س − ٢

٣) استخدم الرسوم البيانيّة من التمرين (٢) للإجابة عن الأسئلة الآتية:

- **أ** أين تتقاطع المستقيمات مع المحور السّيني؟
- **ب** أيّ المستقيمات تميل إلى الأعلى من اليسار إلى اليمين؟
- **ج** أيّ المستقيمات تميل إلى الأسفل من اليسار إلى اليمين؟
- **د** أيّ المستقيمات تتقاطع مع المحور الصادي عند النقطة (٠، ٢)؟
- **هـ** أيّ المستقيمات تتقاطع مع المحور الصادي عند النقطة (٠، ⁻٢)؟
- **و** هل تقع النقطة (٣، ٣) على أيّ من تلك المستقيمات؟ إذا كانت كذلك، فعلى أي مستقيم تقع؟

٧-١-ب المُستقيمات الرأسيّة و المُستقيمات الأفقيّة

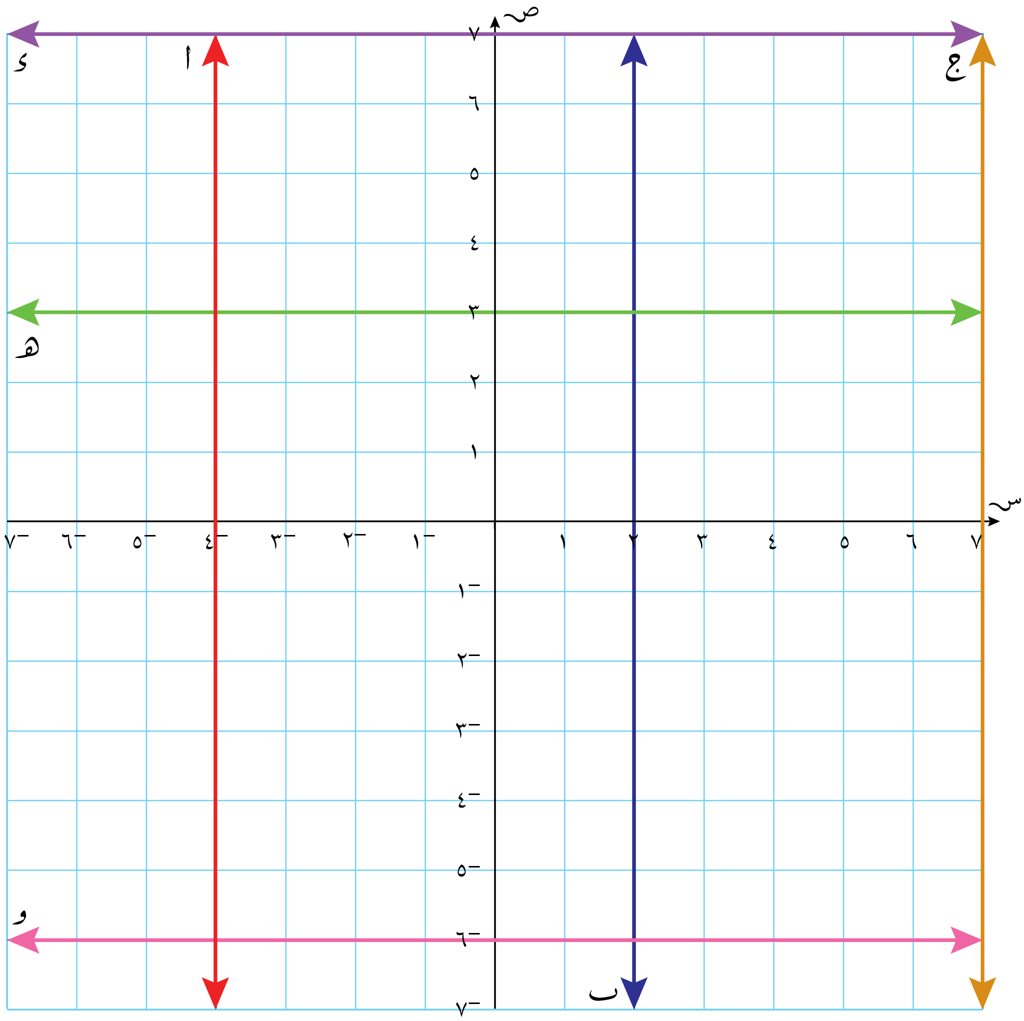
انظر إلى المُستقيمين في المُخطَّط الآتي:



- الإحداثي السيني لكل نقطة تقع على المُستقيم الرأسي، هو ٣. لذلك تكون مُعادَلة المُستقيم س = ٣
- الإحداثي الصادي لكل نقطة تقع على المُستقيم الأفقي، هو ⁻٢. لذلك تكون مُعادلة المُستقيم ص = ⁻٢
- كلّ مُعادلات المُستقيمات الرأسيّة تأتي على صورة س = عددًا.
- كلّ مُعادلات المُستقيمات الأفقيّة تأتي على صورة ص = عددًا.

تمارين ٧-١-ب

١) اكتب مُعادلة كلّ مُستقيم مرسوم على المستوى الإحداثي الآتي:



٢) مثّل كلاًّ ممّا يلي على المُستوى الإحداثي نفسه، بدون استخدام جدول القيم.

أ ص = ٣   ب س = ٣   ج ص = ⁻١   د س = ⁻١

هـ ص = ⁻٣   و ص = ٤   ز س = $\frac{١}{٢}$ ح س = $\frac{⁻٧}{٢}$

ط مُستقيم يوازي المحور السّيني، ويتقاطع مع المحور الصادي عند النقطة (٠، ٤).

ي مُستقيم يوازي المحور الصادي، ويمرّ بالنقطة (⁻٢، ٠).

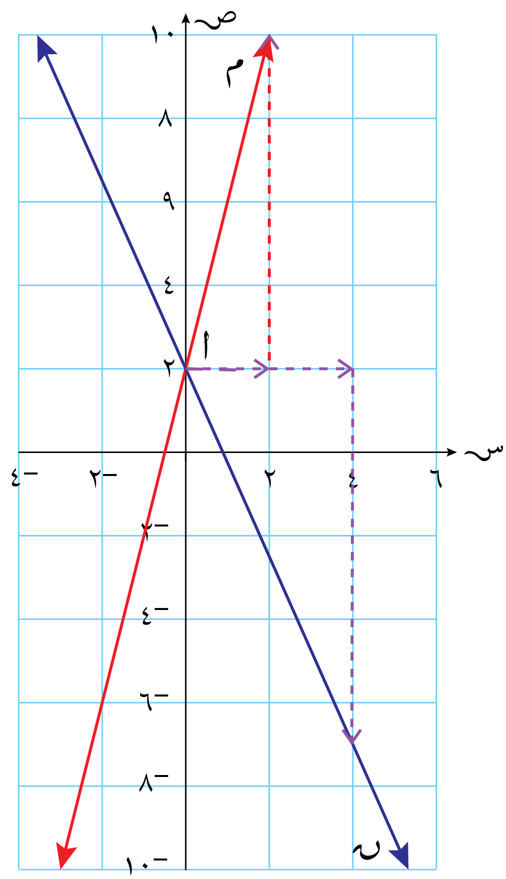
لاحقًا

ستتعامل مع المَيل في صورة مُعدَّل تغيُّر عندما تدرس الرسوم البيانية لمُعادلات الحركة.

٧-١-ج مَيل المُستقيمات

مَيل المُستقيم الأفقيّ صفر (لأن المُستقيم لا يتحرَّك إلى الأعلى أو إلى الأسفل، كلَّما اتَّجه نحو اليمين).

لا يوجد مَيل للمُستقيم الرأسي (لأن المُستقيم الرأسي لا يتحرَّك إلى اليمين أو إلى اليسار كلما اتَّجه نحو الأعلى أو الأسفل). لذا فإن مَيل المُستقيم الرأسي 'غير معرّف'.



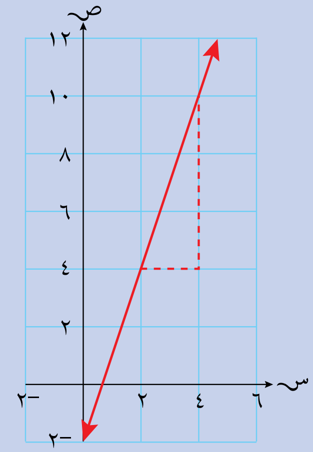
يدلّ مَيل المستقيم على مقدار انحداره، وتُقاس درجة انحدار المُستقيم بحساب قيمة المَيل. تعلّمت في الصف الثامن أن مَيل المستقيم المار بالنقطتين ($س_١$، $ص_١$)، ($س_٢$، $ص_٢$) يحسب بقيمة التغيُّر في الإحداثي الصادي على التغيُّر في الإحداثي السيني:

$$\text{المَيل} = \frac{\text{التغيُّر في الإحداثي ص}}{\text{التغيُّر في الإحداثي س}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

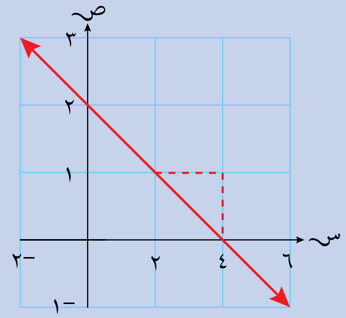
مثــال ٣

أوجد مَيل المُستقيم في كلّ ممّا يلي، في صورة عدد كامل أو كسر في أبسط صورة.

أ



ب



الحــلّ:

أ لاحظ أن المُستقيم يمرّ بالنقطتين (٢، ٤)، (٤، ١٠).

$$\text{المَيل} = \frac{\text{التغيُّر في الإحداثي (ص)}}{\text{التغيُّر في الإحداثي (س)}} = \frac{١٠ - ٤}{٤ - ٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

ب لاحظ أن المُستقيم يمرّ بالنقطتين (٢، ١)، (٤، ٠).

$$\text{المَيل} = \frac{\text{التغيُّر في الإحداثي (ص)}}{\text{التغيُّر في الإحداثي (س)}} = \frac{٠ - ١}{٤ - ٢} = -\frac{١}{٢}$$

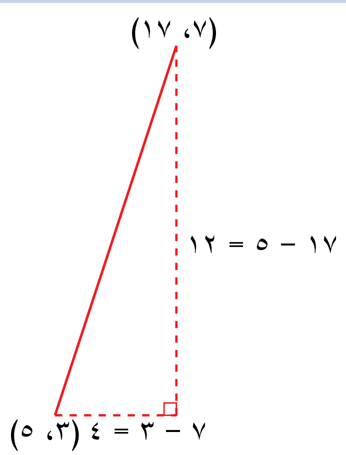
مثــال ٤

أوجد مَيل المُستقيم الذي يمرّ بالنقطتين (٣، ٥)، (٧، ١٧).

الحــلّ:

$$\text{المَيل} = \frac{\text{التغيُّر في الإحداثي (ص)}}{\text{التغيُّر في الإحداثي (س)}}$$

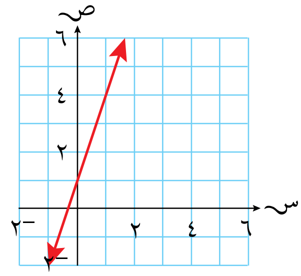
$$= \frac{١٧ - ٥}{٧ - ٣} = \frac{١٢}{٤} = ٣$$



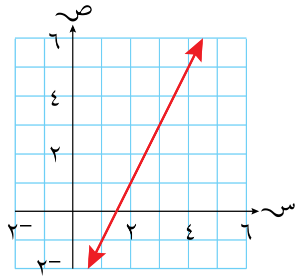
تمارين ٧-١-ج

١) أوجد مَيل المستقيم في كلّ ممّا يلي، في صورة عدد كامل أو كسر في أبسط صورة:

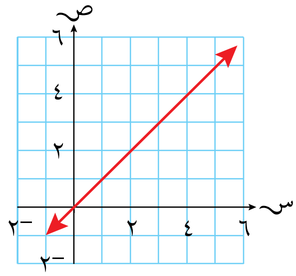
أ



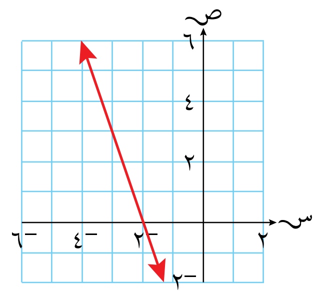
ب



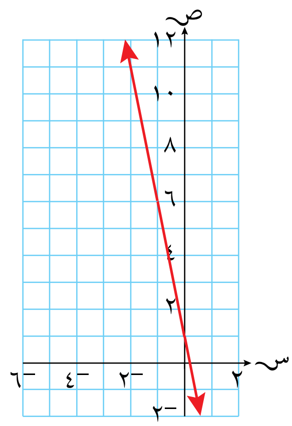
ج



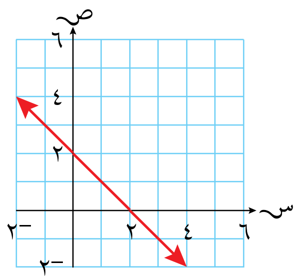
د



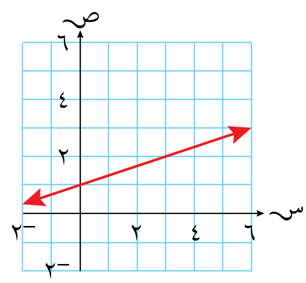
هـ



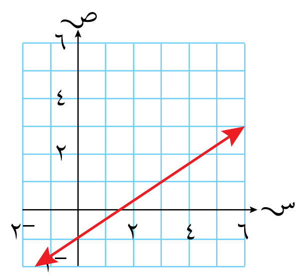
و



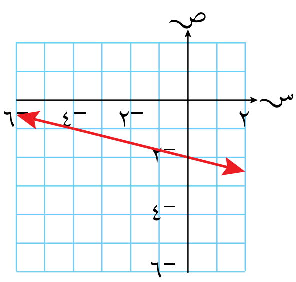
ز



ح



ط



فكّر جيّدًا: هل كنت تتوقّع أن يكون المَيل موجبًا أو سالبًا.

٢) أوجد مَيل المُستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين، في كلّ ممّا يلي:

أ ل (١، ٢)، م (٣، ٨)

ب ل (٠، ٦)، م (٣، ٩)

ج ل (٢، −١)، م (٤، ٣)

د ل (٣، ٢)، م (٧، −١٠)

هـ ل (−١، −٤)، م (−٣، ٢)

و ل (٣، −٥)، م (٧، ١٢)

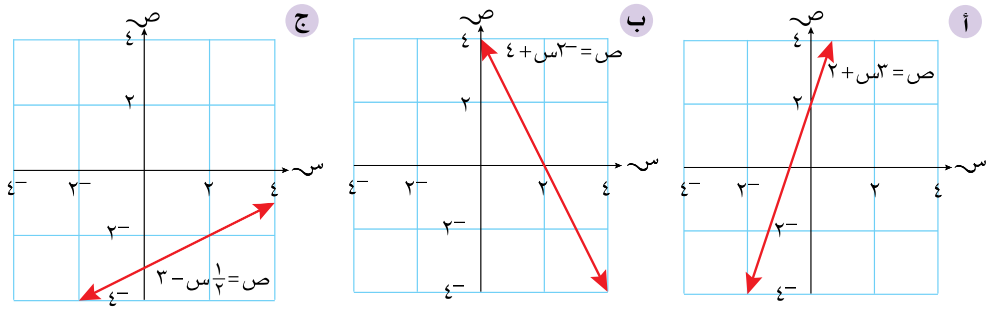
طبّق مهاراتك

٣) في الشكل المقابل: إذا كان التغيُّر الرأسي في المسافة التي قطعتها السيارة ٦٠ م، فما قيمة التغيُّر الأفقي فيها؟

فكّر جيّدًا في المسألة وفي الموضوع الرياضي الذي تحتاج إلى استخدامه لتجد الحل.

٧-١-د إيجاد مُعادلة المُستقيم

انظر إلى المُستقيمات الثلاثة الآتية:



تحقَّق بنفسك أن قيمة المَيل للمُستقيمات:

- في التمثيل البياني (أ) = ٣
- في التمثيل البياني (ب) = ⁻٢
- في التمثيل البياني (ج) = $\frac{١}{٢}$

لاحظ أن مَيل كلّ مُستقيم هو مُعامِل (س) في المُعادلة، وأن قيَمة الإحداثي الصاديّ لنقطة تقاطع المُستقيم مع المحور (ص) (وتُعرف **بالجزء المقطوع من محور الصادات**) تساوي الحدّ **الثابت** في المُعادلة. سبب ذلك أن المُستقيم يتقاطع مع المحور الصادي عندما س = ٠ وفي المُعادلة ص = ٢س − ١ يكون الإحداثي ص هو ⁻١ عندما س = ٠

الصورة العامّة لمُعادلة المُستقيم هي:

ص = م س + جـ

م س ← المَيل

جـ ← الثابت (الجزء المقطوع من محور الصادات)

- يمكن أن تُكتب مُعادلة المُستقيم في صورة ص = م س + جـ
- يدلُّك جـ (الحدّ الثابت) على تقاطُع المُستقيم مع المحور الصادي (الجزء المقطوع من محور الصادات).
- م (مُعامِل س) هو مَيل المُستقيم؛ تعني القيَمة السالبة للمَيل أن المستقيم يتَّجه إلى الأسفل كلما اتَّجهنا إلى اليمين. وتعني القيَمة الموجبة للمَيل أن المستقيم يتَّجه إلى الأعلى كلما اتجهنا إلى اليمين. وكلما كبُرت قيَمة (م)، ازداد انحدار المُستقيم.

- القيمة السالبة للمَيل تعني أن المستقيم يشكِّل زاوية منفرجة مع المحور السيني.
- القيمة الموجبة للميل تعني أن المستقيم يشكِّل زاوية حادة مع المحور السيني.

مثــال ٥

أوجد المَيل والجزء المقطوع من محور الصادات لكلّ مُعادلة من المُعادلات الآتية:

أ ص = ٣س + ٤ ب ص = ٥ − ٣س ج ص = $\frac{١}{٢}$س + ٩

د س + ص = ٨ هـ ٣س + ٢ص = ٦

الحــلّ:

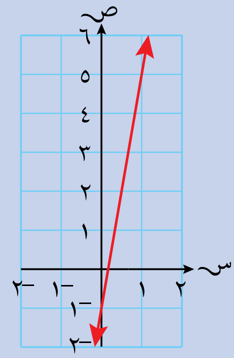
أ ص = ٣س + ٤ المَيل = ٣ الجزء المقطوع من محور الصادات = ٤	مُعامِل (س) هو المَيل الحدّ الثابت هو الجزء المقطوع من محور الصادات
ب ص = ⁻٣س + ٥ المَيل = ⁻٣ الجزء المقطوع من محور الصادات = ٥	أعد كتابة المُعادلة في صورة ص= م س + ج مُعامِل (س) هو الميل، الحدّ الثابت (ج) هو الجزء المقطوع من محور الصادات
ج ص = $\frac{١}{٢}$س + ٩ المَيل = $\frac{١}{٢}$ الجزء المقطوع من محور الصادات = ٩	قد تكون قيمة المَيل كسرًا.
د ص= ⁻س + ٨ المَيل= ⁻١ الجزء المقطوع من محور الصادات = ٨	أعد كتابة المعادلة في الصورة ص = م س + ج
هـ ٣س + ٢ص = ٦ ٢ص = ⁻٣س + ٦ ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + $\frac{٦}{٢}$ ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + ٣ المَيل = $\frac{-٣}{٢}$ الجزء المقطوع من محور الصادات = ٣	أعد كتابة المعادلة في الصورة ص = م س + ج

لإيجاد المَيل، والجزء المقطوع من محور الصادات، من المعادلة مباشرة، يجب أن نعيد تنظيمها لتكون في صورة:
ص = م س + ج.

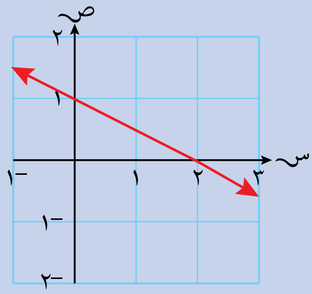
مثـــال ٦

أوجد مُعادلة كلّ مُستقيم في كل مما يأتي:

أ



ب



الحـــلّ:

أ المَيل = ٦، الثابت = ‎-١ ∴ المُعادلة هي ص = ٦س − ١	المَيل = $\frac{٦}{١}$ = ٦ يقطع المستقيم المحور الصادي عند ص = ‎-١
ب المَيل = $-\frac{١}{٢}$، الثابت = ١ ∴ المُعادلة هي ص = $-\frac{١}{٢}$س + ١	المَيل = $-\frac{١}{٢}$ = $-\frac{١}{٢}$ يقطع المستقيم المحور الصادي عند ص = ١

تمارين ٧-١-د

١) أوجد المَيل والجزء المقطوع من محور الصادات في كل من المعادلات الخطيّة الآتية، ثم مثِّل المُستقيمات بيانيًّا:

أ ص = ٤س − ٥ ب ص = ٢س + ٣

ج ص = ‎-٣س − ٢ د ص = ‎-س + ٣

هـ ص = $\frac{١}{٣}$س + ٢ و ص = ٦ − $\frac{١}{٤}$س

ز س + ص = ٤ ح س + ٢ص = ٤

ط س + $\frac{ص}{٢}$ = ٣ ي س = ٤ص − ٢

ك س = $\frac{ص}{٤}$ + ٢ ل ٢س − ٣ص = ‎-٩

٢) أعد تنظيم كلّ مُعادلة لتصبح في صورة ص = م س + جـ، ثمّ أوجد المَيل والجزء المقطوع من محور الصادات في كل مما يأتي:

أ ٢ص = س − ٤ ب ٢س + ص − ١ = ٠ ج س = $\frac{ص}{٢}$ − ٢

د ٢س − ص − ٥ = ٠ هـ ٢س − ص + ٥ = ٠ و س + ٣ص − ٦ = ٠

ز ٤ص = ١٢س − ٨ ح ٤س + ص = ٢ ط $\frac{\text{ص}}{٢}$ = س + ٢

ي $\frac{\text{ص}}{٣}$ = ٢س − ٤ ك $\frac{\text{س}}{٢}$ −٤ص = ١٢ ل $\frac{-\text{ص}}{٣}$ = ٤س − ٢

٣) أوجد مُعادلة المستقيم (في صورة ص = م س + جـ)، لكل مما يأتي:

أ المَيل يُساوي ٢، والجزء المقطوع من المحور الصادي يُساوي ٣

ب المَيل يُساوي ⁻٣، والجزء المقطوع من المحور الصادي يُساوي ⁻٢

ج المَيل يُساوي ٣، والجزء المقطوع من المحور الصادي يُساوي ⁻١

د المَيل يُساوي $-\frac{٣}{٢}$، والجزء المقطوع من المحور الصادي عند النقطة (٠، ⁻٥,٠)

هـ الجزء المقطوع من المحور الصادي يُساوي ٢، والمَيل يُساوي $-\frac{٣}{٤}$

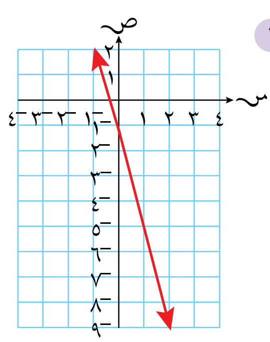
و الجزء المقطوع من المحور الصادي يُساوي ⁻٣، والمَيل يُساوي $\frac{٤}{٨}$

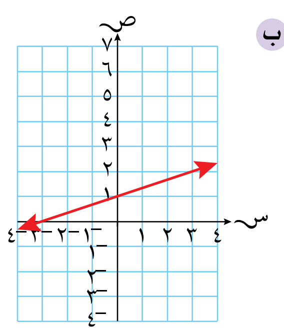
ز الجزء المقطوع من المحور الصادي يُساوي ⁻٠,٧٥، والمَيل يُساوي ٠,٧٥

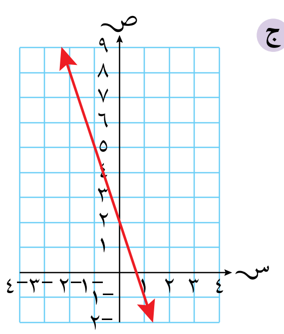
ح الجزء المقطوع من المحور الصادي يُساوي ⁻٢، والمَيل يُساوي ٠

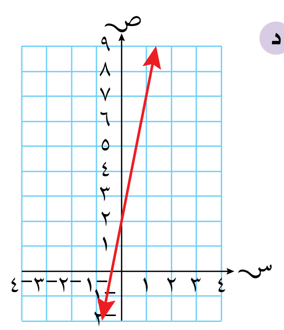
ط المَيل يُساوي ٠، والجزء المقطوع من المحور الصادي يُساوي ٤

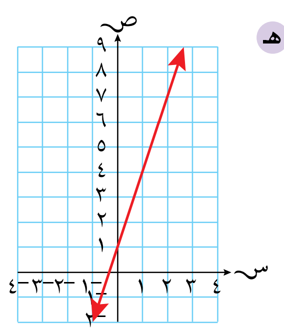
٤) أوجد مُعادلة كلّ مُستقيم في كل مما يأتي:

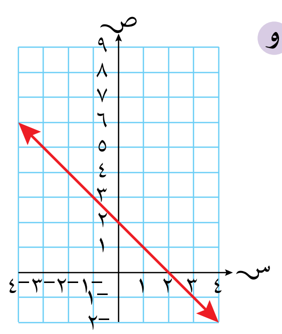
أ


ب


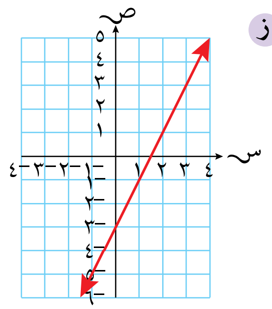
ج


د


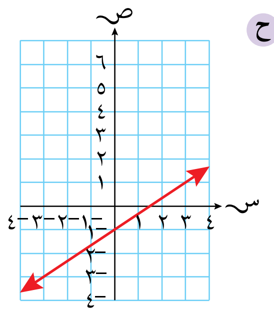
هـ


و


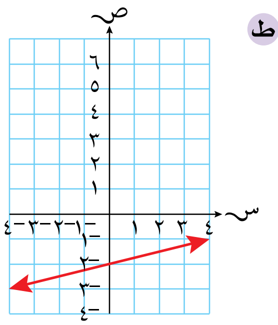
ز



ح



ط



٥) أوجد مُعادلة المُستقيم الذي يمرّ بالنقطتين في كلّ ممّا يلي:

أ ل (٢، ٣)، ع (٤، ١١)

ب ل (٤، ٥)، ع (٨، ⁻٧)

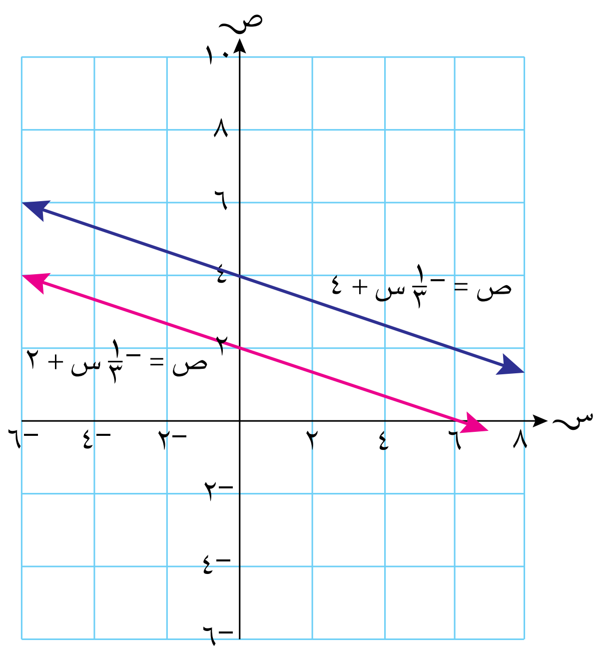
ج ل (⁻١، ⁻٣)، ع (٤، ٦)

د ل (٣، ⁻٥)، ع (٧، ١٢)

٧-١-هـ مَيل المستقيمات المُتوازية ومَيل المستقيمات المُتعامِدة

المُستقيمات المُتوازية

المُستقيمات المُتوازية لها المَيل نفسه، وبالتالي فإن المُستقيمات التي لها المَيل نفسه تكون مُتوازية.

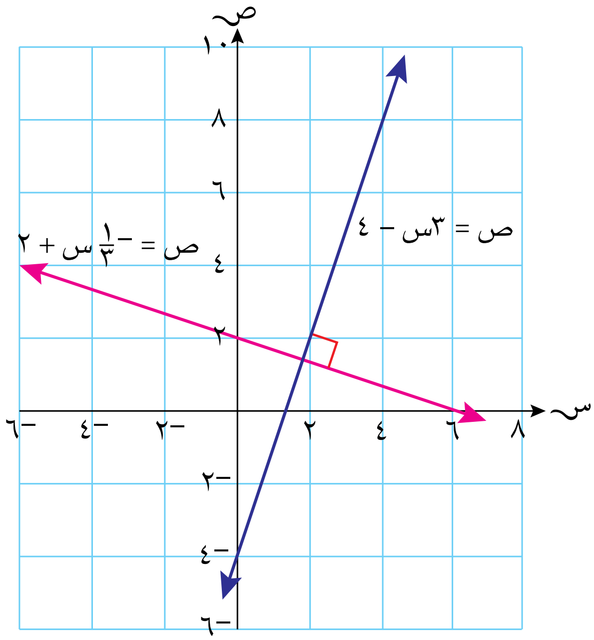


المُستقيمات المُتعامِدة

إذا كان ناتج ضرب مَيلي مُستقيمَين يساوي $^{-}١$، فإن المُستقيمَين متعامدان.

يتقاطع المُستقيمان المُتعامدان ليُشكّلا زوايا قائمة. ناتج ضرب مَيْلَيهما هو $^{-}١$. وبناء على ذلك، فإن $م_{١} \times م_{٢} = {}^{-}١$، حيث (م) هو مَيل كلّ مُستقيم.

يظهر أدناه التمثيلان البيانيّان لمُستقيمَين مُتعامِدين.



مَيل المُستقيم الذي معادلته ص = $-\frac{١}{٣}$س + ٢ هو $-\frac{١}{٣}$

مَيل المُستقيم الذي معادلته ص = ٣س − ٤ هو ٣

ناتج ضرب المَيلين: هو $-\frac{١}{٣} \times ٣ = {}^{-}١$

عندما يُطلب إليك إيجاد مَيل المُستقيم المُتعامِد مع مُستقيم آخر مُعطى، عليك إيجاد سالب مقلوب المَيل المُعطى.

إذا بدأت بالمُستقيم ص = ٣س − ٤، الذي له المَيل ٣، فإن مَيل المُستقيم المُتعامِد معه هو $-\frac{١}{٣}$

مثال ٧

مُستقيم مُعادلته ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٢؛ أوجد مُعادلة المُستقيم في كلّ ممّا يلي إذا كان:

أ) عموديًّا على المُستقيم المُعطى ويمرّ بنقطة الأصل.

ب) عموديًّا على المُستقيم المُعطى ويمرّ بالنقطة (⁻٣، ١).

الحـلّ:

أ) ص = م س + جـ م = ⁻$\frac{٣}{٢}$ جـ = ٠ مُعادلة المُستقيم هي ص = ⁻$\frac{٣}{٢}$ س.	المَيل يساوي سالب مقلوب $\frac{٢}{٣}$ بما أن المستقيم يمر بنقطة الأصل، فهو إذًا يقطع المحور الصادي عند ص = ٠
ب) ص = ⁻$\frac{٣}{٢}$ س + جـ س = ⁻٣، ص = ١ ١ = ⁻$\frac{٣}{٢}$ (⁻٣) + جـ ١ = $\frac{٩}{٢}$ + جـ جـ = ⁻٣$\frac{١}{٢}$ ص = ⁻$\frac{٣}{٢}$ س − ٣$\frac{١}{٢}$	استخدم م = ⁻$\frac{٣}{٢}$ من الجزئية (أ) أعلاه. عوّض قيمتَي س، ص من النقطة المُعطاة لتحلّ المُعادلة من أجل إيجاد قيمة جـ.

تمارين ٧-١- هـ

١) اكتب مُعادلة المُستقيم المُوازي لكل مُستقيم من المُستقيمات الآتية:

أ) ص= ⁻٣ س   ب) ص = ٢س − ٣   ج) ص = $\frac{س}{٢}$ + ٤

د) ص = ⁻س − ٢   هـ) س = ٨   و) ص = ⁻٦

٢) أيّ من المُستقيمات الآتية موازٍ للمُستقيم ص = $\frac{١}{٢}$س؟

أ) ص = $\frac{١}{٢}$س + ١   ب) ص = ٢س   ج) ص + ١ = $\frac{١}{٢}$س

د) ٢ص + س = ⁻٦   هـ) ص = ٢س − ٤

٣) ارسم المُستقيمات التي معادلاتها ص = ٢س، ص = ٢س + ١، ص = ٢س − ٣، ص = ٢س + ٢، على المُستوى الإحداثيّ نفسه. ماذا تُلاحِظ على المُستقيمات التي رسمتها؟

٤) أوجد مُعادلة المُستقيم الموازي للمُستقيم الذي مُعادلته ص = ٢س + ٤، في كل من الحالات التالية:

أ يكون الجزء المقطوع من محور الصادات ⁻٢

ب يمرّ بنقطة الأصل.

ج يمرّ بالنقطة (٠، ⁻٤)

د الثابت يساوي $\frac{١}{٢}$

٥) مستقيم مُعادلته: ٣ص − ٢س = ٩

أ اكتب مُعادلة لمُستقيم آخر موازٍ للمُستقيم المُعطى.

ب اكتب مُعادلة لمُستقيم آخر يقطع المحور الصادي في نفس النقطة التي يقطع فيها المُستقيم المُعطى المحور الصادي.

ج اكتب مُعادلة لمُستقيم يقطع المحور الصادي في نفس النقطة التي يقطع فيها المُستقيم المعطى المحور الصادي، ويكون مُوازيًا للمحور السينيّ.

٦) ما مُعادلة المُستقيم العموديّ على المُستقيم الذي معادلته ص = $\frac{س}{٥}$ + ٣ ويمرّ بالنقطة (١، ٣)؟

٧) أثبت أن المُستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين ع(٦، ٠)، ل(٠، ١٢) يكون:

أ عموديًّا على المُستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين ح(٨، ١٠)، هـ(٤، ٨).

ب عموديًّا على المُستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين ب(⁻٤، ⁻٨)، د(⁻١، −$\frac{١٣}{٢}$)

٨) أوجد معادلة المُستقيم أ ب الذي يقطع المحور الصادي عند ص = ٥، والعمودي على المُستقيم جـ د الذي يمر بالنقطتَين جـ(٠، ٠)، د(١، ٣).

٩) أوجد مُعادلة كلّ مُستقيم في كل مما يلي، بحيث يكون:

أ عموديًّا على المُستقيم الذي مُعادلته ٢س − ص − ١ = ٠، ويمرّ بالنقطة (٢، −$\frac{١}{٢}$)

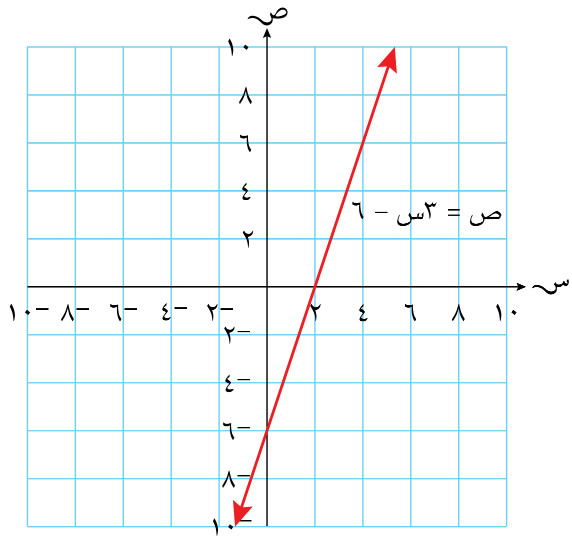
ب عموديًّا على المُستقيم الذي مُعادلته ٢س + ٢ ص = ٥، ويمرّ بالنقطة (١، ⁻٢).

١٠) يصل المُستقيم أ بين النقطتَين (٧، ١)، (١، ١٣)، ويصل المُستقيم ب بين النقطتين (٩، ١١)، (٥، ٩). أوجد قيمة مَيل كلّ منهما، وحدِّد إن كان المُستقيم أ مُتعامِدًا مع المُستقيم ب أم لا.

١١) أثبت أن النقاط أ(⁻٣، ٦)، ب(⁻١٢، ⁻٤)، جـ(٨، ⁻٥) لا يمكن أن تكون رؤوسًا للمُستطيل أ ب جـ د.

٧-١- و التقاطُع مع المحور السينيّ

تعلَّمت في الدروس السابقة طريقة إيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات وذلك إما من خلال التمثيل البياني أو من خلال المعادلة. وهنا ستتعرف إلى **الجزء المقطوع من محور السينات**. يُبيّن التمثيل البياني الآتي المُستقيم الذي معادلته ص = ٣س − ٦



لاحظ أن المُستقيم يقطع المحور السينيّ عند النقطة (٢، ٠) حيث س = ٢، ص = ٠؛ يكون الإحداثي الصاديّ لجميع النقاط الواقعة على المحور السينيّ صفرًا. عوِّض ص = ٠ في مُعادلة المُستقيم لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات:

ص = ٣س − ٦

٠ = ٣س − ٦ (ضع ص = ٠)

٣س = ٦ (اجمع ٦ مع الطرفين)

س = ٢ (اقسم الطرفَين على ٣)

ويمكنك أيضًا أن توجد الجزء المقطوع من محور الصادات بوضع س = ٠؛ تُبيّن الأمثلة الآتية العمليات الحسابية لإيجاد كلّ من الجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات.

سابقًا

سبق لك أن نفذت خُطوات مُماثِلة للخُطوات الواردة هنا عندما قمت بحل مُعادلات آنيّة.

مثــال ٨

أوجد الجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات لكلّ من المستقيمات الآتية، ثم مثلها بيانيًّا:

أ ص= ٦س − ١٢ ب ص = −س + ٣ ج ٢س + ٥ص = ٢٠

الحــلّ:

أ ص = ٦س − ١٢

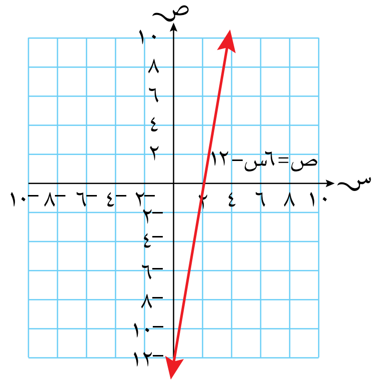
لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات:

س = ٠ ⇐ ص = −١٢

لايجاد الجزء المقطوع من محور السينات:

ص = ٠ ⇐ ٦س − ١٢ = ٠

⇐ س = ٢



ب ص = −س + ٣

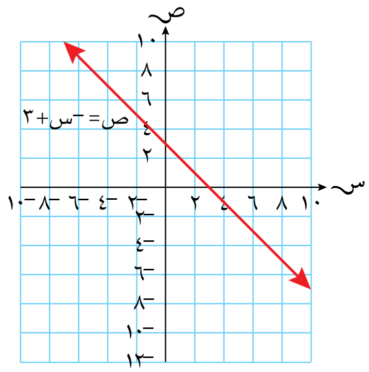
لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات:

س = ٠ ⇐ ص = ٣

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات:

ص = ٠ ⇐ −س + ٣ = ٠

⇐ س = ٣



ج ٢س + ٥ص = ٢٠

لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات:

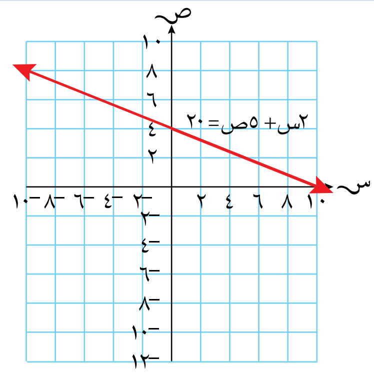
س = ٠ ⇐ ٥ص = ٢٠

⇐ ص = ٤

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات:

ص = ٠ ⇐ ٢س = ٢٠

⇐ س = ١٠



تمارين ٧-١- و

١) أوجد الجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات لكل من المستقيمات الآتية، ثم مثِّلها بيانيًّا.

أ $\text{ص} = {}^{-}\text{٥س} + \text{١٠}$	ب $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{٣}} - \text{١}$	ج $\text{ص} = {}^{-}\text{٣س} + \text{٦}$
د $\text{ص} = \text{٤س} + \text{٢}$	هـ $\text{ص} = \text{٣س} + \text{١}$	و $\text{ص} = {}^{-}\text{س} + \text{٢}$
ز $\text{ص} = \text{٢س} - \text{٣}$	ح $\text{ص} = \frac{\text{٢س}}{\text{٣}} - \text{١}$	ط $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{٤}} - \text{٢}$
ي $\text{ص} = \frac{\text{٢س}}{\text{٥}} + \text{١}$	ك ${}^{-}\text{٢} + \text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{٤}}$	ل $\frac{{}^{-}\text{ص}}{\text{٣}} = \text{٤س} - \text{٢}$

٢) أوجد في كل حالة من الحالات الآتية قيَمة جـ، عندما تكون النقطة المُعطاة واقعة على المُستقيم:

أ $\text{ص} = \text{٣س} + \text{جـ}$	$(\text{١}، \text{٥})$	ب $\text{ص} = \text{٦س} + \text{جـ}$	$(\text{١}، \text{٢})$
ج $\text{ص} = {}^{-}\text{٢س} + \text{جـ}$	$({}^{-}\text{٣}، {}^{-}\text{٣})$	د $\text{ص} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}\text{س} + \text{جـ}$	$(\text{٤}، {}^{-}\text{٥})$
هـ $\text{ص} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} + \text{جـ}$	$({}^{-}\text{٢}، \text{٣})$	و $\text{ص} = \text{جـ} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}$	$({}^{-}\text{٤}، \text{٥})$
ز $\text{ص} = \text{جـ} + \text{٤س}$	$({}^{-}\text{١}، {}^{-}\text{٦})$	ح $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{س} + \text{جـ} = \text{ص}$	$(\text{٣}، \text{٤})$

٧-٢ القطعة المُستقيمة

٧-٢-أ إيجاد طول القطعة المُستقيمة

رُغم أن طول المُستقيم لا نهائي، فإننا نعتمد عادة جزء من المُستقيم. وأيّ جزء من المُستقيم يصل بين نقطتَين يُسمّى **قطعة مُستقيمة**.

إذا علمتَ إحداثيات طرفَي قطعة مُستقيمة، يمكنك استخدام نظرية فيثاغورث لاحتساب طولها.

لاحقًا

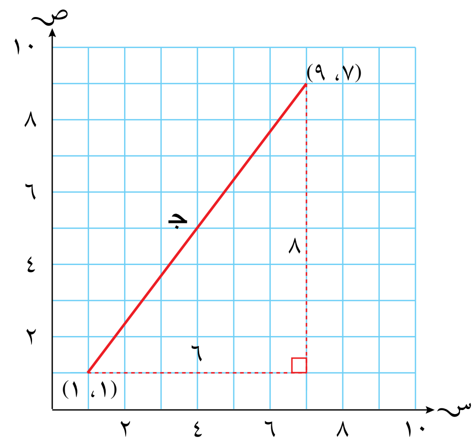
ستتمّ تغطية نظرية فيثاغورث بالتفصيل في الصف العاشر. ولكن تذكَّر الأمر الآتي في المُثلَّث القائم الزاوية: مُربَّع طول الوتر يُساوي مجموع مُربَّع طول الضلعَين الآخرَين. نكتب ذلك في صورة

أ^٢ + ب^٢ = جـ^٢

مثـــال ٩

أوجد المسافة بين النقطتين (١، ١)، (٧، ٩).

الحـــلّ:



جـ^٢ = ٨^٢ + ٦^٢	(نظرية فيثاغورث)
جـ^٢ = ٦٤ + ٣٦	عوِّض عن قيمة أ^٢، ب^٢
جـ^٢ = ١٠٠	تخلَّص من التربيع بأخذ الجذر التربيعيّ للطرفَين.
∴ جـ = $\sqrt{١٠٠}$	
جـ = ١٠ وحدات	

يُمكن إيجاد المسافة بين نقطتين دون استخدام التمثيل البياني.

مثــال ١٠

أوجد طول القطعة المُستقيمة أب، إذا علمت أن أ(٣، ٦)، ب (٧، ٣).

الحــلّ:

الفرق بين الإحداثيَّين السينيَّين للنقطتَين أ(٣، ٦)، ب(٧، ٣) يساوي ٤ والفرق بين الإحداثيين الصاديَّين للنقطتَين أ(٣، ٦)، ب(٧، ٣) يساوي ٣

استخدم هذَين الفرقَين في نظرية فيثاغورث:

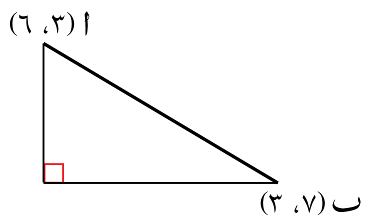
(أب)^٢ = (٤)^٢ + (٣)^٢

(أب)^٢ = ١٦ + ٩

(أب)^٢ = ٢٥

∴ أب = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات.

يمكن لرسم مُثلَّث (دون استخدام المستوى الإحداثي أو رسم دقيق) أن يساعد:



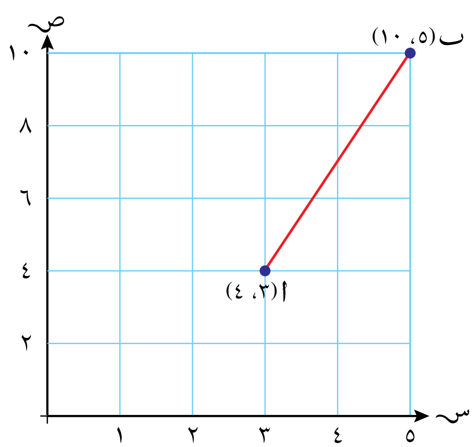
أ^٢ + ب^٢ = جـ^٢ (نظرية فيثاغورث)

عوِّض.

٧-٢-ب إيجاد احداثيات نقطة مُنتَصف القطعة المُستقيمة

يمكن إيجاد إحداثيات **نقطة المُنتَصف** للقطعة المُستقيمة (النقطة التي تقع في منتصف المسافة تمامًا بين طرفَيها).

اعتبر القطعة المُستقيمة التي إحداثيات طرفيها النقطتَين أ(٣، ٤)، ب (٥، ١٠).



إذا جمعت الإحداثيَّين السينيَّين، ثمّ قسمت المجموع على ٢، ستحصل على $\frac{(٣ + ٥)}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$

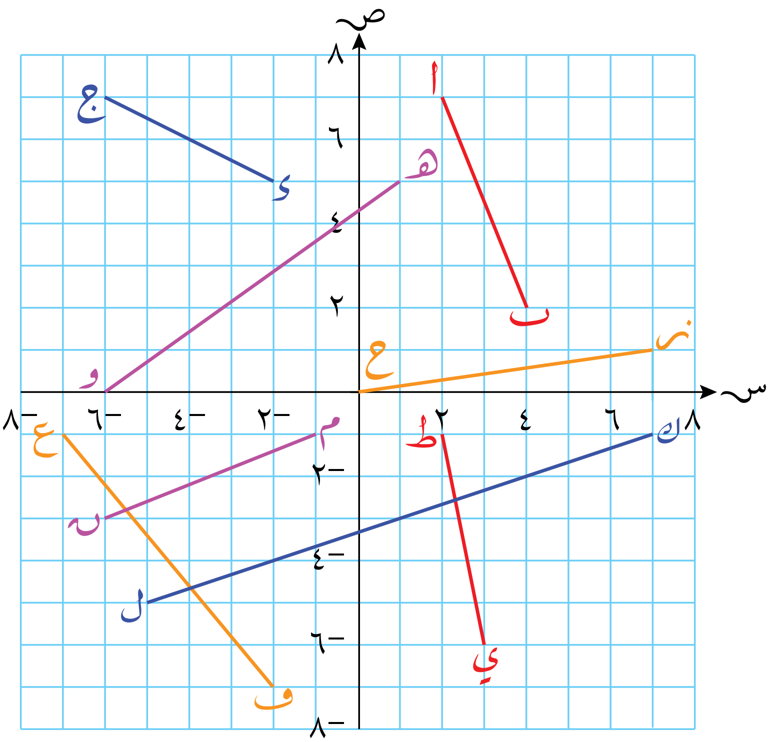
إذا جمعت الإحداثيَّين الصاديين، ثمّ قسمت المجموع على ٢، ستحصل على $\frac{(٤ + ١٠)}{٢} = \frac{١٤}{٢} = ٧$

هذا يُعطي نقطة جديدة إحداثيّاها (٤، ٧)، تقع في مُنتَصف المسافة بين النقطتين أ، ب تمامًا، وتُسمّى نقطة المُنتَصف.

إحداثيات نقطة المُنتَصف للقطعة المستقيمة أب، حيث أ(س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$) هي $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

تمارين ٧-٢

١) استخدم التمثيل البيانيّ التالي لإيجاد طول كلّ قطعة مُستقيمة، وإحداثيات نقطة مُنتصِفها:



٢) أوجد إحداثيات نقطة مُنتَصف القطعة المُستقيمة التي تصل بين كلّ زوج من النقاط التالية، وأوجد طول كل قطعة:

أ (٣، ٦)، (٩، ١٢)   ب (٤، ١٠)، (٢، ٦)   ج (٨، ٣)، (٤، ٧)

د (٥، ٨)، (٤، ١١)   هـ (٤، ٧)، (١، ٣)   و (١٢، ٣)، (١١، ٤)

ز (−١، ٢)، (٣، ٥)   ح (٤، −١)، (٥، ٥)   ط (−٢، −٤)، (−٣، ٧)

سابقًا

تحقق من أنك تتذكَّر كيف تتعامل مع جمع الأعداد السالبة.

٣) أوجد المسافة من نقطة الأصل إلى النقطة (⁻٣، ⁻٥).

٤) أيّ النقطتَين أ(٥، ٦) أم ب(٥، ٣) أقرب إلى النقطة ج(⁻٣، ٢)؟

٥) أيّ النقطتَين أ(٤، ٢) أم ب(⁻٣، ⁻٤) أبعد عن نقطة الأصل؟

٦) تُشكّل النقاط أ(٠، ٠)، ب(٤، ⁻٥)، ج(⁻٣، ⁻٣) رؤوس المثلث أب جـ. أوجد طول كلّ ضلع في المثلث.

٧) النقطة (٧، ٥) هي مُنتصف القطعة المُستقيمة التي تصل بين النقطتَين (١٠، س)، (٤، ٣). ما قيَمة س؟

٨) إحداثيَّات نقطة مُنتَصف القطعة المُستقيمة د هـ هي (⁻٤، ٣). فإذا كانت إحداثيَّات النقطة د (⁻٢، ٨)، فأوجد إحداثيَّات النقطة هـ.

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- تُبيّن مُعادلة المُستقيم العلاقة بين الإحداثيَّين السينيّ والصاديّ لجميع النقاط الواقعة على المُستقيم.
- مَيل المُستقيم يقيس مدى انحداره.
- الجزء المقطوع من محور الصادات، والجزء المقطوع من محور السينات، هما تقاطُعا المُستقيم مع المحورَين الصاديّ والسينيّ، على التوالي.
- قيَمة (م) في المُعادلة ص = م س + جـ هي قيَمة مَيل المُستقيم.
- قيَمة (جـ) في المُعادلة ص = م س + جـ هي قيَمة الجزء المقطوع من محور الصادات.
- يمكن أن تجد قيَمة الجزء المقطوع من محور السينات بالتعويض عن ص = ٠، وقيمتي م، جـ في المُعادلة ص = م س + جـ، وإيجاد قيمة س.
- يمكن أن تجد قيَمة الجزء المقطوع من محور الصادات بالتعويض عن س = ٠، وقيمة جـ في المُعادلة ص = م س + جـ، وإيجاد قيمة ص.
- المُستقيمان اللذان لهما المَيل نفسه مُتوازيان.
- ناتج ضرب مَيلي المُستقيمَين المُتعامِدَين يساوي $^-١$
- إحداثيَّات نقطة منتصف القطعة المُستقيمة هي $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$
- يمكن حساب طول القطعة المستقيمة باستخدام نظرية فيثاغورث.

يجب أن تكون قادرًا على:

- رسم المُستقيم إذا علمت مُعادلته، من خلال تكوين جدْوَل قيَم وتعيين النقاط على المُستوى الإحداثي.
- إيجاد المَيل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات بمعلومية مُعادلة المُستقيم.
- إيجاد مَيل المُستقيم من التمثيل البيانيّ للمستقيم.
- إيجاد مُعادلة المُستقيم بمعرفة مَيله والجزء المقطوع من محور الصادات.
- إيجاد مُعادلة المُستقيم الرأسيّ والمُستقيم الأفقيّ.
- إيجاد مَيل المُستقيم بمعرفة إحداثيَّات نقطتين عليه.
- إيجاد طول قطعة مُستقيمة وإحداثيات نقطة مُنتصفها.
- إيجاد معادلة المستقيم الموازي لمُستقيم مُعيَّن، والمارّ بنقطة معيَّنة.
- إيجاد مُعادلة المُستقيم المُتعامِد مع مُستقيم مُعيَّن، والمارّ بنقطة مُعيَّنة.

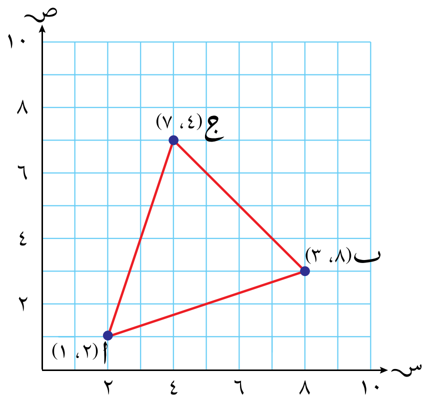
تمارين نهاية الوحدة

١) أوجد مَيل المُستقيم الذي يمر بالنقطتَين (٤، ١)، (٥، ١).

٢) أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب، حيث أ(⁻١، ⁻٧)، ب(٥، ٩).

٣) أوجد طول القطعة المستقيمة ج د، حيث ج(١، ⁻٢)، د(١٦، ٦).

٤) باستخدام المثلث ا ب ج في التمثيل البياني المُقابِل:



أ) أوجد إحداثيات نقطة منتصف كل ضلع من أضلاع المثلث ا ب ج.

ب) أوجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث ا ب ج.

ج) ما نوع المثلث ا ب ج؟

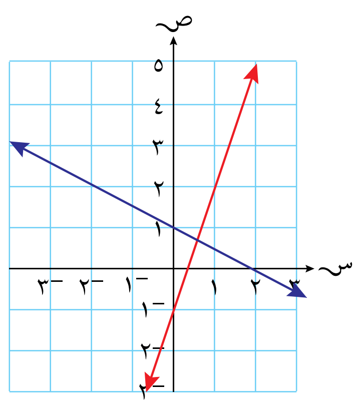
٥) ارسم مستوى إحداثيّات، حيث تقع س بين ⁻٥ و ٥

أ) ارسم المستقيم الذي مُعادلته ص = ٢س − ٤ على المستوى الإحداثي.

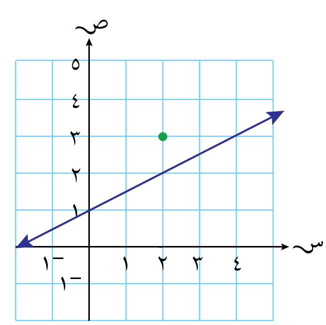
ب) ارسم المستقيم الذي مُعادلته ص = ٥ − س على نفس المستوى الإحداثي.

ج) ما إحداثيّات نقطة تقاطع المُستقيمَين؟

٦) أوجد معادلتَي المُستقيمَين المعروضَين في التمثيل البياني المقابل.



٧) في التمثيل البياني التالي، مُستقيم مُعادلته ص = $\frac{١}{٢}$ س + ١ ونقطة إحداثياتها (٢، ٣).



أ) أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم المعطى والذي يمر بالنقطة المعطاة.

ب) أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم المعطى والذي يمر بالنقطة المعطاة

٨) أوجد إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم الذي معادلته ص = ⁻٢س + ٩ مع المحورين السيني والصادي.

الوحدة الثامنة: التماثُل والتحويلات الهندسية

بوابة وأقواس مدخل جامع السلطان قابوس الأكبر (طيّب الله ثراه) في مسقط.

المُفردات

- التماثُل Symmetry
- التماثُل حول محور Line of symmetry
- التماثُل الدورانيّ Rotational symmetry
- متماثل Symmetrical
- رتبة التماثُل الدورانيّ Order of rotational symmetry
- مركز الدوران Centre of rotation
- التماثُل حول مُستوى Plane symmetry
- محور التماثُل Axis of symmetry
- التحويل الهندسيّ Transformation
- الانعكاس Reflection
- الدوران Rotation
- الانسحاب Translation
- التكبير Enlargement
- الصورة Image
- المُتَّجِه Vector

تتَّصف البوابة والأقواس المُبيَّنة في الصورة أعلاه بأنّها مُتماثِلة. ويُشكِّل نصف البوابة والأقواس صورة مرآة للنصف الآخر. ويُسمّى الخطّ المُستقيم الذي يقسم البناء إلى نصفَين خطّ التماثُل أو محور التماثُل.

تُسمّى الأشكال التي يمكن تقسيمها إلى قسمَيْن مُتطابقَين (أو أقسام مُتطابقة) في الشكل والقياس، أشكالاً مُتماثلة. ونجد التماثُل في الأشكال المُستوية (الثنائيّة الأبعاد) والمُجسَّمات (ثلاثية الأبعاد). ستتعلَّم في هذه الوحدة أكثر عن التماثُل حول محور، والتماثُل الدورانيّ، في الأشكال ثنائية الأبعاد والأشكال ثلاثية الأبعاد.

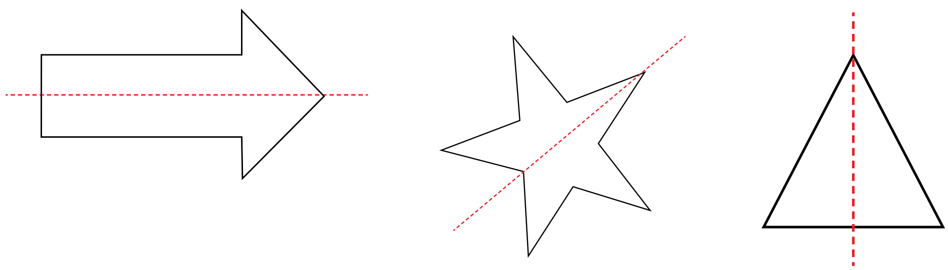
سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تُحدِّد محور التماثُل لأشكال هندسيّة ثنائية الأبعاد.
- تجد رتبة التماثُل الدورانيّ لأشكال هندسيّة ثنائية الأبعاد.
- تميّز التماثُل للمُثلَّثات والأشكال الرباعية والدوائر.
- تُميّز خصائص التماثُل للمنشور والهرم.
- تُنفّذ انعكاسًا ودورانًا وانسحابًا وتكبيرًا لأشكال مُستوية.
- تميّز التحويلات الهندسيّة وتصفها.
- تستخدم المُتَّجهات لوصف الانسحابات.
- تميّز تركيب التحويلات الهندسيّة وتستخدمها.
- تصف التحويلات الهندسيّة بدقّة باستخدام الإحداثيات.

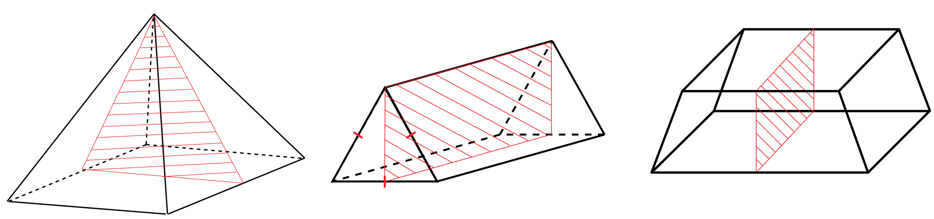
فائدة

التماثُل

تكون الأشكال الثُّنائية الأبعاد مُتماثلة، إذا أمكن تقسيمها بخطّ مُستقيم إلى نصفَيْن مُتطابقَين.



تكون الأشكال الثلاثية الأبعاد مُتماثلة، إذا أمكن تقسيمها بسطح مُستوٍ إلى قسمَين مُتطابقَين.



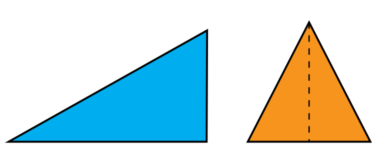
٨-١ التماثُل في الأشكال ثُنائيَّة الأبعاد

يوجد نوعان من التماثُل في الأشكال ثُنائيَّة الأبعاد (المُستوية).

- التماثُل حول محور
- التماثُل الدوراني

٨-١-أ التماثُل حول محور

إذا أمكن طيّ شكل ما ليتطابق أحد النصفَين تمامًا مع النصف الآخر، يكون الشكل مُتماثلاً حول محور.



المُثلَّث (أ)　　المُثلَّث (ب)

المُثلَّث (أ) مُتماثل حوّل الخط المُستقيم المُنقَّط (خط التماثُل)، الذي يقسم المُثلَّث (أ) إلى قسمَين مُتطابقَين.

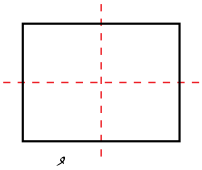
رابط

التماثُل مهم جدًّا لفهم تركيب البلّورات في الكيمياء.

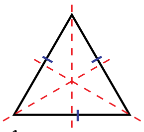
المُثلَّث (ب) غير مُتماثِل، والسبب أنك لا تستطيع رسم خط مُستقيم، يقسم المُثلَّث إلى نصفَين مُتطابقَين.

إذا وضعت مرآة على الخطّ المُستقيم الذي يقسّم المثلث (أ)، سيظهر المثلَّث في المرآة كاملاً. يُسمّى الخط المُستقيم بمحْوَر التماثُل.

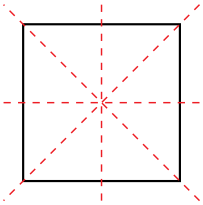
ويمكن أن تتضمّن الأشكال التالية أكثر من محور تماثُل:



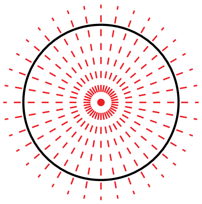
محورا تماثُل



٣ محاور تماثُل



٤ محاور تماثُل

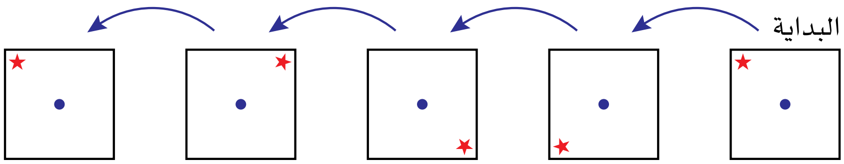


عدد لا نهائي من محاور التماثُل

٨-١-ب التماثُل الدورانيّ

إذا نفّذت دورانًا لشكل ما بزاوية قياسها ٣٦٠°، مع المُحافظَة على نقطة مركزه في موقع ثابت، وتطابق مع نفسه تمامًا في عدّة مواقع خلال الدوران، فإنَّ للشكل تماثلاً دورانيًّا. يُسمّى عدد مرّات تطابُق الشكل مع نفسه خلال دورة كاملة **رُتبة التماثُل الدورانيّ**.

يعرض المُخطَّط أدناه كيف ينطبق المُربَّع مع نفسه أربع مرّات خلال دورة قياسها ٣٦٠°. تُسمّى النقطة عند مركز المُربَّع **مركز الدوران**. وهي النقطة التي يدور حولها المُربَّع. تُبيّن النجمة موقع إحدى زوايا المُربَّع عندما يدور حول مركز الدوران.



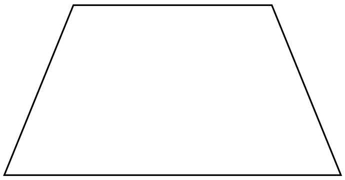
يتطابق المُربَّع مع نفسه تمامًا أربع مرّات في الدورة الكاملة: عندما يدور ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° فتكون رتبة التماثُل الدورانيّ لديه ٤؛ تذكّر أن على الشكل أن يدور ٣٦٠° ليعود إلى موقعه الأصليّ.

إذا دوَّرت الشكل ٣٦٠° حتى يعود لينطبق على نفسه لأول مرة، تكون رتبة التماثُل الدورانيّ في هذه الحالة ١

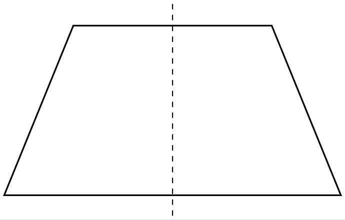
مثـــال ١

أوجد عدد محاور التماثُل، ورتبة التماثل الدوراني،
في شبه المنحرف المُتطابِق الضلعَين المُقابِل.

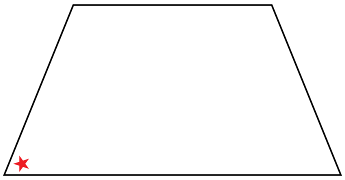
الحـــلّ:



ابدأ برسم تقريبي للشكل.



يمكن طي الشكل ليتطابق أحد النصفَين تمامًا مع النصف الآخر حول الخط المنقط.
إذن، يوجد للشكل محور تماثُل واحد.



ارسم نجمة في إحدى زوايا الشكل.
لا ينطبق الشكل مع نفسه خلال دورة كاملة إلا مرة واحدة.

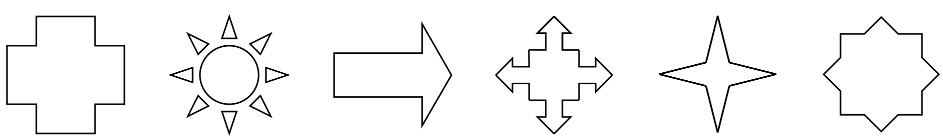
يوجد في شبه المنحرف المتطابق الضلعين محور تماثُل واحد، ورتبة التماثل الدوراني في شبه المنحرف المتطابق الضلعين تساوي ١

تمارين ٨-١

١) ارسم المُضلّعات التالية، واستكشف عدد محاور التماثُل، ورتبة التماثُل الدوراني لكلّ شكل:

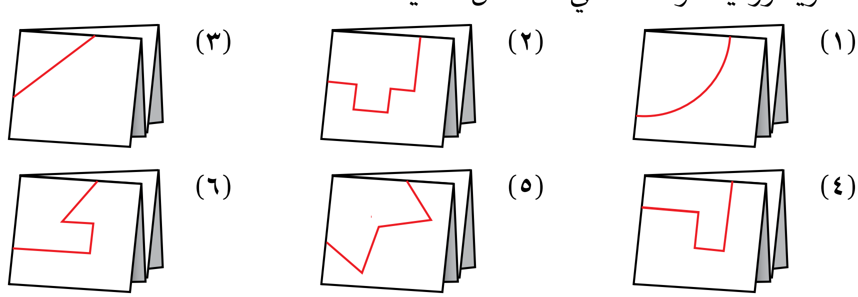
الشكل	عدد محاور التماثُل	رتبة التماثُل الدورانيّ
المُربَّع		
المُستطيل		
المُثلَّث المُتطابق الأضلاع		
المُثلَّث المُتطابق الضلعَين		
المُثلَّث المختلف الأضلاع		
الطائرة الورقية (الدالتون)		
مُتوازي الأضلاع		
المُعيّن		
الخُماسي المُنتظِم		
السُّداسي المُنتظِم		
الثُّماني المُنتظِم		

٢) انسخ الأشكال التالية، وارسم جميع محاور التماثُل المُمكنة في كلّ شكل:



طبِّق مهاراتك

٣) صنع أطفال مدرسة مجموعة من الأشكال، وذلك بقصّ تصميم رُسم عند زاوية مطويّة ورقية موضَّحة في الأشكال التالية:



فكّر جيدًا في كيفية طيّ الورقة. يُبيّن المُخطَّط أن الورقة قد طُويت إلى أربعة أقسام.

أ ارسم الشكل الذي سينتج في كلّ حالة.

ب بيِّن محاور التماثُل لكلّ شكل باستخدام خُطوط مستقيمة مُنقَّطة.

٤) ارسم شعارات ثلاث سيّارات مختلفة، ثم حدِّد محاور التماثُل على كلّ شعار، واكتب رُتبة التماثُل الدورانيّ لكلّ منها.

٨-٢ التماثُل في الأشكال ثُلاثيَّة الأبعاد

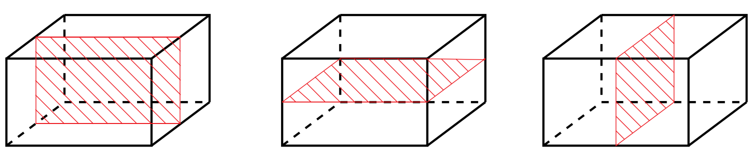
يوجد نوعان من التماثُل في الأشكال ثُلاثيَّة الأبعاد.

- **التماثُل حول مستوى**
- **التماثُل الدوراني**

٨-٢-أ التماثُل حول مستوى

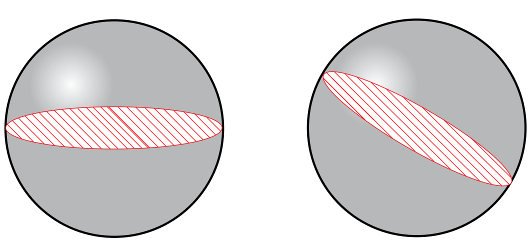
المُستوى هو سطح مُنبسِط ثُنائي الأبعاد، يمتد في جميع الاتِّجاهات. إذا استطعت تقسيم المُجسَّم إلى نصفَين، بحيث يكون كلّ منهما صورة مرآة للآخر، يكون للمُجسّم مُستوى تماثُل.

فيما يلي متوازي مستطيلات تم تقسيمه بثلاث طُرق مُختلفة لتشكيل نصفَين مُتطابقين، وكل منهما صورة مرآة للآخر. تُمثِّل المنطقة المُظلَّلة في كلّ مجسَّم مُستوى التماثُل (حيث يبيّن أين يمكن أن تقسمه).



يوجد ثلاثة مُستويات تماثُل في متوازي المستطيلات.

كما يوضح الشكل التالي كيف يمكن رسم مستوى التماثُل في الكرة، لتقسيمها إلى نصفَي كُرة مُتطابقَين.

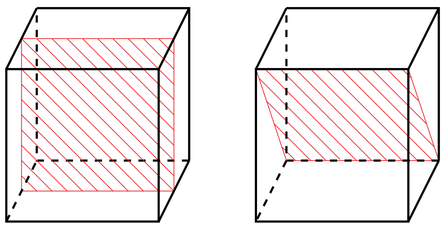


يوجد في الكرة عدد لانهائيّ من مُستويات التماثُل، وتتماثل الكُرة حول أيّ مُستوى يمرّ بمركزها.

مُستوى التماثُل في الشكل ثُلاثيّ الأبعاد يُشبه محور التماثُل في الشكل الثنائيّ الأبعاد.

تمارين ٨-٢-أ

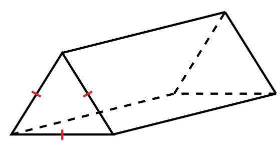
١) المُخطَّطان التاليان يوضِّحان مُستويا تماثُل في مُكعَّب ما:



إذا علمت أن للمُكعَّب تسعة مستويات تماثُل، ارسم باقي المُخطَّطات لتُبيّن مُستويات التماثُل السبعة الأخرى.

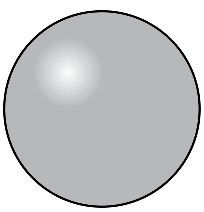
٢) اكتب عدد مستويات التماثُل في كُلّ من المُجسَّمات التالية:

أ منشور قاعدته مُثلّث مُتطابِق الأضلاع

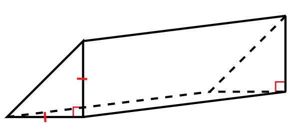


ب أسطوانة

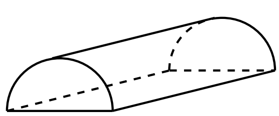
ج كرة



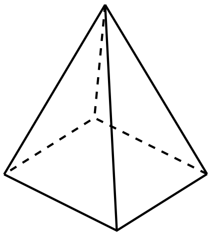
د منشور قاعدته مثلَّث مُتطابِق الضلعَين وقائم الزاوية



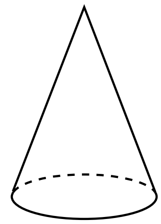
هـ نصف أسطوانة



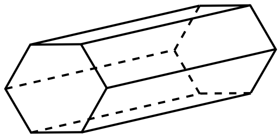
و هرم مُنتظم مُستطيل القاعدة



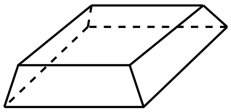
ز مخروط



ح منشور قاعدته شكل سُداسي مُنتظم



ط منشور قاعدته شبه منحرف متطابق الضلعين

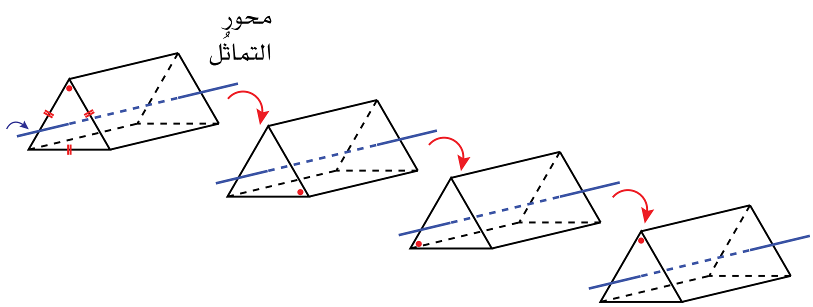


٣) في الجُزئية د من التمرين ٢، وضِّح كيف تختلف الإجابة لو كان المقطع العرضي للمنشور مثلثًا مختلف الأضلاع.

٨-٢-ب التماثُل الدورانيّ

تخيّل وجود عصا في مُجسَّم. تُشكِّل العصا محورًا للمُجسَّم ليدور حوله. إذا أدرتَ المُجسَّم حول المحور وظهر هو نفسه عند نقاط مختلفة خلال دورانه، يكون للمُجسَّم تماثُل دورانيّ. وتُمثِّل العصا **محور التماثُل**.

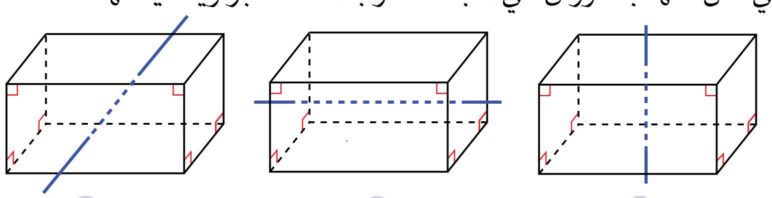
للمنشور الثلاثي رتبة تماثُل دورانيّ قدرها ٣ حول محور التماثُل المُوضَّح.



يكون المنشور الثلاثي مُطابقًا لوضعه الأصلي عند ثلاثة مواقع خلال الدوران: عندما يدور حول محور التماثل بزاوية مقدارها ١٢٠°، ٢٤٠°، ٣٦٠°. تُبيّن النقطة الحمراء موقع أحد رؤوس المنشور خلال الدوران.

تمارين ٨-٢-ب

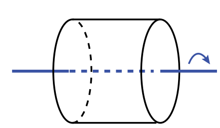
١) فيما يلي ثلاثة محاور تماثُل ممكنة لمتوازي المستطيلات. حدِّد رُتبة التماثُل الدورانيّ لكلّ منها بالدوران في اتّجاه عقارب الساعة بزاوية قياسها ٣٦٠°.



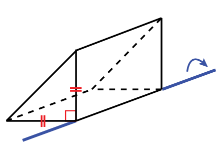
أ ب ج

٢) حدِّد رُتبة التماثُل الدورانيّ لكلّ مُجسّم عند دورانه حول المحور الموضَّح في كل مما يلي:

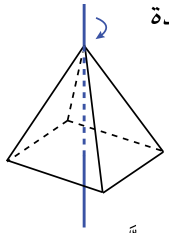
أ أسطوانة



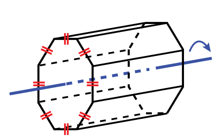
ب منشور قاعدته مُثلّث مُتطابِق الضلعَين وقائم الزاوية



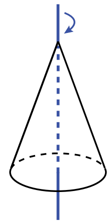
ج هرم مُنتظم مُستطيل القاعدة



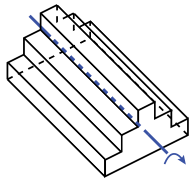
د منشور قاعدته شكل ثُماني مُنتظم



هـ مخروط



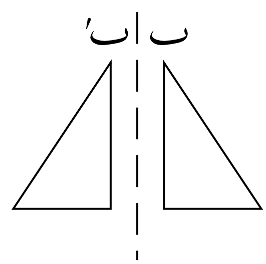
و جسم مُركَّب من ثلاثة مُتوازيات مستطيلات



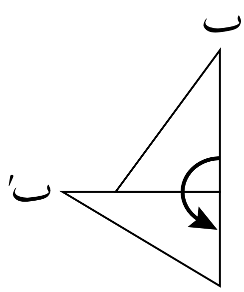
٨-٣ التحويلات الهندسية

التحويل الهندسي يعني التغيُّر في موقع أو أبعاد الشكل (أو النقطة). وهناك أربعة أنواع من التحويلات الهندسيّة هي:

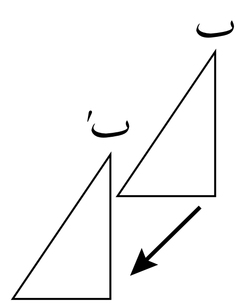
- **الانعكاس**
- **الدوران**
- **الانسحاب**
- **التكبير**



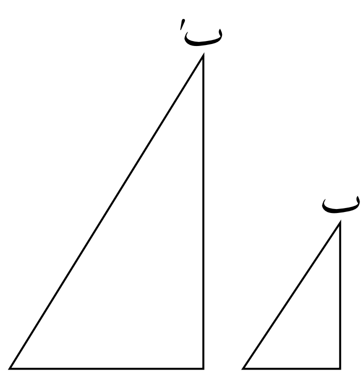
انعكاس



دوران



انسحاب



تكبير

تنتج عن التحويل الهندسيّ **صورة** للشكل الأصلي في موقع جديد، أو بقياسات مختلفة. تُسمّى النقطة ب على الشكل الأصلي، وتُسمّى النقطة ب′ على صورته.

يُغيِّر الانعكاس والانسحاب والدوران من موقع الشكل الأصلي، ولكنها لا تُغيّر في أبعاده. لذا، ستكون صورة الشكل مُطابِقة لشكله الأصلي.

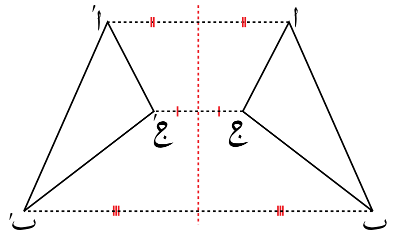
ولكن التكبير يُغيِّر من أبعاد الشكل الأصلي، أي أن أطوال الأضلاع المُتناظِرة في الصورة تتناسب مع أطوالها في الشكل الأصليّ، وفي هذه الحالة ينتج من التكبير تشابه الشكل الأصلي مع صورته.

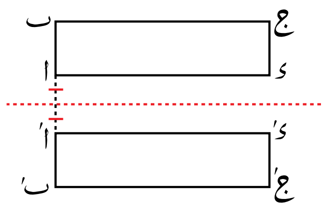
٨-٣-أ الانعكاس

الانعكاس هو صورة مرآة للشكل، بحيث تبعد النقاط الواقعة على الشكل الأصلي وصورها المسافة نفسها عن محور الانعكاس، وتُقاس هذه المسافة دائمًا بشكل عموديّ مع محور الانعكاس. (بمعنى آخر، يكون محور الانعكاس عمودًا مُنصِّفًا للمسافة بين النقطة وصورتها).

ستُلاحظ ذلك في الشكلَين التاليَين:

لاحظ أن محور الانعكاس يُرسم مُتقطّعًا.

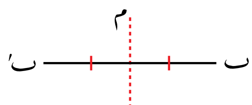




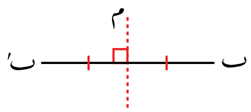
خصائص الانعكاس

تحتاج إلى التعامُل مع الانعكاس في محاور أُفقية ومحاور رأسية ومحاور مائلة.

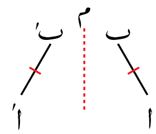
- تبعد النقطة وصورتها المسافة نفسها عن محور الانعكاس م.



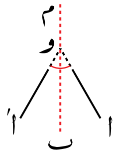
- ينصّف محور الانعكاس القطعة المُستقيمة الواصلة بين النقطة وصورتها، ويكون عموديًّا عليها.



- طول القطعة المستقيمة وطول صورتها مُتساويان، أي أ ب = أ′ب′.

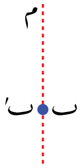


- يكون مَيل القطعة المُستقيمة عن محور الانعكاس مُساويًا لمَيل صورتها.
  ق(أ وَ ب) = ق(أ′ وَ ب)

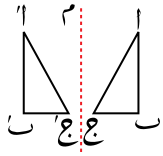


- النقاط الواقعة على محور الانعكاس وصورها هي نفسها، أيّ إن تلك النقاط ثابتة.

ثابت تعني أن موقع وبُعد النقطة أو الخطّ المستقيم لا يتغيّران.

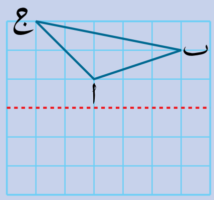


- الشكل الأصلي يتطابق مع صورته.

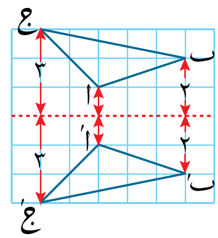


مثــال ٢

أوجد صورة المثلث ا ب ع بالانعكاس
حول محور الانعكاس المُنقَّط.



الحــلّ:



في المُخطَّط، تبعد النقطة ا وحدة واحدة عن محور الانعكاس، فيكون بُعد صورتها ا′ أيضًا وحدة واحدة عن محور الانعكاس. تبعد النقطة ب وحدتَين عن محور الانعكاس، فيكون بُعد صورتها ب′ أيضًا وحدتَين عن محور الانعكاس. ويصحّ ذلك في النقطة ع وصورتها ع′.

صورة الخطّ المستقيم في الانعكاس هي خطّ مستقيم. هذا يعني أنك لتجد صورة المثلث ا ب ع بالانعكاس، عليك أن تصل بين ا′ و ب′؛ وبين ب′، ع′، وبين ع′ و ا′.

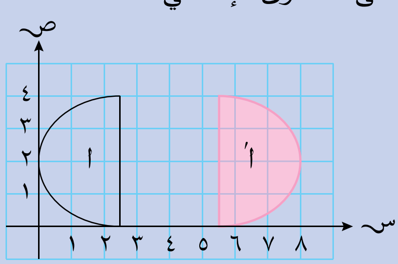
عندما يكون محور الانعكاس واحدًا من خطوط الشبكة الإحداثيّة، يكون من السهل إيجاد صورة النقطة بالانعكاس. ببساطة، أوجد عدد المُربَّعات من النقطة إلى محور الانعكاس، حيث تبعد صورة النقطة المسافة نفسها في الجهة المُقابلة من محور الانعكاس.

مثــال ٣

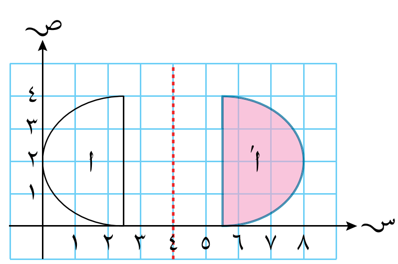
يعرض الرسم المُقابِل شكلاً وصورته بالانعكاس على المُستوى الإحداثي:

أ ارسم محور الانعكاس.

ب ما مُعادلة محور الانعكاس؟



الحــلّ:



أ يجب أن يبعد محور الانعكاس المسافة نفسها عن نقاط الشكل (ا) والنقاط المُناظِرة لها في الشكل (ا′).

ب محور الانعكاس موازٍ للمحور الصادي. قيمة الإحداثي السينيّ لأي نقطة عليه تساوي ٤، لذلك تكون مُعادلة الخطّ المستقيم (محور الانعكاس) س = ٤

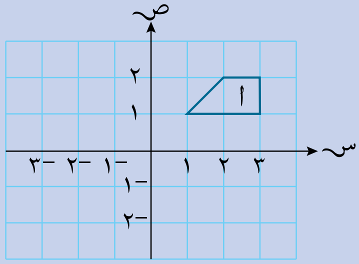
محور الانعكاس هو العمود المُنصِّف للقطعة المُستقيمة الواصلة بين النقطة وصورتها.

مثـــال ٤

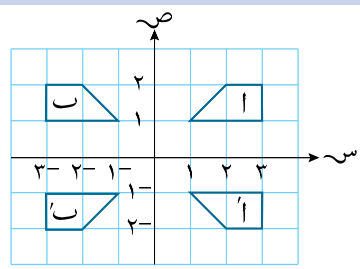
الشكل (ا) في المُستوى الإحداثي هو الشكل الأصلي:

أ ارسم صورة الشكل (ا) بالانعكاس حول المحور الصادي. سمّ الصورة (ب).

ب ارسم صورة الشكل (ا) والشكل (ب) بالانعكاس حول المحور السيني. سمّ الصورتين (اَ)، (بَ) بالترتيب.



الحـــلّ:

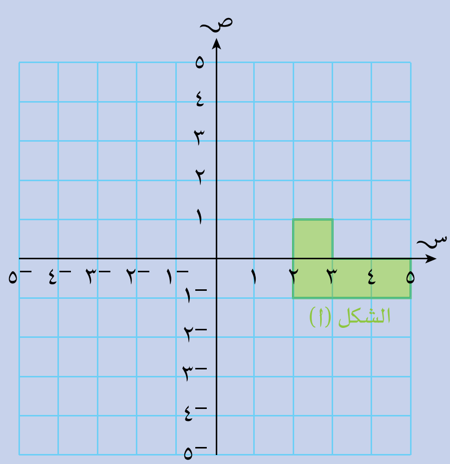


أ المحور الصادي (س = ٠) هو محور الانعكاس.

ب المحور السيني (ص = ٠) هو محور الانعكاس.

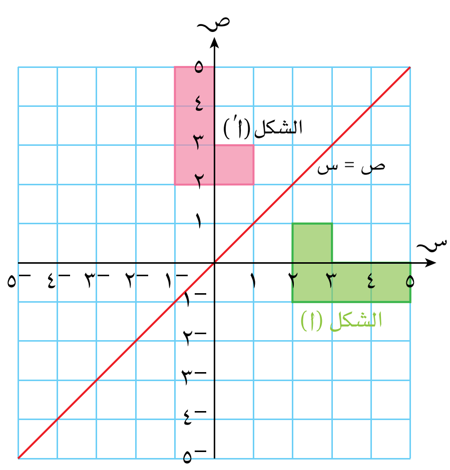
مثـــال ٥

أوجد صورة الشكل (ا) بالانعكاس حول الخط المُستقيم ص = س



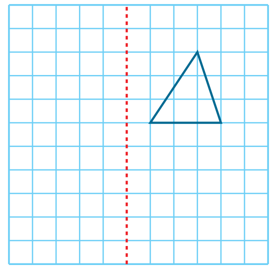
الحـــلّ:

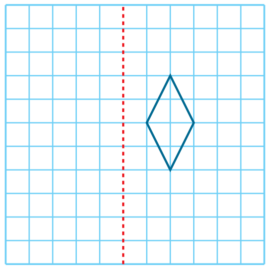
ارسم الخط المُستقيم ص = س
طبِّق القوانين التي تعرفها عن الانعكاس لترسم الصورة (اَ).

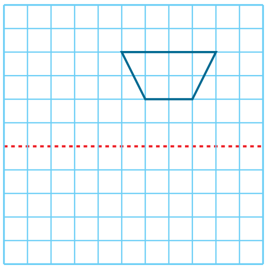


تمارين ٨-٣-أ

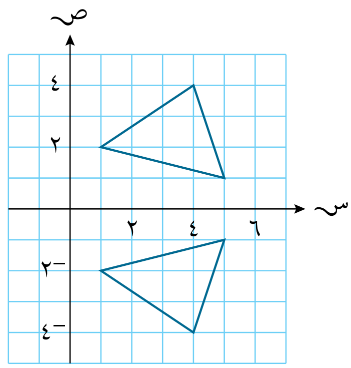
١) انسخ الأشكال التالية على ورقة مُربَّعات. ثم ارسم صورة كلّ شكل بالانعكاس حول المحور المرسوم:

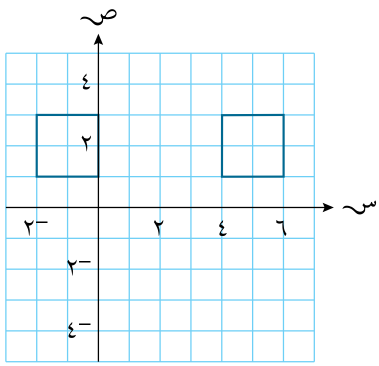
أ 

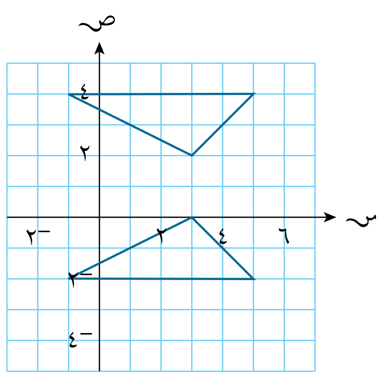
ب 

ج 

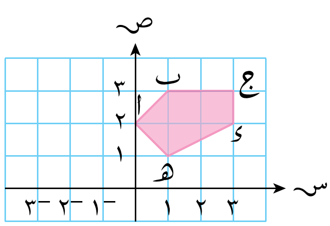
٢) ارسم محور الانعكاس في كل شكل فيما يلي ثم اكتب معادلته:

أ 

ب 

ج 

٣) انسخ الشكل المُقابِل على ورقة مُربَّعات:

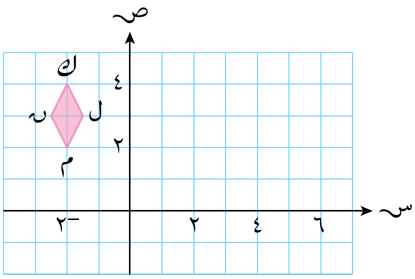


أ أوجد صورة المضلع ا ب ج ء هـ بالانعكاس حول المحور الصادي.

ب اكتب إحداثيات النقطة ب′، صورة النقطة ب بعد الانعكاس.

ج أيّ النقاط على الشكل ا ب ج ء هـ ثابتة؟ لماذا؟

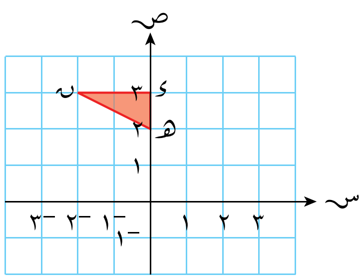
٤) انسخ الشكل المُقابِل على ورقة مُربَّعات ثم:



أ) أوجد صورة الشكل بالانعكاس حول الخطّ المُستقيم س = ١؛ سمّ الصورة ك′ل′م′ن′.

ب) أوجد صورة الشكل ك′ل′م′ن′ بالانعكاس حول الخط المُستقيم ص = ٢؛ سمّ الصورة ك″ل″م″ن″.

٥) انسخ الشكل المقابل على ورقة مُربَّعات ثم:

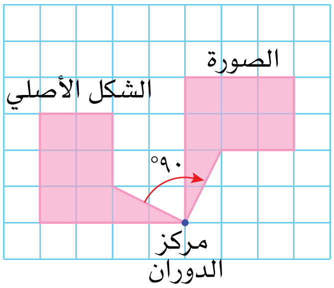


أ) ارسم صورة المثلث ن د هـ بعد انعكاسه حول المحور الصادي وسمّه ن′د′هـ′.

ب) حدِّد إحداثيَّي النقطة ن قبل الانعكاس وبعده.

ج) ارسم صورة المثلث ن د هـ بالانعكاس حول الخطّ المستقيم ص = ١؛ سمّ الصورة ن″د″هـ″.

٨-٣-ب الدوران



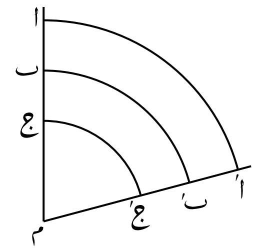
الدوران هو تحويل هندسي يحدث عندما يدور الشكل الأصلي حول نقطة ثابتة. يمكن أن يكون الدوران مع اتِّجاه عقارب الساعة، أو عكس اتِّجاه عقارب الساعة.
تُسمّى النقطة الثابتة مركز الدوران والزاوية التي يدورها الشكل زاوية الدوران.

تمَّ في الشكل المُقابل دوران الشكل الأصلي بزاوية قياسها ٩٠° مع اتِّجاه عقارب الساعة، حول مركز الدوران (أحد رؤوس الشكل).

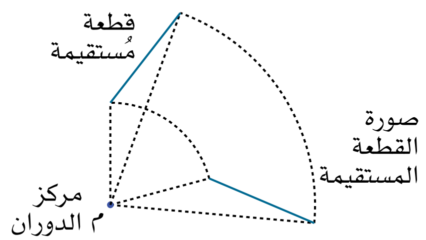
خصائص الدوران

- يُسمّى الدوران بزاوية قياسها ١٨٠° نصف دورة، وبزاوية قياسها ٩٠° ربع دورة.
- يكون موجبًا عندما يكون اتِّجاهه عكس اتِّجاه عقارب الساعة، ويكون سالبًا عندما يكون اتِّجاهه مع اتِّجاه عقارب الساعة.

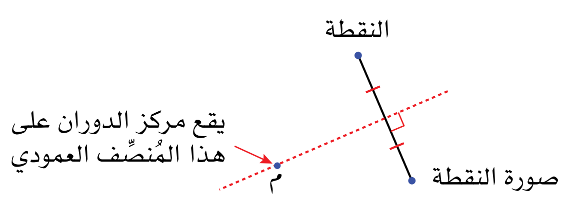
- تبعد النقطة وصورتها مسافة ثابتة عن مركز الدوران.
- تتحرَّك كلّ نقطة من نقاط الشكل الأصلي على قوس دائرة مركزها هو مركز الدوران، وجميع الدوائر متَّحدة في المركز.



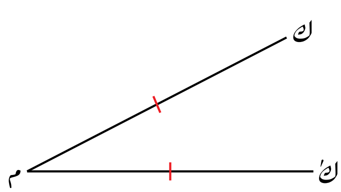
- يبقى مركز الدوران وحده ثابتًا لا يتغيَّر.
- في الدوران يتطابق الشكل مع صورته:



- يمرّ العمود المنصّف للقطعة المُستقيمة الواصلة بين نقطة وصورتها في مركز الدوران:



- في الدوران، يكون للقطعة المُستقيمة وصورتها الطول نفسه.



مُلخَّص

لكي تصف دورانًا، عليك أن تُحدِّد:

- مركز الدوران.
- قياس زاوية الدوران (٩٠° أو ١٨٠° أو ٢٧٠°).
- اتِّجاه الدوران (مع اتِّجاه عقارب الساعة، أو عكس اتِّجاه عقارب الساعة).

مُساعَدة

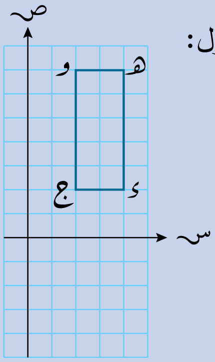
يكون مركز الدوران عادة هو نقطة الأصل (٠، ٠)، أو أحد رؤوس الشكل، أو نقطة مُنتَصف ضلع في الشكل الأصلي.
ويكون قياس زاوية الدوران من مضاعفات الـ ٩٠°.

مثـــال ٦

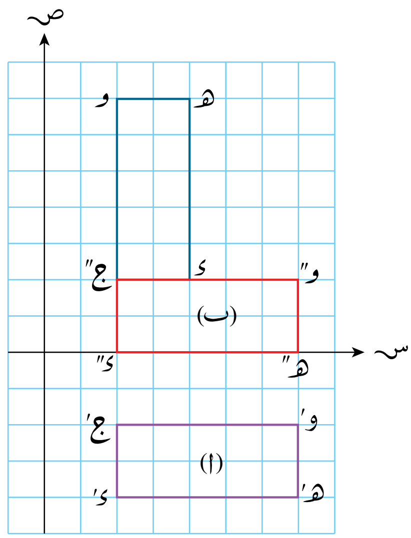
نفّذ دورانًا للشكل المُقابل بزاوية قياسها ٩٠° مع اتّجاه عقارب الساعة حول:

أ نقطة الأصل (سمّ الصورة ج′ ى′ هـ′ و′)

ب النقطة ج (سمّ الصورة ج″ ى″ هـ″ و″)



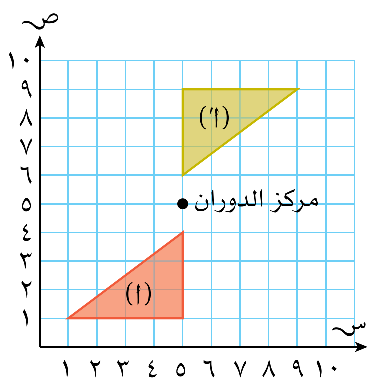
الحـــلّ:



مثـــال ٧

ارسم المثلث (أ) الذي إحداثيات رؤوسه (١، ١)، (٥، ١)، (٥، ٤). ثم ارسم صورته بعد دورانه حول النقطة (٥، ٥) بزاوية قياسها ١٨٠°

الحـــلّ:



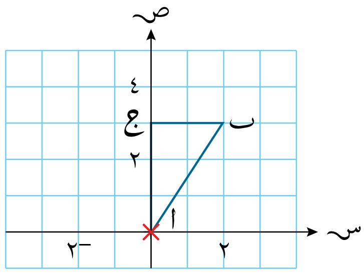
حدِّد النقاط على المستوى الإحداثي، ثم صل بينها لترسُم المُثلَّث (أ).

عيّن مركز الدوران.

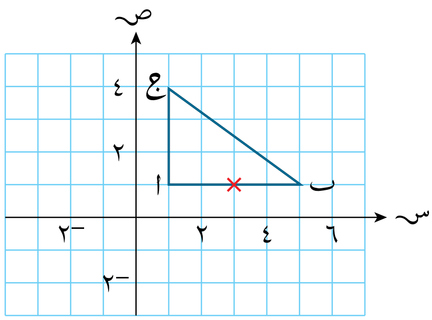
ارسم صورة الشكل وسمّها (أ′).

تمارين ٨-٣-ب

١) ارسم صورة المُثلَّث ا ب ج باستخدام دوران سالب مركزه (٠، ٠) وقياس زاويته ٩٠°.

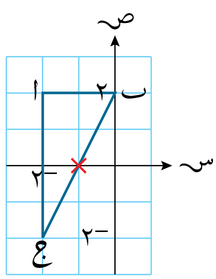


٢) ارسم صورة المُثلَّث ا ب ج باستخدام دوران مركزه (٣ ، ١)، وقياس زاويته ١٨٠°

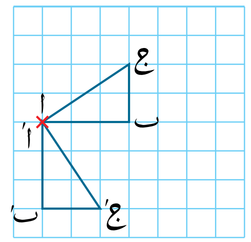


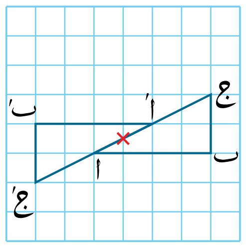
عندما تكون زاوية الدوران ١٨٠ درجة، فإن الدوران مع اتّجاه عقارب الساعة أو عكس اتّجاه عقارب الساعة، يعطي النتيجة ذاتها. لذا لا يتم ذكر الاتّجاه في هذه الحالة.

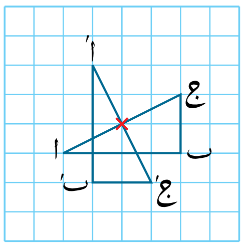
٣) في الشكل المجاور:
ارسم صورة المُثلَّث باستخدام دوران زاويته ١٨٠°، ومركزه (١−، ٠).



٤) في كلّ شكل فيما يلي، صِف الدوران الذي يُحوِّل المُثلَّث ا ب ج إلى المُثلَّث ا′ب′ ج′، وصفًا دقيقًا، بتحديد اتجاه الدوران وزاويته، علمًا بأن مركز الدوران هو الإشارة ×

أ


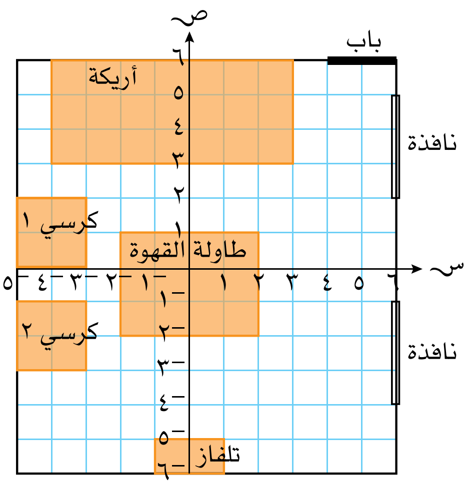
ب


ج


طبّق مهاراتك

٥) يُريد نايف إعادة ترتيب قطع أثاث غرفة المعيشة، المُوضَّحة في المُخطَّط المقابل.

هل يمكنه تدوير جميع قطع الأثاث حول النقطة (٠، ٠) بالوصف المعطى أدناه، وتبقى مُتناسبة مع الغرفة؟ وضّح خطوات عملك باستخدام الرسم.



أ ٩٠° مع اتِّجاه عقارب الساعة.

ب ٩٠° عكس اتِّجاه عقارب الساعة.

ج ١٨٠° مع اتِّجاه عقارب الساعة.

٨-٣-ج الانسحاب

الانسحاب هو حركة الشكل الأصلي مسافة مُحدَّدة، وباتِّجاه مُحدَّد، على طول خطّ مستقيم. ويُشار إلى الحركة بإشارات موجبة أو سالبة بحسب اتِّجاه الحركة، تماشيًا مع محورَي المُستوى الإحداثي. مثلاً، تكون الحركة إلى اليسار أو إلى الأسفل سالبة، وتكون الحركة إلى اليمين أو إلى الأعلى موجبة.

ويتم وصف الانسحاب باستخدام **مُتَّجه** $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$. وهذا يعني حركة مقدارها س وحدة باتِّجاه المحور السيني (يميناً أو يسارًا)، وحركة مقدارها ص وحدة باتِّجاه المحور الصادي (أعلى أو أسفل).

فالانسحاب $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٣ \end{pmatrix}$ يعني أن الشكل الأصلي قد تحرَّك وحدتَين إلى اليمين، وثلاث وحدات إلى الأسفل.

في المُخطَّط الآتي، أجري انسحاب للمُثلَّث (م) إلى خمسة مواقع. ويمكننا وصف كلّ موقع منها كالتالي:

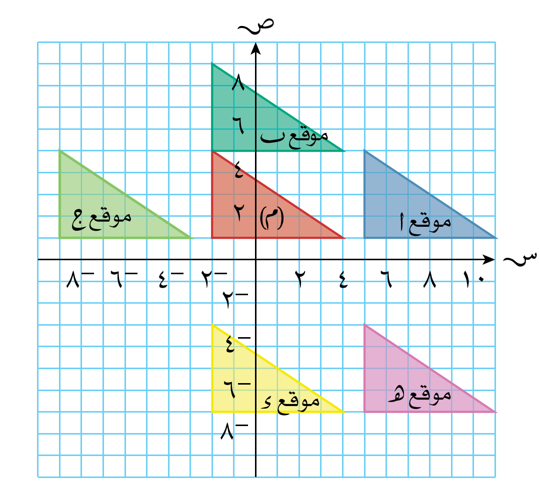
ا $\begin{pmatrix} ٧ \\ ٠ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} -٧ \\ ٠ \end{pmatrix}$

ء $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٨ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٧ \\ -٨ \end{pmatrix}$



لاحقًا

ستتعامل مع المُتَّجهات بتفصيل أكثر لاحقًا.

كن حذرًا عند كتابة المُتَّجه الرأسي، لأنَّه لا يتضمَّن شرطة قسمة. لذلك يجب ألا تشبه كتابته كتابة الكسر. لذا اكتب $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٨ \end{pmatrix}$ وليس $\left(\frac{٣}{٨}\right)$.

خصائص الانسحاب

- يتحرّك الشكل الأصلي المسافة نفسها، وفي الاتِّجاه نفسه.
- تتحرَّك كلّ نقطة في الشكل الأصلي المسافة نفسها، وفي الاتِّجاه نفسه.
- لتحديد الانسحاب، يجب معرفة مسافة الانسحاب واتجاهه معًا، في صورة مُتَّجه $\binom{س}{ص}$.
- يمكن تسمية انسحاب الشكل الأصلي، من خلال تحديد الانسحاب الذي تمّ تنفيذه على أي نقطة من نقاطه.
- لا يحتوي الشكل الأصلي على أي جزء ثابت.
- يتطابق الشكل الأصلي مع صورته.

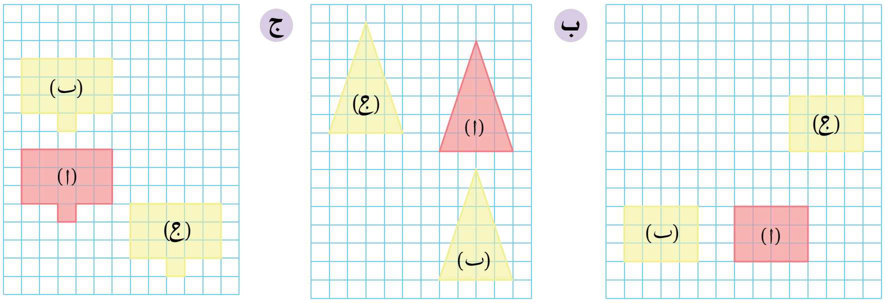
تمارين ٨-٣-ج

١) ارسم على ورقة مربعات أشكالاً توضِّح فيها ما يلي:

أ انسحاب مُربَّع ٦ وحدات إلى اليسار. ب انسحاب مُثلَّث ٥ وحدات إلى اليمين.

٢) اكتب مُتَّجهًا رأسيًّا لتصف انسحاب الشكل (ا) إلى الشكل (ب)، وانسحاب الشكل (ا) إلى الشكل (ع)، في كلّ مجموعة من الأشكال التالية:

أ ب ج



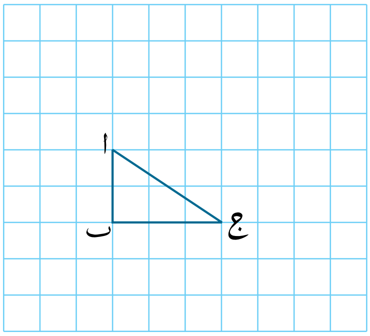
٣) انسخ الشكل على ورقة مُربَّعات. ثمَّ نفِّذ انسحابًا على المُثلَّث ا ب ع حسب كل حالة مما يلي:

أ ثلاث وحدات إلى اليمين، ووحدتَين إلى الأسفل.

ب ثلاث وحدات إلى اليسار، ووحدتَين إلى الأسفل.

ج وحدة واحدة إلى اليسار، وثلاث وحدات إلى الأعلى.

د أربع وحدات إلى اليمين، وثلاث وحدات إلى الأسفل.



٤) ارسم محوري الإحداثيات على ورقة مُربَّعات وعيّن عليه النقاط ا(٣، ٥)، ب(٢، ١)، ع(⁻١، ٤) وصلّ بينها ثم:

أ ارسم صورة المُثلَّث اب ع بعد تنفيذ الانسحاب $\begin{pmatrix} ٢ \\ ^-٣ \end{pmatrix}$، وسمِّه ا′ب′ ع′.

ب ارسم صورة المُثلَّث اب ع بعد تنفيذ الانسحاب $\begin{pmatrix} ٤ \\ ١ \end{pmatrix}$، وسمِّه ا″ ب″ ع″.

٥) إذا تم تنفيذ انسحاب للمُثلَّث س‌ص‌ع الذي إحداثيات رؤوسه س(٣، ١)، ص(٢، ٦)، ع(⁻١، ⁻٥) إلى المُثلَّث س′ص′ ع′ باستخدام المُتَّجه $\begin{pmatrix} ٤ \\ ^-٢ \end{pmatrix}$. أوجد أحداثيات النقاط س′، ص′، ع′ التي تُمثِّل رؤوس المثلث بعد الانسحاب.

٦) مستطيل ك ل م ن إحداثيات رؤوسه ك(١، ٦)، ل(٦، ٦)، م(٦، ٣)، ن(١، ٣) تمّ تنفيذ انسحاب له باستخدام المُتَّجه $\begin{pmatrix} ^-٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$:

أ مثّل الانسحاب في المُستوى الإحداثي.

ب أوجد إحداثيات رؤوس المستطيل ك′ ل′ م′ ن′.

٨-٣-د التكبير

عندما يخضع الشكل الأصلي للتكبير، يتم ضرب طول كل ضلع من أضلاعه في مُعامِل التكبير (ك)، للحصول على أبعاد الصورة المتكوِّنة.

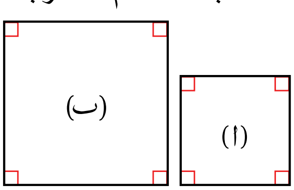
وقد يكون مُعامِل التكبير عددًا كاملاً أكبر من العدد ١، وهذا يعني أن أبعاد الصورة ستكون أكبر، وعندما يكون مُعامِل التكبير كسرًا اعتياديًّا، ينتج أن أبعاد الصورة تكون أصغر من أبعاد الشكل الأصلي.

ويجب الإشارة إلى أن قياسات زوايا الأشكال لا تتغيَّر بالتكبير، وهذا يعني أن الشكل الأصلي وصورته يتشابهان.

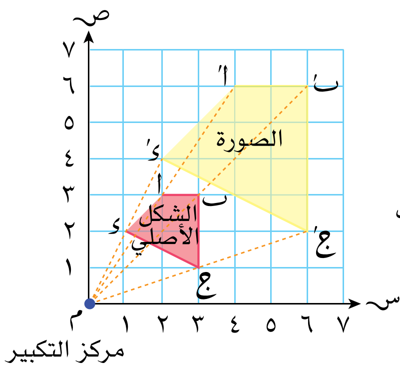
$$\text{مُعامِل التكبير} = \frac{\text{طول الضلع في الصورة}}{\text{طول الضلع في الأصل}}$$

لكن إذا علمت مُعامِل التكبير، يمكنك إيجاد أطوال الأضلاع المُتماثلة باستخدام الضرب.

يُبيّن الشكل المقابل مُربَّعًا تم تكبيره بمُعامِل تكبير مقداره ١,٥؛ هذا يعني أن $\frac{\text{طول ضلع المربع (ب)}}{\text{طول ضلع المربع (ا)}} = ١,٥$



عندما يتمّ تكبير الشكل الأصلي من نقطة ثابتة، يكون له مركز تكبير، وهو الذي يُحدِّد موقع الصورة، وتتقاطع فيه الخطوط المُستقيمة التي تصل بين نقاط الشكل الأصلي والنقاط المُتماثلة لها في الصورة.



وسوف تلاحظ ذلك في الشكل المقابل.

يمكن إيجاد قيمة مُعامِل التكبير بمُقارنة طولَي ضلعَيْن مُتماثلَين. فمثلاً: $\frac{\text{أ}'\text{ب}'}{\text{أ ب}} = \frac{٢}{١} = ٢$

أو بمقارنة المسافة بين مركز التكبير م وإحدى النقاط مع المسافة بين مركز التكبير وصورة تلك النقطة.

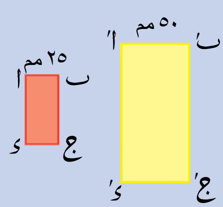
مثلاً: $\frac{\text{م ع}'}{\text{م ع}} = ٢$

خصائص التكبير

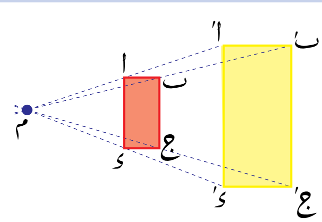
- قد يكون مركز التكبير في أيّ موقع (داخل الشكل، خارج الشكل، على رأس أو ضلع الشكل).
- مُعامِل التكبير الأكبر من ١ يكبر أبعاد الشكل الأصلي، في حين أن مُعامِل التكبير الواقع بين ٠ و ١ (كسر موجب > ١) يُصغِّر أبعاد الشكل الأصلي، وبالرغم من ذلك يظل اسمه تكبيرًا.
- في التكبير يتشابه الشكل الأصلي وصورته (لا يتطابقان)، حيث تكون النسبة بين أطوال الأضلاع ثابته، وتساوي ١ :ك، حيث ك مُعامِل التكبير.
- تبقى قياسات الزوايا واتِّجاه الشكل الأصلي ثابتة لا تتغيَّر.

مثــال ٨

يبيّن الشكل المقابل المستطيل ا ب ع ى وصورته ا′ ب′ ع′ ى′ بعد تنفيذ تكبير ما.
أوجد مركز التكبير ومُعامِل التكبير.



الحـــلّ:



صِل بين النقطة ا وصورتها ا′.
مُدّ ا ا′ في كلا الاتِّجاهَين. وبالمثل، ارسم ومُدّ كلاً من ب ب′، ع ع′، ى ى′.
تكون نقطة تقاطع هذه الخطوط المستقيمة هي مركز التكبير م

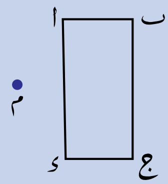
اب = ٢٥ مم
ا′ب′ = ٥٠ مم
مُعامِل التكبير $= \frac{٥٠}{٢٥} = ٢$

أوجد قياس اب، ا′ ب′

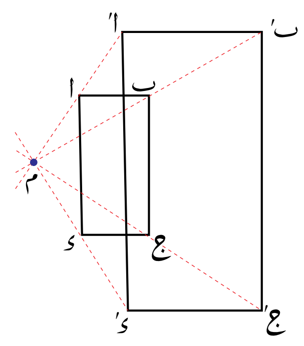
النسبة ا′ب′ : اب تعطي مُعامِل التكبير.

مثـــال ٩

ارسم صورة المُستطيل ا ب ج ى، بعد تنفيذ تكبير مركزه النقطة م ومُعامِل تكبيره ٢، أوجد المسافات مستخدمًا الرسم المعطى.



الحـــلّ:



صِل م ا. مُدّد الخط المُستقيم ليتجاوز النقطة ا.

أوجد طول م ا

اضرب طول م ا في ٢ (معامل التكبير)

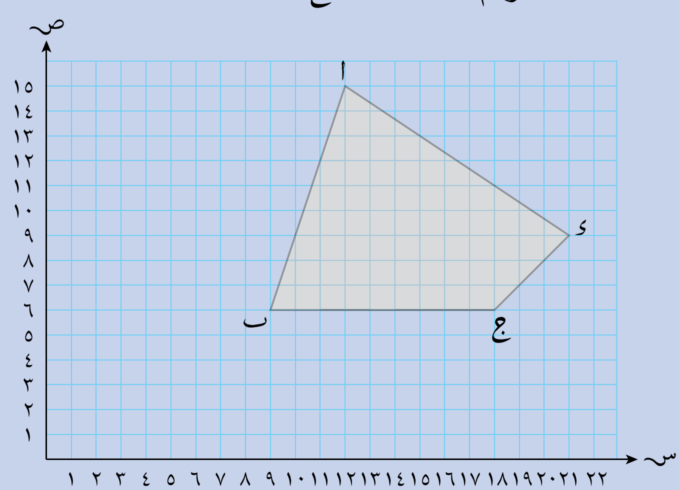
حدِّد موقع النقطة ا′ على الخط المستقيم الممتد، بحيث يكون م ا′ = ٢ م ا

كرِّر الخطوات نفسها مع باقي رؤوس المستطيل.

صِل ا′ ب′ ج′ ى′

مثـــال ١٠

إذا علمت أن الشكل ا′ ب′ ج′ ى′، صورة الشكل ا ب ج ى بعد تكبيره بتكبير معامله $\frac{١}{٣}$ ومركزه نقطة الأصل، ارسم الشكل ا′ ب′ ج′ ى′.



الحـــلّ:

مُعامِل التكبير $\frac{١}{٣}$ يعني أن الصورة ستكون أصغر من الشكل الأصلي.

حدِّد إحداثيات كلّ رأس من رؤوس صورة الشكل. بضرب إحداثيات رؤوس الشكل الأصلي (س، ص) في $\frac{١}{٣}$

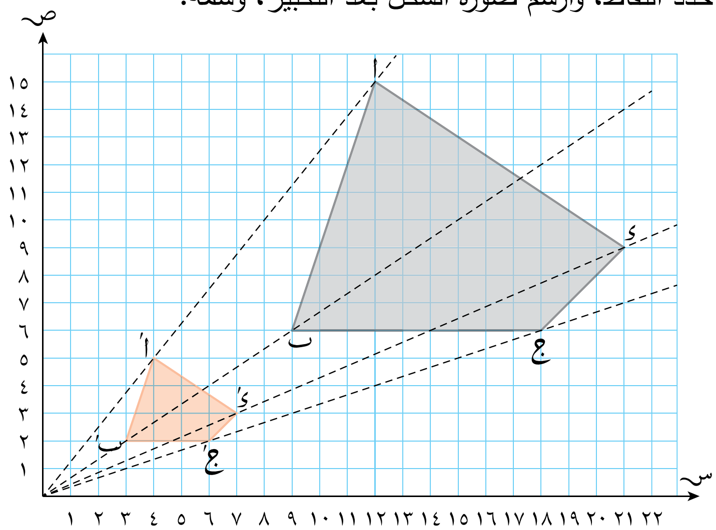
ا = (١٢، ١٥)، اَ = (٤، ٥)

ب = (٩، ٦)، بَ = (٣، ٢)

ج = (١٨، ٦)، جَ = (٦، ٢)

ى = (٢١، ٩)، ىَ = (٧، ٣)

حدِّد النقاط، وارسم صورة الشكل بعد التكبير، وسمّه.



يمكنك أيضًا قياس طول القطعة المُستقيمة الواصلة من نقطة الأصل إلى كلّ رأس من رؤوس الشكل الأصلي، وقسمة هذه الأطوال على ٣، لتُحدِّد موقع كلّ رأس من رؤوس الصورة. هذه الطريقة مفيدة عندما لا يكون الشكل مرسومًا على شبكة إحداثيات.

مثـــال ١١

ارسم صورة المستطيل ا ب ج ى بتكبير مُعامِله ⁻٢، ومركزه نقطة الأصل.

الحـــلّ:

اضرب إحداثيّات رؤوس المستطيل في ⁻٢

ا(١، ٤)، اَ(⁻٢، ⁻٨)

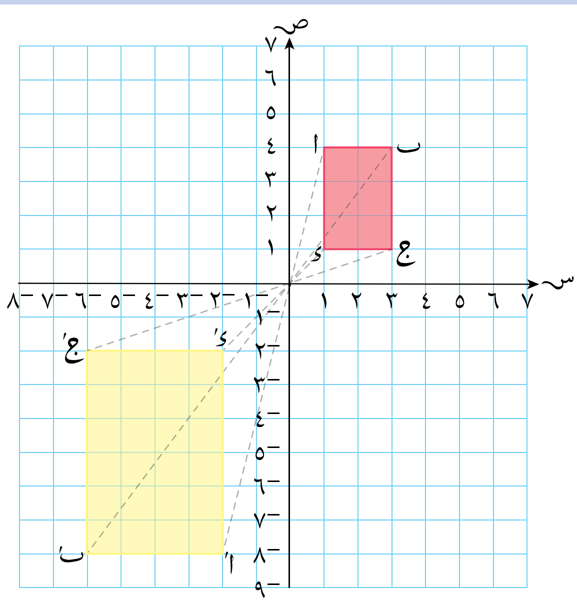
ب(٣، ٤)، بَ(⁻٦، ⁻٨)

ج(٣، ١)، جَ(⁻٦، ⁻٢)

ى(١، ١)، ىَ(⁻٢، ⁻٢)

حدّد النقاط على المستوى الإحداثيّ.

تأكّد من تسمية النقاط بصورة صحيحة.



إذا وقعت النقطة وصورتها على جانبَين مُتقابلَين من مركز التكبير، فهذا يعني أن مُعامِل التكبير سالب.

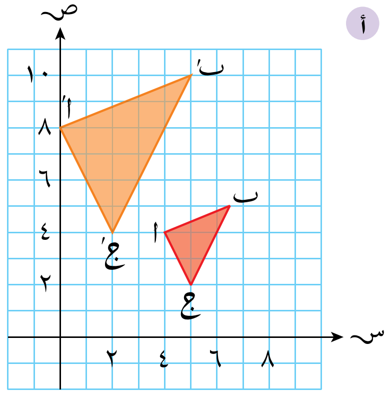
مُساعَدة

يسمح لك رسم الخطوط المُنقّطة من كلّ رأس بالتحقُّق من أن النقاط على الصورة تقع على المستقيم نفسه مع النقاط المُناظِرة لها على الشكل الأصلي.

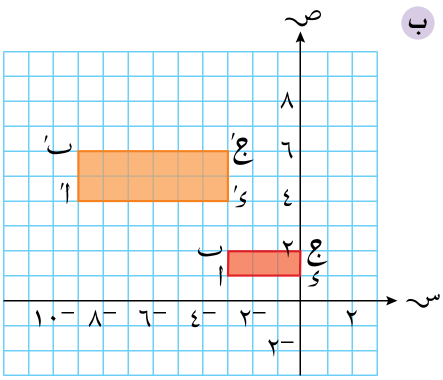
تمارين ٨-٣-د

١) حدِّد إحداثيات مركز التكبير ومُعامِل التكبير في كل مما يلي:

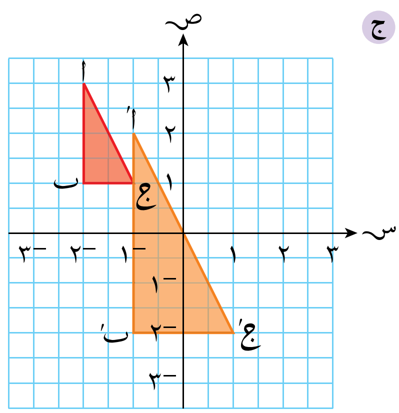
أ



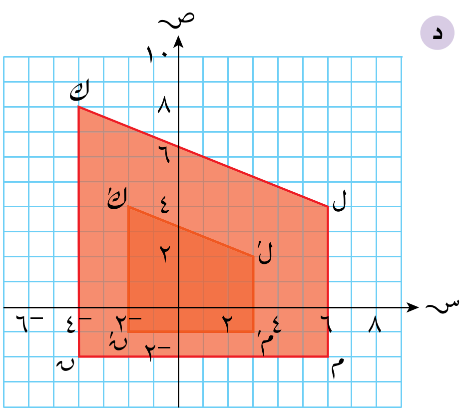
ب



ج

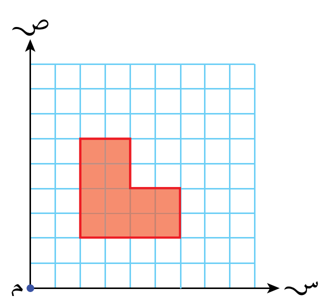


د

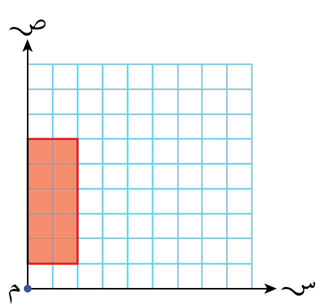


٢) استخدم نقطة الأصل مركزًا للتكبير، ومُعامِل تكبير مقداره ٣، لترسم صورة كلّ شكل بعد التكبير في كل مما يلي:

أ



ب



٨-٤ تركيب التحويلات الهندسيّة

تعلّمت من قبل أنك تستطيع إجراء تحويل هندسيّ على شكل ما يُحوِّله إلى صورة، ويمكن أيضًا إجراء تحويلَين هندسيَّين على شكل ما بالتتابُع. مثلاً، يمكن أن يخضع الشكل لانعكاس حول المحور السيني، ثمّ لدوران ربع دورة، أو يُمكن أن يخضع للدوران أوَّلاً، ثم للانعكاس حول المحور الصادي، ويمكن أحيانًا، وصف تركيب التحويلات الهندسيّة في تحويل هندسيّ وحيد مكافئ لهذا التركيب.

تُستخدَم الحروف التالية عادة لتُمثّل التحويلات الهندسيّة المختلفة:

م انعكاس

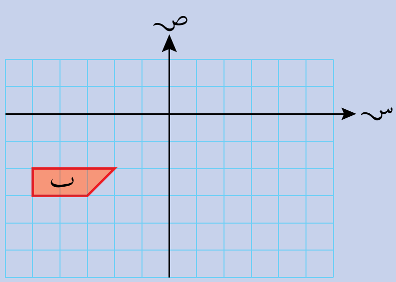
د دوران

ح انسحاب

ك تكبير

مثــال ١٢

في الشكل (ب) المعروض في المُخطَّط المقابل،
ليكُن ح انسحابًا باستخدام المُتَّجه الرأسي $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$،
م انعكاسًا حول المحور الصادي:



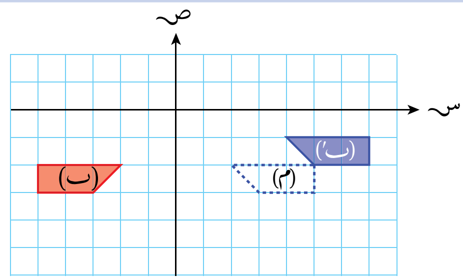
أ ارسم الصورة (ب′) بعد إجراء التحويل الهندسيّ ح م(ب)

ب ارسم الصورة (ب″) بعد إجراء التحويل الهندسيّ م ح(ب)

ج ما التحويل الهندسيّ الوحيد الذي يحوّل (ب′) إلى (ب″)؟

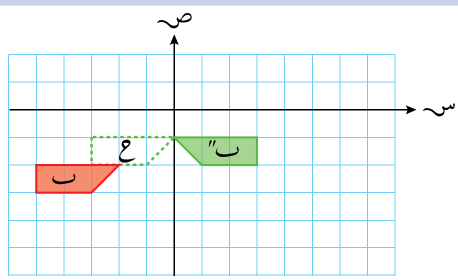
الحــلّ:

أ



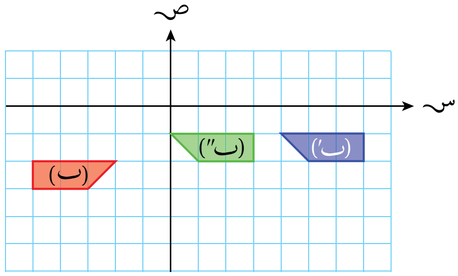
ح م (ب) يعني إجراء م أولاً، ثمّ ح.
استخدم قلم رصاص. نفّذ التحويل الهندسيّ الأول وارسم الشكل مُنقَّطًا. نفِّذ التحويل الهندسيّ الثاني، وارسم الصورة، وسمّها بطريقة صحيحة.

ب



م ح (ب) يعني إجراء ح أولاً، ثمّ م.
استخدم قلم رصاص. نفّذ التحويل الهندسيّ الأوّل وارسم الشكل مُنقَّطًا. نفِّذ التحويل الهندسيّ الثاني، وارسم الصورة، وسمّها بطريقة صحيحة.

ج



يمكن تحويل (ب′) إلى (ب″)
بالانسحاب باستخدام المُتَّجه $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$

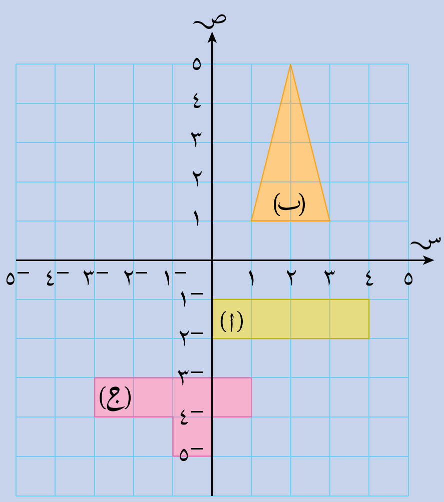
مثــال ١٣

ارسم صورة كلّ شكل بعد تنفيذ التحويل الهندسيّ المُعطى على نفس المستوى الإحداثي:

أ انعكاس الشكل (أ) حول الخط المستقيم ص = ⁻س − ٢

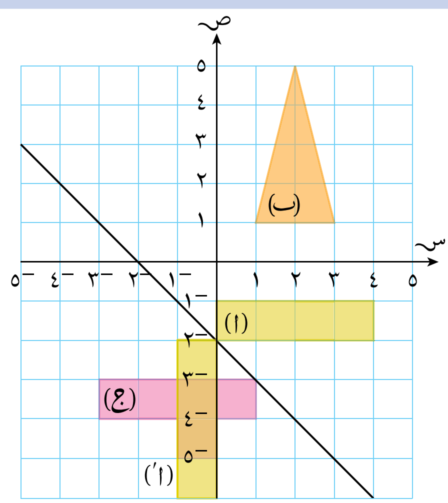
ب دوران الشكل (ب) بزاوية قياسها ٩٠° عكس اتِّجاه عقارب الساعة حول النقطة (٢، ٤).

ج انعكاس الشكل (ج) حول الخط المستقيم ص = ⁻٣، ثمّ دوران الصورة بزاوية قياسها ٢٧٠° مع اتِّجاه عقارب الساعة حول النقطة (⁻١، ⁻١).



الحــلّ:

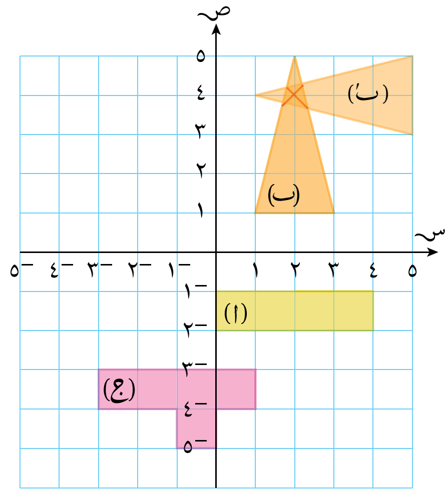
أ



ارسم محور الانعكاس الذي معادلته ص = ⁻س−٢

ارسم انعكاسًا للشكل (أ) حول محور الانعكاس.

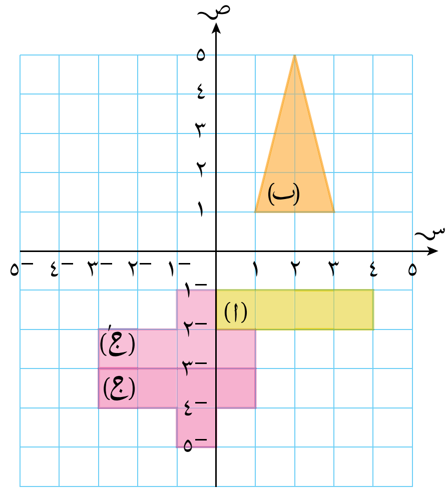
ب



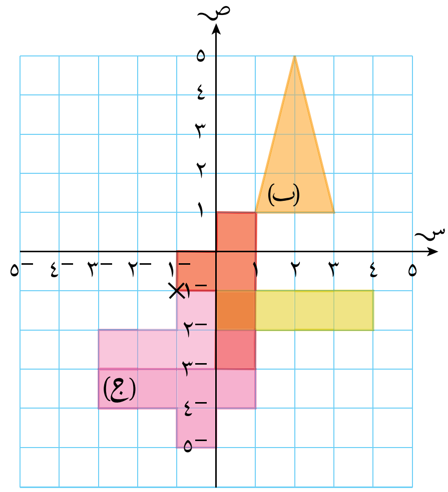
حدّد مركز الدّوران (٢، ٤).

ارسم دورانًا للشكل (ب) حول مركز الدوران بزاوية قياسها ٩٠° عكس اتّجاه عقارب الساعة.

ج



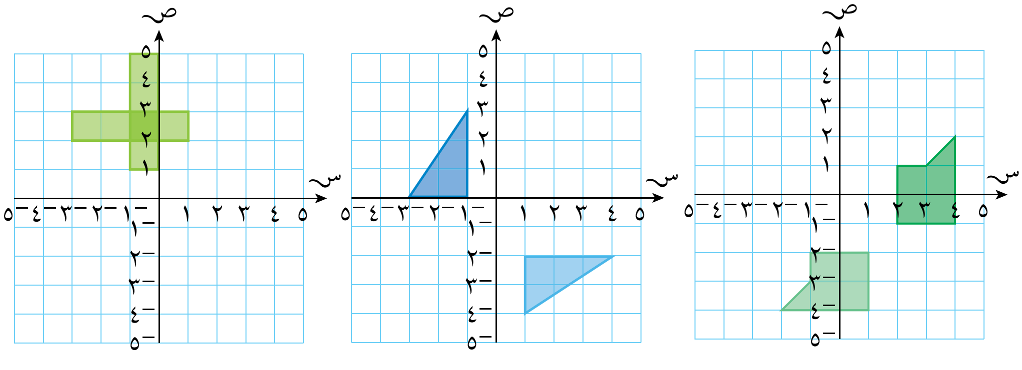
ارسم انعكاسًا للشكل (ج) حول المستقيم الذي معادلته ص = ⁻٣



ارسم دورانًا للصورة الناتجة حول النقطة (⁻١، ⁻١) بزاوية قياسها ٢٧٠° مع اتجاه عقارب الساعة.

تمارين ٨-٤

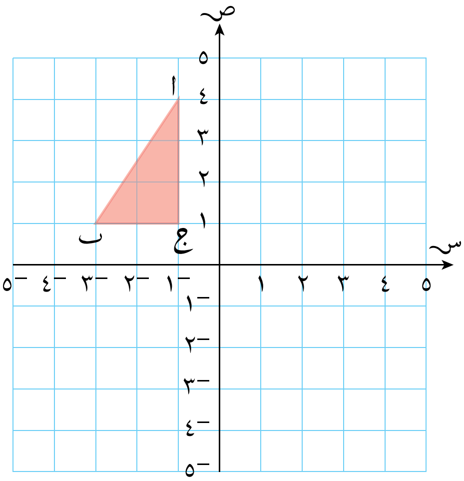
١) أوجد معادلة محور الانعكاس في كلّ ممّا يأتي:



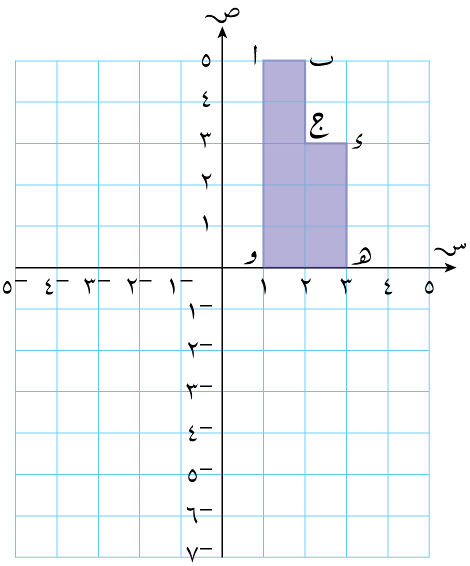
ج ب أ

٢) ارسم كلّ شكل فيما يلي على شبكة إحداثيات ونفّذ الدوران المُعطى.

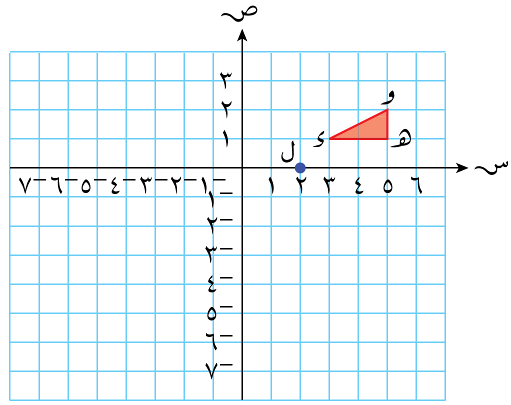
أ دوران المثلث ا ب ج حول النقطة (⁻٢، ٢)، وبزاوية قياسها ٩٠° عكس اتّجاه عقارب الساعة.



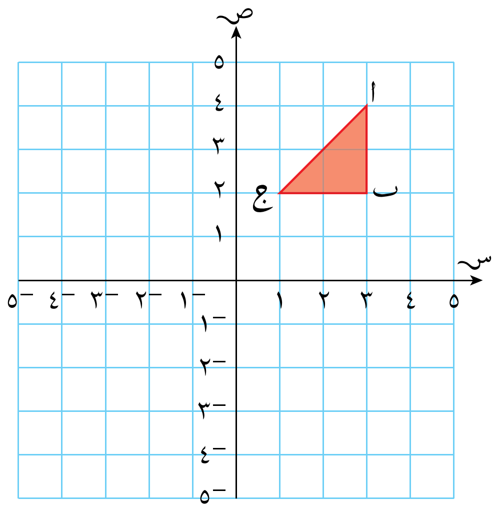
ب دوران الشكل ا ب ج ى هـ و حول النقطة (١، ⁻١)، وبزاوية قياسها ١٨٠°



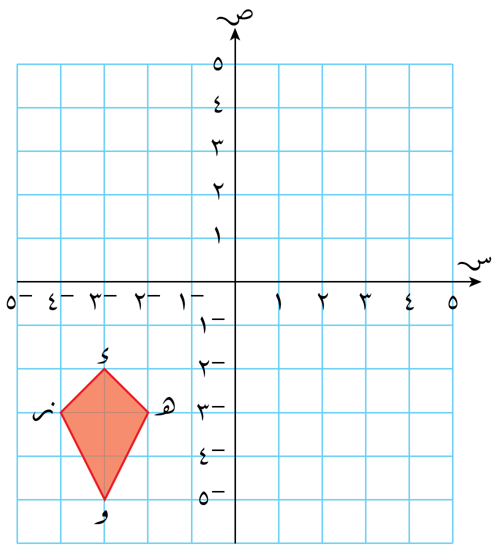
٣) ارسم صورة المُثلّث ى هـ و بتكبير مُعامِله ⁻٣، ومركزه النقطة ل(٢، ٠).



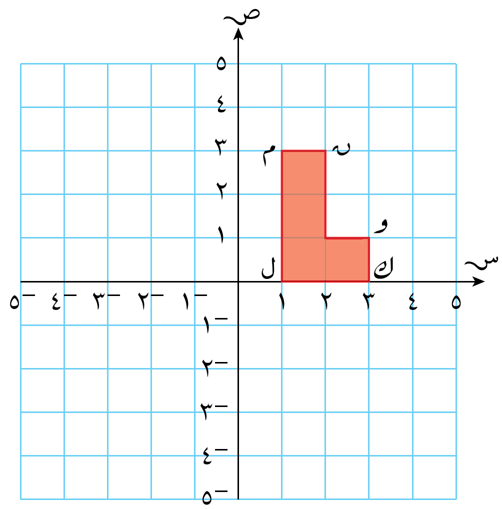
٤) ارسم صورة الشكل المُعطى بتكبير مُعامِله ⁻١، ومركزه نقطة الأصل.



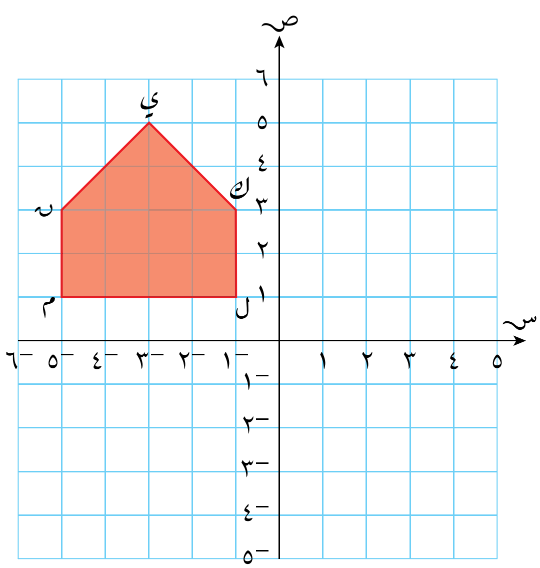
٥) ارسم صورة الشكل ى هـ و ز بتكبير مُعامِله ⁻٢، ومركزه النقطة (⁻١، ⁻١).



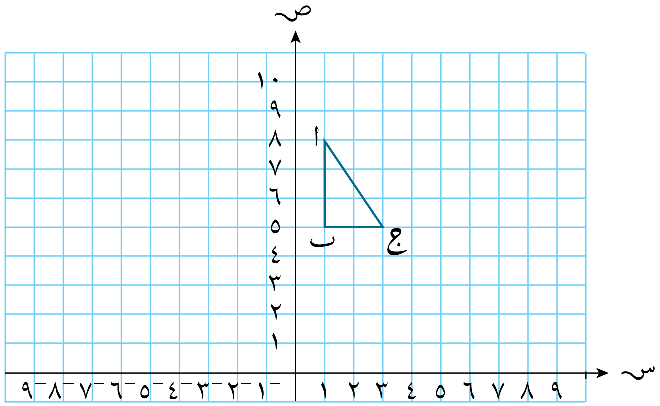
٦) ارسم صورة الشكل التالي بتكبير مُعامِله ⁻١,٥، ومركزه النقطة (١، ٠).



٧) ارسم صورة الشكل التالي بتكبير مُعامِله $-\frac{1}{2}$، ومركزه نقطة الأصل.



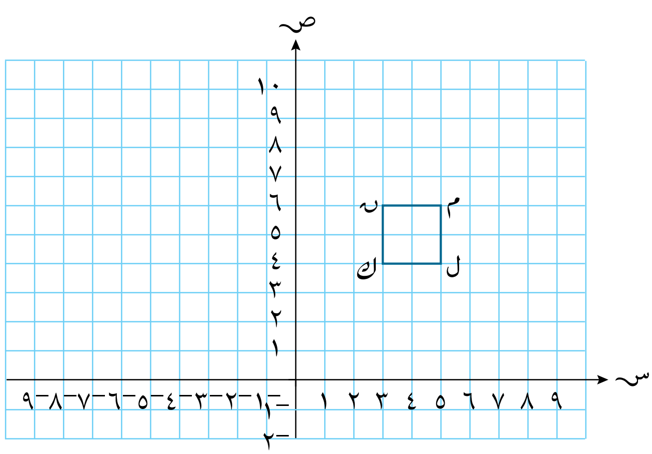
٨) صورة المُثلَّث ا ب ج هي المُثلَّث ا′ ب′ ج′ بتكبير مُعامِله ٢، ومركزه النقطة (٢، ٥)، تم تحويل المُثلَّث ا′ ب′ ج′ إلى المُثلَّث ا″ ب″ ج″ بالانعكاس حول المستقيم س = ١



أ ارسم الصورة ا′ ب′ ج′ وسمّها.

ب ارسم الصورة ا″ ب″ ج″ وسمّها.

٩) إذا كانت صورة المُربَّع ك ل م ن بتكبير مُعامِله ١,٥ ومركزه النقطة (٣، ٤) هي ك′ ل′ م′ ن′، وصورة المُربَّع ك′ ل′ م′ ن′ بالدوران بزاوية قياسها ١٨٠° حول النقطة (٠، ٦) هي ك″ ل″ م″ ن″، بيّن موقع الشكلَين ك′ ل′ م′ ن′، ك″ ل″ م″ ن″ على مستوى الإحداثيات.



مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

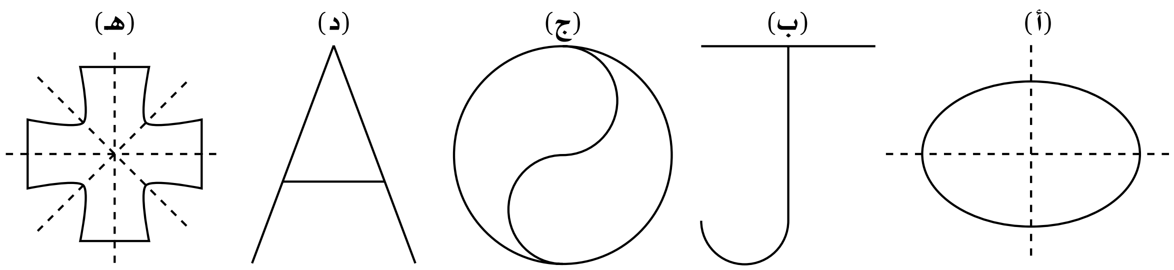
- إذا أمكن طيّ شكل ليتطابق أحد النصفَين تمامًا مع النصف الآخر، يكون الشكل مُتماثلاً حول محور.
- يمكن أن يكون للأشكال أكثر من محور تماثُل. عدد محاور تماثُل المُضلَّع المُنتظم تتساوى مع عدد أضلاعه.
- إذا خضع شكل لدوران حول نقطة ما (مركز الدوران) دورة كاملة واحدة، وتطابق مع نفسه مرة واحدة على الأقلّ، يكون له تماثل دورانيّ.
- تدلّك رتبة التماثُل الدورانيّ على عدد مرّات تطابُق الشكل مع نفسه في دورة كاملة واحدة.
- يمكن للأشكال ثُلاثية الأبعاد أن يكون لديها تماثُل أيضًا.
- إذا أمكن تقسيم مُجسَّم بمستوٍ لتشكيل قسمَين أحدهما صورة مرآة للآخر، يكون للمُجسّم مستوى تماثُل.
- إذا تمّ دوران شكل ثلاثيّ الأبعاد حول محور وظهر الشكل نفسه عند موقع أو أكثر خلال دورة واحدة كاملة، يكون له تماثُل دورانيّ.
- يتضمَّن التحويل الهندسيّ تغيُّرًا في الموقع وأبعاد الشكل أو في أحدهما.
- الانعكاس هو صورة للشكل، والدوران هو حركة الشكل دائريًّا، والانسحاب هو إزاحة الشكل، والتكبير هو تزايُد أو تناقُص في أبعاد الشكل.
- لتصف الانعكاس وصفًا كاملاً، يجب أن تُعطي معادلة محور الانعكاس.
- لتصف الدوران وصفًا كاملاً، يجب أن تعطي قياس زاوية الدوران ومركزه واتجاهه.
- لتصف الانسحاب، يمكنك استخدام مُتَّجه الإزاحة $\binom{س}{ص}$.
- لتصف التكبير، يجب أن تُعطي مُعامِل التكبير ومركزه.

يجب أن تكون قادرًا على:

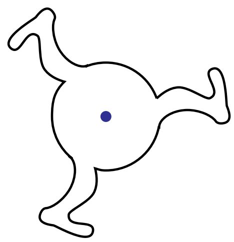
- تمييز الدوران ومحور التماثُل في أشكال ثنائية الأبعاد.
- إيجاد رتبة التماثُل الدوراني في أشكال ثُنائية الأبعاد.
- تمييز التماثُل الدوراني والتماثُل حول محور في أشكال ثلاثية الأبعاد.
- رسم صورة نقاط وأشكال مستوية بانعكاس حول خط مُستقيم أفقي وخطّ مستقيم رأسي.
- رسم صورة أشكال مُستوية بدوران حول نقطة الأصل أو أحد رؤوس الشكل أو نقاط منصّفات الأضلاع.
- وصف الانسحاب باستخدام مُتّجه رأسي.
- تنفيذ انسحاب لأشكال مستوية باستخدام مُتَّجه رأسي.
- إنشاء تكبير لأشكال مستوية باستخدام مُعامِل التكبير ومركزه.
- تمييز ووصف تحويل هندسي واحد أو تحويلات هندسيّة مركّبة.

تمارين نهاية الوحدة

١) أيّ الأشكال الآتية لها محور تماثُل وتماثُل دورانيّ في آن واحد؟



٢) ما هي رتبة التماثُل الدورانيّ للشكل المُقابل؟

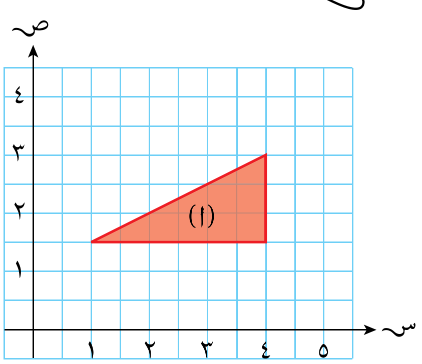


٣) ارسم التحويلات الهندسيّة الآتية للمثلث (ا) في الشكل المقابل على شبكة المُربَّعات:

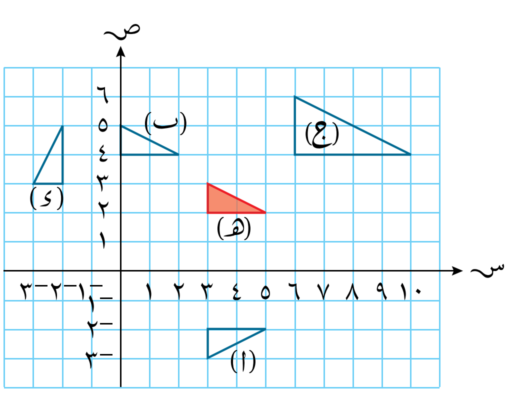
أ انعكاس المُثلَّث (ا) حول المحور الصادي، وسمّه المُثلَّث (ب).

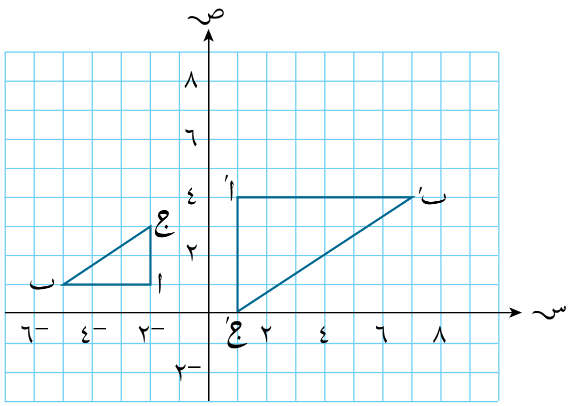
ب دوران المُثلَّث (ا) بزاوية قياسها °١٨٠ حول النقطة (٤، ٣)، وسمّه المُثلَّث (ج).

ج تكبير المُثلَّث (ا) بمُعامِل تكبير مقداره ٢، ومركزه النقطة (٤، ٥)، وسمّه المُثلَّث (ى).



٤) صف التحويل الهندسيّ الذي يُحوِّل المُثلَّث (هـ) إلى كلّ من المُثلَّثات (ا)، (ب)، (ج)، (ى) المرسومة في الشكل المُقابِل.

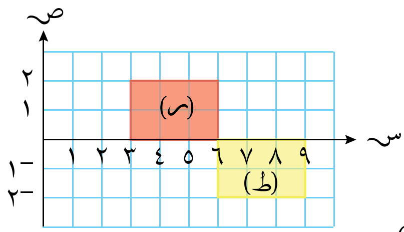




٥) إذا تم تكبير المُثلَّث ا ب ج إلى المُثلَّث ا′ ب′ ج′ أوجد:

أ مركز التكبير.

ب مُعامِل التكبير

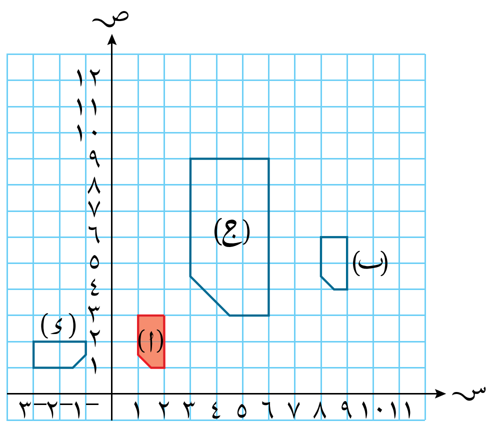


٦) أ اكتب المُتَّجه الرأسي للانسحاب الذي يُحوِّل المُستطيل (س) إلى المُستطيل (ط).

ب صف تحويلاً آخر (غير الانسحاب) يمكنه أيضًا تحويل المُستطيل (س) إلى المُستطيل (ط).

ج (١) انسخ الشكل المُقابل على شبكة مُربَّعات ثم نفِّذ تكبيرًا على المُستطيل (س) بمُعامِل تكبير مقداره ٢ ومركزه النقطة ا(١٠، ٢).

(٢) أوجد نسبة مساحة المستطيل (ط) إلى مساحة المُستطيل (س)، واكتبها في أبسط صورة.



٧) أ في كلّ حالة، صِف التحويل الهندسيّ الذي يحوّل الشكل (ا) إلى:

(١) الشكل (ب).

(٢) الشكل (ج).

(٣) الشكل (د).

ب حدِّد الشكل الذي مساحته تساوي مساحة الشكل (ا).

٨) أجب عن الأسئلة الآتية على ورقة رسم بيانيّ:

أ ارسم محورَيْن بتدريج من $^-٦$ إلى ٦، باستخدام المقياس ١ سم، لتمثيل وحدة واحدة على كلّ محور ثم:

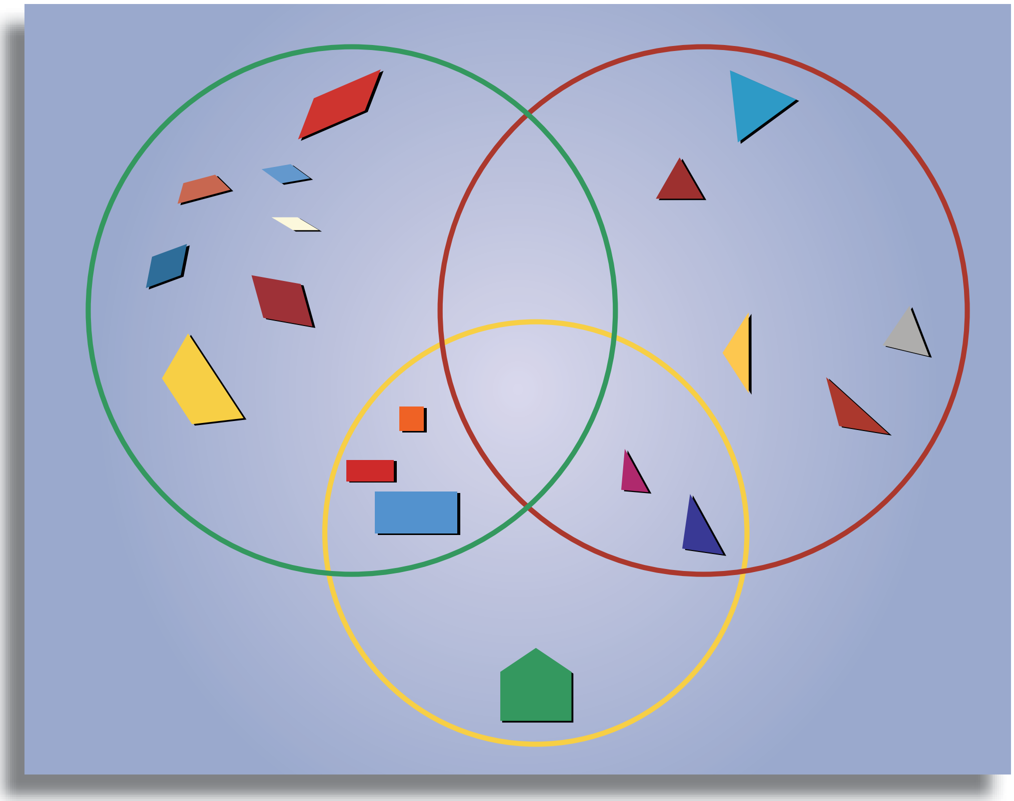
(١) حدِّد النقاط ا(٥، ٠)، ب(١، ٣)، ج($^-١$، ٢)، وارسم المُثلَّث ا ب ج.

(٢) حدِّد النقاط ا′(٣، ٤)، ب′(٣، $^-١$)، ج′(١، $^-٢$)، وارسم المُثلَّث ا′ ب′ ج′.

ب (١) ارسم المُستقيم (ل)، بحيث تكون صورة المُثلَّث ا ب ج بالانعكاس حوله هي المُثلَّث ا′ ب′ ج′.

(٢) اكتب مُعادَلة المستقيم (ل).

الوحدة التاسعة: المُتتاليات والمجموعات



إن تجميع الأشكال التي لها نفس الخصائص في مجموعات يساعد على توضيح الروابط بين المجموعات. تم في الرسم أعلاه تجميع الأشكال بالاستناد إلى عدد أضلاعها، إضافة إلى الأشكال التي تتضمَّن زاوية قائمة.

ما عدد الطلاب الذين يدرسون التاريخ في مدرستك؟ وما عدد الطلاب الذين يدرسون الفنون؟ إذا تم تنظيم حدث عن الطلاب الذين يدرسون أيًا من الموضوعَيْن، فكم سيكون عددهم؟ إذا اخترت طالبًا بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون من الذين يدرسون كلا المادتين؟ نلاحظ أن تصنيف الأشخاص ضمن مجموعات مُناسبة يمكن أن يُساهم في الإجابة عن هذه الأنواع من الأسئلة!

المُفردات

- المُتتالية Sequence
- الحد Term
- قانون الحد إلى الحد Term-to-term rule
- الحدّ النوني/ الحدّ العام *n*th term rule
- المجموعة Set
- العنصر Element
- المجموعة الخالية Empty set
- المجموعة الشاملة Universal set
- المُتمِّم Complement
- الاتِّحاد Union
- التقاطع Intersection
- المجموعة الجُزئية Subset
- مُخطَّط فِن Venn diagram
- صيغة الصفة المُميَّزة Set builder notation

سوف تتعلّم في هذه الوحدة كيف:

- تصف قانون استكمال المُتتالية.
- تجد الحدّ النوني (الحد العام) لبعض المُتتاليات.
- تستخدم الحدّ النوني لتجد حدودًا لاحقة في المُتتالية.
- تُنشئ مُتتالية وتصفها من أنماط الأشكال.
- تذكر عناصر مجموعة تم وصفها باستخدام القانون إضافة إلى التعريف.
- تجد اتحاد المجموعات وتقاطعها.
- تجدُ متمِّمات المجموعات.
- تمثّل المجموعات وتحلّ المسائل باستخدام مُخطّط فِن.

٩-١ المُتتاليات

المُتتالية هي قائمة مُرتَّبة من الأعداد أو الحروف أو الأشياء التي دُوِّنت بترتيب مُعيّن، مع وجود بعض الروابط بينها، حيث تتوفّر في العادة صيغة ستخبرك بالعدد أو الحرف أو الكلمة أو الشيء الذي سيأتي تاليًا، ويُطلق على كلّ عدد أو حرف أو شيء في المُتتالية اسم **الحدّ**. يُسمى أيّ حدّين متجاورَين بالحدَّين المُتتاليَين.

٩-١-أ قانون الحدّ إلى الحدّ

عندما تحاول تحديد النمط المُتَّبع في المُتتالية، ابدأ بالأشياء البسيطة. ستجد غالبًا أن الإجابة الأبسط هي الإجابة الصحيحة.

فيما يلي بعض المُتتاليات مع القاعدة الخاصة بها والتي تدل على كيفية استمرار بناء المُتتالية: ٢ ، ٨ ، ١٤ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٣٢ ، ... (احصل على الحد التالي بإضافة العدد ٦ إلى الحدّ السابق له مباشرة).

يمكن عرض النمط من خلال رسمه بالطريقة الآتية:

٢ ، ٨ ، ١٤ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٣٢ ...

+ ٦   + ٦   + ٦   + ٦   + ٦

رابط

غالبًا ما يحتاج الكيميائيون إلى فهم كيفية تغيُّر الكمّيات مع الزمن. يُساعد فهم المُتتالية أحيانًا الكيميائيين ليفهموا كيف يتم التفاعل الكيميائي، وكيف يمكن التنبؤ بالنتائج.

١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، ... (اقسم كلّ حدّ على العدد (٢) لتحصُل على الحدّ التالي له مُباشرة).

ويمكن رسم مُخطَّط لعرض حُدود المُتتالية:

١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ...

÷ ٢   ÷ ٢   ÷ ٢   ÷ ٢

١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢، ... (احصل على الحد التالي بضرب الحدّ السابق له مُباشرة في العدد ٢).

ويمكن عرض حدود المتتالية:

١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ...

× ٢   × ٢   × ٢   × ٢   × ٢

يُسمّى القانون الذي يُعطي الحدّ التالي في المُتتالية **قانون الحدّ إلى الحدّ**.

يمكن أن تتضمَّن المتتاليات حدودًا غير عددية. مثل المُتتالية الآتية المعروفة جدًّا:

أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و ، ز ، ح ، ...

في هذا المثال، تتوقَّف المُتتالية عند العنصر رقم ٢٨، وعليه تُسمّى مُتتالية مُنتهية. المُتتاليات الثلاث السابقة ليس ضروريًّا أن تتوقَّف، وبناءً على ذلك فهي مُتتاليات غير مُنتهية (إلّا إذا رغبت في إيقافها عند نقطة مُحدَّدة).

تمارين ٩-١-أ

١) ارسم مُخطَّطًا تعرض فيه كيف تستمرّ كلّ مُتتالية فيما يلي، ثمّ أوجد حدودها الثلاثة التالية:

أ ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ...

ب ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٣ ، ...

ج ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ٢٤٣ ، ...

د ٠,٥ ، ٢ ، ٣,٥ ، ٥ ، ٦,٥ ، ...

هـ ٨ ، ٥ ، ٢ ، ⁻١ ، ⁻٤ ، ...

و ١٣ ، ١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ...

ز ٦ ، ٤,٨ ، ٣,٦ ، ٢,٤ ، ١,٢ ، ...

ح ٢,٣ ، ١,١ ، ⁻٠,١ ، ⁻١,٣ ، ...

٢) أوجد الحدود الثلاثة التالية لكلّ من المُتتاليتَين الآتيتين، ووضّح القانون الذي استخدمته في كلّ حالة:

أ ١ ، ⁻٣ ، ٩ ، ⁻٢٧ ، ...

ب الاثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، ...

٩-١-ب علاقة الحدّ برُتبته في المُتتالية

فكّر في المُتتالية التالية:

١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ...

يجب أن تكون قد أدركت أن هذه الأعداد هي أول خمسة أعداد مربَّعة، وعليه فإن:

الحدّ الأول = ١ × ١ = $١^٢$ = ١

الحدّ الثاني = ٢ × ٢ = $٢^٢$ = ٤

الحدّ الثالث = ٣ × ٣ = $٣^٢$ = ٩

... وهكذا

يمكنك أن تكتب المُتتالية في جدول يعرض رُتبة كلّ حدّ وقيمته:

رُتبة الحدّ (ن)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
قيمة الحدّ ($ن^٢$)	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١

لاحظ أن رُتبة الحدّ أُعطيت الحرف (ن) هذا يعني، مثلاً، أن ن = ٣ هو الحدّ الثالث، وأن ن = ١٠٠ هو الحدّ المائة. القاعدة التي تُعطي كلّ حدّ بحسب رتبته، هي:

حدّ الرتبة $_{(ن)}$ = $ن^٢$ ويسمّى بالحد النوني أو الحد العام.

الحدّ النوني = $ن^٢$

فكّر الآن في مُتتالية حدّها النوني ن = ٣ن + ٢

في الحدّ الأول، ن = ١، أي إن الحدّ الأوّل هو ٣ × ١ + ٢ = ٥

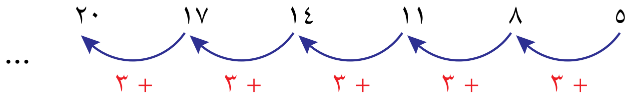
في الحدّ الثاني، ن = ٢، أي إن الحدّ الثاني هو ٣ × ٢ + ٢ = ٨

في الحدّ الثالث، ن = ٣، أي إن الحدّ الثالث هو ٣ × ٣ + ٢ = ١١

عند استكمال المُتتالية وكتابتها في جدول، ستحصل على:

ن	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الحدّ	٥	٨	١١	١٤	١٧	٢٠	٢٣	٢٦	٢٩

إذا رسمت مُخطَّطًا لعرض حدود المُتتالية، ستحصُل على:



لاحظ أن العدد المُضاف إلى كلّ حدّ في المُخطَّط يظهر في قاعدة الحد النّوني (هو العدد المضروب في ن أو مُعامل ن).

يحصل ذلك في أيّ متتالية، عندما يتمّ الانتقال من حدّ إلى الحد التالي له مُباشرة، بإضافة (أو طرح) عدد ثابت. يُسمّى العدد الثابت الفرق المُشترَك.

على سبيل المثال، إذا أنشأت جدولاً للمُتتالية ذات الحد العام = ٤ن – ١، ستحصل على:

ن	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الحدّ	٣	٧	١١	١٥	١٩	٢٣	٢٧	٣١	٣٥

هنا، يمكنك أن تُلاحِظ إضافة العدد ٤ عند الانتقال من أي حدّ إلى الحدّ التالي له مباشرة. وهذا العدد هو مُعامِل ن الذي يظهر في قانون الحدّ العام.

يعرض المثال الآتي كيفية إيجاد الحد النوني (الحد العام) لمُتتالية ما.

مثـــال ١

أ ارسم مُخطَّطًا يبيّن الصيغة التي تساعدك على استكمال المُتتالية الآتية، ثمّ أوجد حدّها العام.

٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢٦ ، ...

ب أوجد الحدّ الأربعين في المُتتالية.

ج وضّح كيف تعرف أن العدد ٥٠ هو حدّ في المُتتالية، ثمّ حدِّد رُتبته فيها.

د وضّح كيف تعرف أن العدد ١٢٨ ليس من المُتتالية.

الحـــلّ:

أ

٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤ ، ١٨ ، ٢٢ ...

+ ٤   + ٤   + ٤   + ٤   + ٤

إذا كانت ن = ٣

فإن

٤ن = ٤ × ٣ = ١٢

٤ن − ٢ = ١٠

حاول عندما ن = ٥

٤ن − ٢ = ٤ × ٥ − ٢ = ١٨

∴ قانون الحدّ العام = ٤ن − ٢

لاحظ أن العدد الذي تمّت إضافته في كل مرة هو العدد ٤. يدلّ هذا على أن مُعامِل ن في الحد العام هو ٤، إذن، سيشكل (٤ن) جُزءًا من قانون الحد العام.

والآن، فكّر بأيّ حدّ في المُتتالية وليكن الحدّ الثالث (تذكَّر أن قيمة ن تعطي رُتبة الحدّ في المُتتالية). جرّب مع ٤ن لتعرف على ماذا ستحصل عندما ن = ٣؛ تحصل على الإجابة ١٢، ولكن الحدّ الثالث هو ١٠، لذا يجب أن تطرح ٢

يجب أن تتحقَّق من ذلك.

اختبر القانون عند أيّ حدّ، وليكن الحد الخامس. عوّض ن = ٥ في القانون.

لاحظ أن الحد الخامس هو فعلاً ١٨

ب

الحدّ ٤٠ ∴ ن = ٤٠

٤ × ٤٠ − ٢ = ١٥٨

لإيجاد الحدّ الأربعين في المُتتالية، عليك ببساطة التعويض بقيمة ن = ٤٠ في قانون الحدّ العام.

ج	٤ن – ٢ = ٥٠ ٤ن – ٢ + ٢ = ٥٠ + ٢ ٤ن = ٥٢ ن= $\frac{٥٢}{٤}$ = ١٣ بما أن الناتج هو عدد كامل، فيكون ٥٠ هو الحدّ الثالث عشر في المُتتالية.	إذا كان العدد ٥٠ في المُتتالية، يجب أن تكون هناك قيمة صحيحة موجبة للرتبة ن تجعل ٤ن – ٢ = ٥٠؛ اكتب المعادلة بدلالة ن وذلك بإضافة ٢ إلى الطرفَين. اقسم الطرفَين على ٤
د	٤ن – ٢ = ١٢٨ ٤ن = ١٣٠ ن= $\frac{١٣٠}{٤}$ = ٣٢,٥ بما أن (ن) هي رُتبة في المُتتالية، يجب أن يكون عدداً كاملاً، ولكن قيمة ن = ٣٢,٥ ليست عددًا كاملاً وهذا يعني أن العدد ١٢٨ لا يمكن أن يكون عددًا في المُتتالية.	إذا كان العدد ١٢٨ حدًّا في المُتتالية، يجب أن تكون هناك قيمة صحيحة موجبة للرتبة ن حيث ٤ن – ٢ = ١٢٨؛ اكتب المعادلة بدلالة ن وذلك بإضافة ٢ إلى الطرفَين. اقسم الطرفَين على ٤

تمارين ٩-١-ب

١) أوجد الحدّ النّوني، ثم الحد ١٥ لكلّ من المُتتاليات الآتية:

أ ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ...
ب ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٣ ، ...
ج ٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٧ ، ...
د ٠,٥ ، ٢ ، ٣,٥ ، ٥ ، ٦,٥ ، ...
هـ ٨ ، ٥ ، ٢ ، ١⁻ ، ٤⁻ ، ...
و ١٣ ، ١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ...
ز ٦ ، ٤,٨ ، ٣,٦ ، ٢,٤ ، ١,٢ ، ...
ح ٩ ، ١٩ ، ٢٩ ، ٣٩ ، ٤٩ ، ...

لحل معظم جزئيات هذا التمرين، يمكن الاستعانة بالمُخطَّط الذي تم رسمه سابقًا في التمرين ١ من الدرس ٩-١-أ في الصفحة ٢٤١

٢) في المُتتالية:

٤ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٨ ، ٣٦ ، ٤٤ ، ٥٢ ، ...

أ أوجد الحدّ العام.
ب أوجد الحدّ ذا الرتبة ٥٠٠
ج أيّ حدّ في المُتتالية قيمته ٢٣٦؟ وضِّح خطوات الحل.
د أثبت أن العدد ١٥٤ ليس حدًّا في المُتتالية.

في أسئلة الحد العام، تذكَّر أن (ن) يجب دائمًا أن تكون عددًا صحيحًا موجبًا.

> في التعبير $ح_{ن}$، ح هو الحد، ن هي رتبة الحد.

٣) أوجد ذهنيًا الحد العام لكلّ مُتتالية فيما يلي:

أ $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{١٦}$، $\frac{١}{٣٢}$، ...

ب $\frac{٣}{٨}$، $\frac{٧}{١١}$، $\frac{١١}{١٤}$، $\frac{١٥}{١٧}$، ...

ج $\frac{٩}{٦٤}$، $\frac{٤٩}{١٢١}$، $\frac{١٢١}{١٩٦}$، $\frac{٢٢٥}{٢٨٩}$، ...

د $-\frac{٢}{٣}$، $-\frac{١}{٦}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{٥}{٦}$، $\frac{٤}{٣}$، ...

٤) اكتب أول ثلاثة حدود، والحد العشرين، للمُتتالية التي حدّها العام هو:

أ $ح_{ن} = ٤ - ٣ن$

ب $ح_{ن} = ٢ - ن$

ج $ح_{ن} = \frac{١}{٢}ن^{٢}$

د $ح_{ن} = ن(ن + ١)(ن - ١)$

هـ $ح_{ن} = \frac{٣}{ن + ١}$

و $ح_{ن} = ٢ن^{٣}$

٥) أوجد قيمة س إذا كان (س + ١)، (−س + ١٧) هما الحدّان الثاني والسادس بالترتيب، في مُتتالية أساسها هو العدد ٥

٦) أوجد قيمة س إذا كان (٢س + ٢)، (س − ٤) هما الحدَّين الثالث والسابع بالترتيب، في مُتتالية أساسها هو العدد −٢

٧) اكتب الحدود الثلاثة التالية في كلّ مُتتالية فيما يلي:

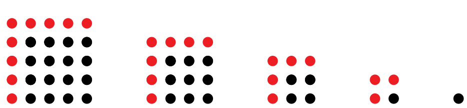
أ ٣ ٧ ١١ ١٥ ١٩ ...

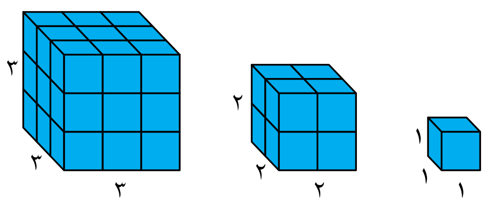
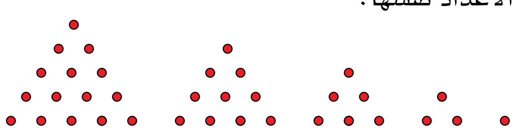
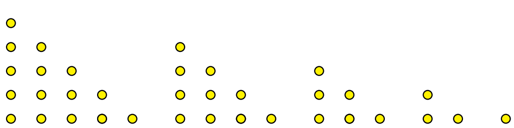
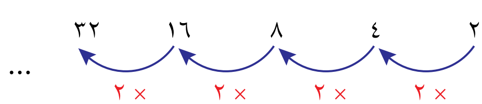
ب ٤ ٩ ١٦ ٢٥ ٣٦ ...

ج ٢٣ ١٩ ١٣ ٥ −٥ ...

٩-١-ج بعض المُتتاليات الخاصّة

يجب أن تكون قادرًا على إدراك المُتتاليات الآتية:

المُتتالية	الوصف
مربّعات الأعداد $ح_{ن} = ن^{٢}$	مُربّع العدد هو ناتج ضرب عدد كامل في نفسه. يمكن تمثيل الأعداد المربّعة باستخدام نقاط نُظّمت لتُشكّل مُربّعات.  ١ ٤ ٩ ١٦ ٢٥ تُشكّل الأعداد المربّعة مُتتالية (غير مُنتهية): ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ... يمكن استخدام الأعداد المربّعة في تكوين مُتتاليات أخرى: $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٢٥}$ ، ... ٢ ، ٨ ، ١٨ ، ٣٢ ، ٥٠ ، ... (كلّ حدّ هو ضعف مُربّع عدد)

الوصف	المُتتالية
مُكعَّب العدد هو ناتج ضرب عدد كامل في نفسه، ثمّ ضرب الناتج في العدد نفسه مرّة أخرى.  $١^{٣}$ $٢^{٣}$ $٣^{٣}$ تُكوِّن مُكعَّبات الأعداد مُتتالية (غير مُنتهية): ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ١٢٥ ، ...	مُكعّبات الأعداد $ح_{ن} = ن^{٣}$
تتكوَّن الأعداد المُثلَّثة من خلال تنظيم نقاط لتشكيل مُثلَّثات مُتطابِقة الأضلاع، أو مثلثات قائمة مُتطابِقة الضلعَيْن. يُعطي كلا الترتيبَيْن متتالية الأعداد نفسها.  ١ ٣ ٦ ١٠ ١٥  $ح_{١}$ $ح_{٢}$ $ح_{٣}$ $ح_{٤}$ $ح_{٥}$ تُكوِّن الأعداد المُثلَّثة مُتتالية (غير مُنتهية): ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ...	الأعداد المُثلَّثة $ح_{ن} = \frac{١}{٢} ن (ن + ١)$
ليوناردو فيبوناتشي رياضي إيطالي لاحظ أن كثيرًا من الأنماط الطبيعية تُكوِّن المُتتالية: ١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ٢١ ، ... تُسمّى هذه الأعداد الآن أعداد فيبوناتشي. قانون الحد إلى الحد لهذه الأعداد هو (اجمع العددَين السابقَين لتحصل على الحدّ التالي مُباشرة).	أعداد فيبوناتشي
تُسمّى المُتتالية، التي يُمكن عرض المُخطَّط لحدودها من خلال الضرب أو القسمة، **مُتتالية أُسّيَّة**.  هذه هي قوى العدد ٢، أي يمكن كتابة المُتتالية في صورة $٢^{ن}$ (سُمّيت المُتتالية بالمتتالية الأسّية، لأن ن في هذه الحالة تُمثِّل أسًّا). $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، $\frac{١}{٨١}$ ، $\frac{١}{٢٤٣}$ ، ... الحد العام لهذه المُتتالية هو $\left(\frac{١}{٣}\right)^{ن}$	المُتتاليات الأُسّية

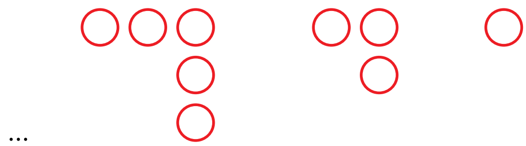
تمارين ٩-١-ج

١) أوجد الحدّ العام، ثم الحد ٣٠٠ لكلّ من المتتاليات الآتية:

أ

عدد العيدان	٤	٧	١٠

ب

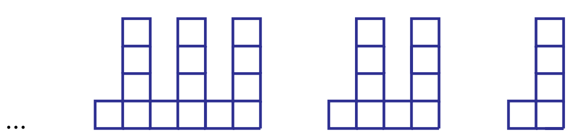


عدد الدوائر	١	٣	٥

ج

عدد المُثلّثات	٥	٨	١١

د



عدد المربعات	٥	١٠	١٥

٩-٢ المجموعات

٩-٢-أ مفاهيم عامَّة حول المجموعات

المجموعة هي قائمة أو تجمّع من الأشياء التي تتشارك في إحدى الخواص. يمكن للأشياء في المجموعة أن تكون أيّ شيء: من الأعداد والحروف والأشكال إلى الأسماء والأماكن؛ ولكنها في العادة تتشارك فيما بينها.

توضع قائمة **العناصر** في المجموعة داخل حاصرتَين { }.

أمثلة على المجموعات:

{٢، ٤، ٦، ٨، ١٠}: مجموعة كل الأعداد الصحيحة الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من ١١

{أ، و، ي}: مجموعة أحرف العلّة في اللغة العربية.

{أحمر، أخضر، أزرق}: المجموعة التي تتضمَّن الألوان الأحمر والأخضر والأزرق.

وتُستخدَم عادة الحروف لتسمية المجموعات:

إذا كانت ا مجموعة الأعداد الأوّلية الأقلّ من ١٠، فإن ا = {٢، ٣، ٥، ٧}

إذا كانت ب مجموعة أحرف كلمة 'رياضيات'، فإن ب = {ر، ي، ا، ض، ت}

تتساوى مجموعتان إذا تضمّنتا العناصر نفسها، حتى لو كان ترتيب العناصر مُختلفًا. وعليه فإن:

{١، ٢، ٣، ٤} = {٤، ٣، ٢، ١} = {٢، ٤، ١، ٣}، وهكذا ...

يُكتب عدد العناصر في المجموعة على صورة ع(ف)، حيث ف اسم المجموعة. مثلاً، تحتوي المجموعة ف = {١، ٣، ٥، ٧، ٩} على خمسة عناصر، أي ع(ف) = ٥

المجموعة التي لا تحتوي على عناصر تُسمّى **المجموعة الخالية**. يُستخدم الرمز $\varnothing$ أو { } لتمثيل المجموعة الخالية، وتُقرأ فاي.

مثلًا:

{الأعداد الفردية من مُضاعفات العدد ٢} = $\varnothing$ لعدم وجود أي عدد فرديّ من مُضاعفات العدد ٢

والآن، إذا كان س عنصرًا في المجموعة ف، فتُكتب: س $\in$ ف وتُقرأ س تنتمي إلى ف.

إذا لم تكن س عنصرًا في المجموعة ف، فتُكتب: س $\notin$ ف وتُقرأ س لا تنتمي إلى ف.

مثلاً: إذا كان ع = {أحمر، أخضر، أصفر، أسود}، فإن:

أحمر $\in$ ع في حين أن أبيض $\notin$ ع.

عند كتابة المجموعات، لا تنسَ كتابة الحاصرتَين في كلا الطرفَين.

لاحظ أن عناصر المجموعة لا تتكرَّر.

تُعرف المجموعة الخالية بالمجموعة التي لا تحوي أي عنصر.
يمكن استخدام { } للدلالة على المجموعة الخالية.
يوجد رمز خاص يدلّ على المجموعة الخالية، وقد أُخذ هذا الرمز من الأبجدية الدانماركية والنرويجية، وهو الرمز ($\varnothing$) ويُقرأ فاي.

يُستخدم الرمز $\in$ للدلالة على أن عنصرًا ما ينتمي إلى مجموعة ما.
أي إن س $\in$ ب يعني أن العنصر س ينتمي إلى المجموعة ب.
إذا علمنا أن ب = {٢، ٣، ٥، ٧}، يمكننا القول أن ٥ $\in$ ب وأن ٦ $\notin$ ب

تحتوي بعض المجموعات على عناصر يمكن عدّها، وتُعرف هذه المجموعات بالمجموعات المُنتهية، وعند عدم وجود نهاية لعدد عناصر المجموعة، تُسمّى المجموعة بالمجموعة غير المُنتهية.

إذا كانت م = {الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من ٥}، يكون ع (م) = ٤، وهي مجموعة مُنتهية.

إذا كانت ب = {الأعداد الصحيحة الموجبة}، تكون ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ... } وهي مجموعة غير مُنتهية.

مُلخّص

- تُكتب عناصر المجموعة داخل حاصرتَين { }.
- ∅ أو { } تعني المجموعة الخالية.
- أ ∈ ع تعني أن أ عُنصر في المجموعة ع.
- أ ∉ ع تعني أن أ ليس عُنصرًا في المجموعة ع.
- ع(ع) هي عدد عناصر المجموعة ع.

تمارين ٩-٢-أ

١) اكتب جميع عناصر كل مجموعة فيما يلي:

أ {أيام الأسبوع}
ب {شهور السنة الميلادية}
ج {عوامل العدد ٣٦}
د {ألوان قوس قُزح}
هـ {مُضاعفات العدد ٧ الأصغر من ٥٠}
و {الأعداد الأوَّلية الأصغر من ٣٠}
ز {أحرف كلمة لعب}

٢) اكتب عُنصرَين إضافيَّين في كلّ مجموعة فيما يلي:

أ {أرنب، قط، كلب، ...}
ب {جزر، بطاطا، ملفوف، ...}
ج {لندن، باريس، مسقط، ...}
د {النيل، الأمازون، دجلة، ...}
هـ {شمندر، بقدونس، خس، ...}
و {كُرة تنس، كُرة طاولة، كُرة قدم، ...}
ز {عُمان، السعودية، الإمارات، ...}
ح {بتهوفن، موزارت، سيد درويش، ...}
ط {قُرنفل، ورد، جوري، ...}
ي {٣، ٦، ٩، ...}
ك {مُصارع، مُلاكم، عدّاء، ...}
ل {عُطارد، الزُّهرة، زُحل،...}
م {سعيد، حزين، غاضب، ...}
ن {مصر، ليبيا، تونس، ...}
س {سُداسي، سُباعي، مثلّث، ...}

٣) صِف كل مجموعة فيما يلي وصفًا كاملاً:

أ {١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ...}

ب {آسيا، أوروبا، أفريقيا، ...}

ج {٢، ٤، ٦، ٨}

د {٢، ٤، ٦، ٨، ...}

هـ {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢}

٤) ضع علامة صح أو خطأ أمام كل عبارة فيما يلي:

أ إذا كانت ت = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}، فإن ٣ $\not\in$ ت

ب إذا كانت ف = {الأعداد الأوليّة الأصغر من العدد ١٠}، فإن ع(ف) = ٤

ج إذا كانت س = {أشكال رباعية منتظمة}، فإن المربع $\in$ س

د إذا كانت ن = {الألوان الأساسية}، فإن اللون الأصفر $\not\in$ ن

هـ إذا كانت ك = {عدد مربع أصغر من العدد ١٠٠}، فإن ٦٤ $\in$ ك

٩-٢-ب المجموعة الشاملة

تتضمّن المجموعات الآتية عددًا من العناصر المُشتركة:

م = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

ن = {١، ٥، ٩}

غ = {٤، ٨، ٢١}

تشمل مجموعة الأعداد الكاملة المجموعات الثلاث السابقة، وهي مُتضمّنة أيضًا في مجموعة الأعداد الصحيحة الأصغر من ٢٢

عند التعامُل مع المجموعات، تكون هناك في العادة مجموعة (كُبرى) تحتوي على جميع المجموعات المعطاة، ويمكن أن تتغيَّر هذه المجموعة وفقًا لطبيعة المسألة التي تُحاول حلّها.

وتكون جميع عناصر المجموعات م، ن، غ مُتضمّنة في مجموعة الأعداد الكاملة، وفي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من العدد ٢٢

تسمّى كلتا المجموعتَين **المجموعة الشاملة**، وهي التي تحتوي على جميع عناصر المجموعات المعطاة. ويُستخدم الحرف ش للدلالة على المجموعة الشاملة.

المجموعة المُتمِّمة

مُتمِّمة المجموعة م هي مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الشاملة ش ولا تنتمي إلى المجموعة م ويُرمَز لها بالرمز م′.

مثلاً، إذا كانت ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}

ف = {٢، ٤، ٦}

فإن مُتمِّمة ف هي: ف′ = {١، ٣، ٥، ٧، ٨، ٩، ١٠}

مُلخَّص

- تُمثِّل ش المجموعة الشاملة، وهي التي تحتوي على جميع العناصر.
- تُمثِّل ف′ المجموعة المُتمِّمة للمجموعة ف، وهي التي تحتوي على العناصر التي تنتمي إلى المجموعة ش، ولا تنتمي إلى المجموعة ف

الاتِّحاد والتقاطُع

اتِّحاد المجموعتَين ف، ب هو مجموعة كل العناصر الموجودة في المجموعتَين.

يُستخدم الرمز $\cup$ للدلالة على الاتِّحاد، وعليه فإن اتّحاد المجموعتَين ف، ب يكتب في صورة: ف $\cup$ ب

تقاطُع المجموعتَين ف، ب هو مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتَين.

يُستخدَم الرمز $\cap$ للدلالة على التقاطُع، وعليه فإن تقاطُع المجموعتَين ف، ب يُكتب في صورة: ف $\cap$ ب

مثلاً، إذا كانت ع = {٤، ٦، ٨، ١٠}، ى = {٦، ١٠، ١٢، ١٤}، فإن:

ع $\cap$ ى = مجموعة العناصر المُشترَكة في المجموعتَين = {٦، ١٠}

ع $\cup$ ى = {٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤}

مُساعَدة

لاحظ أن اتّحاد المجموعتَين يُشبه جمع المجموعتَين معًا. يجب أن تتذكَّر عدم تكرار العناصر داخل المجموعة.

المجموعات الجُزئيَّة

لتكن المجموعة ج مجموعة كل الأشكال الرباعية، والمجموعة ب مجموعة كل المُستطيلات، والمُستطيل نوع من أنواع الأشكال الرباعية، وهذا يعني أن كلّ عنصر من ب هو عُنصر أيضًا من ع، وعليه فإن ب محتواها بالكامل في ع. عندما يحدث ذلك، تُسمّى ب **مجموعة جُزئية** من ع، وتكتب في صورة: ب $\subset$ ع. إذا صادف أن تكون ب مساوية لـ ع، تبقى أيضًا ب مجموعة جُزئية من ع، ولكن نستخدم الرمز $\subseteq$ وتكتب في صورة: ب $\subseteq$ ع، ويمكننا عكس الرموز بحيث تكون: ع $\supseteq$ ب. وإذا لم تكن ع مجموعة جُزئية من ب، نكتب ع $\not\subset$ ب.

لاحظ أن الرمز $\subset$ له نهاية مفتوحة ونهاية مُغلقة. تأتي المجموعة الجُزئية من جهة النهاية المُغلقة.

مُلخَّص

- $\cup$ هو رمز الاتحاد.
- $\cap$ هو رمز التقاطُع.
- ب $\subset$ ع تدلّ على أن ب مجموعة جُزئية من ع.
- ب $\subseteq$ ع تدلّ على أن ب مجموعة جُزئية من ع وتُساويها.
- ع $\not\subset$ ب تدلّ على أن ع ليست مجموعة جُزئية من ب.

مثـــال ٦

إذا كانت ص = {٤، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤}، ت = {٥، ٨، ٢٠، ٢٤، ٢٨}.

(١) أوجد كلاً من المجموعتَين:

أ ص $\cup$ ت ب ص $\cap$ ت

(٢) هل صحيح أن ت $\subset$ ص؟

الحـــلّ:

(١) أ	ص $\cup$ ت = {٤، ٥، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤، ٢٨}	ص $\cup$ ت = مجموعة كلّ عناصر ص أو ت، أو كلتيهما بدون تكرار.
ب	ص $\cap$ ت = {٨، ٢٠، ٢٤}	ص $\cap$ ت = مجموعة كلّ العناصر التي تظهر في كل من ص و ت معًا.
(٢)	لاحظ أن ٥ $\in$ ت ولكن ٥ $\notin$ ص لذا فإن ت $\not\subset$ ص.	إذن، فإنه ليس صحيحًا القول إن كل عُنصر في المجموعة ت هو عنصر أيضًا في المجموعة ص.

تمارين ٩-٢-ب

يمكن عكس الاتحاد والتقاطع بدون تغيير عناصرهما. مثلاً
ب ∪ ج = ج ∪ ب،
ب ∩ ج = ج ∩ ب

١) إذا علمت أن: ب = {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠}، ج = {١، ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠}.

أ اكتب عناصر:

(١) ب ∩ ج (٢) ب ∪ ج

ب أوجد:

(١) ع(ب ∩ ج) (٢) ع(ب ∪ ج)

٢) إذا علمت أن: م = {أ، ب، ج، هـ، ي، و، ع}، ن = {أ، ج، ي، ف، و، س، ص، ع}.

أ اكتب عناصر:

(١) م ∩ ن (٢) م ∪ ن

ب هل هـ عُنصر في م ∩ ن؟ وضّح إجابتك.

ج هل ج ليس عُنصرًا في م ∪ ن؟ وضّح إجابتك.

٣) إذا علمت أن: ف = {مُثلّثات مُتطابقة الأضلاع}، ص = {مُثلّثات مُتطابقة الضلعَين}

أ وضّح أن ف ⊂ ص.

ب ماذا تُمثّل المجموعة ف ∩ ص؟

٤) إذا علمت أن: ت = {١، ٢، ٣، ٦، ٧}، ص = {١، ٣، ٩، ١٠}

أ اكتب عناصر كل من المجموعتَين الآتيتَين:

(١) ت ∪ ص (٢) ت ∩ ص

ب هل صحيح أن ٥ ∌ ت؟

٥) إذا كانت ش = {أرنب، قط، كلب، بقرة، سلحفاة، فأر، خروف}،
ل = {أرنب، بقرة، فأر}، ن = {قط، كلب}:

أ اكتب عناصر المجموعة ل′

ب اكتب عناصر المجموعة ن′

ج اكتب عناصر المجموعة ل′ ∪ ن′

د ماذا تمثِّل المجموعة ل ∩ ن؟

هـ أوجد المجموعة (ل′)′

و ماذا تُمثِّل المجموعة ل ∪ ل′؟

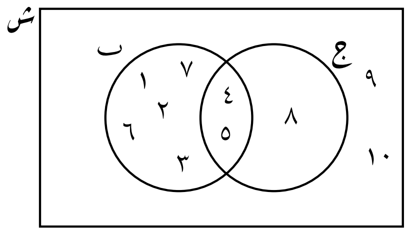
لاحقًا

ستستخدم مخطط ڤن عند دراستك لموضوع الاحتمالات.

٩-٢-ج مُخطَّط ڤِن

بدأ عالم الرياضيات جون ڤِن عام ١٨٨٠م باستخدام الدوائر المُتداخلة لتوضيح العلاقات بين المجموعات، وتعرف تلك المُخطَّطات **بمُخطَّطات ڤن**.

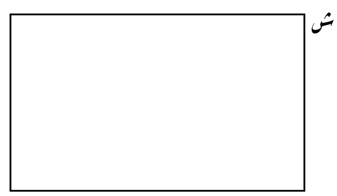
مثلاً، إذا كانت **ش** = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}، ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}، ع = {٤، ٥، ٨}، فإن مُخطَّط ڤِن سيظهر كما في الشكل الآتي:



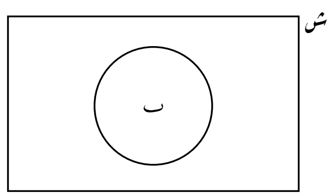
لاحظ أن المجموعة الشاملة معروضة في مستطيل، وأن أيّ مجموعة ضمن المجموعة الشاملة معروضة في دائرة، كما أن تقاطُع المجموعتَين ب، ع موجود في تداخُل الدائرتَين.

تذكّر دائمًا أن ترسم مستطيلاً خارجيًّا يُمثّل المجموعة الشاملة ش.

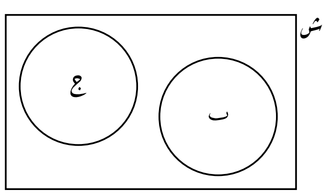
إليك بعض الأمثلة على مخطّطات ڤِن، حيث يتمّ تظليل بعض المناطق لتمثيل مجموعات مُحدَّدة:



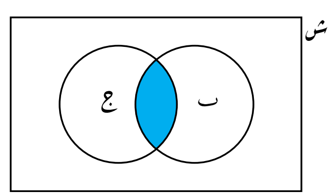
يُمثّل المُستطيل المجموعة الشاملة **ش**.



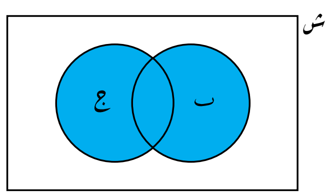
تُمثّل الدائرة المجموعة ب.



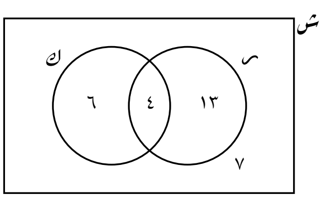
المجموعتان ب، ع مُتباعدتان، أي ليس بينهما عناصِرُ مشتركة.



تمثّل المجموعة ب ∩ ع بالمنطقة المُظلّلة.



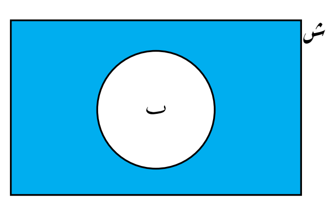
تمثّل المجموعة ب ∪ ع بالمنطقة المُظلّلة.



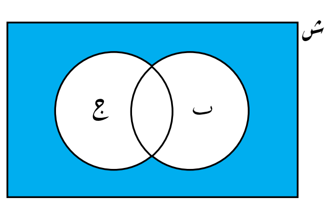
يُمكن أيضًا استخدامُ مُخطّطات ڤن لتوضيح عدد العناصر ع(ب) في المجموعة ب. في الرسم أعلاه:

س = {عدد الطلاب الذين يدرسون الفيزياء}

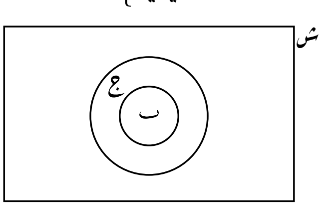
ك = {عدد الطلاب الذين يدرسون الكيمياء}



تمثل ب′، المجموعة المُتمِّمة للمجموعة ب، بالمنطقة المُظلّلة.



تمثّل (ب ∪ ع)′، المجموعة المُتمِّمة للمجموعة ب ∪ ع، بالمنطقة المُظلَّلة.



ب ⊂ ع.

مثـــال ٧

لديك المجموعات الآتية:

ش = {أ، ب، ج، د، هـ، و، ز، ح، ط، ي، ك}

ل = {أ، ج، هـ، ح، ي}

م = {أ، ب، د، ز، ح}

أ مثّل هذه المجموعات بمُخطَّط فِن.

ب اكتب عناصر المجموعة ل ∩ م

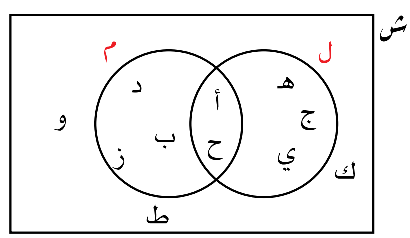
ج أوجد ع(ل ∩ م).

د اكتب عناصر المجموعة ل ∪ م

هـ أوجد ع(ل ∪ م).

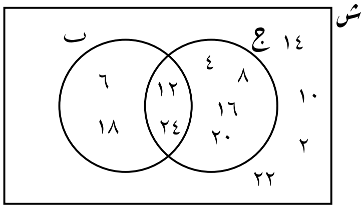
و اكتب عناصر المجموعة ل ∩ م′

الحــلّ:

أ		
ب	ل ∩ م = {أ، ح}	انظر إلى منطقة تقاطع الدائرتَين.
ج	ع(ل ∩ م) = ٢	يوجد عنصران في ل ∩ م.
د	ل ∪ م = {أ، ب، ج، د، هـ، ز، ح، ي}	ل ∪ م = مجموعة عناصر ل، م أو كلتيهما.
هـ	ع(ل ∪ م) = ٨	يوجد ٨ عناصر في ل ∪ م.
و	ل ∩ م′ = {ج، هـ، ي}	ل ∩ م′ = مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة ل ولا تنتمي إلى المجموعة م.

تمارين ٩-٢-ج

١) استخدم مُخطَّط فِن المقابل للإجابة عن الأسئلة الآتية:

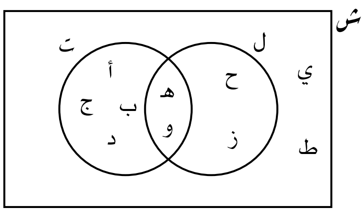


أ اكتب عناصر المجموعتَين ب، ع

ب اكتب عناصر ب ∩ ع

ج اكتب عناصر ب ∪ ع

٢) استخدم مُخطَّط فِن المقابل للإجابة عن الأسئلة الآتية:



أ اكتب العناصر التي تنتمي إلى:

(١) المجموعة ت (٢) المجموعة ل

ب اكتب العناصر التي تنتمي إلى كلتا المجموعتَين ت، ل

ج اكتب العناصر التي:

(١) لا تنتمي إلى المجموعة ت، ولا تنتمي إلى المجموعة ل

(٢) تنتمي إلى المجموعة ت، ولا تنتمي إلى المجموعة ل

٣) ارسم مُخطَّط فِن لتعرض المجموعات الآتية، واكتب كلّ عنصر في مكانه المناسب:

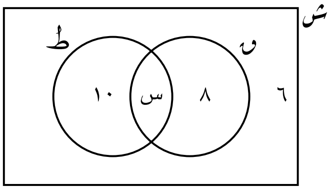
أ المجموعة الشاملة هي {أ، ب، ج، د، هـ، و، ز، ح}

م = {ب، ج، و، ز}، ن = {أ، ب، ج، د، و}

ب ش = {الأعداد الصحيحة من ٢٠ إلى ٣٦}

م = {مُضاعفات العدد ٤}، ن = {الأعداد الأكبر من العدد ٢٩}

٤) يعرض مُخطَّط فِن المُقابِل أعداد الطلاّب في أحد الصفوف والتي تُمثّل المجموعات التالية:



المجموعة الشاملة هي: {عدد طلاب أحد الصفوف}.

ط = {الطلاب الذين يُفضِّلون الكُرة الطائرة}

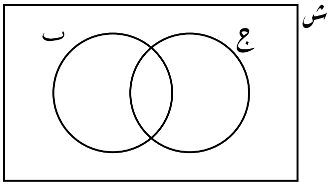
ن = {الطلاب الذين يُفضِّلون كُرة القدم}

علماً بأنه يوجد ٣٠ طالبًا في الصف.

أ أوجد قيمة س.

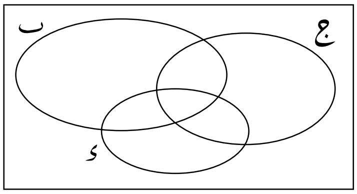
ب ما عدد الطلاب في الصف الذين يُفضِّلون الكُرة الطائرة؟

ج كم طالبًا في الصف لا يلعب كُرة القدم؟



٥) انسخ مُخطَّط فِن المُقابِل، وظلِّل المنطقة التي تُمثِّل المجموعة ب ∩ ع′.

٦) ارسم ٧ نسخ من مُخطَّط فِن المقابل، وظلِّل المناطق التي تُمثِّل المجموعات الآتية:



- **أ** ب ∪ ج
- **ب** ب ∪ ج ∪ د
- **ج** ب ∪ ج′
- **د** ب ∩ (ج ∪ د)
- **هـ** (ب ∪ ج) ∩ د
- **و** ب ∪ (ج ∪ د)′
- **ز** (ب ∩ د) ∪ (ب ∩ ج)

٧) صف فيه ٣٠ طالبًا، ٢٢ طالبًا منهم يُفضِّلون القصص التاريخيّة، و١٢ طالبًا يُفضِّلون القصص الأدبيّة، و٥ طلاب لا يُفضِّلون أيًّا منهما. استخدم مُخطَّط فِن لتجد عدد الطلاب الذين يُفضِّلون القصص التاريخيّة والقصص الأدبيّة معًا.

٩-٢-د صيغة الصفة المُميَّزة

لقد تعرفت أنه يمكننا أن نعرض المجموعة في صورة قائمة من العناصر، أو من خلال وصفها باستخدام قاعدة (بالكلمات) ليتّضح ما إذا كان عُنصر ما ينتمي إلى المجموعة أو لا. يمكننا أيضاً وصف المجموعات باستخدام **صيغة الصفة المُميَّزة**، حيث تُعد صيغة الصفة المميّزة طريقة لوصف عناصر المجموعة باستخدام الخصائص التي يمتلكها كل عنصر.

مثلًا:

ب = {س:س عدد طبيعي}

هذا يعني:

ب = {س:س عدد طبيعي}

المجموعة ب هي مجموعة — كلّ قيم (س) — حيث — كلّ قيمة لـ س هي عدد طبيعيّ

بمعنى آخر، المجموعة ب = {١، ٢، ٣، ٤، ...}

قد تتضمَّن صيغة الصفة المميزة للمجموعة قيودًا مختلفة:

مثلًا، ب = {س:س حرف من حروف الأبجدية العربية، س حرف علة}

في هذه الحالة، ب = {أ، و، ي}.

إليك مثال آخر:

ع = {عدد صحيح أكبر من صفر وأصغر من ٢٠}

تُكتب هذه المجموعة في صيغة الصفة المميزة على نحو:

ع = {س:س عدد صحيح، ٠ < س < ٢٠}

وتُقرأ: ع هي مجموعة كل قيم س، حيث س عدد صحيح، س أكبر من صفر وأصغر من العدد ٢٠

ستُساعدك الأمثلة الآتية لتألف الطريقة التي تُستخدَم فيها صيغة الصفة المُميّزة وكيفية قراءتها.

مثــال ٨

اكتب عناصر المجموعة ع، حيث ع = {س: س ∋ الأعداد الأوّلية، ١٠ < س < ٢٠}

الحــلّ:

ع = {١١، ١٣، ١٧، ١٩}	تُقرأ: 'المجموعة ع هي مجموعة كل قيم س، حيث س عدد أوليّ، س أكبر من العدد ١٠ وأصغر من العدد ٢٠' الأعداد الأوّلية الأكبر من العدد ١٠ والأصغر من العدد ٢٠ هي ١١، ١٣، ١٧، ١٩

مثــال ٩

اكتب المجموعة الآتية في صيغة الصفة المُميّزة:

ع = {المُثلَّثات القائمة الزاوية}

الحــلّ:

∴ ع = {س: س مثلّث قائم الزاوية}	إذا كانت ع مجموعة كل المُثلَّثات القائمة الزاوية، فإن ع هي كل قيم س، حيث س مثلَّث قائم الزاوية.

كما تلاحظ من المثال الأخير، قد تدفعك صيغة الصفة المُميّزة للمجموعة أحيانًا إلى الكتابة أكثر، ولكن ذلك لا يصحّ دائمًا.

تمارين ٩-٢-د

١) اكتب كلاًّ من المجموعات الآتية باستخدام صيغة الصفة المُميّزة:

- **أ** الأعداد المُربَّعة الأصغر من ١٠١
- **ب** أيام الأسبوع.
- **ج** الأعداد الصحيحة الأصغر من الصفر.
- **د** كل الأعداد الصحيحة الواقعة بين العددَين ٢، ١٠
- **هـ** أشهر السنة الميلادية التي تتضمَّن ٣٠ يومًا.

٢) اكتب كلاًّ من المجموعات الآتية مُستخدِمًا الصفة المُميّزة:

- **أ** {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}
- **ب** {أ، و، ي}
- **ج** {ع، ب، د، ا، ل، ر، ح، ي، م}
- **د** {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠}
- **هـ** {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ٩، ١٢، ١٨، ٣٦}

٣) اكتب عناصر كلّ مجموعة من المجموعات الآتية:

- **أ** {س: س عدد صحيح، ٤٠ < س < ٥٠}
- **ب** {س: س مُضلَّع مُنتظم، وعدد أضلاع س لا يزيد عن ستة أضلاع}
- **ج** {س: س من مُضاعفات العدد ٣ ، ١٦ < س < ٣٢}

٤) صِف كلّ مجموعة فيما يلي بالكلمات، واذكر لماذا لا يمكن كتابة جميع عناصرها:

أ ب = {(س، ص): ص = ٢س + ٤} **ب** ع = {س: س^{٢} عدد سالب}

تكون صيغة الصفة المُميّزة مفيدة جدًّا عندما لا يكون مُمكنًا ذكر جميع عناصر المجموعة، لأن المجموعة غير منتهية؛ ومثال ذلك: كلّ الأعداد الأصغر من ⁻٣ أو كل الأعداد الكاملة الأكبر من ١٠٠٠

٥) إذا كانت ب = {س: س مُضاعف من مُضاعفات العدد ٣}، ع = {ص:ص مُضاعف من مُضاعفات العدد ٥}، اكتب ب ∩ ع مُستخدمًا صيغة الصفة المُميّزة.

٦) ش = {ص:ص عدد موجب، ص عدد صحيح أصغر من ١٨}
ب = {د:د < ٥}، ع = {س:س ⩾ ٥}

- **أ** اكتب عناصر كل مجموعة فيما يلي:
  (١) ب ∩ ع (٢) بَ (٣) بَ ∩ ع (٤) ب ∩ عَ (٥) (ب ∩ ع)َ
- **ب** ماذا تمثِّل المجموعة ب ∪ ع؟
- **ج** اكتب عناصر المجموعة في الجُزئية (ب).

مُلخَّص

ما يجب أن تعرفه:

- المُتتالية هي مجموعة من العناصر دُوِّنت بترتيب مُعيَّن، مع وجود صيغة تربط بينها.
- الحد هو قيمة (عُنصر) في المُتتالية.
- إذا كانت رُتبة الحد في المُتتالية هي الحرف ن، يمكن إيجاد قانون للحصول على الحد النوني (الحد العام).
- المجموعة هي قائمة أو تجمّع من الأشياء (العناصر) التي تتشارك في إحدى الخواص.
- العُنصر هو عضو في المجموعة.
- تُسمّى المجموعة، التي لا تحتوي على أية عناصر، بالمجموعة الخالية (∅).
- تحتوي المجموعة الشاملة (ش) على جميع العناصر المُمكنة والمُناسبة في مسألة مُعيَّنة.
- مُتمِّمة المجموعة هي العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الشاملة ش ولا تنتمي إلى المجموعة.
- يمكن ضمّ عناصر مجموعتَين (دون تكرار)، لتشكيل اتّحاد المجموعتَين (∪).
- تُسمّى المجموعة التي تحتوي على العناصر المُشتركة بين مجموعتَين، بتقاطُع المجموعتَين (∩).
- تُسمّى عناصر المجموعة الجُزئية الموجودة جميعها ضمن مجموعة أوسع بالمجموعة الجُزئية (⊂).
- مُخطَّط فِن هو أسلوب تصويري لعرض المجموعات.
- تُسمّى الطريقة المُختصرة لوصف عناصر المجموعة بصيغة الصفة المميزة.

يجب أن تكون قادرًا على:

- استكمال مُتتالية.
- وصف صيغة لاستكمال مُتتالية.
- إيجاد الحد النوني (الحد العام) لمُتتالية.
- استخدام الحد النوني لإيجاد حدود مُتتالية ما.
- تحديد إن كان عدد مُعيَّن حدًّا في مُتتالية أو لا.
- إنشاء مُتتاليات من أنماط الأشكال الهندسية.
- إيجاد صيغة لعدد الأشكال المُستخدَمة في متتالية ما.
- وصف مجموعة باستخدام الكلمات.
- إيجاد مُتمِّمة مجموعة.
- إيجاد اتّحاد مجموعتَين وتقاطعهما.
- تمثيل عناصر مجموعة ما باستخدام مُخطَّط فِن.
- حلّ المسائل باستخدام مُخطَّط فِن.
- وصف مجموعة باستخدام صيغة الصفة المُميَّزة.

تمارين نهاية الوحدة

١) أ إذا كان الحد العام لمُتتالية هو ٢ن − ١، اكتب أول عشرة حدود فيها.

ب إذا كان الحد العام لمُتتالية أخرى هو ٣ن − ٢، اكتب أوَّل عشرة حدود فيها.

ج اكتب الحدود المُشترَكة بين المُتتاليتين في الجُزئيَّتين أ، ب

د اكتب الحد العام للمُتتالية الجديدة التي ظهرت في الجُزئيَّة ج.

٢) أ الحدود الخمسة الأولى في مُتتالية هي: ٦، ١٠، ١٤، ١٨، ٢٢. اكتب حدّها العام.

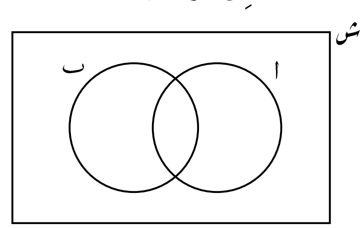
ب إذا كان الحدّ لمُتتالية أخرى هو ٦ن + ١٣، اكتب أوَّل خمسة حدود فيها.

ج هل يوجد حدود مُشترَكة بين المُتتاليتين في الجُزئيَّتين أ، ب. كيف تُفسِّر ذلك؟

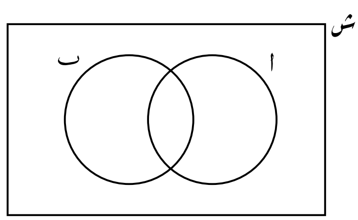
٣) إذا كان الحد العام في متتالية هو ٥ن − ٢
اكتب أوَّل أربعة حدود في المتتالية.

٤) فيما يلي أوَّل أربعة حدود في متتالية أخرى:
$^-$١ ، ٣ ، ٧ ، ١١
اكتب الحد العام لهذه المُتتالية.

٥) انسخ مُخطَّط ڤِن، وظلِّل المنطقة المطلوبة في كلّ ممّا يلي:

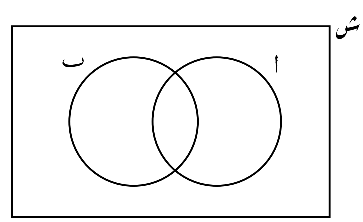
أ


ا ∪ ب

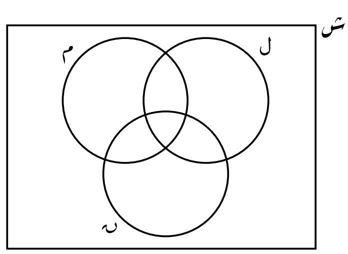
ب


ا ∩ ب′

٦) انسخ مُخطَّط ڤِن، وظلِّل المنطقة المطلوبة في كلّ ممّا يلي:

أ


(ا ∩ ب)′

ب


(ل ∪ م) ∩ ن

مصطلحات علمية

أ

الاتِّحاد Union: مجموعة كل العناصر الموجودة في مجموعتَين أو أكثر، يُستخدم الرمز ∪ للدلالة على الاتِّحاد. (ص ٢٥١)

الأسّ/الأسس Index/ indices: كلمة أخرى للقوى، وتعني عدد المرّات التي يتمّ فيها ضرب الأساس في نفسه. (ص ٨٤)

الأساس Base: العدد المضروب في نفسه عدَّة مرّات وفقًا للأسّ. (ص ٨٤)

الأعداد المُوجَّهة Directed numbers: الأعداد التي لها اتِّجاهات، عندما يكون أحد الاتِّجاهين موجبًا، يكون الاتِّجاه المُعاكِس له سالبًا. مثلاً، $^{-}$٤٠° س هو عدد مُوجَّه. (ص ٣٠)

الانسحاب Translation: حركة الشكل الأصلي مسافة مُحدَّدة، وباتِّجاه مُحدَّد، على طول خطّ مستقيم. (ص ٢٢٢)

الانعكاس Reflection: صورة مرآة للشكل، بحيث تبعد النقاط الواقعة على الشكل الأصلي وصورها المسافة نفسها عن محور الانعكاس. (ص ٢١٤)

ب

البسط Numerator: العدد العُلْوي في الكسر. (ص ٤٣)

ت

التحليل إلى عوامل Factorise/Factorisation: إعادة كتابة العبارة الجبرية باستخدام الأقواس. (ص ١٤٨)

التحويل الهندسيّ Transformation: تغيُّر في موقع وأبعاد نقطة أو مستقيم أو شكل، باتِّباع قاعدة مُعطاة. (ص ٢١٣)

التعامُد Perpendicular: عندما يتقاطع شعاعان أو مستقيمان ويشكِّلان زاوية قائمة، فإن كلاًّ منهما يكون مُتعامدًا مع الآخر. (ص ٩٨)

التعويض Substitution: استبدال حرف بعدد في صيغة أو عبارة جبرية. (ص ٧٠)

التقاطُع Intersection: في المجموعات، هو مجموعة العناصر المُشترَكة بين مجموعتَين أو أكثر، يُستخدَم الرمز ∩ للدلالة على التقاطُع. في الجبر، هو نقطة التقاء مستقيمَين. (ص ٢٥١)

التقدير Estimate: حلّ تقريبي لعملية حسابية تمَّ إيجاد ناتجها باستخدام القيَم التقريبية. (ص ١٣٤)

التكبير Enlargement: حركة الشكل الأصلي بحيث تبقى نسبة الأضلاع المُتناظِرة نفسها، ولكن أطوال الأضلاع تتزايد أو تتناقص، وينتج تشابُه الشكل الأصلي مع صورته. (ص ٢١٣)

التماثُل Symmetry: الحصول على الشكل نفسه بموقع مختلف، إما من خلال الانعكاس حول محور، أو الدوران حول نقطة. (ص ٢٠٦)

التماثُل حول محور Line of symmetry: مستقيم يقسم شكل ثنائي الأبعاد ليتطابق أحد النصفَين تمامًا مع النصف الآخر. (ص ٢٠٦)

التماثُل حول مُستوى Plane symmetry: مُسطَّح مُستوٍ يقسم مُجسَّمًا ثُلاثيّ الأبعاد ليتطابق أحد النصفين تمامًا مع النصف الآخر. (ص ٢١٠)

التماثُل الدورانيّ Rotational symmetry: التماثُل بدوران الشكل حول نقطة ثابتة، بحيث يتطابق مع نفسه تمامًا في عدّة مواقع خلال الدوران. (ص ٢١٢)

التوازي Parallel: توازي مستقيمَين يعني أنّهما لا يتقاطعان أبدًا. وتكون المسافة الأقصر بين مُستقيمَين متوازيَين هي نفسها دائمًا. (ص ٩٨)

ث

الثابت Constant: هو الحد الوارد في المُعادلة الخطيّة، وهو عبارة عن عدد، ويشير بيانيًّا إلى الجزء المقطوع من محور الصادات. (ص ١٨٨)

ج

الجبر Algebra: استخدام الحروف والرموز الأخرى لكتابة معلومات رياضيّة. (ص ٦٩)

الجذر التربيعي Square root: الجذر التّربيعي لعدد هو العدد الذي تمَّ ضربه في نفسه للحصول على مُربّع العدد. (ص ٢٦)

الجذر التكعيبي Cube root: الجذر التّكعيبي لعدد هو العدد الذي تمَّ ضربه في نفسه ثم ضرب الناتج في العدد الأصلي مرّة أخرى للحصول على مُكعّب العدد. (ص ٢٦)

الجزء المقطوع من المحور السيني X-intercept: النقطة التي يقطع فيها مُستقيم أو مُنحنى المحور السيني. (ص ١٩٦)

الجزء المقطوع من المحور الصادي Y-intercept: النقطة التي يقطع فيها مستقيم المحور الصادي، ويُساوي الحد الثابت في المُعادَلة. (ص ١٨٨)

ح

الحدّ Term: جزء من العبارة الجبرية أو الأعداد والحروف والأشياء المنفردة في المُتتالية. (ص ٧٠)

الحد الأدنى Lower bound: أصغر قيمة حقيقية يمكن أن يصل إليها عدد ما (بحسب درجة الدقَّة المُعطاة). (ص ١٣٦)

الحد الأعلى Upper bound: أكبر قيمة حقيقية يمكن أن يصل إليها عدد ما (بحسب درجة الدقّة المُعطاة). (ص ١٣٦)

الحدّ النوني/ الحدّ العام nth term rule: هو القاعدة التي تُعطي كلّ حدّ بحسب رُتبته. (ص ٢٤١)

د

الدائرة Circle: مجموعة من النقاط المستوية التي تبعد مسافة واحدة (نصف القطر) عن نقطة ثابتة مُعطاة (المركز). (ص ٩٦)

الدوران Rotation: حركة الشكل، دائريًّا، حول نقطة ثابتة بزاوية دوران معلومة. (ص ٢١٣)

الدورة الكاملة Revolution: دورة قياسها ٣٦٠° (ص ٩٩)

ر

رُتبة التماثُل الدورانيّ Order of rotational symmetry: عدد مرّات تطابُق الشكل مع نفسه خلال دورة كاملة. (ص ٢٠٧)

الرمز Symbol: طريقةٌ مُختصرَة لكتابة المعلومات الرياضية مثل (=) الذي يعني المساواة. (ص ١٧)

ز

الزاوية Angle: تتشكَّل الزاوية عند اتِّحاد شُعاعَين أو خطَّيْن مُستقيمَين في نقطة واحدة. (ص ٩٨)

الزاويتان المُتبادَلتان Alternate angles: زاويتان مُتساويتان تتشكَّلان عندما يقطع قاطع خطَّين مُستقيمَين متوازيَين وتقعان على جهتَين مختلفتَين من القاطع ومن المُستقيمَين المتوازيَين. (ص ١٠٦)

الزاويتان المُتحالِفتان Co-interior angles: زاويتان تتشكَّلان عندما يقطع قاطع خطَّين مُستقيمَين متوازيَين. تكون الزاويتان المتحالِفتان متكاملتَين (مجموع قياسَيهما ١٨٠°) وتقعان في جهة واحدة من القاطع. (ص ١٠٦)

الزاويتان المُتناظِرتان Corresponding angles: زاويتان مُتساويتان في القِياس تتشكَّلان عندما يقطع قاطع خطَّين مُستقيمَين متوازيَين وتقعان على نفس الجهة من المستقيم القاطع ومن المستقيمَين المُتوازيين. كذلك تظهر الزوايا المُتناظِرة في المُثلَّثات المُتطابِقة والمُتشابِهة والأشكال المُتشابِهة. (ص ١٠٦)

الزاويتان المُتقابِلتان بالرأس Vertically oppsite angles: زاويتان مُتساويتان في القِياس، تتشكَّلان عندما يتقاطع خطّان مُستقيمان وهما مشتركتان في الرأس والضلعَين، وتكونان مُتقابلتَين في الاتِّجاه. (ص ١٠٤)

الزاوية الحادّة Acute angle: زاوية قياسها ٠° < س < ٩٠° (ص ٩٩)

الزاوية الخارجيّة Exterior angle: الزاوية التي تتشكَّل من ضلع في مُضلَّع وامتداد ضلع مجاور له. (ص ١١٨)

الزاوية الداخليّة Interior angle: زاوية داخل مُضلَّع. (ص ١١٨)

الزاوية القائمة Right angle: زاوية قياسها ٩٠° بالضبط. (ص ٩٩)

الزاوية المُحيطية Inscribed angle: زاوية رأسها يقع على محيط الدائرة. (ص ٩٦)

الزاوية المركزية Central angle: زاوية رأسها يقع على مركز الدائرة. (ص ٩٦)

الزاوية المستقيمة Straight angle: زاوية قياسها ١٨٠° (ص ٩٩)

الزاوية المُنعكسة Reflex angle: زاوية قياسها ١٨٠° < س < ٣٦٠° (ص ٩٩)

الزاوية المُنفرجة Obtuse angle: زاوية قياسها ٩٠° < س < ١٨٠° (ص ٩٩)

ش

الشكل الرباعيّ Quadrilateral: مُضلَّع له أربعة أضلاع. (ص ١٢٢)

ص

الصورة Image: الموقع الجديد لنقطة أو شكل هندسي بعد تنفيذ تحويل هندسي. (ص ٢١٣)

الصيغة Formula: قاعدة عامة تربط بين المُتغيّرات جبريًّا (مثل كيفية إيجاد مساحة شكل هندسي). (ص ٧٠)

صيغة الصفة المُميَّزة Set builder notation: طريقة لوصف عناصر المجموعة باستخدام الخصائص التي يمتلكها كل عُنصُر، دون الاضطرار إلى ذكرها جميعًا. (ص ٢٥٧)

الصيغة العلمية Scientific notation: طريقة قصيرة للتعبير عن الأعداد الصغيرة جدًّا والكبيرة جدًّا. (ص ٥٤)

ع

العامل Factor: عدد يقسم عددًا آخر بدون باقٍ. (ص ١٦)

العامل الأوَّلي Prime factor: عدد أوَّلي يقبل القسمة على عدد آخر بدون باقٍ. (ص ٢٠)

العامل المُشترَك Common factor: حدّ يمكن قسمة حدَّين أو أكثر عليه بدون باقٍ. (ص ١٤٨)

العبارة Expression: هي مجموعة من الحدود المُرتبطة بإشارات العمليات الحسابية. (ص ٧٠)

العدد الأوَّلي Prime number: عدد كامل أكبر من ١، وله عاملان فقط: العدد نفسه و ١ (ص ١٦)

العدد الحقيقي Real number: تشمل الأعداد الحقيقيَّة الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية. (ص ١٦)

العدد الصحيح Integer: تشمل الأعداد الصحيحة الأعداد الكاملة الموجبة والسالبة والصفر. (ص ١٦)

العدد الطبيعي Natural number: الأعداد الطبيعية هي الأعداد الكاملة من ١ إلى ما لا نهاية. (ص ١٦)

العدد العشري الدوري Recurring decimal: عدد عشري يستمر فيه أي جزء من الجزء العشري دون توقُّف، ولكن يُكرِّر نفسه بفترات مُنتظِمة. (ص ٦٢)

العدد العشري المُنتهي Terminating decimal: عدد عشري لا يستمرّ فيه أي جزء من الجزء العشري، بل يتوقَّف. (ص ٦٢)

العدد غير الأوّلي Composite numbers: عدد صحيح له أكثر من عاملَين، أي أن له أكثر من العاملَين ١ ونفسه. (ص ١٩)

العدد الكسريّ Mixed number: عدد يتضمَّن جزءًا كاملاً وجزءًا كسريًّا. (ص ٤٥)

العدد النسبي Rational number: عدد يمكن التعبير عنه في صورة كسر، بسطه ومقامه عددان صحيحان، ومقامه لا يُساوي الصفر. (ص ٦٢)

العنصر Element: عضو في المجموعة. (ص ٢٤٨)

ف

فكّ الأقواس Expand/ expansion: ضرب كل عدد أو مُتغيِّر خارج القوسَين في جميع الحدود داخل القوسَين. (ص ٨٠)

ق

قانون الحد إلى الحد Term-to-term rule: قانون يُعطي الحدّ التالي في المُتتالية. (ص ٢٤٠)

القطاع Sector: جزء من الدائرة يتحدَّد بنصفَي قُطرَيْن والقوس المحصور بينهما. (ص ٩٦)

القطر Diameter: قطعة مستقيمة يقع طرفاها على محيط الدائرة وتمرّ بمركز الدائرة. (ص ٩٦)

القطعة الصغرى Minor segment: جزء من الدائرة يقع بين وتر وقوس في الدائرة قياسه أصغر من نصف الدائرة. (ص ٩٦)

القطعة الكبرى Major segment: جزء من الدائرة يقع بين وتر وقوس في الدائرة قياسه أكبر من نصف الدائرة. (ص ٩٦)

القطعة المُستقيمة Line segment: الجزء من المُستقيم الذي يصل بين نقطتَين عليه. (ص ١٩٩)

القوى Powers: تعبير آخر عن 'الأسّ' يعني عدد المرّات التي يتمّ فيها ضرب الأساس في نفسه. (ص ٨٤)

القوس Arc: جزء من محيط الدائرة. (ص ٩٦)

ك

الكسر Fraction: هو جُزء من الكل. (ص ٤٣)

الكسر الاعتيادي Vulgar fraction: كسر بسطه أصغر من مقامه. (ص ٤٣)

الكسر غير الاعتيادي Improper fraction: كسر بسطه أكبر من مقامه أو يساويه. (ص ٤٣)

الكسر في أبسط صورة Fraction in simplest form: كسر مكافئ حيث لا يوجد بين البسط والمقام عامل مشترك غير العدد واحد. (ص ٤٣)

الكسر المُكافئ Equivalent fraction: هو كسر يتشكَّل عند ضرب أو قسمة البسط والمقام لكسر ما على عدد (غير الصفر). (ص ٤٣)

م

المُثلَّث Triangle: مضلّع له ثلاثة أضلاع. (ص ١١٧)

المجموعة Set: هي قائمة أو تجمّع من الأشياء التي تتشارك في إحدى الخصائص. (ص ٢٤٨)

المجموعة الجُزئية Subset: مجموعةٌ عناصرها موجودة في مجموعة أخرى (أكبر عادة). (ص ٢٥١)

المجموعة الخالية Empty set: المجموعة التي لا تحتوي على عناصر. (ص ٢٤٨)

المجموعة الشاملة Universal set: المجموعة التي تحتوي على جميع عناصر المجموعات المعطاة. (ص ٢٥٠)

المجموعة المُتمِّمة Complement: هي مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الشاملة، ولا تنتمي إلى المجموعة المعطاة. (ص ٢٥١)

المُتباينة Inequality: عدم تساوٍ بين مقدارَين. مثل س > ٦ (ص ١٧٢)

المُتتالية Sequence: قائمة مُرتَّبة من الأعداد أو الحروف أو الأشياء التي دُوِّنت بترتيب مُعيّن، مع وجود روابط بينها. (ص ٢٤٠)

المُتَّجِه Vector: كمّية لها اتِّجاه وطول. (ص ٢٢٢)

المُتغيِّر Variable: حرف في الصيغة أو المُعادلة له قيَم مختلفة. (ص ٧٠)

المُتماثِل Symmetrical: شكل له خاصّية التماثُل. (ص ٢٠٦)

محور التماثُل Axis of symmetry: مستقيم يقسم شكل ثُنائيّ الأبعاد إلى نصفَين أو عصا في مُجسّم يدور حولها ويظهر بنفس المظهر عند نقاط مختلفة خلال دورانه. (ص ٢١٢)

مُخطَّط فِن Venn diagram: طريقة صورية لعرض عناصر المجموعات باستخدام الدوائر (أو المُنحنَيات المُغلَقة) المُتداخِلة. (ص ٢٥٤)

مُربَّع العدد Square: ناتج ضرب عدد في نفسه. (ص ٢٦)

مركز الدوران Centre of rotation: نقطة ثابتة يدور حولها شكل ثُنائيّ الأبعاد، ويظهر الشكل نفسه بمواقع مختلفة. (ص ٢٠٧)

المستقيم Line: خطّ مستقيم يمتدُ إلى ما لا نهاية من كلا الاتِّجاهَين. (ص ٩٨)

المُضاعف Multiple: ناتج ضرب عدد في عدد صحيح موجب. (ص ١٦)

المُضلَّع Polygon: شكل مستوٍ مغلق له ثلاثة أضلاع أو أكثر، كلها مستقيمة. (ص ١٢٥)

المُضلَّع المنتظم Regular polygon: مُضلّع جميع أضلاعه مُتساوية في الطول وجميع زواياه متساوية في القياس. (ص ١٢٥)

المُضلَّع غير المنتظم Irregular polygon: مُضلَّع أضلاعه وزواياه غير متساوية في القياس. (ص ١٢٧)

المُعادَلات الآنيّة Simultaneous equations: مُعادلتان أو عدَّة مُعادلات لها حلول تصحّ في كلّ منها. (ص ١٦٠)

المُعادلة Equation: جملة رياضية تتضمَّن إشارة (=). (ص ١٦٨)

المُعادَلة الخطّيَّة Linear equation: مُعادَلة يكون فيها أُسّ المُتغيِّر يساوي ١ (ص ١٥٥)

مُعادَلة المُستقيم Equation of a line: صيغة تُبيّن العلاقة بين الإحداثيّ الصاديّ والإحداثيّ السينيّ لجميع النقاط الواقعة على المستقيم. (ص ١٨٠)

المُعامل Coefficient: في الحدّ الذي يحتوي على أعداد ومُتغيِّرات، يكون المُعامِل هو العدد المضروب في المُتغيّرات. (ص ٨٦)

المقام Denominator: العدد السُّفلي في الكسر. (ص ٤٣)

المقام المُشترَك Common denominator: قيمة مُشترَكة يتمّ تحويل مقام كسرَين أو أكثر إليها، وتُستخدَم في جمع الكسور وطرحها. (ص ٤٤)

المقلوب Reciprocal: الكسر الناتج عن تبديل البسط والمقام في الكسر، بوضع البسط في المقام والمقام في البسط. (ص ٤٦)

مُكعّب العدد Cube: ناتج ضرب عدد في نفسه، ثمّ ضرب الناتج في العدد الأصلي مرّة أخرى. (ص ٢٦)

المماس Tangent: مستقيم يمسّ الدائرة في نقطة واحدة فقط. (ص ٩٦)

مُنصِّف الزاوية Bisector: مستقيم يقسم الزاوية إلى نصفَين مُتساويَين في القياس. (ص ١١٠)

المَيل Gradient: انحدار المُستقيم، وهو النسبة بين التغيُّر في الإحداثي الصادي إلى التغيُّر في الإحداثي السيني لمُستقيم ما. (ص ١٨٥)

ن

النسبة المئويّة Percentage: هي كسر مقامه العدد ١٠٠ (ص ٥٠)

نصف القطر Radius: قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة ونقطة على مُحيط الدائرة. (ص ٩٦)

نقطة المُنتَصف Midpoint: النقطة التي تقع في مُنتصَف المسافة تمامًا بين طرفَي القطعة المستقيمة. (ص ٢٠٠)

و

الوتر Chord: قطعة مستقيمة يقع طرفاها على مُحيط الدائرة. (ص ٩٦)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

mauritius images GmbH/Alamy Stock Photo; Littlebloke/iStock/Getty Images Plus/Getty Images; Axel Heizmann/EyeEm/Getty Images; DEA PICTURE LIBRARY/De Agostini/Getty Images; TERRY MCCORMICK/Getty Images; KTSDESIGN/Science Photo Library/Getty Images; akiyoko/Shutterstock; Beata Tabak/Shutterstock; Panoramic Images/Getty Images; Image Source/Getty Images; Rathna Thamizhan/Shutterstock; Fat Jackey/Shutterstock; Vitoria Holdings LLC/Shutterstock; Mahmoud Ghazal/Shutterstock;Richard Sharrocks/Getty Images

تم بحمد الله

رقم الإيداع : ٢٩٢٢ / ٢٠٢٠ م

مزون للطباعة والنشر والتغليف (ش.م.م) - ٢٤٨١٥٦٩٣

الرياضيات

كتاب الطالب ٩

يزخر كتاب الطالب بالعديد من الموضوعات مع شرح واضح وسهل لكل المفاهيم المتضمنة في هذه الموضوعات، تليها تمارين تطبيقية لاختبار مدى فهم الطالب وللسماح له بتعزيز وممارسة المهارات الرياضية المطلوبة.

يتضمن كتاب الطالب:

- أقسام تذكر للمعرفة السابقة والتحقق من التعلم السابق
- تمارين في نهاية كل موضوع لتعزيز الفهم.
- أسئلة في نهاية كل وحدة من شأنها تأهيل الطلاب لخوض الاختبارات.
- قاموس للمصطلحات يرد في آخر الكتاب.
- تمارين ومسائل عامة تتناول جميع الموضوعات التي تم تغطيتها في كل وحدة.
- إرشادات لمساعدة الطلاب على حل التمارين، بما في ذلك الأمثلة المحلولة والملاحظات المفيدة.

يشمل منهج الرياضيات للصف التاسع من هذه السلسلة:

– كتاب النشاط
– دليل المُعلِّم

ISBN 978-99969-3-526-8
9 789996 935268 >

www.moe.gov.om