سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عمان 2040 OmanVision
نتقدم بثقة Moving Forward with Confidence

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب النشاط

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب النشاط

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445هـ - 2023م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS ، المملكة المتحدة.

تشكل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

© مطبعة جامعة كامبريدج ووزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

يخضع هذا الكتاب لقانون حقوق الطباعة والنشر، ويخضع للاستثناء التشريعي المسموح به قانونًا ولأحكام التراخيص ذات الصلة.
لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب من دون الحصول على الإذن المكتوب من مطبعة جامعة كامبريدج ومن وزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمت مواءمتها من كتاب النشاط – الرياضيات للصف الحادي عشر – من سلسلة Cambridge international AS & A level Mathematics 1، للمؤلفين موريل جايمز، ودين تشالمرز.

تمت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد الموقع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة جامعة كامبريدج.
لا تتحمل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توفُّر أو دقة المواقع الإلكترونية المستخدمة في هذا الكتاب، ولا تؤكد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه

جميع حقوق الطبع والتأليف والنشر محفوظة لوزارة التربية والتعليم

لا يجوز طبع الكتاب أو تصويره أو إعادة نسخه كاملاً أو مجزّأً أو ترجمته أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات بهدف تجاري بأي شكل من الأشكال إلا بإذن كتابي مسبق من الوزارة، وفي حالة الاقتباس القصير يجب ذكر المصدر.

المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
- طيّب اللّه ثراه -

حضرة صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المعظم
- حفظه الله ورعاه -

سلطنـــــة عُمـــــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يـا رَبَّنـا احْفَـظْ لنـا جَـلالَـةَ الـسُّـلْـطـان
وَالشَّعْـبَ فـي الأَوْطـان بِـالْـعِـزِّ والأَمـان
وَلْـيَـدُمْ مـؤَيَّـدًا عـاهِـلاً مُـمَـجَّـدًا
بِالنُّفـوسِ يُفْتَـدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فـارْتَقـي هـامَ السَّمـاء وَامْلَئي الْكَـوْنَ ضيـاء
وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخـاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مُكوِّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقرّرات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلبة، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلبة النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

كيف تستخدم هذا الكتاب؟ xii

الوحدة الأولى: المعادلات والمتباينات والدوالّ التربيعية

١–١ الإكمال إلى مربّع ١٣

١–١ أ كتابة العبارة الجبرية بطريقة الإكمال إلى مربّع ١٣

١–١ ب استخدام الإكمال إلى مُربّع لحلّ المعادلات التربيعية ١٥

١–٢ التمثيل البياني للدالّة التربيعية ١٧

١–٣ جذور المعادلة التربيعية ٢٢

١–٤ الصيغة التربيعية ٢٤

١–٥ حلّ المعادلات الآنية (معادلة خطّية ومعادلة تربيعية) ٢٧

١–٦ حلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا ٣٢

١–٧ حلّ المتباينات التربيعية ٣٦

١–٨ التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية ٤٣

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى ٤٦

الوحدة الثانية: الدوالّ

٢–١ تعريف الدالّة ٥٣

٢–٢ الدوالّ المركبة ٥٩

٢–٣ الدوالّ العكسية ٦٢

٢–٤ منحنى الدالّة ومنحنى دالّتها العكسية ٦٥

٢–٥ التحويلات الهندسية للدوالّ ٧٠

٢–٥ أ الانسحاب ٧٠

٢–٥ ب الانعكاس ٧٣

٢–٥ ج التمدّد ٧٦

٢–٦ تركيب التحويلات الهندسية ٨٠

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية ٨٦

الوحدة الثالثة: المتتاليات والمتسلسلات

٣–١ المتتاليات الحسابية ٩٠

٣–٢ المتتاليات الهندسية ٩٤

٣–٣ المتسلسلات الهندسية غير المنتهية ٩٨

٣–٤ المزيد من المتتاليات الحسابية والهندسية ١٠٣

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة ١٠٦

الوحدة الرابعة: تحليل البيانات

٤–١ الوسط الحسابي (المعدل) ١٠٧

٤–٢ التباين والانحراف المعياري ١١١

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة ١١٦

الوحدة الخامسة: الهندسة الإحداثية

٥–١ طول القطعة المستقيمة وإحداثيات نقطة منتصفها ١١٨

٥–٢ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة ١٢٢

٥–٣ معادلة الخط المستقيم ١٢٧

٥–٤ معادلة الدائرة ١٣٠

٥–٥ علاقة المستقيم بالدائرة ١٣٣

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة ١٣٦

الوحدة السادسة: المصفوفات

٦–١ المصفوفات والعمليات عليها ١٤٠

٦–٢ محدّد المصفوفة ١٤٣

٦–٣ معكوس المصفوفة ١٤٦

٦–٤ استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات ١٤٨

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة ١٥٢

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم. يعطي هذا الجزء صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تكتب المعادلة التربيعية ص = أ س^{٢} + ب س + جـ (حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠) بصيغة الإكمال إلى مربع.

٢-١ تستخدم صيغة الإكمال إلى مربع لتحدّد رأس المنحنى التربيعي، وتعرف ما إذا كانت القيمة عظمى أو صغرى.

٣-١ تجد المميّز، وتستخدمه لتجد عدد الجذور في المعادلة التربيعية.

٤-١ تحلّ المعادلات التربيعية بمجهول واحد باستخدام الصيغة التربيعية.

٥-١ تحلّ معادلتين إحداهما تربيعية والأخرى خطية آنيًّا.

الأهداف التعليمية: تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

مساعدة

- يمس المستقيم المنحنى عندما ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠
- يتقاطع المستقيم مع المنحنى في نقطتين عندما ب^{٢} − ٤ أ جـ > ٠

مساعدة: إطارات تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول محتوى الكتاب.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

★ **١)** حاولت سعاد وملاك حلّ معادلة تربيعية في صورة س^{٢} + ب س + جـ = ٠

لسوء الحظ، أخطأت سعاد في قراءة قيمة ب ووجدت أنّ الجذرَين هما ٦، ١، كما أخطأت ملاك في قراءة قيمة جـ ووجدت أنّ الجذرَين هما ٤، ١. ما الجذران الصحيحان؟

تمارين مراجعة نهاية الوحدة:

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

★ تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.

★ تركز هذه الأسئلة على البراهين.

★ تركز هذه الأسئلة على النمذجة.

★ تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس، وقد تم ترميزها بنجمة صفراء.

يجب ألا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

الوحدة الأولى
المعادلات والمتباينات والدوالّ التربيعية
Equations, inequalities, and quadratic functions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تكتب المعادلة التربيعية ص = أ س^{٢} + ب س + جـ (حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠) بصيغة الإكمال إلى مربع.

٢-١ تستخدم صيغة الإكمال إلى مربع لتحدّد رأس المنحنى التربيعي، وتعرف ما إذا كانت القيمة عظمى أو صغرى.

٣-١ تجد المميّز، وتستخدمه لتجد عدد الجذور في المعادلة التربيعية.

٤-١ تحلّ المعادلات التربيعية بمجهول واحد باستخدام الصيغة التربيعية.

٥-١ تحلّ معادلتين إحداهما تربيعية والأخرى خطية آنيًّا.

٦-١ تحل معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا، باستخدام التعويض ص = د(س) لتشكل معادلة تربيعية وتحلّها.

٧-١ تحلّ متباينات تربيعية بمجهول واحد باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل، الإكمال إلى مربع، أو الصيغة التربيعية.

٨-١ تجد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية.

٩-١ ترسم المنحنى لدالة تربيعية، وتحدّد شكلها العام، والأجزاء المقطوعة مع المحورين، وإحداثيات رأس المنحنى، ومحور التماثل.

١-١ الإكمال إلى مُربّع

١-١ أ كتابة العبارة الجبرية بطريقة الإكمال إلى مُربّع

تمارين ١-١ أ

١) لكل عبارة من العبارات الآتية، أكمل إلى مُربّع:

أ) س^{٢} + ٢س + ٢ ب) س^{٢} − ٨س − ٣ ج) س^{٢} + ٣س − ٧

_____ _____ _____

_____ _____ _____

_____ _____ _____

_____ _____ _____

د $٥ - ٦س + س^{٢}$

هـ $س^{٢} + ١٤س + ٤٩$

و $٢س^{٢} + ١٢س - ٥$

ز $٣س^{٢} - ١٢س + ٣$

ح $٧ - ٨س - ٤س^{٢}$

ط $٢س^{٢} + ٥س - ٣$

٢) استخدم الإكمال إلى مربّع لتحليل كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية إلى عوامل:

أ $س^{٢} - ٢س - ٣٥$

ب $س^{٢} - ١٤س - ١٧٦$

ج $س^{٢} + ٦س - ٤٣٢$

د $٦س^{٢} - ٥س - ٦$

هـ $١٤ + ٤٥س - ١٤س^{٢}$

و $١٢س^{٢} + س - ٦$

٣) اكتب $س^{٢} - ١٠س + ٣٥$ في صورة $(س - أ)^{٢} + ب$.

١-١ ب استخدام الإكمال إلى مُربّع لحلّ المعادلات التربيعية

تمارين ١-١ ب

١) حلّ المعادلات التربيعية الآتية:

أ) $(س - ٣)^{٢} - ٣ = ٠$

ب) $(س + ٢)^{٢} - ٤ = ٠$

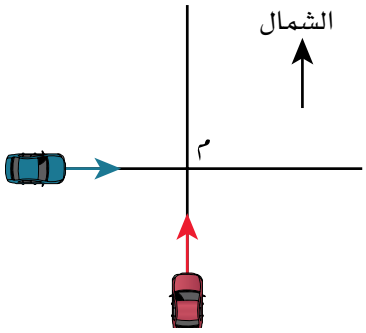
ج) $٢(س + ٣)^{٢} = ٥$

د) $(٣س - ٧)^{٢} = ٨$

هـ) $(س + ق)^{٢} - ك = ٠$

و) $أ(س + ب)^{٢} - جـ = ٠$

★ **٢)** تجتاز سيارتان على طول مسارَين مستقيمَين متعامدَين ويلتقيان عند النقطة م، كما هو موضّح في الرسم أدناه. تبدأ السيارة الأولى من بعد ٥٠ كم غرب م وتنتقل شرقًا بسرعة ثابتة ٢٠ كم/ساعة. في الوقت نفسه، تبدأ السيارة الثانية من بعد ٣٠ كم جنوب م وتنتقل شمالًا بسرعة ثابتة ١٥ كم/ساعة.



أ) بيّن أن المعادلة د^{٢} = ٦٢٥ن^{٢} − ٢٩٠٠ن + ٣٤٠٠ تمثّل المسافة د (بالكيلومتر) عند الزمن ن (بالساعة).

ب) أوجد أقرب مسافة بين السيارتَين.

١-٢ التمثيل البياني للدالّة التربيعية

تمارين ١-٢

١) أوجد إحداثيات رأس المنحنى لكلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) $ص = (س - ٣)^{٢} + ٤$

ب) $ص = (س - ٥)^{٢} + ١$

ج) $ص = ٢(س - ٧)^{٢} - ١$

د) $ص = ٣(س - ١)^{٢} - ٥$

هـ) $ص = (س + ١)^{٢} + ٣$

و) $ص = (س + ٧)^{٢} - ٣$

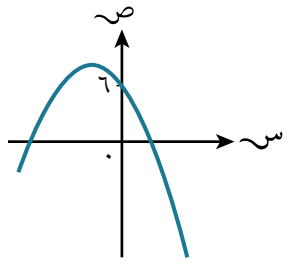
ز) $ص = -٥(س + ٢)^{٢} - ٤$

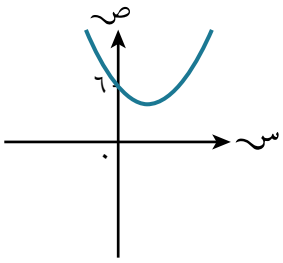
ح) $ص = -(س + ١)^{٢} + ٥$

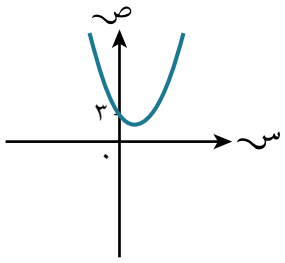
٢) اكتب كل معادلة من المعادلات الآتية مع التمثيل البياني المناظر لها:

أ ١) ص = −س^{٢} − ٣س + ٦ ٢) ص = ٢س^{٢} − ٣س + ٣ ٣) ص = س^{٢} − ٣س + ٦

(أ) (ب) (ج)

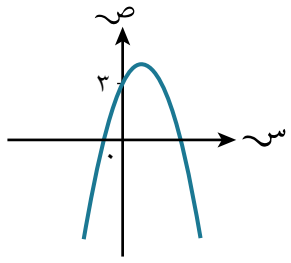


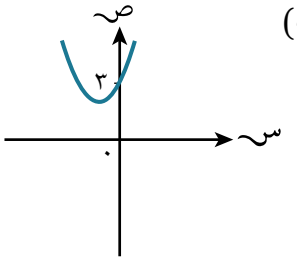


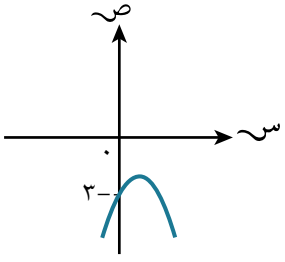


ب ١) ص = −س^{٢} + ٢س − ٣ ٢) ص = −س^{٢} + ٢س + ٣ ٣) ص = س^{٢} + ٢س + ٣

(أ) (ب) (ج)

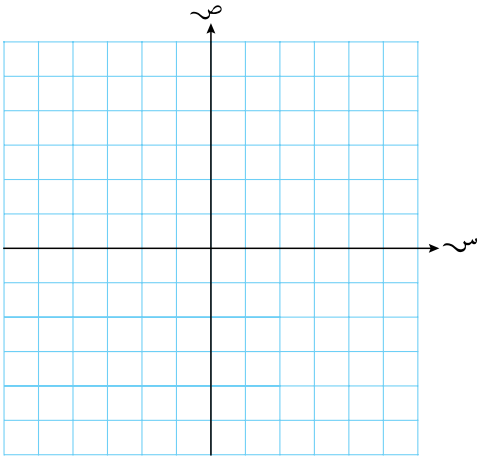




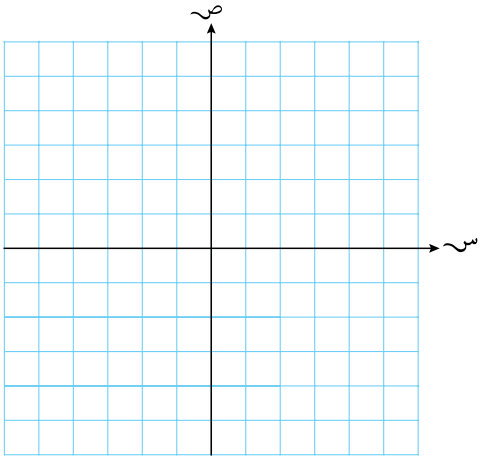


٣) ارسم منحنى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية محدّدًا الأجزاء المقطوعة من المحورَين:

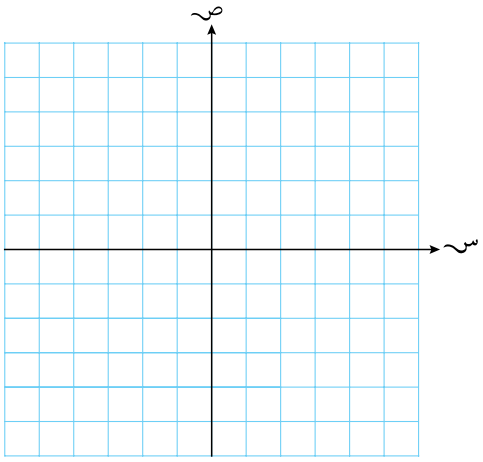
أ ص = س^{٢} − ٣س − ١٠



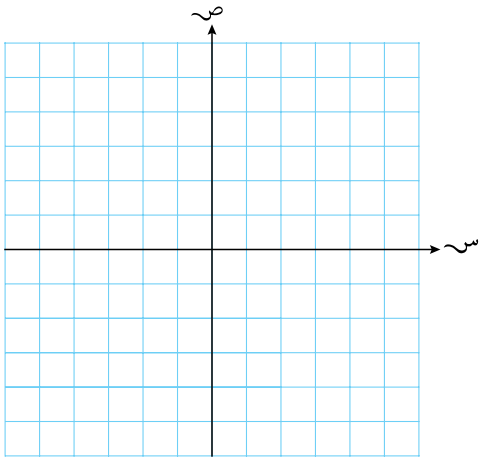
ب ص = ٢س^{٢} + ١١س + ١٢



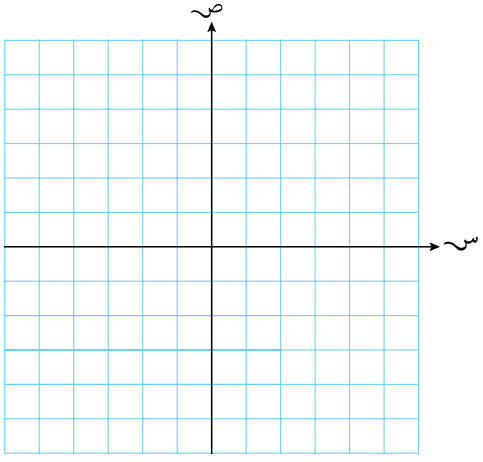
ج ص = −٣س^{٢} + ١٤س − ٨



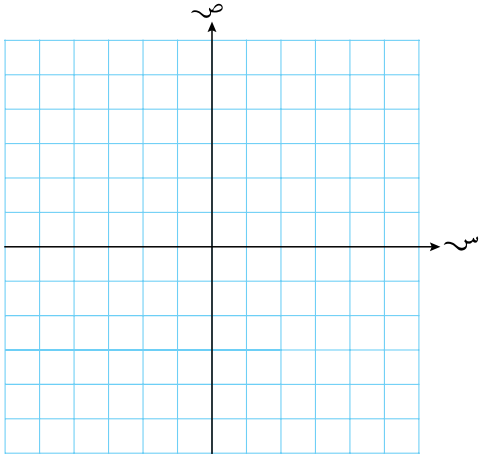
د ص = ٦ − ٥س − س^{٢}



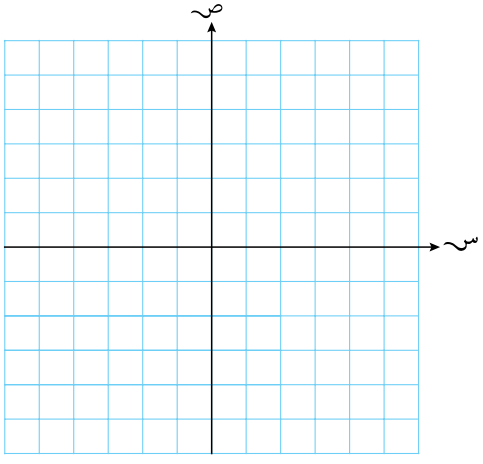
هـ ص = ٣س^{٢} + ٦س



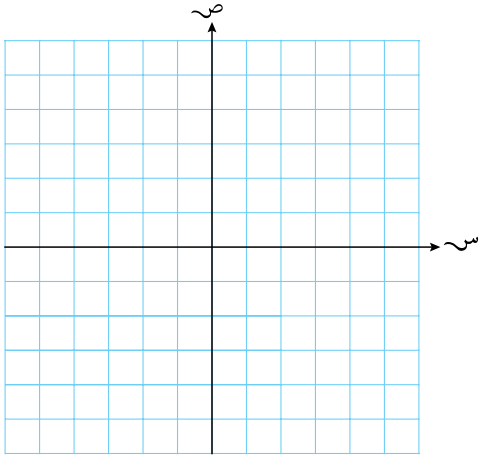
و ص = ٤س − س^{٢}



ز ص = −٤س^{٢} − ٢٠س − ٢٥



ح ص = ٤س^{٢} − ٤س + ١



٤) اكتب معادلة محور التماثل لمنحنى الدالّة د(س) = ٣س^{٢} + ٢س + ١

٥) في ما يأتي معادلات لـ ٩ دوالّ تربيعية:

أ) ص = (س − ٣)(س − ٨)　　ب) ص = ١٤ + ٥س − س^{٢}　　ج) ص = ٦س^{٢} − س − ٧٠

د) ص = س(٣ − س)　　هـ) ص = (س + ٢)(س − ٧)　　و) ص = −٣(س + ٣)(س + ٧)

ز) ص = س^{٢} + ٢س + ١　　ح) ص = س^{٢} + ٨س + ١٢　　ط) ص = س^{٢} − ٢٥

أجب عن كل سؤال من الأسئلة الآتية مستخدمًا إحدى المعادلات أعلاه بدون رسم منحنيات الدوالّ التربيعية:

أ) أيّ من منحنيات الدوالّ التربيعية يقطع المحور الصادي عند قيمة موجبة لـ ص؟ _____

ب) أيّ من منحنيات الدوالّ التربيعية رأسه هو النقطة الأعلى للمنحنى؟ _____

ج) أيّ من منحنيات الدوالّ التربيعية يقع رأسه إلى اليسار من المحور الصادي؟ _____

د) أيّ من منحنيات الدوالّ التربيعية يمرّ بنقطة الأصل؟ _____

هـ) أيّ من منحنيات الدوالّ التربيعية لا يتقاطع مع المحور السيني في نقطتَين مختلفتَين؟

_____

و) أيّ من منحنيات الدوالّ التربيعية محور تماثله هو المحور الصادي؟ _____

ز) أيّ من منحنيات الدوالّ التربيعية لديهما محور التماثل نفسه؟ _____

ح) أيّ من منحنيات الدوالّ التربيعية يقع رأس منحناه في الربع الرابع؟ _____

٦) اكتب العبارة الجبرية س^{٢} + ٦س + ٤ في صورة (س + أ)^{٢} + ب، ثم أوجد القيمة الصغرى التي يمكن للعبارة س^{٢} + ٦س + ٤ أن تصل إليها وقيمة س المناظرة لها.

٧) للدالّة التربيعية ص = (س − أ)^{٢} + ب رأس منحنى عند النقطة (٣، ٧).

أ حدّد ما إذا كان رأس المنحنى يمثل قيمة عظمى أو قيمة صغرى للدالة. _____

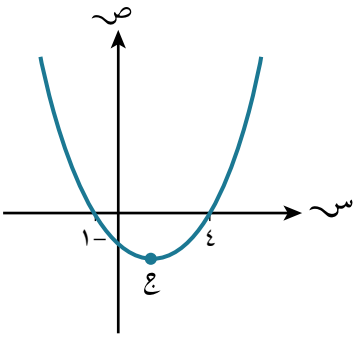
ب حدّد قيمة كلٍّ من أ، ب.

_____

_____

_____

٨) يبيّن الرسم المجاور منحنى الدالّة د(س) = (س + ف)(س − ك).



أ أوجد قيمة كلّ من ف، ك علمًا بأن كلاًّ منهما عدد موجب.

_____

_____

_____

_____

ب للدالّة قيمة صغرى عند النقطة ع، أوجد الإحداثي السيني للنقطة ع.

_____

_____

_____

١-٣ جذور المعادلة التربيعية

تمارين ١-٣

١) احسب المميّز لكلّ معادلة من المعادلات التربيعية الآتية:

أ) $س^{٢} + ٤س - ٥ = ٠$

ب) $س^{٢} - ٦س - ٨ = ٠$

ج) $٢س^{٢} + س + ٦ = ٠$

د) $٣س^{٢} - س + ١٠ = ٠$

هـ) $٣س^{٢} - ٦س + ٣ = ٠$

و) $٩س^{٢} - ٦س + ١ = ٠$

ز) $١٢ - س - س^{٢} = ٠$

ح) $-س^{٢} - ٣س + ١٠ = ٠$

٢) حدّد عدد الجذور لكلّ معادلة من المعادلات المُعطاة في التمرين ١:

أ) _____

ب) _____

ج) _____

د) _____

هـ) _____

و) _____

ز) _____

ح) _____

٣) أوجد قيم م بحيث يكون للمعادلة التربيعية $م س^{٢} - ٤س + ٢م = ٠$ جذران متساويان.

٤) أوجد قيم ك بحيث يكون للمعادلة $-٣س^{٢} + (٢ك + ١)س - ٤ك = ٠$ جذر واحد مكرّر.

٥) اكتب المعادلة $-٢س^{٢} + ٨س - ١٣ = ٠$ في صورة أ$(س + ب)^{٢}$ + جـ لتبين أنه لا توجد جذور حقيقية للمعادلة.

١-٤ الصيغة التربيعية

تمارين ١-٤

١) استخدم الصيغة التربيعية لتجد جذور كلّ معادلة من المعادلات الآتية، واكتب الناتج في أبسط صورة:

أ) $٢س^{٢} + س = س^{٢} + ٤س - ١$

ب) $س^{٢} - ٣س + ٥ = ٦ - ٢س$

ج) $٣س^{٢} - ٤س + ١ = ٥س^{٢} + ٢س$

د) $٩س - ٢ = ٥س^{٢} + ١$

هـ) $(س + ١)(س + ٣) = ٥$

و) $(٣س + ٢)(س - ١) = ٢$

ز) $٢س + \frac{١}{س} = ٦$

ح) $س = ٤ + \frac{٣}{س}$

٢) استخدم الصيغة التربيعية لتحلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية. اكتب النواتج غير النسبية في أبسط صورة، وإن لم تجد جذورًا اذكر سبب ذلك:

أ) $س^{٢} + ٣س - ٤ = ٠$

ب) $س^{٢} - ٤س - ٧ = ٠$

ج) $س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠$

د) $س^{٢} + ٥س + ٢ = ٠$

هـ) $س^{٢} + س + ١ = ٠$

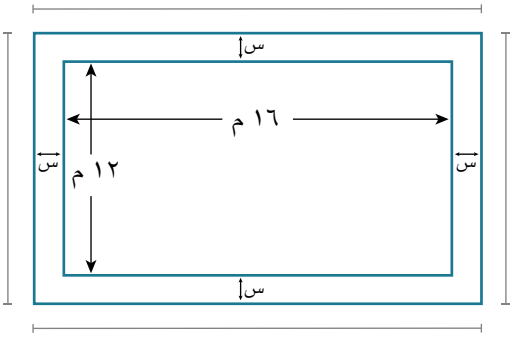
و) $٣س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠$

ز) $٢س^{٢} + ٧س + ٣ = ٠$

ح) $٨ - ٣س - س^{٢} = ٠$

ط) $٥ + ٤س - ٦س^{٢} = ٠$

٣) حديقة مستطيلة الشكل طولها ١٦ م وعرضها ١٢ م. يريد محمد إنشاء رصيف حول محيط الحديقة (انظر الشكل المجاور). إذا علمت أن مساحة الحديقة والرصيف معًا تساوي ٢٨٥ م^{٢}، فأوجد عرض الرصيف (س).



٤) مربّع طول ضلعه (س + ٢) سم، ومثلّث قائم الزاوية ومتطابق الضلعَين طول كلّ من ضلعَيه المتطابقَين (٢س + ١) سم. إذا علمت أن مساحة المربّع مساوية لمساحة المثلّث، فاكتب معادلة تربيعية وحلّها لتجد محيط المربّع، مقرّبًا الناتج إلى عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

٥) جسم يتمثل ارتفاعه (بالأمتار) فوق سطح الأرض بالدالّة ع = −١٦ن^{٢} + ٦٤ن + ١٩٠ حيث ن ⩾ ٠، ن الزمن (بالثواني). أوجد الزمن الذي يستغرقه سقوط الجسم على الأرض، مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

١-٥ حلّ المعادلات الآنية (معادلة خطّية ومعادلة تربيعية)

تمارين ١-٥

١) حلّ كل زوج من أزواج المعادلات الآتية آنيًّا:

أ) ص = س + ١، $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٢٥

ب) س + ص = ٧، $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٢٥

ج) ص = س − ٣، ص = $س^{٢}$ − ٣س − ٨

د) ص = ٢ − س، $س^{٢}$ − $ص^{٢}$ = ٨

هـ) ٢س + ص = ٥، $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٢٥

و) ص = ١ − س، $ص^{٢}$ − س ص = ٠

ز) ٧ص − س = ٤٩، $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ − ٢س − ٤٩ = ٠

ح) ص = ٣س − ١١، $س^{٢}$ + ٢س ص + ٣ = ٠

٢) يتقاطع المستقيم ص = س − ٤ مع منحنى الدالّة ص = س^{٢} + ٦س في النقطتَين أ ، ب . أوجد إحداثيات نقطتَي التقاطع أ ، ب

٣) أوجد إحداثيات نقاط التقاطع بين المستقيم المُعطى ومنحنى الدالّة المُعطى في كل حالة من الحالات الآتية:

أ ص = ٢س + ١، ص = س^{٢} − س + ٣

ب ص = ٣س + ٢، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٦

ج ص = ٢س − ٢، ص = س^{٢} − ٥

د س + ٢ص = ٣، س^{٢} + س ص = ٢

هـ ٣ص + ٤س = ٢٥، $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٢٥

و ص + ٢س = ٣، $٢س^{٢}$ − ٣س ص = ١٤

ز ص = ٢س − ١٢،
$س^{٢}$ + ٤س ص − $٣ص^{٢}$ = −٢٧

ح ٢س − ٥ص = ٦،
٢س ص − $٤س^{٢}$ − ٣ص = ١

٤) أوجد إحداثيات نقطة التقاطع بين المستقيم ص = ٣ − ٤س ومنحنى الدالّة
ص = ٤($٤س^{٢}$ + ٥س + ٣)

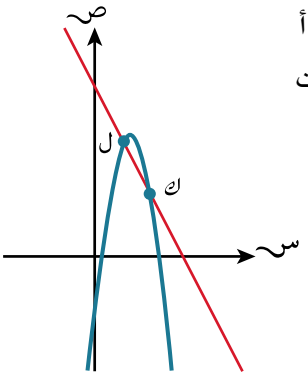
٥) يتقاطع المستقيم ص = س − ١ ومنحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٥س − ٨ في النقطتَين ا، ب، كما أن منحنى الدالّة ص = ق + ك س − ٢س^{٢} يمرّ بالنقطتَين ا، ب. أوجد قيمة كلّ من ق، ك.

٦) يتقاطع المستقيم ص = ٦س + ١ ومنحنى الدالّة التربيعية ص = س^{٢} + ٢س + ٣ في النقطتَين ا، ب. بيّن أنّ إحداثيات إحدى نقطتَي التقاطع هي (٢ − √٧، ١٣ − ٦√٧)، ثم أوجد إحداثيات النقطة الثانية.

٧) حلّ المعادلتَين الآنيتَين س ص + س = ٠، س^{٢} + ص^{٢} = ٤

٨) معادلة المنحنى هي ص = س^{٢} + ك س − ٣ ومعادلة المستقيم هي ص = ك − س.
بيّن أن المستقيم والمنحنى يتقاطعان في نقطتَين فقط لكلّ قيم ك الحقيقية.

٩) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى دالّة معادلته ص = −س^{٢} + ١٠س + أ (أ عدد ثابت)، ومستقيم معادلته ص = ب س + ٢٥ (ب عدد ثابت). الإحداثيات السينية للنقطتَين ك، ل هي ٤، ٨ على التوالي. أوجد قيمة كلّ من أ، ب.



١-٦ حلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا

تمارين ١-٦

١) حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية:

أ) $أ^{٤} - ١٠أ^{٢} + ٢١ = ٠$

ب) $س^{٤} - ٧س^{٢} + ١٢ = ٠$

ج) $٢س^{٦} + ٧س^{٣} = ١٥$

د) $أ^{٦} + ٧أ^{٣} = ٨$

هـ) $س^{٢} - ٤ = \frac{٢}{س^{٢}}$

و) $س^{٢} + \frac{٣٦}{س^{٢}} = ١٢$

ز $س - ٦\sqrt{س} + ٨ = ٠$

ح $س - ١٠\sqrt{س} + ٢٤ = ٠$

ط $٣^{٢س} - ١٢ \times ٣^{س} + ٢٧ = ٠$

ي $٢^{٢س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦ = ٠$

٢) استخدم التعويض المناسب لحلّ المعادلة $س^{٢} + \frac{٩}{س^{٢}} = ١٠$

٣) استخدم التعويض المناسب لحلّ المعادلة $\frac{١}{(٣س + ١)^{٢}} + ٥ = \frac{٦}{٣س + ١}$

٤) استخدم التعويض المناسب لحلّ المعادلة $س^{٣} - ٩س^{١٠٥} + ٨ = ٠$

٥) استخدم التعويض المناسب لحلّ المعادلة $٩(١ + ٩س^{-١}) = ١٠ \times ٣^{س}$

٦) حلّ المعادلة $٥^{س} = ٦ - ٥^{-١ س}$

٧) حلّ المعادلة $٤س^{+٠٫٥} - ١٧ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

٨) حلّ المعادلة س = $\sqrt{س}$ + ١٢

٩) حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ) س − ٨ = ٢$\sqrt{س}$

ب) س + ١٥ = ٨$\sqrt{س}$

ج) ب − ٥$\sqrt{ب}$ − ١٤ = ٠

د) ب = ٣$\sqrt{ب}$ + ١٠

هـ) $\sqrt{س^{٢}}$ − $\sqrt{س}$ − ٦ = ٠

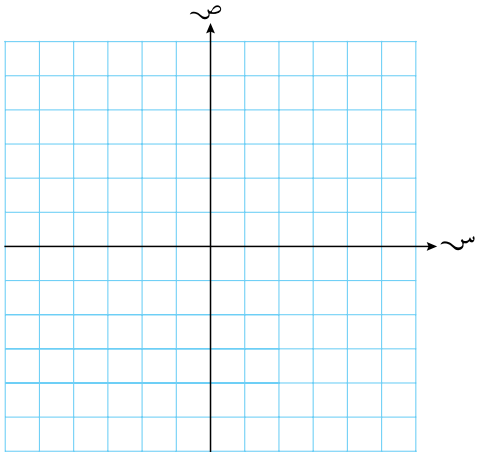
و) $\sqrt{ب^{٢}}$ − ٣ $\sqrt{ب}$ = ٤

١-٧ حلّ المتباينات التربيعية

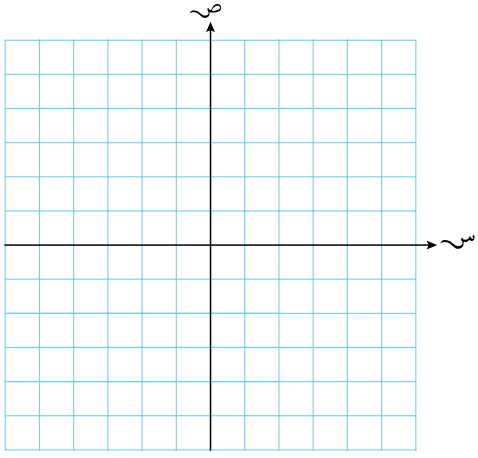
تمارين ١-٧

١) حلّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

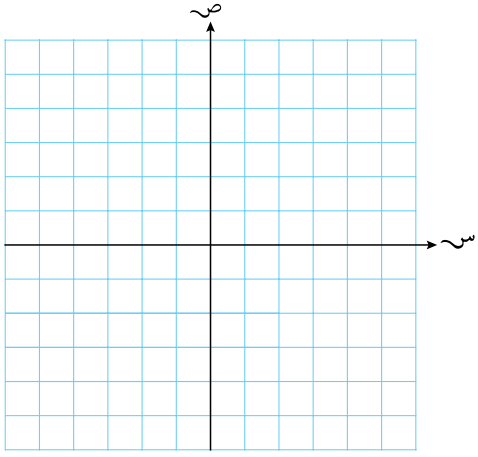
أ) $س^{٢} \geq ٨$



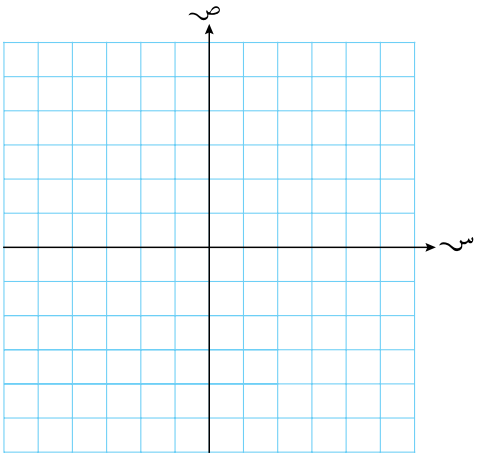
ب) $س^{٢} > ٥$



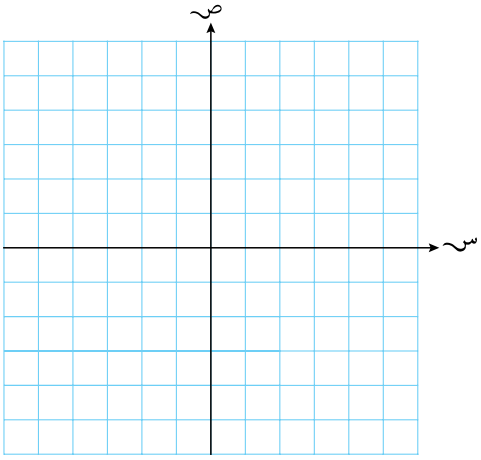
ج) $س^{٢} < ٦$



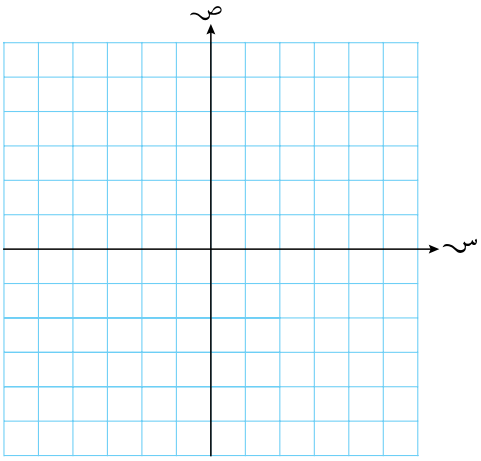
د $س^{٢} \geqslant ١٢$



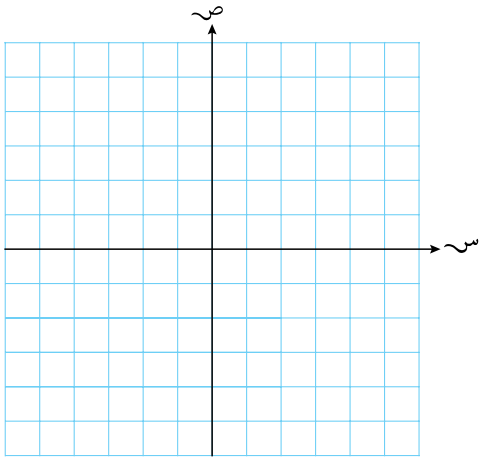
هـ $(س - ٤)(س + ١) > ٠$



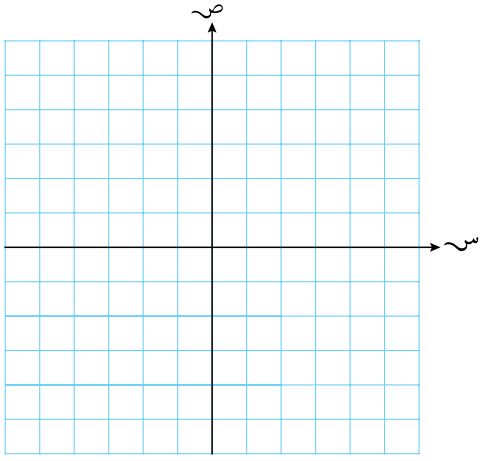
و $(٢س - ٥)(٣س + ٢) > ٠$



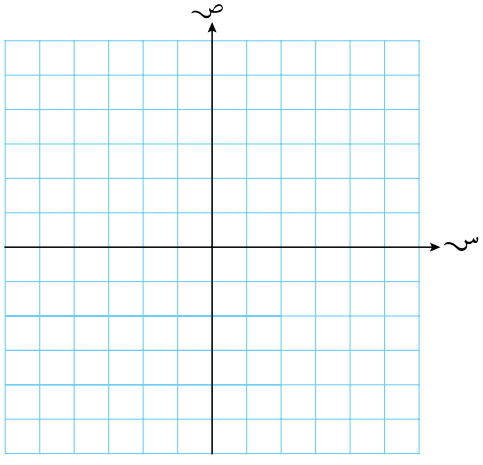
ز $(س - ٣)(س + ١) > ٠$



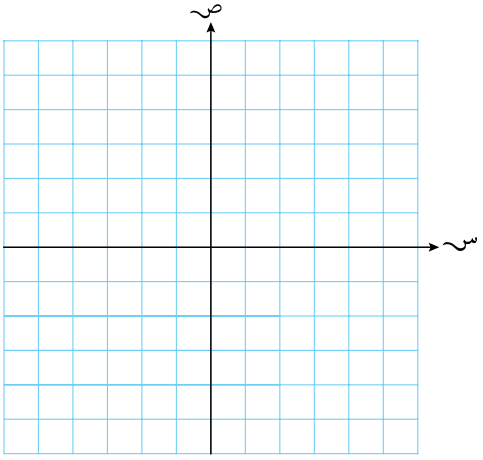
ح $(س - ٤)(س - ٢) < ٠$



ط $(س - ٣)(س - ١٢) < ٠$



ي (٢ − س)(−٢ − س) < ٠



٢) استخدم طريقة جبرية لحلّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية. اكتب النواتج غير النسبية في أبسط صورة. قد تكون بعض المتباينات صحيحة لكلّ قيم س الحقيقية، وربّما لا يكون لبعض المتباينات الأخرى قيم س:

أ $س^{٢} + ٣س - ٥ < ٠$

ب $س^{٢} + ٦س + ٩ > ٠$

ج $س^{٢} - ٥س + ٢ > ٠$

د $س^{٢} - س + ١ \leqslant ٠$

هـ $س^{٢} - ٩ > ٠$

و $س^{٢} + ٢س + ١ \geqslant ٠$

ز $٢س^{٢} - ٣س - ١ > ٠$

ح $٨ - ٣س - س^{٢} < ٠$

ط $٢س^{٢} + ٧س + ١ \leqslant ٠$

٣) حلّ كل متباينة من المتباينات الآتية:

أ) $\frac{س}{س - ٢} \geq ١$

ب) $\frac{س - ١}{(س + ٢)(س + ٣)} > ٠$

ج) $\frac{٣}{س - ١} < \frac{٤}{س + ٢}$

د) $\frac{س^{٢} + ١٢}{س} < ٧$

هـ) $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ١)(س + ١)} < ٠$

و) $\frac{١}{س - ٢} \leq \frac{س}{س + ٤}$

٤) حلّ المتباينة $٢س^{٢} > ٦ - س$

٥) أوجد قيم س حيث $٢س^{٢} + ٣س + ١ \geq ١١ + ٤س - س^{٢}$

٦) رُميت كرة إلى الأعلى وتمثل ارتفاعها ع (بالأمتار) في الزمن ن (بالثواني)، بالدالّة ع = ٧ن − ٩,٤ن^{٢}. ما الزمن الذي تستغرقه الكرة لتصل إلى ارتفاع ١,٥ م فوق سطح الأرض؟

٧) حلّ كلّ متباينة من المتباينتَين الآتيتَين:

أ) ٧س − ٥ > ٣س + ٥

ب) ٢س^{٢} − ٧س > ٤س − ٥

٨) أوجد قيم ك علمًا بأن المعادلة س^{٢} − ٢ك س + ٦ك = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

٩) أوجد قيم ك علمًا بأن المعادلة التربيعية ك س^{٢} − (ك + ٣)س − ١ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

١٠) أوجد قيم م حيث للمعادلة م $س^{٢}$ + م س − ٢ = ٠ جذر حقيقي واحد أو جذران حقيقيّان مختلفان.

١١) إذا علمت أنّ د(س) = ك $س^{٢}$ + (ك − ٢)س − ٢، فبيّن أنّ للمعادلة د(س) = ٠ جذورًا حقيقية لكلّ قيم ك.

١٢) تكلفة إنتاج ن عنصرًا تساوي (٩٥٠ + ٦٣ن) ريالًا عُمانيًّا. يمكن بيع العنصر الواحد من هذه العناصر مقابل (٢٨٠ − ٥ن) ريالًا عُمانيًّا. ما عدد العناصر التي يمكن إنتاجها وبيعها لتحقيق ربح؟ اكتب الناتج في صورة ب ⩾ ن ⩾ ج حيث ب، ج عددان صحيحان.

١-٨ التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية

مساعدة

- يمس المستقيم المنحنى عندما ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠
- يتقاطع المستقيم مع المنحنى في نقطتين عندما ب^{٢} − ٤ أ جـ > ٠
- لا يمس ولا يتقاطع المستقيم مع المنحنى عندما ب^{٢} − ٤ أ جـ < ٠

تمارين ١-٨

١) بيّن أنّ المستقيم س − ص = ٦ يمس المنحنى الذي معادلته س^{٢} − ٦س + ص^{٢} − ٢ص + ٢ = ٠

٢) أوجد قيم م عندما يمس المستقيم ص = م س + ٣ منحنى الدالّة ص = ٣س^{٢} − س + ٥

٣) إذا علمت أنّ (ج) هو منحنى الدالّة الذي معادلته ٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٣٦، فأوجد قيم ك علمًا بأن المستقيم ٢س + ٣ص = ك يمس المنحنى (ج).

٤) أوجد قيم أ عندما لا يتقاطع منحنى الدالّة ص = س^{٢} مع منحنى الدالّة ص = أ − (س − أ)^{٢} أبدًا.

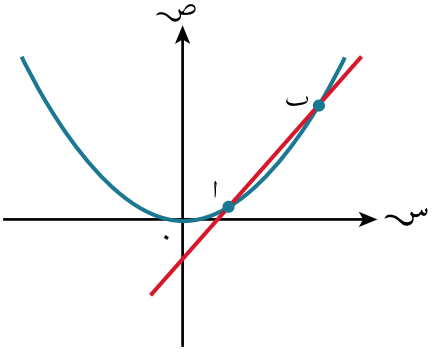
٥) بيّن جبريًّا أنّ المستقيم ص = ك س + ٥ يتقاطع مع ص = س^{٢} + ٢ مرّتَين لكلّ قيم ك.

٦) أوجد قيم م عندما يمس المستقيم ص = م س − ١ منحنى الدالّة ص = س^{٢}.

٧) أوجد قيمة أو قيم م عندما يمس المستقيم ص = م س المنحنى الذي معادلته
س^{٢} + ٢س ص + ٢س = ١

٨) أوجد قيم ك عندما يمس المستقيم ص = ٢س − ك المنحنى الذي معادلته س^{٢} + ص^{٢} = ٥

٩) أ يبيّن الرسم المجاور المستقيم ص = س − ١ ومنحنى الدالّة ص = ك س^{٢}، حيث ك عدد ثابت موجب. يتقاطع المستقيم والمنحنى عند النقطتَين المختلفتَين ا، ب. اكتب المعادلة التربيعية التي تتحقّق بالجزأَين المقطوعَين للنقطتَين ا، ب من المحور السيني، ثم بيّن أن ك $< \frac{١}{٤}$



ب صِف العلاقة بين منحنى الدالّة ص = س − ١، ومنحنى الدالّة ص = ك س^{٢} في كلّ حالة من الحالتَين الآتيتَين:

١) ك = $\frac{١}{٤}$

٢) ك $< \frac{١}{٤}$

ج وضّح بيانيًّا أو باستخدام أي طريقة أخرى، إنه عندما تكون ك عددًا ثابتًا سالبًا، يكون للمعادلة س − ١ = ك س^{٢} جذران حقيقيّان يقع أحدهما بين العدَدين ٠، ١

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

★ **١)** حاولت سعاد وملاك حلّ معادلة تربيعية في صورة $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

لسوء الحظ، أخطأت سعاد في قراءة قيمة ب ووجدت أنّ الجذرَين هما ٦، ١، كما أخطأت ملاك في قراءة قيمة جـ ووجدت أنّ الجذرَين هما ٤، ١. ما الجذران الصحيحان؟

٢) الفرق الموجب بين جذرَي المعادلة التربيعية $س^{٢} + ك س + ٣ = ٠$ يساوي $\sqrt{٦٩}$، أوجد القيم الممكنة للعدد ك

٣) للمعادلتَين ص = (س − ٢)(س − ٣)^{٢}، ص = ك حلّ واحد لكلّ قيم ك $<$ م. أوجد أكبر قيمة للعدد م

٤) حلّ المعادلة $س^{\frac{١}{٤}} + ٢س^{-\frac{١}{٤}} = ٣$

٥) أ اكتب العبارة الجبرية ٦س^{٢} + ١٠س + ٥ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة. ثم اكتب قيم أ، ب، جـ.

ب أوجد قيم الدالّة ص = (٦س^{٢} + ١٠س + ٥)^{٢} لكلّ قيم س الحقيقية.

★ **٦)** يتقاطع طريقان عموديّان عند النقطة م، يمتدّ الطريق الأول من الشمال إلى الجنوب، ويمتدّ الطريق الثاني من الشرق إلى الغرب. تقع المركبة (أ) على مسافة ١٠٠ م غرب النقطة م، وتتحرّك شرقًا بسرعة ٢٠ م/ثانية، بينما تقع المركبة (ب) على مسافة ٨٠ مترًا شمال النقطة م، وتتحرّك جنوبًا بسرعة ٢٠ م/ثانية.

أ بيّن أنّ المسافة بين المركبتَين، ف (بالأمتار)، وبعد مرور ن ثوانٍ، هي:
ف^{٢} = (١٠٠ − ٢٠ن)^{٢} + (٨٠ − ٢٠ن)^{٢}

ب بيّن أنّ تبسيط المسافة يعطي ف^{٢} = ٤٠٠[(٥ − ن)^{٢} + (٤ − ن)^{٢}]

ج بيّن أنّ أقل مسافة بين المركبتَين هي ١٠√٢ مترًا.

٧) حلّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ $٢س^{٢} - ٥س + ٢ \geqslant ٠$

ب $(٢س - ٣)^{٢} > ١٦$

ج $\frac{١}{٣}س - \frac{١}{٤}(٢س - ٥) < \frac{١}{٥}$

★ **٨)** أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ١٦٠$ في صورة $٢,٥ \times ٢^{س} = ١٦٠$

ب أوجد قيمة س التي تحقّق المعادلة.

٩) حلّ المعادلتَين الآنيتَين ٢س + ٣ص = ٥، س^{٢} + ٣س ص = ٤

١٠) استخدم التعويض ص = ٣^{س} لتجد قيم س التي تحقّق المعادلة ٣$^{٢س + ٢}$ − ١٠ × ٣^{س} + ١ = ٠

١١) أوجد قيم ك في كلّ حالة من الحالات الآتية، حيث ك عدد ثابت وذلك بتحديد عبارة المميز وتحديد ما إذا كان سالبًا أو صفرًا أو موجبًا (بالاعتماد على عدد الجذور)، وحل المتباينة:

أ للمعادلة ٢س^{٢} − س + ٣ك = ٠ جذران حقيقيّان مختلفان.

ب للمعادلة ٣س^{٢} + ٥س − ك = ٠ جذران حقيقيّان مختلفان.

ج للمعادلة ٥س^{٢} − ٢س + (٢ك − ١) = ٠ جذران متساويان.

د للمعادلة ٢س^{٢} + ٣س − (٣ك + ١) = ٠ جذران متساويان.

هـ للمعادلة −س^{٢} + ٣س + (ك + ١) = ٠ جذران حقيقيّان.

و للمعادلة −٢س^{٢} + ٣س − (٢ك + ١) = ٠ جذران حقيقيّان.

ز لا جذور حقيقية للمعادلة ٣ك س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠

ح لا جذور حقيقية للمعادلة –ك س^{٢} + ٥س + ٣ = ٠

ط للعبارة الجبرية التربيعية (ك – ٢)س^{٢} + ٣س + ١ جذر مكرّر واحد.

ي للعبارة الجبرية التربيعية –٤س^{٢} + ٥س + (٢ك – ٥) جذر مكرّر واحد.

ك يمس منحنى الدالة ص = س^{٢} – ٤س + (٣ك + ١) المحور السيني.

ل يمس منحنى الدالة ص = –٢ك س^{٢} + س – ٤ المحور السيني.

م لا جذور حقيقية للعبارة الجبرية $-٣س^{٢} + ٥ك$

ن لا جذور حقيقية للعبارة الجبرية $٢ك\ س^{٢} - ٣$

الوحدة الثانية
الدوالّ
Functions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٢-١ تفهم المصطلحات الآتية: الدالّة، المجال، المدى، الدالّة واحد إلى واحد، وتحدّد ما إذا كانت الدالّة هي واحد إلى واحد أم لا، تحدّد المجال والمدى لدوالّ معطاة.

٢-٢ تفهم مصطلح الدوالّ المركّبة، وتفهم تركيب دالتين، بشرط أنّ الدالّة المركّبة هـ ○ د ← هـ(د(س)) يمكن تشكيلها عندما يكون مدى الدالّة د(س) مجموعة جزئية من مجال الدالّة هـ، وتجد تركيب دالّتَين مُعطاتَين (باستخدام دوالّ خطية وتربيعية وجذرية وكسرية).

٢-٣ تفهم مصطلح 'الدالّة العكسية'، وتجد الدالّة العكسية لدالّة واحد إلى واحد.

٢-٤ تفهم بيانيًّا العلاقة بين دالّة واحد إلى واحد ومعكوسها.

٢-٥ أ تفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = د(س) + ب، ص = د(س + أ)، ص = د(س + أ) + ب، وتحدد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، وترسم التمثيلات البيانية المحولة.

٢-٥ ب تفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = −د(س)، ص = د(−س)، وتحدد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، وترسم التمثيلات البيانية المحولة.

٢-٥ ج تفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = أ د(س)، ص = د(أ س)، وتحدد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، وترسم التمثيلات البيانية المحولة.

٢-٥ د تفهم التأثير البياني لتركيب تحويلين هندسيين لبيانات ص = د(س)، عندما ص = د(س) + ب، ص = د(س + أ)، ص = د(س + أ) + ب، ص = −د(س)، ص = د(−س)، ص = أ د(س)، ص = د(أس)، وتحدّد التحويل الهندسي من تمثيل جبري إلى تمثيل آخر، وترسم البيانات المحولة لمنحنى ص = د(س).

٢-١ تعريف الدالّة

تمارين ٢-١

١) حدّد ما إذا كانت كل علاقة من العلاقات الآتية واحدًا إلى واحد، أو متعدّدًا إلى واحد، أو واحدًا إلى متعدّد:

أ س ← ٢س + ٥، س ∈ ع

ب س ← ٢س^{٢} − ٤، س ∈ ع

ج) س ← ٣س^{٣} + ١، س ∈ ع

د) س ← ٢^{س} + ٢، س ∈ ع

هـ) س ← $\frac{٥}{س}$ ، س > ٠

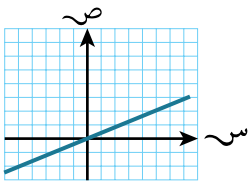
و) س ← س^{٢} + ٣، س ⩽ ٠

ز) س ← $\frac{١٤}{١ - س}$ ، س ∈ ع، س ≠ ١

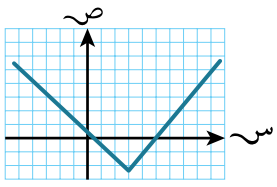
ح) س ← ± س، س ∈ ع، س ⩽ ٦

٢) اكتب ما إذا كانت كل علاقة من العلاقات الآتية تمثل دالّة أم لا:

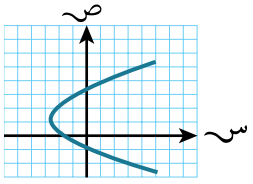
أ)



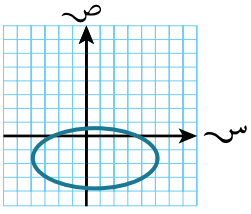
ب)



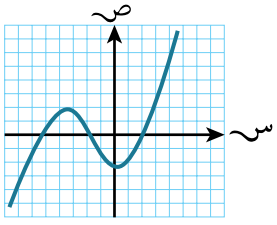
ج)



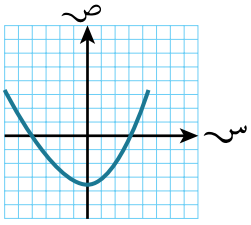
د)



هـ)



و)



مساعدة

إذا رسمنا كل المستقيمات الرأسية الممكنة على منحنى العلاقة، يمكن للعلاقة أن:

- تكون دالّة إذا تقاطع كل مستقيم مع المنحنى مرّة واحدة على الأكثر.
- لا تكون دالّة إذا تقاطع أحد المستقيمات مع المنحنى أكثر من مرّة.

٣) حدد الدالّة التي تمثل دالّة واحد إلى واحد في ما يأتي، علمًا بأن مجال جميع الدوالّ هو ع:

أ د: س ← ٣س + ٤

ب د: س ← $س^{٢}$ + ١

ج د: س ← $س^{٢}$ − ٣س

د د: س ← ٥ − س

هـ د: س ← جتا(س)

و د: س ← $س^{٣}$ − ٢

ز د: س ← $\frac{١}{٢}$س − ٧

ح د: س ← $\sqrt{س^{٢}}$

ط د: س ← س(س − ٤)

ي د: س ← $س^{٣}$ − ٣س

ك د: س ← $س^{٩}$

ل د: س ← $\sqrt{س^{٢} + ١}$

٤) اذكر ما إذا كانت كل دالّة من الدوالّ الآتية واحدًا إلى واحد أم لا:

أ د: س ← $س^{٢}$، س > ٠

ب د: س ← جتا(س)، $-٩٠^{\circ} \leq$ س $\leq ٩٠^{\circ}$

ج د: س ← ١ − ٢س، س > ٠

د د: س ← س(س − ٢)، ٠ < س < ٢

هـ د: س ← س(س − ٢)، س < ٢

و د: س ← س(س − ٢)، س > ١

ز د: س ← $\sqrt{س}$، س > ٠

ح د: س ← $س^{٢}$ + ٦س − ٥، س > ٠

٥) حدّد العلاقة التي تمثل دالّة في كل حالة من الحالات الآتية:

أ س ← ٣س − ١، س ∈ ع

ب س ← ٢$س^{٢}$ + ٢، س ∈ ع

ج س ← ٢ − $س^{٣}$، س ∈ ع

د س ← $٣^{س}$، س ∈ ع

هـ س ← $\frac{-٤}{س}$، س ∈ ع، س > ٠

و س ← $\sqrt[٣]{س}$، س ∈ ع، س ≤ ٠

٦) أوجد مدى كل دالّة من الدوالّ الآتية:

أ د(س) = $(٢س - ٣)^{٢} + ١$، س ∈ ع _____

ب د(س) = $(٣س + ١)^{٢} - ٢$، س ∈ ع _____

ج د: س ← $٨ - (س - ٥)^{٢}$، $١ \geq$ س ≥ ٥ _____

د د(س) = $١ + \sqrt{٢س - ١}$، س $\leq ٠,٥$ _____

٧) اكتب كل دالّة من الدالّتَين الآتيتَين في صورة أ$(س + ب)^{٢}$ + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، ثم حدّد مدى كل منهما:

أ د(س) = $س^{٢} + ٤س - ١$، س ∈ ع

_____

_____

_____

ب د(س) = $٢س^{٢} - ٤س + ٣$، س ∈ ع

_____

_____

_____

٨) اكتب كل دالّة من الدالّتَين الآتيتَين في صورة أ − ب$(س + جـ)^{٢}$، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، ثم حدّد مدى كل منهما:

أ د(س) = $٣ - ٢س - س^{٢}$، س ∈ ع

_____

_____

_____

_____

ب د(س) = $١ - ٦س - س^{٢}$، س ∈ ع

_____

_____

_____

_____

٩) الدالّة س ← $٦ + ٣أ س - ٣س^{٢}$ معرفة عندما س ∈ ع، حيث أ عدد ثابت. أوجد مدى الدالّة بدلالة أ.

_____

_____

_____

١٠) إذا علمت أن د(س) = $س^{٢} - ٤$، س ∈ ع، $-أ \geq$ س $\geq$ أ.
فأوجِد قيم أ علمًا بأن مدى الدالّة هو $-٤ \geq$ د(س) ≥ ٥

_____

_____

_____

١١) إذا كانت د(س) = ٤س^{٢} − ٨س + ٢، س ∈ ع، ٠ ⩽ س ⩽ ك

أ اكتب د(س) في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ.

ب أوجِد قيمة ك حيث لمنحنى الدالّة ص = د(س) محور تماثل.

ج أوجِد مدى الدالّة مستخدمًا قيمة ك التي أوجدتها في الجزئية (ب).

١٢) ★ أوجِد المجال لكل دالّة من الدوالّ الآتية، ثم حدّد مدى كل منها:

أ د(س) = ٢س − ٣

ب د(س) = ٣س^{٢} + ١

ج د(س) = ٣$^{-س}$

د د(س) = $\frac{٤}{س}$

هـ د(س) = $\frac{٢}{س - ٣}$

و د(س) = $\sqrt{٢س + ١}$ − ١

١٣) أوجِد مجال ومدى كل دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د : س ← ٣س + ٢

ب) د : س ← $\frac{١}{س}$

ج) د : س ← $\frac{١}{٣س + ٢}$

د) د : س ← $\frac{١}{(س - ٣)^{٢}}$

١٤) أوجِد مجال ومدى كل دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د : س ← $س^{٢}$

ب) د : س ← $\sqrt[٧]{س - ٣}$

ج) د : س ← $س^{٢} + ٥$

د) د : س ← $\frac{١}{\sqrt[٧]{س}}$

هـ) د : س ← س(٤ − س)

و) د : س ← $\sqrt[٧]{س(٤ - س)}$

ز) د : س ← $س^{٢} + ٤س + ١٠$

ح) د : س ← $\left(١ - \sqrt[٧]{س - ٣}\right)^{٢}$

٢-٢ الدوالّ المركبة

تمارين ٢-٢

١) أوجِد قيمة كلٍّ مما يأتي، علمًا بأن د: س ← ٥ − س، هـ: س ← $\frac{٤}{س}$:

أ (د ○ د)(٧)

ب (د ○ د)(−١٩)

ج (هـ ○ هـ)(١)

د (هـ ○ هـ)$\left(\frac{١}{٢}\right)$

هـ (د ○ د ○ د ○ د)(٦)

و (د ○ هـ ○ هـ ○ د)(٢)

٢) إذا علمت أن د: س ↦ ٢س − ٥، هـ: س ← س^{٢}، ع: س ← $\frac{١}{س}$ ، أوجِد كل دالّة مركّبة من الدوالّ الآتية:

أ (د ○ هـ)(س)

ب (هـ ○ د)(س)

ج (د ○ ع)(س)

د (د ○ د)(س)

هـ (ع ○ ع)(س)

و (هـ ○ د ○ ع)(س)

ز (ع ○ هـ ○ د)(س)

٣) أوجِد كل دالّة من الدوالّ الآتية علمًا بأن د: س ← س^{٢}، هـ: س ← س^{٣}، ع: س ← س − ٣، حيث س ∋ ع:

أ (ع ○ د)(س)

ب (د ○ ع)(س)

ج (د ○ ع ○ هـ)(س)

د (د ∘ هـ)(س)

هـ (ع ∘ ع ∘ ع)(س)

و (هـ ∘ د)(س)

٤) إذا علمت أن د : س ← س + ٤، هـ: س ← ٣س، ع: س ← س^{٢}، حيث س ∋ ع، فاكتب كل دالّة من الدوالّ الآتية بدلالة الدوالّ د، هـ، ع أو أيّة دالّتَين منها:

أ س ← س^{٢} + ٤

ب س ← ٣س + ٤

ج س ← س^{٤}

د س ← ٩س^{٢}

هـ س ← ٣س + ١٢

و س ← ٣(س^{٢} + ٨)

ز س ← ٩س + ١٦

ح س ← س^{٢} + ٨س + ١٦

ط س ← ٩س^{٢} + ٤٨س + ٦٤

٥) أوجِد مجال ومدى الدالّة (د ∘ هـ)(س) في كل حالة من الحالات الآتية:

أ د : س ← $\sqrt{\text{س}}$، هـ: س ← س^{٢} − ٥

ب د : س ← س + ٣، هـ: س ← $\sqrt{\text{س}}$

ج د : س − ٢، هـ: س ← $\frac{١}{\text{س}}$

د د : س ← س^{٢}، هـ: س ← $\sqrt{\text{س}^{٢}}$

هـ د : س ← $\sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢}}$، هـ: س ← $\sqrt{\text{س}}$

و د : س ← ١٦ − س^{٢}، هـ: س ← $\sqrt[٤]{\text{س}}$

ز د: س ← س^{٢} − س − ٦، هـ: س ← $\sqrt{س}$

ح د: س ← س + ٢، هـ: س ← $\frac{١}{\sqrt{٧ - س}}$

٦) إذا كانت د: س ← س^{٢}، هـ: س ← ٣س − ٢، حيث س ∈ ع، فأوجِد قيم أ، ب، جـ:

أ (د ○ هـ)(أ) = ١٠٠

ب (هـ ○ هـ)(ب) = ٥٥

ج (د ○ هـ)(جـ) = (هـ ○ د)(جـ)

٧) أوجِد القيم الممكنة للعددَين أ، ب علمًا بأن د: س ← أس + ب، د(٢) = ١٩، (د ○ د)(٠) = ٥٥

٨) إذا كانت الدالّتان د(س)، هـ(س) معرّفتَين لكل قيم الأعداد الحقيقية:

هـ(س) = س^{٢} + ٧ ، (هـ ○ د)(س) = ٩س^{٢} + ٦س + ٨

فأوجِد الدوالّ الممكنة لـ د(س).

٩) إذا كانت الدوالّ د(س)، هـ(س)، ع(س) معرّفة كالآتي: د(س) = $\frac{٣}{س + ١}$ ، هـ(س) = $\frac{ب}{س^{٢}}$ ، ع(س) = $\frac{٣س^{٢}}{س^{٢} + ٢}$

فأوجِد قيمة الثابت ب علمًا بأن (د ○ هـ)(س) = ع(س).

٢-٣ الدوالّ العكسية

مساعدة

- يفترض أن تكون الدالّة واحدًا إلى واحد لتكون لها دالّة عكسية.

تمارين ٢-٣

١) أوجِد الدالّة العكسية لكل دالّة من الدوالّ الآتية إن أمكن ذلك:

أ) د: س ← ٦س + ٥، س ∈ ع

ب) د: س ← $\frac{\text{س} + ٤}{٥}$ ، س ∈ ع

ج) د: س ← ٤ − ٢س، س ∈ ع

د) د: س ← $\frac{٢\text{س} + ٧}{٣}$ ، س ∈ ع

هـ) د: س ← ٢س^{٣} + ٥، س ∈ ع

و) د: س ← $\frac{١}{\text{س}}$ + ٤، س ∈ ع، س ≠ ٠

ز) د: س ← $\frac{٥}{\text{س} - ١}$، س ∈ ع، س ≠ ١

ح) د: س ← (س + ٢)^{٢} + ٧، س ∈ ع، س ≤ −٢

ط) د: س ← (٢س − ٣)^{٢} − ٥، س ∈ ع، س ≤ $\frac{٣}{٢}$

ي د : س ← س^{٢} − ٦س، س ∈ ع، س ⩽ ٣

٢) تحقق في ما إذا كانت كل دالّة من الدوالّ الآتية عكسية لنفسها أم لا :

أ د : س ← ٥ − س، س ∈ ع

ب د : س ← −س، س ∈ ع

ج د : س ← $\frac{٤}{س}$ ، س ∈ ع، س ≠ ٠

د د : س ← $\frac{٦}{٥س}$ ، س ∈ ع، س ≠ ٠

هـ د : س ← $\frac{س + ٥}{س − ١}$ ، س ∈ ع، س ≠ ١

و د : س ← $\frac{٣س − ١}{٢س − ٣}$ ، س ∈ ع، س ≠ $\frac{٣}{٢}$

٣) أوجِد الدالّة العكسية لكل دالّة من الدوالّ الآتية إن أمكن ذلك:

أ د : س ← $\frac{س}{س − ٢}$ ، س ∈ ع ، س ≠ ٢

ب د : س ← $\frac{٢س + ١}{س − ٤}$ ، س ∈ ع، س ≠ ٤

ج د : س ← $\frac{س + ٢}{س − ٥}$ ، س ∈ ع، س ≠ ٥

د د : س ← $\frac{٣س − ١١}{٤س − ٣}$ ، س ∈ ع، س ≠ $\frac{٣}{٤}$

٤) إذا علمت أن الدالّة د : س ← ب س + ك، س ∈ ع، د$^{-١}$(٦) = ٣، د$^{-١}$(−٢٩) = −٢، فأوجِد د$^{-١}$(٢٧).

٥) إذا علمت أن الدالّة د : س ← س^{٢} + س + ٦، حيث س ∈ ع، س > ٠، فأوجِد الدالّة العكسية، وحدّد مجالها ومداها.

٦) إذا علمت أن د : س ← $-٢س^{٢} + ٤س - ٧$، حيث س ∈ ع، س > ١، فأوجِد الدالّة العكسية، وحدّد مجالها ومداها.

٧) أوجِد قيمة العدد الثابت ك عندما تكون الدالّة هـ(س) = $\frac{٣س - ٥}{س + ك}$ عكسية لنفسها.

مساعدة

- الدالّة العكسية لنفسها هي الدالّة التي يكون عندها د(س) = $د^{-١}$(س) لكل قيم س في المجال.

٢-٤ منحنى الدالّة ومنحنى دالّتها العكسية

تمارين ٢-٤

١) أوجِد الدالّة العكسية ص = د$^{-١}$(س) في كل حالة من الحالات الآتية إن أمكن ذلك:

أ د: س ← ٤س، س ∈ ع

ب د: س ← س + ٣، س ∈ ع

ج د: س ← $\sqrt{س}$ ، س ∈ ع، س ⩽ ٠

د د: س ← ٢س + ١، س ∈ ع

هـ د: س ← (س − ٢)^{٢}، س ∈ ع، س ⩽ ٢

و د: س ← ١ − ٣س، س ∈ ع

ز د: س ← $\frac{٣}{س}$، س ∈ ع − {٠}

ح د: س ← ٧ − س، س ∈ ع

٢) إذا علمت أن مجال الدالّة د: س ← $\sqrt{س - ٢}$ + ٣ هو س ∈ ع، س > ٢

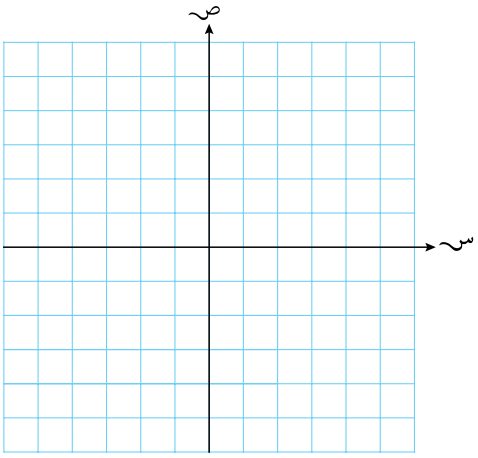
أ أوجِد مدى الدالّة د(س).

ب أوجِد الدالّة العكسية د$^{-١}$(س) وحدّد مجالها ومداها.

مساعدة

الإنعكاس حول المستقيم ص = س يبادل بين مجال الدالّة ومداها.

ج ارسم التمثيل البياني للدالّتَين ص = د(س)، ص = د$^{-1}$(س) في المخطط نفسه.



٣) مجال الدالّة د: س ← س^{٢} + ٢س + ٦ هو س ∋ ع، س ≥ ك.

أ أوجِد أكبر قيمة ممكنة للعدد الثابت ك، علمًا بأن الدالّة د(س) هي دالّة واحد إلى واحد.

_____

_____

ب عند هذه القيمة للعدد الثابت ك:

١) أوجِد مدى الدالّة د(س).

_____

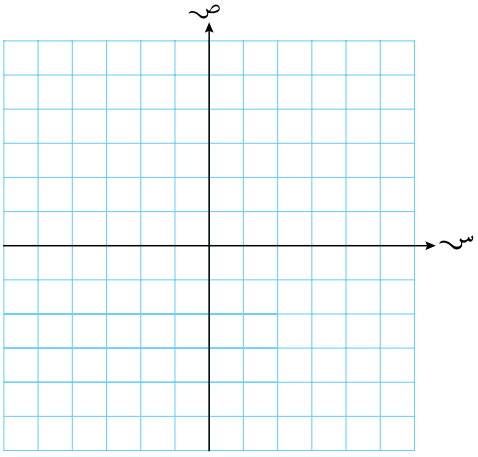
٢) أوجِد الدالّة العكسية د$^{-1}$(س) وحدّد مجالها ومداها.

_____

_____

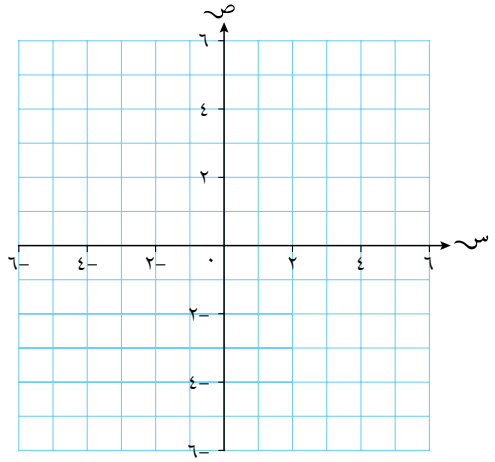
_____

٣) ارسم التمثيل البياني للدالّتَين ص = د(س)، ص = د$^{-1}$(س) في المخطط نفسه.



٤) الدالّة العكسية للدالّة د : س ← أ س + ب، س ∈ ع هي الدالّة د$^{-١}$: س ← ٨س − ٣
أوجِد قيم كلّ من أ، ب.

٥) د(س) = $\frac{٤}{\text{س} + ٣}$، س ≥ ٠، س ≠ −٣

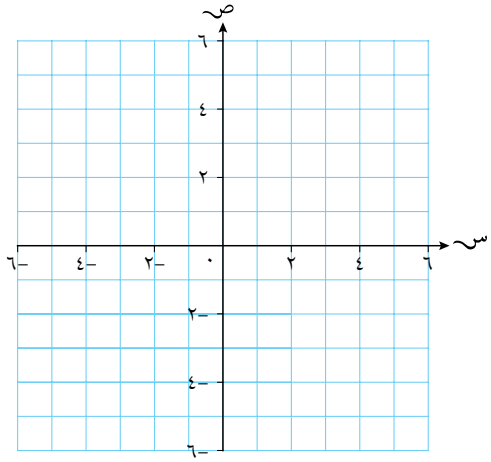


أ) مثل بيانيًّا د(س)، وحدّد مداها.

ب) أوجِد د$^{-١}$(س).

ج) احسب قيمة س علمًا بأن د(س) = د$^{-١}$(س).

٦) أ) إذا كانت د(س) = ٢س^{٢} − ٣، س ∈ ع، س ≥ ٠



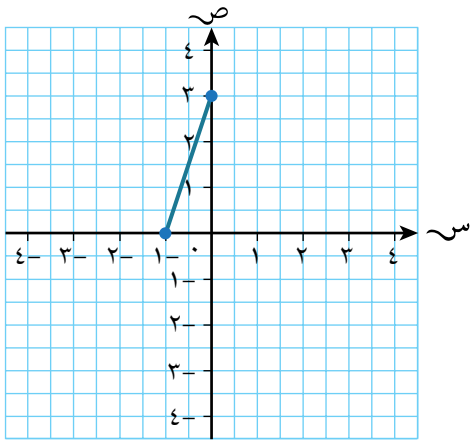
١) حدّد مدى د(س)، ومثّلها بيانيًّا.

٢) فسّر سبب وجود د$^{-١}$(س) ومثّلها بيانيًّا.

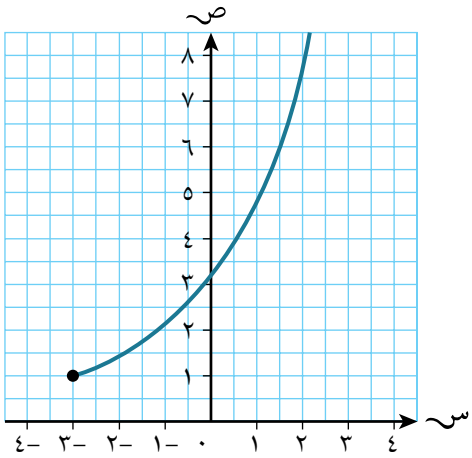
ب) إذا علمت أن هـ(س) = $\sqrt{٥\text{س} + ٢}$، س ∈ ع، س ≥ $-\frac{٢}{٥}$، فحلّ المتباينة (د ○ هـ)(س) ≥ س.

٧) ارسم منحنى الدالّة العكسية لكل دالّة من الدوالّ الآتية:

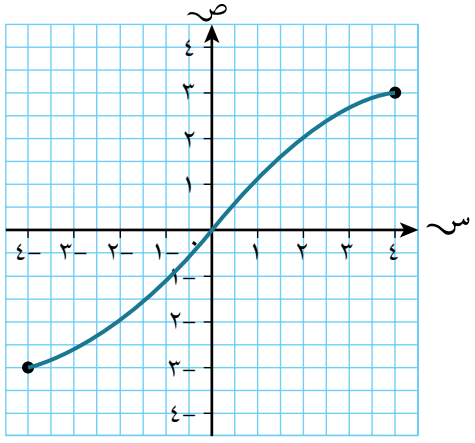
أ



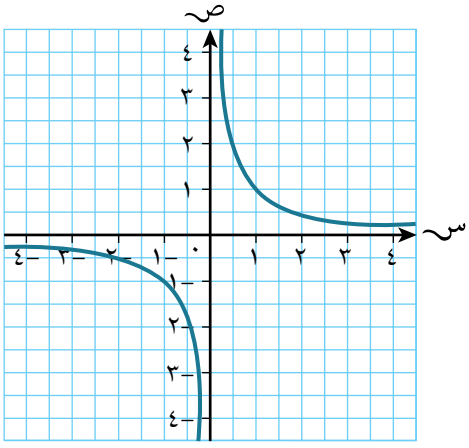
ب



ج

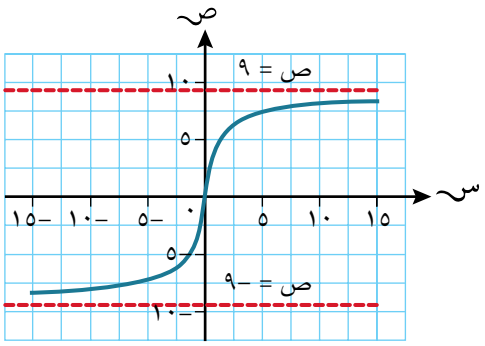


د



★ **٨)** إذا كانت د، هـ دالّتَين حيث (د ∘ هـ)(س) معرفة، والدالّتان د$^{-١}$ (س)، هـ$^{-١}$ (س) موجودتَين، ولتكن ع(س) = (د ∘ هـ)(س)، فبيّن أن ع$^{-١}$(س) = (هـ$^{-١}$ ∘ د$^{-١}$)(س).

٩) يبين الشكل المجاور منحنى ص = د(س). حيث يمثّل المستقيمان ص = −٩، ص = ٩ خطَّي تقارب لمنحنى الدالّة.



أ ارسم منحنى الدالّة العكسية ص = د$^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه.

ب حدّد مجال ومدى د$^{-١}$(س).

ج حلّ المعادلة د(س) = د$^{-١}$(س).

٢-٥ التحويلات الهندسية للدوالّ

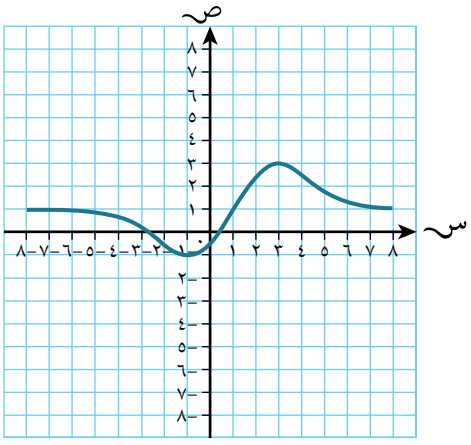
٢-٥ أ الانسحاب

مساعدة

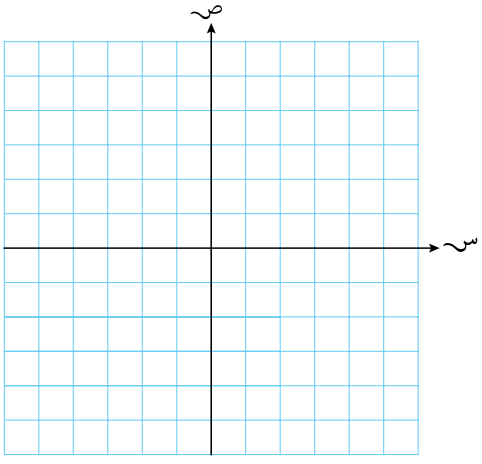
تذكّر أن: منحنى الدالّة ص = د(س − أ) − ب هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} أ \\ -ب \end{pmatrix}$.

تمارين ٢-٥ أ

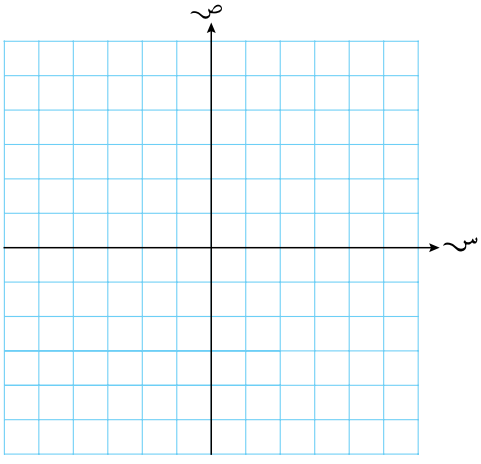
١) يبين الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د(س). ارسم منحنى كل دالّة من الدوالّ الآتية، محددًا مكان النقطتَين العظمى والصغرى في كل حالة:



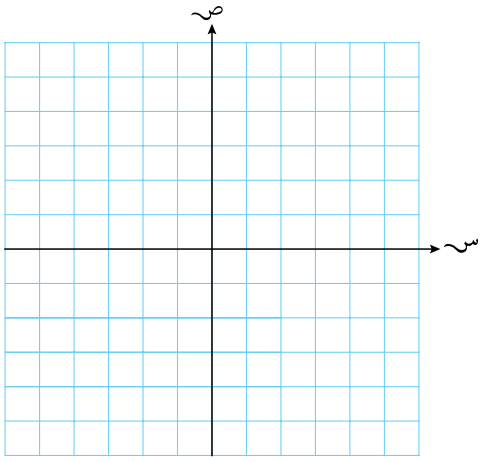
أ ص = د(س) + ٣



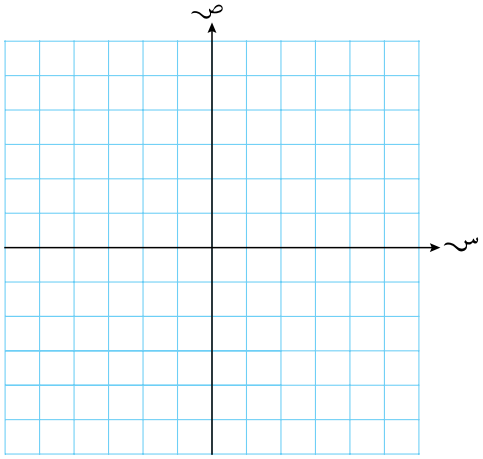
ب ص = د(س) + ٥



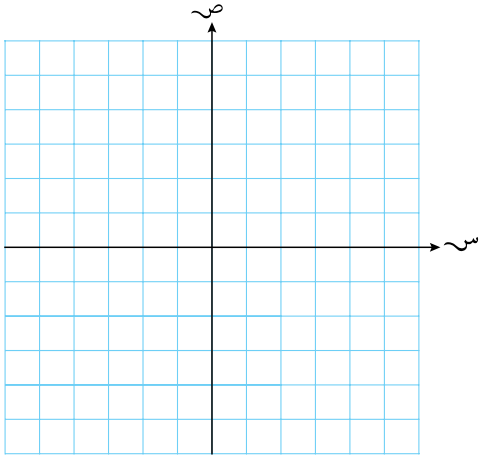
ج ص = د(س) − ٧



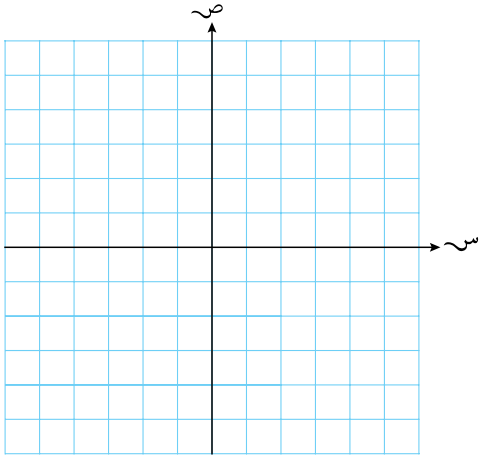
د ص = د(س) − ٠,٥



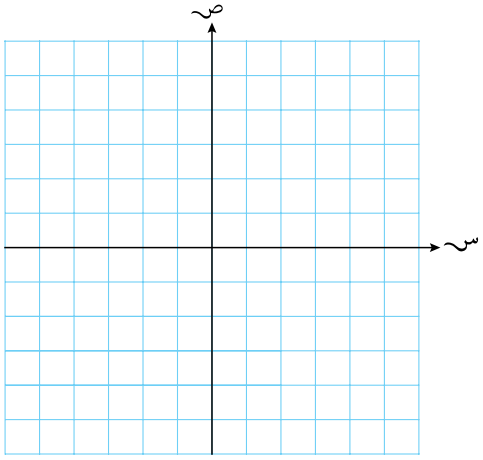
هـ ص = د(س + ٢)



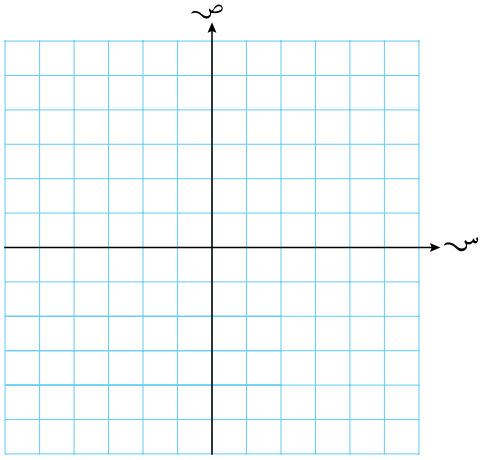
و ص = د(س + ٤)



ز ص = د(س − ١,٥)



ح ص = د(س − ٢)



٢) أوجِد معادلة كلٍّ مما يأتي بعد إجراء التحويل الهندسي المعطى:

أ ١) ص = ٣س^{٢} بعد انسحاب ٣ وحدات إلى الأعلى. _____

٢) ص = ٩س^{٣} بعد انسحاب ٧ وحدات إلى الأسفل. _____

ب ١) ص = ٧س^{٣} − ٣س + ٦ بعد انسحاب وحدتَين إلى الأسفل. _____

٢) ص = ٨س^{٢} − ٧س + ١ بعد انسحاب ٥ وحدات إلى الأعلى. _____

ج ١) ص = ٤س^{٢} بعد انسحاب ٥ وحدات إلى اليمين. _____

٢) ص = ٧س^{٢} بعد انسحاب ٣ وحدات إلى اليسار. _____

د ١) ص = ٣س^{٣} − ٥س^{٢} + ٤ بعد انسحاب ٤ وحدات إلى اليسار. _____

٢) ص = س^{٣} − ٦س + ٢ بعد انسحاب ٣ وحدات إلى اليمين. _____

٣) أوجِد الانسحاب المطلوب في كل حالة من الحالات الآتية:

أ ١) تحويل منحنى الدالّة ص = س^{٢} + ٣س + ٧ إلى منحنى الدالّة ص = س^{٢} + ٣س + ٢

_____

٢) تحويل منحنى الدالّة ص = س^{٣} − ٥س إلى منحنى الدالّة ص = س^{٣} − ٥س − ٤

_____

ب ١) تحويل منحنى الدالّة ص = س^{٢} + ٢س + ٧ إلى منحنى الدالّة
ص = (س + ١)^{٢} + ٢(س + ١) + ٧

_____

٢) تحويل منحنى الدالّة ص = س^{٢} + ٥س − ٢ إلى منحنى الدالّة
ص = (س + ٥)^{٢} + ٥(س + ٥) − ٢

_____

ج ١) تحويل منحنى الدالّة ص = $\sqrt{٧}$س^{٢} إلى منحنى الدالّة ص = $\sqrt{٧}$س^{٢} + ٦

_____

٢) تحويل منحنى الدالّة ص = $\sqrt{٧}$س^{٢} + ١ إلى منحنى الدالّة ص = $\sqrt{٧}$س^{٢} − ٣

_____

٢-٥ ب الانعكاس

مساعدة

تذكّر أن:
منحنى الدالّة ص = د(−س) هو منحنى الدالّة نفسها ص = د(س) بعد إجراء انعكاس حول المحور الصادي.

منحنى الدالّة ص = −د(س) هو منحنى الدالّة نفسها ص = د(س) بعد إجراء انعكاس حول المحور السيني.

تمارين ٢-٥ ب

١) أوجد معادلة كلٍّ مما يأتي بعد إجراء التحويل الهندسي المطلوب:

أ ١) ص = ٣س^{٢} بعد انعكاس حول المحور السيني.

٢) ص = ٩س^{٣} بعد انعكاس حول المحور السيني.

ب ١) ص = ٧س^{٣} − ٣س + ٦ بعد انعكاس حول المحور السيني.

٢) ص = ٨س^{٢} − ٧س + ١ بعد انعكاس حول المحور السيني.

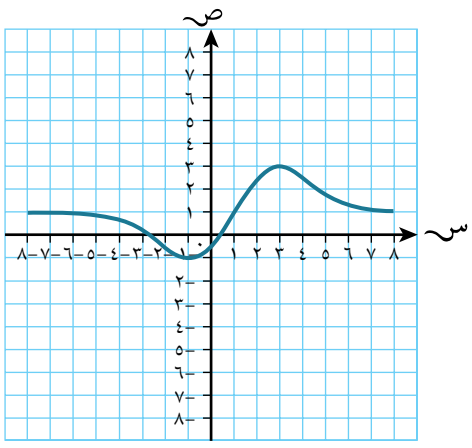
ج ١) ص = ٤س^{٢} بعد انعكاس حول المحور الصادي.

٢) ص = ٧س^{٣} بعد انعكاس حول المحور الصادي.

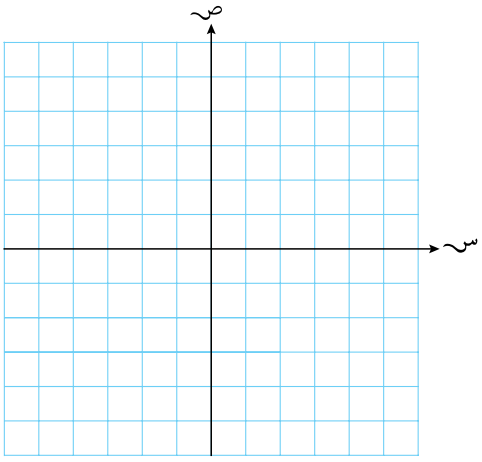
د ١) ص = ٣س^{٣} − ٥س^{٢} + ٤ بعد انعكاس حول المحور الصادي.

٢) ص = س^{٣} − ٦س + ٢ بعد انعكاس حول المحور الصادي.

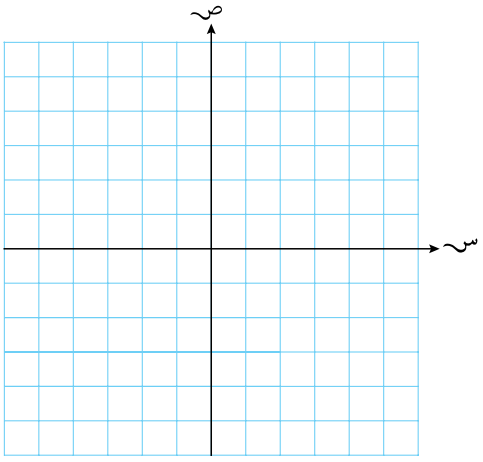
٢) يبين الشكل المجاور منحنى ص = د(س). ارسم منحنى كل دالّة من الدالّتَين الآتيتَين محدّدًا مكان النقطتَين العظمى والصغرى في كل حالة:



أ ص = −د(س)



ب ص = د(−س)



٣) صف التحويل الهندسي المطلوب في كل حالة من الحالات الآتية:

أ ١) تحويل الدالّة ص = س^{٢} + ٣س + ٧ إلى الدالّة ص = −س^{٢} − ٣س − ٧ _____

٢) تحويل الدالّة ص = س^{٣} − ٥س إلى الدالّة ص = ٥س − س^{٣} _____

ب ١) تحويل الدالّة ص = س^{٢} + ٢س + ٧ إلى الدالّة ص = س^{٢} − ٢س + ٧ _____

٢) تحويل الدالّة ص = س^{٢} − ٥س − ٢ إلى الدالّة ص = س^{٢} + ٥س − ٢ _____

ج ١) تحويل الدالّة ص = $\sqrt{٤س}$ إلى الدالّة ص = $\sqrt{-٤س}$ _____

٢) تحويل الدالّة ص = $\sqrt{٢س - ١}$ إلى الدالّة ص = $\sqrt{-١ - ٢س}$ _____

٤) أوجِد معادلة كلٍّ مما يأتي بعد إجراء التحويل الهندسي المطلوب:

أ) ص = ٦س^{٢} بعد انعكاس حول المحور السيني.

_____

ب) س = ٣س^{٣} بعد انعكاس حول المحور الصادي.

_____

ج) ص = ٣س^{٢} − ٤س + ٢ بعد انعكاس حول المحور الصادي.

_____

د) ص = ٥ + س − ٢س^{٢} بعد انعكاس حول المحور السيني.

_____

٥) صِف التحويل الهندسي الذي يحوّل:

أ) الدالّة ص = س^{٢} + ٦س − ٣ إلى الدالّة ص = −س^{٢} − ٦س + ٣ _____

ب) الدالّة ص = س^{٢} − ٢س + ١ إلى الدالّة ص = س^{٢} + ٢س + ١ _____

ج) الدالّة ص = ٣س − ٤س^{٢} إلى الدالّة ص = ٤س^{٢} − ٣س _____

د) الدالّة ص = س^{٣} + س^{٢} − ٤س + ٢ إلى الدالّة ص = −س^{٣} − س^{٢} + ٤س − ٢ _____

٢-٥ ج التمدّد

مساعدة

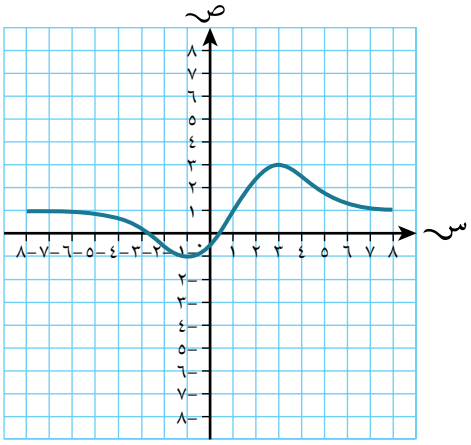
تذكّر أن:

منحنى الدالّة ص = أ د(س) هو تمدّد لمنحنى الدالّة ص = د(س) بمعامل تمدّد مقداره (أ) موازيًا للمحور الصادي.

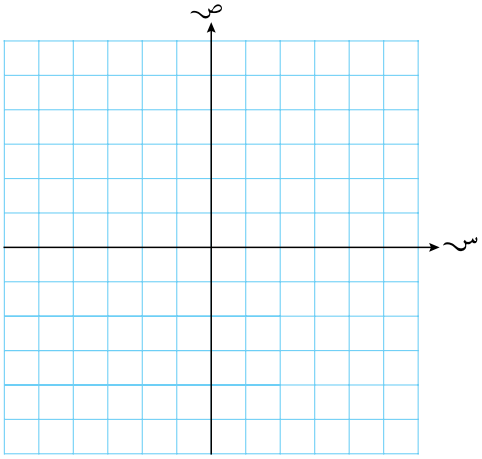
منحنى الدالّة ص = د(أ س) هو تمدّد لمنحنى الدالّة ص = د(س) معامله $\left(\frac{١}{أ}\right)$ وموازٍ للمحور السيني.

تمارين ٢-٥ ج

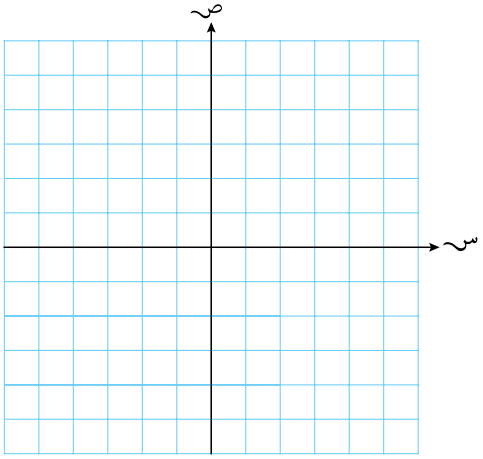
١) يبين الرسم المجاور المنحنى ص = د(س). ارسم منحنى كل دالّة من الدوالّ الآتية محدّدًا مكان النقطتَين العظمى والصغرى في كل حالة:



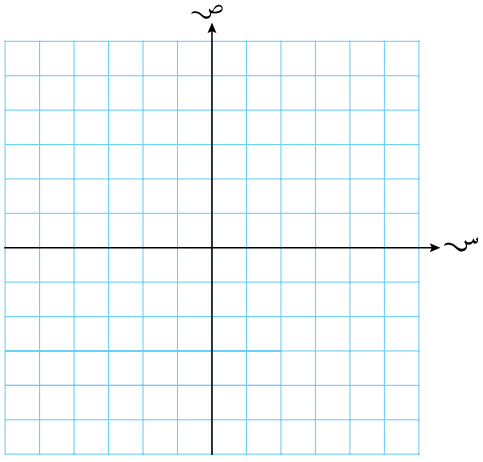
أ ص = ٣د(س)



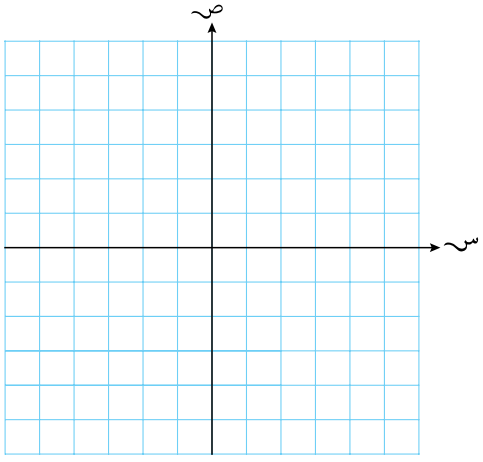
ب ص = ٥د(س)



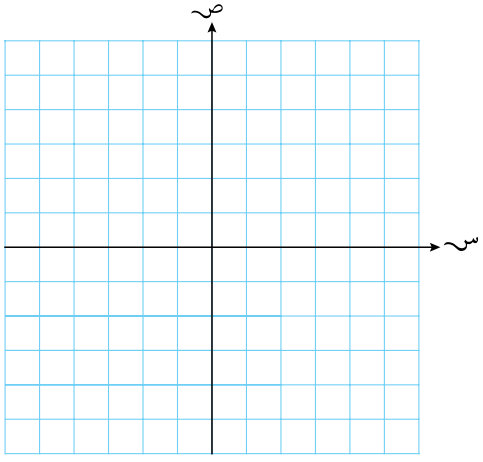
ج ص = $\frac{د(س)}{٤}$



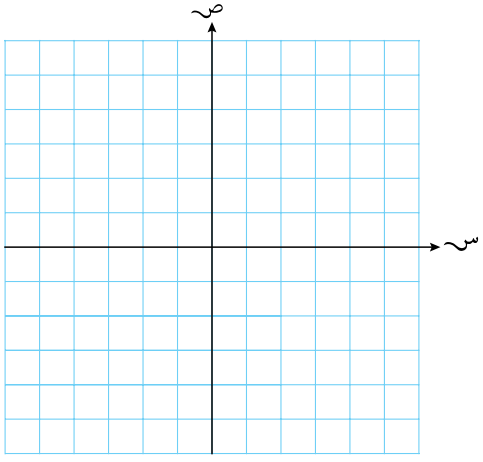
د ص = $\frac{د(س)}{٢}$



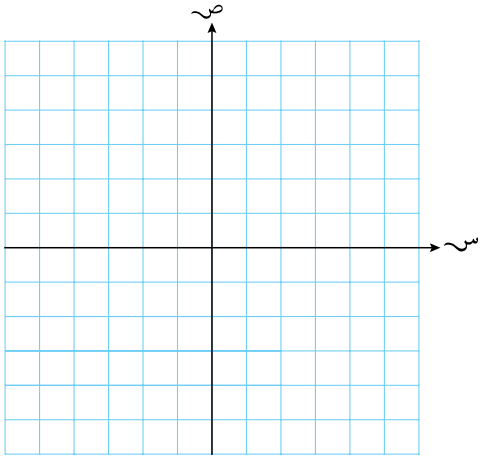
هـ ص = د(٢س)



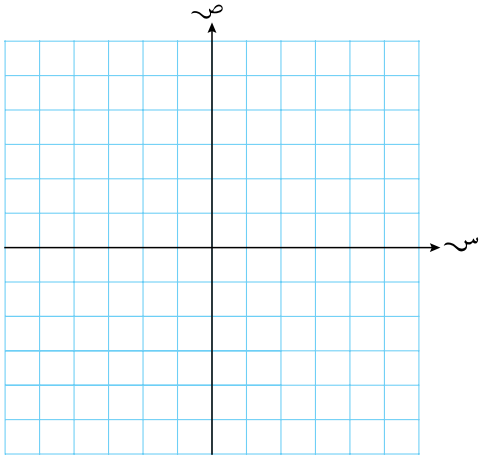
و ص = د(٦س)



ز ص = د$\left(\frac{٢س}{٣}\right)$



ح ص = د$\left(\frac{٥س}{٦}\right)$



٢) أوجِد المعادلة في كل مما يأتي بعد إجراء التحويل الهندسي المعطى:

أ ص = ٣س^{٢} بعد تمدّد رأسي معامله ٧ وموازٍ للمحور الصادي.

ب ص = ٩س^{٣} بعد تمدّد رأسي معامله ٢ وموازٍ للمحور الصادي.

ج ص = ٧س^{٣} − ٣س + ٦ بعد تمدّد رأسي معامله $\frac{١}{٣}$ وموازٍ للمحور الصادي.

د ص = ٨س^{٢} − ٧س + ١ بعد تمدّد رأسي معامله $\frac{٤}{٥}$ وموازٍ للمحور الصادي.

هـ ص = ٤س^{٢} بعد تمدّد أفقي معامله ٢ وموازٍ للمحور السيني.

و ص = ٧س^{٢} بعد تمدّد أفقي معامله ٥ وموازٍ للمحور السيني.

ز ص = ٣س^{٣} − ٥س^{٢} + ٤ بعد تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{٢}$ وموازٍ للمحور السيني.

ح ص = س^{٣} + ٦س + ٢ بعد تمدّد أفقي معامله $\frac{٢}{٣}$ وموازٍ للمحور السيني.

٣) صِف التمدّد الذي يحوّل:

أ الدالّة ص = س^{٢} + ٣س + ٧ إلى الدالّة ص = ٤س^{٢} + ١٢س + ٢٨

ب الدالّة ص = س^{٣} − ٥س إلى الدالّة ص = ٦س^{٣} − ٣٠س

ج الدالّة ص = س^{٢} + ٢س + ٧ إلى الدالّة ص = (٣س)^{٢} + ٢(٣س) + ٧

د الدالّة ص = س^{٢} + ٥س − ٢ إلى الدالّة ص = (٤س)^{٢} + ٥(٤س) − ٢

هـ الدالّة ص = $\sqrt[٧]{٤س}$ إلى الدالّة ص = $\sqrt[٧]{١٢س}$

و الدالّة ص = $\sqrt[٧]{٢س + ١}$ إلى الدالّة ص = $\sqrt[٧]{س + ١}$

٤) أوجِد معادلة كلٍّ مما يأتي بعد إجراء التحويل الهندسي المطلوب:

أ ص = ٣س^{٢} بعد تمدّد مواز للمحور الصادي، ومعامله ٣

ب ص = س^{٣} − ١ بعد تمدّد مواز للمحور الصادي، ومعامله ٢

ج ص = ٣^{س} + ٦ بعد تمدّد مواز للمحور الصادي، ومعامله $\frac{١}{٣}$

د ص = ٦س^{٢} − ٦س + ١ بعد تمدّد مواز للمحور السيني، ومعامله ٢

هـ ص = ٢س^{٣} − ٦س بعد تمدّد مواز للمحور السيني، ومعامله $\frac{١}{٢}$

٥) صِف التحويل الهندسي الذي يحوّل كل دالّة في ما يأتي:

أ ص = ٢س^{٢} − ٤س − ٥ إلى الدالّة ص = ٨س^{٢} − ٨س − ٥

ب ص = ٢س^{٢} − ٢س + ٣ إلى الدالّة ص = ٦س^{٢} − ٦س + ٩

ج ص = ٢^{س} + ١ إلى الدالّة ص = ٢$^{س + ٢}$ + ٤

د ص = $\sqrt[٣]{٣س − ١}$ إلى الدالّة ص = $\sqrt[٣]{٩س − ١}$

٦-٢ تركيب التحويلات الهندسية

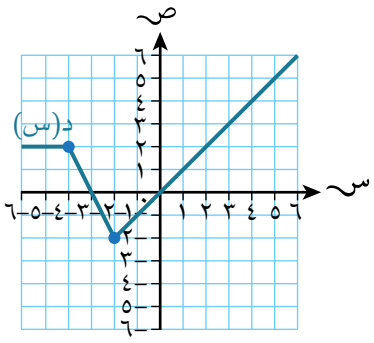
مساعدة

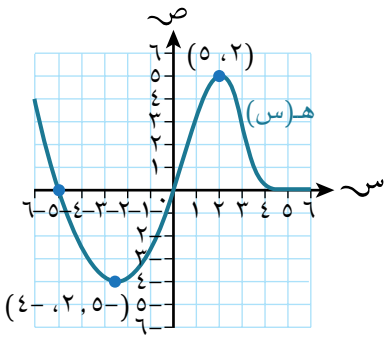
تتبع التحويلات الهندسية الرأسية ترتيب العمليات الحسابية نفسه.

تتبع التحويلات الهندسية الأفقية الترتيب المعاكس لترتيب العمليات الحسابية.

تمارين ٦-٢

١) يبيّن الشكلان أدناه منحنيَي الدالّتَين ص = د(س)، ص = هـ(س):



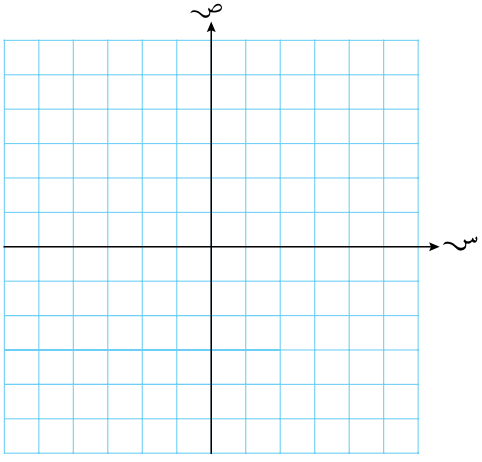


مساعدة

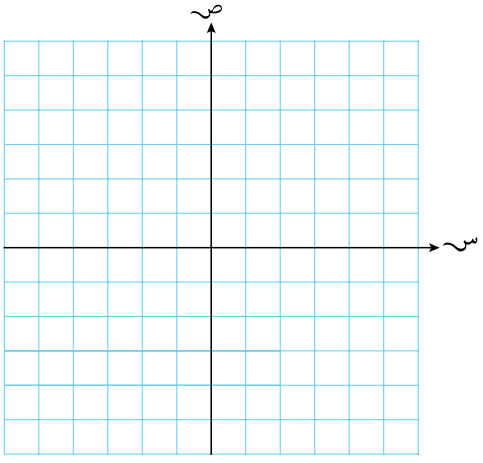
- عند تركيب تحويلَين هندسيين رأسيَّين أو تحويلَين هندسيين أفقيَّين، يؤثر الترتيب الذي يتمّ إجراؤه على الناتج.
- عند تركيب تحويل هندسي أفقي وتحويل هندسي رأسي، لا يؤثر الترتيب الذي يتمّ إجراؤه على الناتج.

مثّل الدوالّ الآتية بيانيًّا:

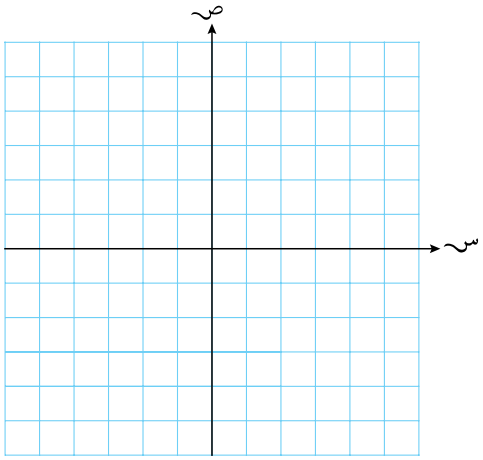
أ) ص = ٢د(س) - ١



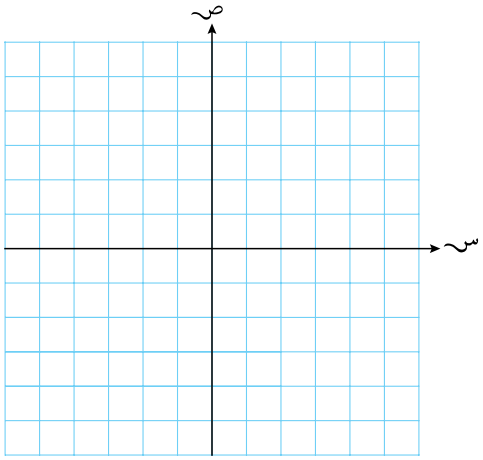
ب) ص = $\frac{١}{٢}$هـ(س) + ٣



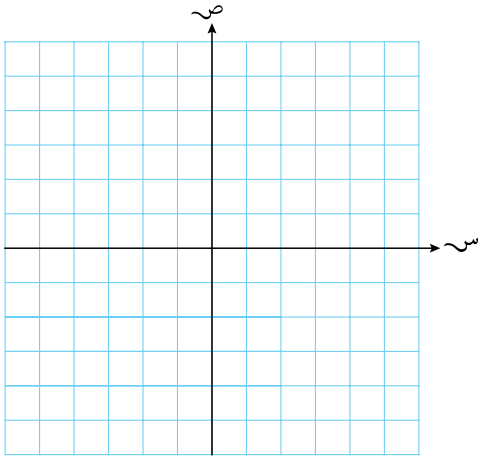
ج ص = ٤ − د(س)



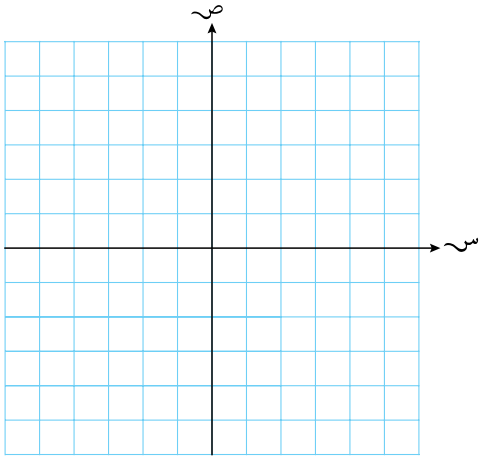
د ص = ٢ − ٢هـ(س)



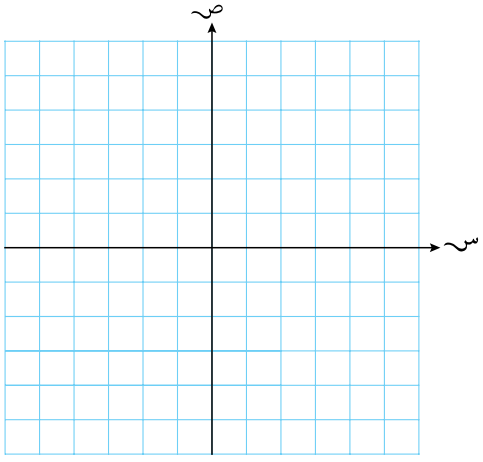
هـ ص = ٣(د(س) − ٢)



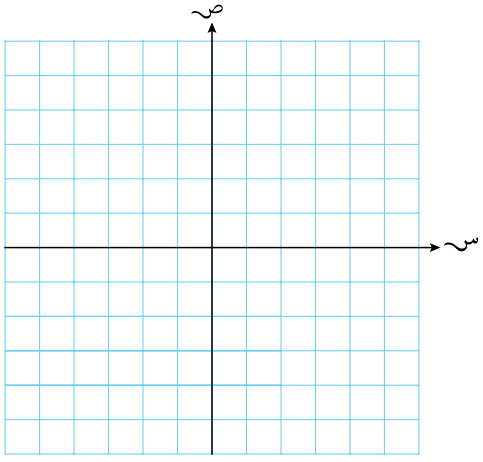
و ص = $\frac{١ - هـ(س)}{٢}$



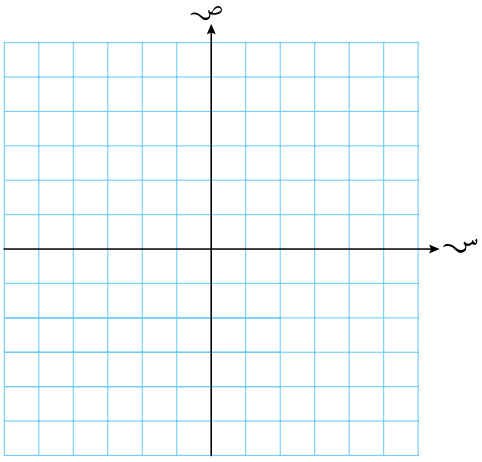
ز ص = د$\left(\frac{س}{٢} - ١\right)$



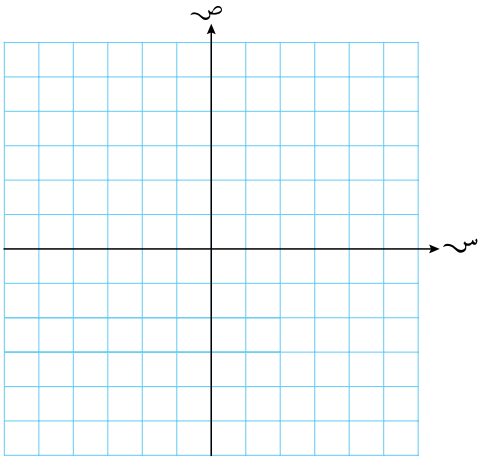
ح ص = هـ(٢س + ٣)



ط ص = د $\left(\frac{٤ - س}{٥}\right)$



ي ص = هـ $\left(\frac{٣ - س}{٢}\right)$



٢) إحداثيات رأس المنحنى ص = هـ(س) هي (٢، −٤). اكتب إحداثيات رأس المنحنى الذي معادلته:

أ ص = هـ(س − ٣)

ب ص = هـ(س) − ٥

ج ص = − هـ(س)

د ص = هـ(٢س)

هـ ص = ٢هـ(س)

٣) إذا كانت الدالّتان د(س) = −س^{٢}، س ∈ ع، هـ(س) = س^{٢} + ٢س + ٨، س ∈ ع:

أ اكتب هـ(س) في صورة (س + أ)^{٢} + ب، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب صِف التحويلَين الهندسيَّين (والترتيب الذي يجب إجراؤه) عند الحصول على الدالّة هـ(س) من الدالّة د(س).

٤) إذا علمت أن د(س) = ٢س^{٢} − ٤، فاكتب معادلة الدالّة هـ(س) التي تمثّل منحنى د(س) بعد إجراء التحويلات الهندسية الآتية:

أ انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \end{pmatrix}$ يتبعه تمدّد رأسي معامله ٣

ب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٦ \end{pmatrix}$ يتبعه تمدّد رأسي معامله $\frac{١}{٢}$

ج تمدّد رأسي معامله $\frac{١}{٢}$ يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٦ \end{pmatrix}$.

د تمدّد رأسي معامله $\frac{٧}{٢}$ يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١٠ \end{pmatrix}$.

هـ انعكاس حول المحور الأفقي يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -١ \end{pmatrix}$.

و انعكاس حول المحور الأفقي يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \end{pmatrix}$.

ز انعكاس حول المحور الأفقي يتبعه تمدّد رأسي معامله $\frac{١}{٢}$، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$.

ح انعكاس حول المحور الأفقي يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٦ \end{pmatrix}$، ثم تمدّد رأسي معامله $\frac{٣}{٢}$

٥) إذا علمت أن د(س) = س^{٢}، فاكتب كل دالّة من الدوالّ الآتية في صورة د(أس + ب)، ثم صِف التحويل الهندسي الذي يحوّل د(س) إلى الدالّة المعطاة:

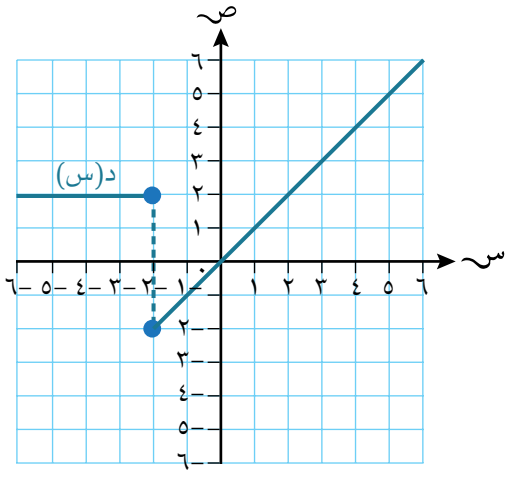
أ هـ(س) = س^{٢} + ٢س + ١

ب هـ(س) = س^{٢} − ٦س + ٩

ج ك(س) = ٤س^{٢} + ٨س + ٤

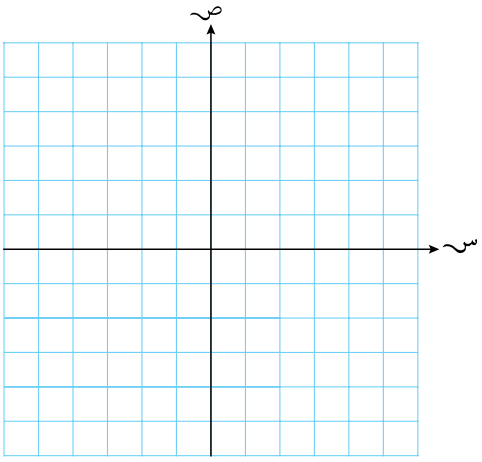
د ك(س) = ٩س^{٢} − ٦س + ١

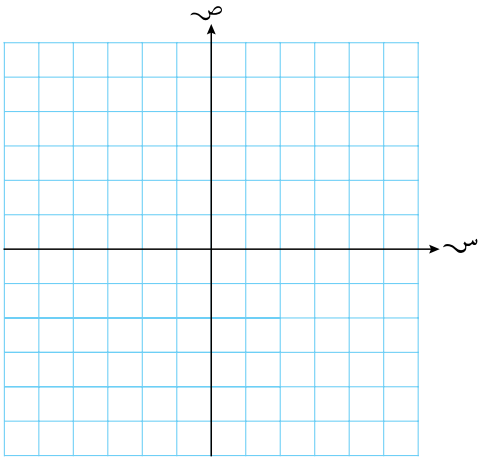
٦) يبيّن الرسم المجاور منحنى ص = د(س). ارسم كل دالّة من الدوالّ الآتية في مستوى إحداثي منفصل:



أ ص = د(٢س) − ٣

ب ص = ١ − ٣د(س)





٧) تمّ انسحاب منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٣س وحدتَين إلى اليمين، ثم تمّ انعكاس الصورة حول المحور السيني. أوجِد معادلة منحنى الدالّة الناتج في صورة ص = أ س^{٢} + ب س + جـ.

٨) تمّ إجراء تحويل على منحنى الدالّة د(س) = أ س + ب بالتسلسل الآتي:

- انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$
- انعكاس حول ص = ٠
- تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{٣}$

الدالّة الناتجة هي هـ(س) = ٤ − ١٥س. أوجِد قيمة كل من أ، ب.

٩) تمّ إجراء تحويل على منحنى الدالّة ص = أ س^{٢} + ب س + جـ بالتسلسل الآتي:

- انعكاس حول س = ٠
- انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$.
- تمدّد أفقي معامله ٢

الدالّة الناتجة هي هـ(س) = ٤س^{٢} + أ س − ٦، أوجِد قيمة كل من أ، ب، جـ.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثانية

١) أوجِد المجال والمدى لكل دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د: س ← ٤ − س^{٢}

ب) د: س ← (س + ٣)^{٢} − ٧

ج) د: س ← $\sqrt{س + ٢}$

د) د: س ← ٥س + ٦

هـ) د: س ← (٢س + ٣)^{٢}

و) د: س ← ٢ − $\sqrt{س}$

٢) إذا علمت أن الدالّتَين د(س)، هـ(س) معرفتان كالآتي: د: س ↦ س^{٣}، س ∋ ع، هـ: س ↦ ١ − ٢س، س ∋ ع. فأوجِد معادلة كل دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) (د ∘ هـ)(س)

ب) (هـ ∘ د)(س)

ج) (هـ ∘ د ∘ د)(س)

د) (هـ ∘ هـ)(س)

هـ) هـ$^{-١}$(س)

٣) أوجِد كل قيمة من القيم الآتية علمًا بأن د: س ↦ ٢س^{٣} − ٦، س ∋ ع:

أ) د(٣)

ب) د$^{-١}$(٤٨)

ج) د$^{-١}$(−٨)

د) (د$^{-١}$ ∘ د)(٤)

هـ) (د ∘ د$^{-١}$)(٤)

٤) إذا علمت أن د(س)، هـ(س)، ع(س) ثلاث دوالّ معرفة كالآتي:

د: س ← ٢س + ١، س ∈ ع، هـ: س ↦ س^{٥}، س ∈ ع، ع: س ← $\frac{١}{\text{س}}$، س ∈ ع

فاكتب كل دالّة من الدوالّ الآتية بدلالة د، هـ، ع:

أ) س ← (٢س + ١)^{٥}

ب) س ← ٤س + ٣

ج) س ← س$^{\frac{١}{٥}}$

د) س ← ٢س$^{-٥}$ + ١

هـ) س ← $\frac{١}{٢\text{س}^{٥} + ١}$

و) د: س ← $\frac{\text{س} - ١}{٢}$

ز) س ← $\sqrt[٥]{\frac{٢}{\text{س}^{٥}} + ١}$

ح) س ← $\frac{٢}{\text{س} - ١}$

٥) إذا علمت أن د(س)، هـ(س) دالّتان معرفتان كالآتي:

د: س ← س^{٢} + ٢س + ٣، س ∈ ع، هـ: س ← أ س + ب، س ∈ ع،

فأوجِد القيم الممكنة للعددَين أ، ب علمًا بأن (د ∘ هـ)(س) = ٤س^{٢} − ٤٨س + ١٤٦

٦) إذا علمت أن د: س ↦ ٢س + ٧، س ∈ ع، هـ: س ↦ س^{٣} − ١، س ∈ ع، فأوجِد كل دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د$^{-١}$(س)

ب) هـ$^{-١}$(س)

ج) (هـ$^{-١}$ ∘ د$^{-١}$)(س)

د (د$^{-1}$ ○ هـ$^{-1}$)(س)

هـ (د ○ هـ)(س)

و (هـ ○ د)(س)

ز (د ○ هـ)$^{-1}$(س)

ح (هـ ○ د)$^{-1}$(س)

٧) إذا علمت أن الدالّتَين د(س)، هـ(س) معرفتان كالآتي:

د: س ← $\frac{١}{س}$ ، ٠ < س ⩽ ٣

هـ: س ← ٢س − ١ ، س ∋ ع

أ أوجِد مدى الدالّة د(س) مستخدمًا طريقة بيانية أو أيّة طريقة أخرى.

ب احسب (هـ ○ د)(٢).

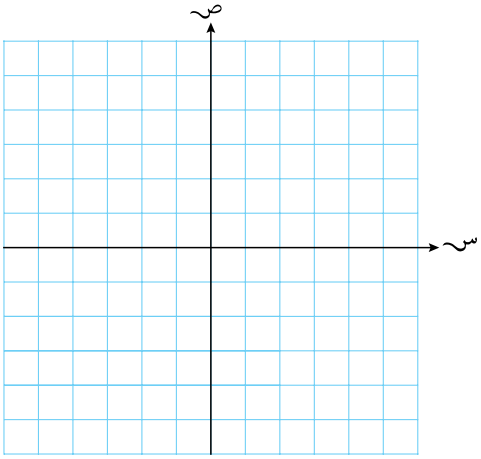
ج أوجِد عبارة جبرية للدالّة هـ$^{-1}$(س) بدلالة س.

د ارسم في المستوى الإحداثي نفسه المنحنيَين ص = هـ(س)، ص = هـ$^{-1}$(س)، واذكر العلاقة الهندسية بين المنحنيَين.

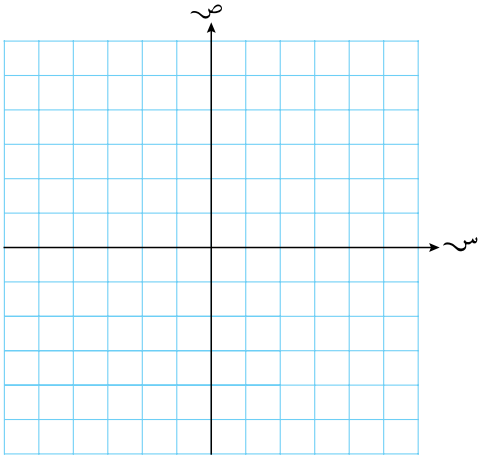
٨) إذا علمت أن الدالّة د(س) معرفة في المجال س ⩽ ٠ كالآتي:

د : س ← ٤ − س^{٢}

أ ارسم منحنى الدالّة د(س)، وحدّد مداها.



ب صف تحويلًا هندسيًّا بسيطًا بحيث يمكن الحصول على الدالّة ص = د(س) من الدالّة ص = س^{٢}، س ⩽ ٠



ج إذا علمت أن د$^{-١}$(س) تمثّل الدالّة العكسية للدالّة د(س)، فأوجد العبارة د$^{-١}$(س)، واذكر مجال د$^{-١}$(س)

د بيّن بيانيًّا أو بأيّة طريقة أخرى أنه يمكن الوصول إلى حلّ المعادلة د(س) = د$^{-١}$(س) باستخدام المعادلة التربيعية س^{٢} + س − ٤ = ٠

أوجِد حلّ المعادلة د(س) = د$^{-١}$(س) مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين.

الوحدة الثالثة
المتتاليات والمتسلسلات
Sequences and series

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٣-١ تحدّد المتتاليات والمتسلسلات الحسابية، وتتعرف على الفرق بينهما.

٣-٢ تجد الحدّ الأوّل والأساس في المتتالية الحسابية.

٣-٣ تجد الحدّ النوني ومجموع الحدود حتى الحدّ النوني في المتتالية الحسابية.

٣-٤ تستخدم صيغ الحد النوني ومجموع الحدود من الحدّ الأوّل حتى الحدّ النوني لتحلّ مسائل تتضمّن متتاليات حسابية.

٣-٥ تحدّد المتتاليات والمتسلسلات الهندسية، وتتعرف على الفرق بينهما.

٣-٦ تجد الحدّ الأوّل والأساس في المتتالية الهندسية.

٣-٧ تجد الحدّ النوني ومجموع الحدود حتى الحدّ النوني في المتتالية الهندسية.

٣-٨ تستخدم صيغ الحد النوني ومجموع الحدود من الحدّ الأوّل حتى الحدّ النوني لتحلّ مسائل تتضمّن متتاليات هندسية.

٣-٩ تذكر وتستخدم شرط التقارب في المتتالية الهندسية لتحدّد المتتاليات المتقاربة.

٣-١٠ تستخدم صيغة المجموع غير المنتهي في متتالية هندسية متقاربة.

٣-١١ تحلّ المسائل التي تتضمّن متتاليات حسابية وهندسية.

٣-١ المتتاليات الحسابية

مساعدة

الحد العام $(ح_ن) = أ + (ن - ١)د$

مجموع ن حدًّا الأولى لمتتالية حسابية:

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل) = \frac{١}{٢}ن[٢أ + (ن - ١)د]$

تمارين ٣-١

١) أوجِد عدد الحدود في كل متتالية من المتتاليات الحسابية الآتية:

أ ١، ٣، ٥، ... ، ٦٥

_____

_____

_____

ب ١٨، ١٣، ٨، ... ، −١٢٢

ج حدها الأوّل هو ٨، وأساسها هو ٩، وحدها الأخير هو ٨٩٩

د $ح_{١} = ٠$، $ح_{ن} = ١٦$، ل = ٤٥٠

٢) يشكّل ارتفاع الدرجات في سلّم ما متتالية حسابية. إذا كان ارتفاع الدرجة الثالثة ٧٠ سم فوق سطح الأرض وارتفاع الدرجة العاشرة ٢١٠ سم فوق سطح الأرض، وكان ارتفاع أعلى درجة ٣٥٠ سم فوق سطح الأرض، فكم عدد درجات السلّم؟

٣) إذا علمت أن الحدود الأربعة الأولى في متتالية حسابية هي ٢، (أ − ب)، (٢أ + ب + ٧)، (أ − ٣ب)، حيث أ، ب ثابتان، فأوجد قيمة كل من أ، ب.

٤) مجموع الحدود الثلاثة الأولى في متتالية حسابية هو −١٢، ومجموع الحدود الاثني عشر الأولى هو ١٤٤، أوجِد الحد الأوّل (أ)، والأساس (د).

★ ٥) أثبت أن مجموع أول ن عددًا فرديًّا هو $ن^{٢}$.

٦) مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية هو $جـ_{ن} = ٣ن^{٢} - ٢ن$. أوجِد الحد العام ($ح_{ن}$).

٧) تمّ تقسيم قرص دائريّ إلى اثني عشر قطاعًا تشكّل مساحتها متتالية حسابية. إذا علمت أن قياس زاوية القطاع الأكبر هي ضعف قياس زاوية القطاع الأصغر، فأوجد قياس زاوية القطاع الأصغر.

٨) أ) أوجِد مجموع كل مضاعفات العدد ٧ الموجودة بين العددَين ١، ١٠٠٠

ب أوجِد مجموع كل الأعداد الصحيحة التي لا تقبل القسمة على ٧، والمحصورة بين العددين ١، ١٠٠٠

٩) أوجِد مجموع كل الأعداد التي تتكوّن من ثلاثة أرقام، والتي من مضاعفات ١٤، وليست من مضاعفات ٢١

٣-٢ المتتاليات الهندسية

مساعدة

$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ أو $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$، عندما ر ≠ ١

$جـ_ن$ = أ × ن عندما ر = ١

تمارين ٣-٢

١) إذا علمت أن الحد الثاني في متتالية هندسية هو ٦، والحد الخامس هو ١٦٢، فأوجد:

أ الحد العام للمتتالية.

ب الحد العاشر.

٢) إذا علمت أن الحد الثالث في متتالية هندسية هو ١٢، والحد الخامس هو ٤٨، فأوجد:

أ الحد الأوّل، والأساس (النسبة المشتركة).

ب القيمتَين الممكنتَين للحد الثامن.

٣) إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي: (ف)، (ف + ١٤)، (٩ف)، فأوجد:

أ القيم الممكنة للثابت (ف).

ب الحد العاشر في المتتالية لكل قيمة من قيم (ف).

٤) إذا كان الحد الثالث في متتالية هندسية هو ١١٢، والحد السادس هو ٧١٦٨، فما الحد الذي قيمته ١٨٣٥٠٠٨؟

٥) أوجِد مجموع المتتاليات الهندسية الآتية (قد يكون هناك أكثر من إجابة واحدة):

أ ٧ ، ٣٥ ، ١٧٥ ، ... (١٠ حدود).

ب ١١٥٢ ، ٥٧٦ ، ٢٨٨ ، ... (١٢ حدًّا).

ج ١٦ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ... ، ١٨٢,٢٥

د ١ ، ١,١ ، ١,٢١ ، ... ، ١,٧٧١٥٦١

هـ حدها الأول = ٨، أساسها = −٣، حدها الأخير = ٥٢٤٨٨

و ح$_{ن}$ = −٦، ر = −٣، ل = ١٣١٢٢

ز حدها الأخير هو ٢٤، حدها الخامس هو ٦، وعدد حدودها ١٢ حدًّا.

ح) $ح_{٩} = ٥٠$ ، $ح_{١٣} = ٠,٠٨$ ، $ل = ٠,٠٠٣٢$

٦) أوجِد القيم الممكنة لأساس كل متتالية من المتتاليات الهندسية الآتية:

أ) الحد الأوّل ١١ ، ومجموع الحدَّين الأوّلَين ١٢,٦٥

ب) الحد الأوّل ١ ، ومجموع الحدَّين الأوّلَين ٣,٧

ج) الحد الأوّل ١٢ ، ومجموع الحدود الثلاثة الأولى هو (١٦,٦٨).

د) الحد الأوّل ١٠ ، ومجموع الحدود الأربعة الأولى ١

٧) إذا كان الحد الأوّل في متتالية هندسية هو ٦، ومجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوي ٢٩، فأوجِد أساس المتتالية.

٨) إذا كان مجموع الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية يساوي ٥٢٠، ومجموع الحدود الخمسة الأولى يساوي ٨٤٤، ومجموع الحدود الستة الأولى يساوي ١٣٣٠، فأوجد:

أ) أساس المتتالية.

ب مجموع الحدَّين الأوّلَين.

★ **٩)** لمخترع لعبة الشطرنج قصة معروفة، فقد طُلب إليه تحديد المكافأة التي يريدها على اختراعه اللعبة. فأمر بوضع حبّة أرزّ واحدة في المربّع الأوّل من اللوحة، وحبّتَين في المربّع الثاني، و٤ حبّات في المربّع الثالث وهكذا بمتتالية هندسية حتى يتمّ تغطية كل مربّعات اللوحة البالغ عددها ٦٤

احسب العدد الإجمالي لحبوب الأرزّ التي سيحصل عليها. اكتب الناتج في الصيغة العلمية.

★ **١٠)** س، ص، ع هي أول ثلاثة حدود على الترتيب في متتالية هندسية. بيّن أن $س^{٢}$، $ص^{٢}$، $ع^{٢}$ تشكّل متتالية هندسية.

٣-٣ المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

مساعدة

$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$، حيث $-١ < ر < ١$

تمارين ٣-٣

١) حدد فيما إذا كانت كل متسلسلة من المتسلسلات الآتية متقاربة أم لا، ثم أوجِد ناتج كلٍّ منها:

أ) $٩ + ٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \ldots$

ب) $٥٦ + ٨ + ١\frac{١}{٧} + \ldots$

ج) $٠,٣ + ٠,٠٣ + ٠,٠٠٣ + \ldots$

د) $٠,٧٨ + ٠,٠٠٧٨ + ٠,٠٠٠٠٧٨ + \ldots$

هـ) $٠,٠١ + ٠,٠٢ + ٠,٠٤ + \ldots$

و) $\frac{١٩}{١٠٠٠٠} + \frac{١٩}{١٠٠٠} + \frac{١٩}{١٠٠} + \ldots$

ز) $١٠ - ٢ + ٠,٤ + \ldots$

ح) $٦ - ٤ + \frac{٨}{٣} + \ldots$

ط) $١٠ - ٤٠ + ١٦٠ + \ldots$

ي) $٤,٢ - ٣,٣٦ + ٢,٦٨٨ + \ldots$

٢) أوجِد قيم س لتكون كلّ متسلسلة من المتسلسلات الهندسية الآتية متقاربة:

أ) $٩ + ٩س + ٩س^{٢} + \ldots$

ب) $-٢ - ٢س - ٢س^{٢} + \ldots$

ج) $١ + ٣س + ٩س^{٢} + \ldots$

د) $١ + ١٠س + ١٠٠س^{٢} + \ldots$

هـ) $-٢ - ١٠س - ٥٠س^{٢} + \ldots$

و) $٨ + ٢٤س + ٧٢س^{٢} + \ldots$

ز) $٤٠ + ١٠س + ٢,٥س^{٢} + \ldots$

ح) $١٤٤ + ١٢س + س^{٢} + \ldots$

ط) $٢٤٣ - ٨١س + ٢٧س^{٢} + \ldots$

ي) $١ - \frac{٥}{٤}س + \frac{٢٥}{١٦}س^{٢} + \ldots$

ك) $٣ - \frac{٦}{س} + \frac{١٢}{س^{٢}} + \ldots$

ل) $١٨ - \frac{٩}{س} + \frac{٩}{٢س^{٢}} + \ldots$

م $٥ + ٥(٣ - ٢س) + ٥(٣ - ٢س)^{٢} \ldots$

ن $٧ + \frac{٧(٢ - س)}{٢} + \frac{٧(٢ - س)^{٢}}{٤} \ldots$

س $١ + \left(٣ - \frac{٢}{س}\right) + \left(٣ - \frac{٢}{س}\right)^{٢} \ldots$

ع $١ + \frac{١ + س}{س} + \frac{(١ + س)^{٢}}{س^{٢}} \ldots$

ف $٧ + ٧س^{٢} + ٧س^{٤} \ldots$

ص $١٢ - ٤٨س^{٣} + ١٩٢س^{٦} \ldots$

٣) إذا كان الحدّان الأوّل والرابع في متتالية هندسية هما ١٨، $-\frac{٢}{٣}$ على الترتيب. فأوجد:

أ مجموع أول ن حدًّا.

ب مجموع المتتالية غير المنتهية.

٤) متتالية هندسية كل حدودها موجبة، ومجموع أول حدَّين فيها يساوي ١٥، ومجموع حدودها غير المنتهية يساوي ٢٧، أوجِد:

أ الأساس (النسبة المشتركة).

ب الحد الأوّل.

٥) مجموع حدود متتالية هندسية غير منتهية هو ٣٢، ومجموع أول أربعة حدود فيها هو ٣٠، وجميع حدودها موجبة. أوجِد الفرق بين مجموع حدودها غير المنتهية، ومجموع أول ثمانية حدود فيها.

٦) إذا كانت حدود المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هي: $١ + \left(\frac{٢س}{٣}\right) + \left(\frac{٢س}{٣}\right)^{٢} \ldots$ فأوجد:

أ قيم س التي تجعل المتسلسلة متقاربة.

ب مجموع حدود المتسلسلة عندما س = ١,٢

٧) إذا كان مجموع الحدود في متتالية هندسية غير منتهية هو ١٣,٥، ومجموع الحدود الثلاثة الأولى فيها هو ١٣، فأوجد الحد الأوّل.

٨) إذا كان أساس متتالية هندسية هو $٢^{س}$، فأوجد:

أ قيم س علمًا بأن مجموع الحدود غير المنتهية في المتتالية موجود.

ب قيمة س ليكون مجموع المتتالية غير المنتهية يساوي ٤٠، والحد الأوّل في المتتالية هو ٣٥

٩) تمّ إسقاط كرة من ارتفاع ١ م على طاولة مستوية. كلما ارتطمت الكرة في الطاولة، تعاود ارتفاعها إلى ارتفاع يساوي ٠,٩ من الارتفاع الذي سقطت منه. ما المسافة الإجمالية التي تتخطّاها الكرة قبل أن تتوقّف عن الارتداد؟ (علمًا بأن الكرة ترتطم في نفس النقطة من الطاولة كل مرة).

١٠) يجلس ضفدع على أحد طرفي طاولة طولها ٢ متر. في القفزة الأولى، يقطع الضفدع مسافة ١ متر على طرفي الطاولة، وفي القفزة الثانية، يقطع $\frac{١}{٢}$ متر، وفي القفزة الثالثة $\frac{١}{٤}$ متر وهكذا.

إذا كانت أ = ١ ، ر = ٠,٥

أ ما الموقع الأخير للضفدع؟

ب بعد كم قفزة سيكون الضفدع داخل السنتيمتر الأخير من نهاية الطاولة؟

٣-٤ المزيد من المتتاليات الحسابية والهندسية

تمارين ٣-٤

★ **١)** الحد الأوّل في متتالية حسابية (أ)، وأساسها (د):

أ اكتب بدلالة أ، د عبارتَين للحد الثاني، والحد السادس في المتتالية.

ب إذا كانت الحدود الأوّل والثاني والسادس في هذه المتتالية الحسابية هي الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية. فأثبت أن د = ٣أ.

ج أوجد مجموع كل ١٥ حدًا في المتتاليتَين علمًا بأن أ = ٢

٢) متتالية حسابية حدها الأول هو ١، ومتتالية هندسية حدها الأول هو ١ أيضًا. الحد الثالث في المتتالية الحسابية هو نفسه الحد الثاني في المتتالية الهندسية، والحد الرابع في المتتالية الحسابية هو نفسه الحد الثالث في المتتالية الهندسية. أوجِد القيم الممكنة لأساس المتتالية الحسابية.

٣) تشكّل الحدود الأوّل والثاني والرابع في متتالية هندسية حدودًا متتابعة في متتالية حسابية. أوجِد أساس المتتالية الهندسية علمًا بأن مجموع حدود المتتالية غير المنتهية موجود.

٤) إذا علمت أن الحدَّين الأوّل والثاني لمتتاليتَين حسابية وهندسية هما ٢، س على الترتيب (س ≠ ٢)، فأوجد كلًّا من:

أ الحد الثالث في المتتالية الهندسية بدلالة س.

ب الحد الحادي عشر في المتتالية الحسابية بدلالة س.

ج قيمة س.

د إذا علمت أن الحد الثالث في المتتالية الهندسية، والحد الحادي عشر في المتتالية الحسابية متساويان، فأوجد مجموع الحدود الخمسين الأولى في المتتالية الحسابية.

٥) تشكل الحدود الثاني والرابع والثامن في متتالية حسابية حدودًا متتابعة في متتالية هندسية، مجموع الحدَّين الثالث والخامس في المتتالية الحسابية يساوي ٢٠، أوجِد الحدود الأربعة الأولى في المتتالية الحسابية.

٦) تشكل الحدود الثاني والخامس والحادي عشر في متتالية حسابية حدودًا متتابعة في متتالية هندسية، والحد السابع في المتتالية الحسابية هو ٤

أ أوجِد الحد الأوّل في المتتالية الحسابية، وأساسها.

ب ما أساس المتتالية الهندسية؟

٧) تشكل الحدود أ، ١، ب حدودًا متتابعة في متتالية حسابية على الترتيب. الحدود الثلاثة ١، أ، ب هي حدود متتابعة أيضًا في متتالية هندسية. أوجِد قيمتَي أ، ب علمًا بأن أ ≠ ب.

٨) يتمثّل مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية بالقاعدة $ج_ن = ٤ن^٢ - ٢ن$، إذا علمت أن الحدود الثلاثة $ح_٢$، $ح_م$، $ح_{٢٢}$ هي ثلاثة حدود متتابعة في متتالية هندسية، فأوجد قيمة م.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثالثة

١) إذا كان مجموع الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية يساوي ١٩، ومجموع حدودها غير المنتهية يساوي ٢٧، فأوجد أساس المتتالية.

٢) إذا علمت أن الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي (٢س + ٤)، (س + ٥)، (س + ١)، فأوجد:

أ القيمتَين الممكنتَين للعدد س.

ب مجموع حدود المتتالية غير المنتهية.

٣) أوجِد مجموع كل الأعداد الصحيحة الموجودة بين ٣٠٠، ٦٠٠ التي تقبل القسمة على ٧

★ **٤)** إذا كان الحد الأوّل في متتالية هندسية غير منتهية هو (أ)، ومجموع حدودها غير المنتهية يساوي (ب)، حيث ب ≠ ٠، فأثبت أن أ يقع بين ٠، ٢ب.

الوحدة الرابعة
تحليل البيانات
Data analysis

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٤-١ تحسب وتستخدم الوسط الحسابي لبيانات أولية ومجمّعة ومعروضة في جدول متضمنة بيانات مشفرة.

٤-٢ تحسب وتستخدم التباين والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات، ولمجموعة بيانات مجمّعة من البيانات الأولية، مع المجاميع أو المجاميع المشفرة ($\Sigma س$، $\Sigma س^{٢}$، $\Sigma (س - أ)$، $\Sigma (س - أ)^{٢}$).

٤-١ الوسط الحسابي (المعدل)

تمارين ٤-١

١) تمّ تسجيل عدد الطائرات التي هبطت في أحد الأماكن خلال ٣٠ يومًا متتاليًا:

عدد الطائرات	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الأيام (ت)	٢	٤	٨	٧	٦	٣

أ أوجِد العدد الإجمالي للطائرات التي هبطت في المكان خلال هذه المدّة الزمنية.

ب احسب الوسط الحسابي لعدد الطائرات التي هبطت في اليوم الواحد.

٢) الوسط الحسابي للأعداد ٦٩، ١٢٣، ٢٣٤، ٣٤١، ٣٨٨ يساوي ٢٣١

أ بكم يجب أن يزيد أصغر الأعداد الخمسة حتى يصبح الوسط الحسابي ٢٣٣؟

ب بكم يجب أن يتغيّر العدد الأكبر بين الأعداد الخمسة بحيث يصبح الوسط الحسابي ٢١١؟

٣) س، ٣س، (س – ٢٤)، (١٠٠ – س) هي أربعة أعداد.

أ) أوجِد الوسط الحسابي لهذه الأعداد بدلالة س.

ب) أوجِد العدد الأكبر والعدد الأصغر لهذه الأعداد إذا كان وسطها الحسابي ٤٢

٤) إذا كان الوسط الحسابي لخمسة وعشرين عددًا يساوي ١٦، والوسط الحسابي لأصغر عشرة أعداد منها يساوي ٧، فأوجد الوسط الحسابي لأكبر خمسة عشر عددًا منها.

٥) يبيّن جدول التكرار المجمّع الآتي الأوقات اللازمة (بالدقيقة) لتثبيت برنامج مكافحة الفيروسات على ٥٠ جهاز حاسوب:

الوقت (ن بالدقيقة)	٨ ≤ ن < ١٠	١٠ ≤ ن < ١٢	١٢ ≤ ن < ١٤	١٤ ≤ ن < ٢٠
عدد الحواسيب (ت)	١٣	٢٢	١٠	٥

أ) اكتب مركز كل فئة من الفئات الأربع.

ب) احسب الوسط الحسابي التقديري للتثبيت، أعطِ الناتج مقربًا إلى أقرب دقيقة، وإلى أقرب ثانية.

٦) الوسط الحسابي للأعداد الخمسة أ، ب، جـ، د، هـ يساوي ١٣٧، أوجِد الوسط الحسابي للأعداد الخمسة (١٠٠ – أ) ، (٢٠٠ – ب) ، (٣٠٠ – جـ) ، (٤٠٠ – د) ، (٥٠٠ – هـ).

٧) لدى صائغ ٣٢ قطعة من الذهب، الوسط الحسابي لكتلتها يساوي $٥٣\frac{٢}{٥}$ غرامًا، وعدد من القطع الفضية الوسط الحسابي لكتلتها يساوي $٤٩\frac{٢}{٥}$ غرامًا. إذا كان الوسط الحسابي لكتلة كل هذه القطع معًا يساوي $٥١\frac{٨}{١١}$ غرامًا، فما عدد القطع الفضية التي يملكها الصائغ؟

٨) يقوم موظفو المطبخ في إحدى الكليات الجامعية بإعداد الحساء في حاويات سعة كل منها ١٠ لترات لتقديمها للطلبة عند الغداء. يبيّن جدول التكرار المجمّع الآتي عدد الحاويات الكاملة المستهلكة كل يوم:

عدد الحاويات الكاملة	٣–٥	٦–٨	٩–١٠	١١–١٥
عدد الأيام (ت)	٢	٥	٤٩	١٤

احسب الوسط الحسابي التقديري لكمّية الحساء التي يستهلكها الطلبة كل يوم، مقرّبًا الناتج إلى أقرب ١٠٠ مللتر.

٩) ثمانون قيمة لـ س وسطها الحسابي $\overline{س}$ = ٤٣,٥، أوجِد قيمة $\sum$(س + ١).

١٠) إذا كانت $\sum$(ص − ١) = ٥٠٠، لأربعين قيمة لـ ص، فأوجد $\overline{ص}$.

١١) تمّ تسجيل درجة حرارة منتصف النهار (د° سيليزية) خلال عشرة أيام في أحد المواقع على خط الاستواء. إذا كانت $\sum$(د − ٣٠) = ٦، فأوجِد الوسط الحسابي لدرجة الحرارة خلال الأيام العشرة.

١٢) أ أوجِد الوسط الحسابي لجذرَي المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠

ب أعطِ تفسيرًا بيانيًّا للقيمة التي وجدتها في الجزئية (أ).

_____

_____

١٣) لدى راشد ١٢ صندوقًا كلٌّ منها على شكل متوازي مستطيلات، وتبلغ سعة كل منها ٧٢ مللترًا، وقياس جميع جوانبها عدد صحيح من السنتيمترات. مثلًا، قد يكون قياس أحد الصناديق ٢ سم، ٣ سم، ١٢ سم، وقياس الصندوق الآخر ١ سم، ١ سم، ٧٢ سم.

مساعدة

١ مللتر = ١ سم^{٣}

مساعدة

إذا كانت ل، ض، ع أبعاد متوازي مستطيلات فإن:

- المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات = ٢(ض × ع + ض × ل + ع × ل).
- طول قطره = $\sqrt{\text{ض}^{٢} + \text{ع}^{٢} + \text{ل}^{٢}}$

أ أوجد الوسط الحسابي للمساحة السطحية لكل صندوق من الصناديق.

_____

_____

_____

ب أوجد الوسط الحسابي لأطول قطر في كل صندوق من الصناديق.

_____

_____

١٤) يبيّن جدول التكرار المجمّع الآتي أطوال ٢٠٠ قلم (ل سم):

الطول (ل سم)	٩,٠ ≤ ل < ١٠,٢	١٠,٢ ≤ ل < ١١,٤	١١,٤ ≤ ل < ١٥,٠	١٥,٠ ≤ ل < ١٦,٤
التكرار	٣٠	٤٤	٥٦	٧٠

أوجِد الوسط الحسابي التقديري للأطوال.

_____

_____

٤-٢ التباين والانحراف المعياري

تمارين ٤-٢

★ **١)** اذكر الحالة التي تكون فيها القيمة العددية للانحراف المعياري لمجموعة من البيانات:

أ تساوي القيمة العددية للتباين.

ب أكبر من القيمة العددية للتباين.

٢) أوجِد الانحراف المعياري لكل مجموعة من مجموعتَي البيانات الآتية، مستخدمًا الصيغة $\sqrt{\frac{١}{ن}\Sigma(س - \overline{س})^{٢}}$

أ ٢ ، ١ ، ٥,٣ ، -٤,٢ ، ٦,٧ ، ٣,١

ب ١٥,٢ ، ١٢,٣ ، ٥,٧ ، ٤,٣ ، ١١,٢ ، ٢,٥ ، ٨,٧

٣) كتل خمسة أشخاص، مقرّبة إلى أقرب ٠,١ كجم، في صالة للتدريب الرياضي هي:
٧٠,٨ ، ٦٨,٧ ، ٧٣,٢ ، ٧٩,٧ ، ٨٢,٦

أ أوجِد الوسط الحسابي للكتل، مفسّرًا سبب أن الناتج هو تقدير.

ب احسب الانحراف المعياري التقديري للكتل.

٤) يرسم موظف تصميمًا على صحون موجودة في مصنع ما. في نهاية كل يوم يتمّ فحص الصحون، فيُرفض بعضها. يبين الجدول الآتي عدد الصحون المرفوضة خلال ٣٠ يومًا:

عدد الصحون المرفوضة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الأيام	١٨	٥	٣	١	١	١	١

بيّن أن الانحراف المعياري لعدد الصحون المرفوضة يوميًّا يساوي ربع المدى تقريبًا.

٥) يبيّن الجدول الآتي جواب خمسين طفلًا حول عدد أخواتهم:

عدد الأخوات	٣	٤	٦	ن
عدد الأطفال (ت)	١٤	٢٢	٨	٦

أ) أوجِد قيمة ن علمًا بأن الوسط الحسابي لعدد الأخوات هو ٤,٦٤

ب) استخدم الإجابة في الجزئية (أ) لتجد التباين مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٦) يلخّص الجدول الآتي محيط قاعدة ٤٠٠ برميل نفط أسطوانية الشكل:

محيط القاعدة (ح متر)	١,٨٤ ≤ ح < ١,٩٤	١,٩٤ ≤ ح < ٢,١٦	٢,١٦ ≤ ح < ٢,٦٦
عدد براميل النفط (ت)	٢٠٠	١٣٠	٧٠

أ) اكتب قيمة مناسبة يمكن استخدامها لتمثيل محيط قاعدة براميل النفط في كل فئة.

ب استخدم القيم التي توصلت إليها في الجزئية (أ) لتحسب تقديرًا لـ:

١) الوسط الحسابي للمحيطات.

_____

٢) التباين للمحيطات.

_____

٧) تمّ قياس كتلة القهوة في كل عبوة من ٨٠ عبوة من صنف معيّن، مقربة إلى أقرب غرام. وكانت النتائج كالآتي:

الكتلة (غم)	٢٤٤–٢٤٦	٢٤٧–٢٤٩	٢٥٠–٢٥٢	٢٥٣–٢٥٥	٢٥٦–٢٥٨
عدد العبوات	١٠	٢٠	٢٤	١٨	٨

أ أوجِد الوسط الحسابي التقديري، التباين التقديري للكتل، موضحًا عملك في جدول.

_____

_____

ب اذكر طريقتَين يكون فيهما تقدير الوسط الحسابي والتباين أكثر دقة.

_____

_____

٨) يبيّن الجدول الآتي، أعمار ١٠٤ عامل من عمال شركة ما:

العمر (بالسنوات)	١٦–٢١	٢١–٢٦	٢٦–٣١	٣١–٣٦	٣٦–٤١	٤١–٥١	٥١–٦١	٦١–٧١
التكرار	٥	١٢	١٨	١٤	٢٥	١٦	٨	٦

أ أوجد الوسط الحسابي التقديري والانحراف المعياري التقديري لأعمار العمال.

_____

_____

_____

ب في شركة أخرى يوجد العدد نفسه من العمال، الوسط الحسابي لأعمارهم يساوي ٢٨,٤ سنة، والانحراف المعياري يساوي ٩,٩ سنة. قارن بين توزيع الأعمار في الشركتَين.

_____

_____

٩) يبيّن الجدول أدناه، الأعمار لـ ١٤١ شخصًا في مدينة ما تعرّضوا لحوادث على الطرقات خلال عام معيّن (الأعمار بالسنوات الكاملة):

العمر (بالسنوات)	١٦-١٢	٢١-١٦	٢٦-٢١	٣١-٢٦	٤١-٣١	٥١-٤١	٧١-٥١
التكرار	١٥	٤٨	٢٨	١٧	١٤	٧	١٢

احسب الوسط الحسابي التقديري، والانحراف المعياري التقديري للأعمار مقربًا الإجابة الى أقرب منزلة عشرية واحدة.

١٠) نُظمت ٢٥ قراءة لـ س كالآتي: $\Sigma س = ٤٩٠$ ، $\Sigma س^{٢} = ١٥٦٨٨$، أوجد الانحراف المعياري لـ س.

١١) نظمت كتل محتويات ٢٥ علبة من العلامة التجارية (أ) بالآتي: $\Sigma س = ١٢٦٨,٢$ ، $\Sigma س^{٢} = ٦٤٥٨٥,١٦$ أوجِد الوسط الحسابي والتباين للكتل.

١٢) إذا علمت أن الانحراف المعياري لعشر قيم لـ س يساوي ٢,٨، ومجموع مربّعات القيم العشر يساوي ٩٢,٨ ، فأوجد الوسط الحسابي للقيم العشر.

١٣) تمّ وضع ٣ نقاط أ، ب، ج على سطح قرص دائري. تبعد هذه النقاط مسافة ٤، ٨، ١٢ سم على الترتيب عن مركز القرص:

أ) أوجِد (بدلالة π) الانحراف المعياري للمسافات التي تتحرك خلالها النقاط الثلاث خلال ثلاث دورات كاملة للقرص.

ب الانحراف المعياري للمسافات التي تتحرك خلالها النقاط أ، ب، ء خلال $\sqrt{٧}$ دورات للقرص هو ٤٢π سم. أوجِد المسافة من مركز القرص إلى النقطة ء.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الرابعة

١) يبيّن الجدول الآتي عدد الطلبة في ٤٠ فصلًا في مدرسة ثانوية:

عدد الطلبة	٢٤–٢٨	٢٩	٣٠	٣٢
عدد الفصول (ت)	٥	١٥	١٢	٨

أ احسب الوسط الحسابي لعدد الطلبة في أكبر ٢٠ فصلًا.

ب احسب الوسط الحسابي التقديري لعدد الطلبة في الفصول في هذه المدرسة.

٢) يبيّن الجدولان الآتيان تكرارات قيم المتغيّرَين س، ص. بالنسبة إلى البيانات المبيّنة في الجدول الأول، $\overline{س} = ١٢,٤$

احسب الوسط الحسابي التقديري للمتغير ص:

س	١٠	١٦	٢٢	٢٨
التكرار	ب	ك	ر	ع

ص	٠–	٦–	١٢–	١٨–٢٤
التكرار	ب	ك	ر	ع

★ **٣)** يبيّن الجدول الآتي كتل بعض حاويات الشحن، مقرّبة إلى أقرب طن:

الكتلة (طن)	٥–٧	٨–١٠	١١–١٤	١٥–٢٠	٢١–٢٥
عدد الحاويات	٢١	ك	٢٧	٥٠	٣١

أوجِد أكبر قيمة ممكنة لـ ك علمًا بأن الوسط الحسابي المقدّر أكبر من ١٤,٥ طنًّا.

٤) يبيّن الجدول الآتي أطوال أجنحة، سبعة عصافير من الفئة (أ) وسبعة عصافير من الفئة (ب):

الفئة (أ)	٢٢,٧	٢٢,٥	٢١,٩	٢٤,١	٢٣,٤	٢٠,٧	٢٤,٩
الفئة (ب)	٢٢,٦	٢٤,١	٢٣,٥	٢١,٨	٢١,٠	٢٤,٤	٢٢,٨

أوجِد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأطوال أجنحة كل فئة من الطيور، واستخدم الناتج لمقارنة مجموعتَي البيانات.

٥) تمّ تسجيل عدد حالات الغياب اليومية بين الموظفين في أحد المكاتب على مدار ٩٦ يومًا، وجاءت النتائج الآتية:

عدد حالات الغياب	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد الأيام	٥٧	٢١	٩	٥	٣	١

احسب الوسط الحسابي والتباين لعدد حالات الغياب اليومية.

٦) دُوّنت الأوقات التي تم تسجيلها في سباق ما لـ ٨٠ عدّاءً، وتمّ تلخيص النتائج على النحو الآتي:

الوقت (بالدقائق)	−٦٠	−٨٠	−١٠٠	−١٢٠	−١٨٠−٢٠٠
عدد العدّائين	١	٤	٢٦	٤١	٨

احسب الانحراف المعياري التقديري للأوقات.

الوحدة الخامسة
الهندسة الإحداثية
Coordinate geometry

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٥–١ تحسب طول القطعة المستقيمة، وتجد إحداثيات منتصفها.

٥–٢ تجد ميل مستقيم بمعلومية نقطتين، وميل المستقيم العمودي عليه.

٥–٣ تجد معادلة المستقيم عند توفر المعلومات الكافية بما في ذلك معادلة المستقيمات المتوازية أو العمودية لمستقيم آخر.

٥–٤ تجد معادلة الدائرة (باستخدام الإكمال إلى مربّع عند الضرورة).

٥–٥ تستخدم طرق جبرية لحلّ مسائل تتضمّن المستقيمات والدوائر، والعلاقة فيما بينها.

٥–٦ تجد مجموعة قيم ك حيث المستقيم ص = س + ك يتقاطع أو يلامس أو لا يتقاطع مع منحنى الدالة التربيعية أو الدائرة.

٥–١ طول القطعة المستقيمة وإحداثيات نقطة منتصفها

تمارين ٥-١

١) أوجِد المسافة بين كل نقطتَين من النقاط الآتية:

أ (٠، ٠)، (٥، ١٢)

ب (٣، ٤)، (٠، ٠)

ج (١، ٤)، (٢، ٦)

د (٢، ٢)، (٣، ٥)

هـ (−١، ٤)، (٣، ٢)

و (−١، ٣)، (−٣، ١)

ز (−٢، −٣)، (−٣، ٠)

ح (−١، −٥)، (−٢، −١)

٢) أوجِد إحداثيات نقطة المنتصف لكل نقطتَين من النقاط الآتية:

أ (٢، ١١)، (٦، ١٥)

ب (٥، ٧)، (−٣، ٩)

ج (−٢، −٣)، (١، −٦)

د (−٣، ٤)، (−٨، ٥)

هـ (د + ٢، ٣د − ١)، (٣د + ٤، د − ٥)

و (د + ٣، ل − ٧)، (د + ٥، ٣ − ل)

ز (د + ٢ل، ٢د + ١٣ل)، (٥د − ٢ل، −٢د − ٧ل)

ح (أ + ٣، ب − ٥)، (أ + ٣، ب + ٧)

٣) أوجِد المسافة بين النقطتَين (أ، ٢أ)، (−٢أ، ٨أ) بدلالة أ، حيث أ > ٠

٤) بيّن أن النقاط (١، −٢)، (٦، −١)، (٩، ٣)، (٤، ٢) هي رؤوس لمتوازي أضلاع.

★ ٥) أ) بين أن طول $\overline{أ ب}$ = طول $\overline{ب ج}$ حيث أ(٠، ١)، ب(٤، ٤)، ج(٧، ٨).

ب) استخدم اجابتك في الجزئية أ لتفسر أن ب ليست نقطة منتصف $\overline{أ ج}$.

٦) تبعد النقطة (أ، ٢أ) عن النقطة (٣، ١) مسافة ٣ وحدات. أوجِد القيم الممكنة لـ أ .

★ ٧) إحداثيات النقطة أ هي (س١، ص١)، وإحداثيات النقطة ب هي (س٢، ص٢)، وإحداثيات النقطة م هي $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$. أثبت أن أ م = $\frac{١}{٢}$ أ ب.

★ ٨) أ) إذا علمت أن م منتصف القطعة المستقيمة أ ب ، حيث أ (−٢، ٤)، ب(٤ن، ٢ن)، فأوجد بدلالة ن كلًّا من:

١) طول $\overline{أ ب}$.

٢) نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ب.

_____

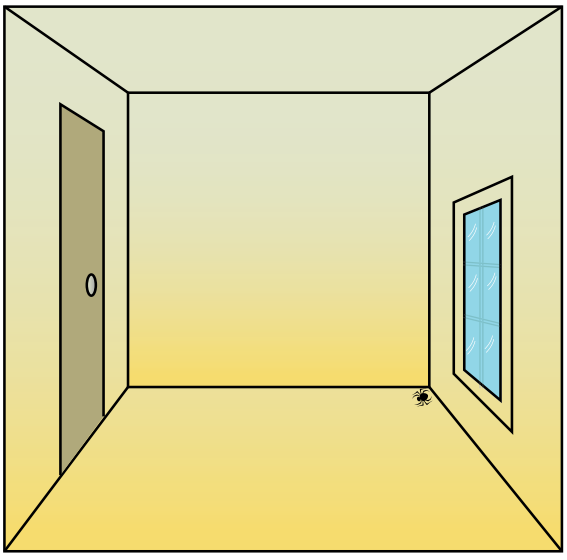
_____

ب بيّن أن النسبة بين طول $\overline{\text{ا ب}}$ وطول $\overline{\text{و م}}$ خالية من ن، علمًا بأن و نقطة الأصل.

_____

_____

★ ٩) بدأ عنكبوت الزحف من أحد زوايا غرفة مكعبة الشكل أبعادها ٥ م × ٥ م × ٥ م، ويمكنه الزحف بحرّية على الجدار. ما أقصر مسافة يمكن أن يجتازها العنكبوت للوصول إلى الزاوية المقابلة في الغرفة؟



_____

_____

_____

_____

_____

٥-٢ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

تمارين ٥-٢

١) حدّد ما إذا كان كل زوج من أزواج المستقيمات الآتية متوازيًا، أو متعامدًا، أو غير ذلك:

أ) ص = ٣ − ٤س، ص = $\frac{١}{٤}$س − ٥

ب) ص = ٣ − س، ص = ٥ − س

ج) ٣س − ص + ٧ = ٠، ص − ٣س + ٥ = ٠

د) ٥س − ٢ص + ٣ = ٠، ٢ص − ٥س + ٣ = ٠

هـ) ٧س + ٢ص + ٣ = ٠، ٢س − ٧ص + ٤ = ٠

و ٢س + ٤ص − ٤ = ٠، ٤س + ٢ص + ١ = ٠

ز ٥س + ٣ص − ١ = ٠، ٣ص − ٥س + ٢ = ٠

ح ٢ص − ٧س = ٣، ٧س + ٢ص = ٧

٢) ا، ب نقطتان إحداثياتهما ا(−٢، ٣)، ب(١، ٥)، و نقطة الأصل. بيّن أن المثلث ا ب و قائم الزاوية، وأوجِد مساحته.

٣) إذا علمت أن المثلث ﻫ ك ل قائم الزاوية في ك، حيث ك تقع على المحور السيني وإحداثيات ﻫ (٠، ٧)، ل(١٢، ٤). فأوجد الإحداثيات الممكنة للنقطة ك، مبيّنًا الناتج في أبسط صورة.

٤) المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين ا(ك، ٣)، ب(٢، −٣) عمودي على المستقيم ب ع، حيث ع (١٠، ١). أوجِد قيمة ك.

٥) المثلث ا ع ب القائم الزاوية في ع فيه ا(٠، ٢)، ب(٨، ٠)، ع(٥، س)، استخدم ميل $\overline{\text{ا ع}}$ وميل $\overline{\text{ب ع}}$ لتجد القيم الممكنة لـ س.

٦) م ه ك ل شكل رباعي إحداثيات رؤوسه هي: م(١، ٢)، ه(٧، ٠)، ك(٦، -٤)، ل(-٣، -١).

أ) أوجِد ميل كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي.

ب) ما نوع الشكل الرباعي م ه ك ل؟

مساعدة

قد تحتاج إلى مراجعة خصائص الأشكال الرباعية الخاصة عندما تحاول الإجابة عن أسئلة من هذا النوع.

٧) و هـ ر ن شكل رباعي إحداثيات رؤوسه هي: و(٣، -٢)، هـ(٠، -٣)، ر(-٢، ٣)، ن(٤، ١).

أ) أوجِد طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي.

ب) ما نوع الشكل الرباعي و هـ ر ن؟

٨) تشكل النقاط ا(٢، ١)، ب(٦، ١٠)، ع(١٠، ١) مثلث متطابق الضلعَين حيث طول $\overline{\text{ا ب}}$ يساوي طول $\overline{\text{ب ع}}$، وإحداثيات النقطة ل هي (٦، ٤).

أ) إذا علمت أن م منتصف $\overline{\text{ا ع}}$، فاكتب إحداثياتها.

ب بيّن أن طول $\overline{ب ل}$ = ٢ × طول $\overline{ل م}$.

ج بيّن أن النقاط ب، ل، م تقع على استقامة واحدة.

د اكتب إحداثيات النقطة ه، حيث ه هي نقطة منتصف $\overline{ب ع}$.

★ **٩)** إذا علمت أن الزاوية ا $\hat{م}$ ب قائمة، حيث ا(٠، د) ، ب(ك، ٠) ، م(٣، ٥):

أ بيّن أن ٥ د + ٣ ك = ٣٤

ب إذا علمت أن د =٤، فأوجد قيمة ك ومساحة الشكل الرباعي ا و م ب، حيث و نقطة الأصل.

★ **١٠)** إحداثيات أربع نقاط هي: ا(ك، ٢)، ب(ك + ١، ك + ٢)، ج(ك − ٣، ك + ٤)، ء(ك − ٤، ٤).

أ بيّن أن ا ب ج ء متوازي الأضلاع لكل قيم ك.

ب أوجِد قيمة ك عندما يكون ا ب ج ء مستطيلًا.

★ **١١)** بيّن أن المثلث الذي رؤوسه (−٢، ٨)، (٣، ٢٠)، (١١، ٨) متطابق الضلعَين، وأوجِد مساحته.

٥-٣ معادلة الخط المستقيم

تمارين ٥-٣

١) يمر المستقيم ل٢ بالنقطة ى (١، ٤)، وعموديًّا على المستقيم ل١ الذي معادلته ٥س − ٢ص + ٣ = ٠ :

أ بيّن أن النقطة ى تقع على المستقيم ل١ .

ب أوجِد معادلة ل٢ في صورة أس + ب ص + جـ = ٠، حيث أ، ب، جـ أعداد صحيحة.

٢) إذا علمت أن إحداثيات القطعة المستقيمة ا ب هي (٥، ٢)، (−١، ٧) على الترتيب، فأوجد :

أ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ب .

ب معادلة العمودي المنصف للقطعة المستقيمة ا ب، واكتب الإجابة في صورة ص = م س + جـ .

٣) أ أوجِد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم الذي معادلته ٢س + ٣ص = ٦، ويمرّ بالنقطة (−٤، ١).

ب يقطع المستقيمان في الجزئية أ المحور السيني في النقطتين ى، ل. أوجِد طول $\overline{ى\ ل}$.

★ **٤)** معادلة المستقيم ل هي: س − ٢ص + ٣ = ٠، وإحداثيات النقطة ك هي (−١، ٦).

أ أوجِد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة ك ، وعمودي على المستقيم ل .

ب أوجِد أقصر مسافة بين النقطة ك والمستقيم ل .

٥) أوجِد معادلة كل مستقيم من المستقيمات التي تصل بين كل نقطتَين من النقاط الآتية. اكتب الناتج بدون استخدام الكسور.

أ (د، ل)، (د + ٣، ل − ١)

ب (د، −ل)، (د، ل)

ج (د، ل)، (د + ٢، ل + ٢)

د (د، ٠)، (٠، ل)

٦) أوجِد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة (١، ٧)، ويوازي المحور السيني.

٧) أوجِد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة (د، ٠)، ويوازي المستقيم ص = م س + جـ .

★ **٨)** النقطتان ع(د، ل)، ط(ر، ع) تقعان على المستقيم ص = م س + جـ حيث ع نقطة ثابتة. استخدم حقيقة أن إحداثيات النقطتَين ع، ط تحقّق المعادلة ص = م س + جـ لتبيّن أن ميل ح ط هو م لكل موقع من مواقع النقطة ط.

٥-٤ معادلة الدائرة

تمارين ٥-٤

١) أوجِد معادلة الدائرة بمعلومية مركزها ونصف قطرها في كل مما يأتي:

أ المركز (٣، ٧)، نصف القطر ٤

ب المركز (٥، ١)، نصف القطر ٦

ج المركز (٣، −١)، نصف القطر $\sqrt{٧}$

د المركز (−٤، ٢)، نصف القطر $\sqrt{٥}$

٢) أوجِد مركز ونصف قطر كل دائرة من الدوائر الآتية:

أ $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = \frac{٩}{٤}$

ب $(س + ١)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = \frac{٤}{٢٥}$

ج $(س - ٣)^{٢} + \left(ص - \frac{١}{٢}\right)^{٢} = ٦$

د $\left(س + \frac{٣}{٤}\right)^{٢} + (ص - \frac{١}{٥})^{٢} = ٣$

٣) أوجِد مركز ونصف قطر كل دائرة من الدوائر الآتية:

أ $س^{٢} + ٤س + ص^{٢} - ٦ص + ٤ = ٠$

ب $س^{٢} - ٨س + ص^{٢} + ٢ص + ٨ = ٠$

ج $س^{٢} - ٢س + ص^{٢} + ٦ص + ١ = ٠$

د $س^{٢} - ١٠س + ص^{٢} + ٤ص - ١ = ٠$

هـ $س^{٢} + ٥س + ص^{٢} - ص + ٢ = ٠$

و $س^{٢} - ٣س + ص^{٢} + ٧ص - ٣ = ٠$

ز $س^{٢} + ص^{٢} - ٥ص = ١٢$

ح $س^{٢} + ص^{٢} + ٣س = ١٠$

٤) أ أوجِد معادلة الدائرة التي مركزها (-٦، ٣)، ونصف قطرها $\sqrt{١١٧}$

ب أوجِد إحداثيات نقاط تقاطع الدائرة مع المحور الصادي.

٥) أوجِد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $س^{٢} - ٥س + ص^{٢} + ص = ٣$

٦) دائرة مركزها (٣، -٥)، ونصف قطرها ٧ تقطع المحور السيني عند النقطتَين ى، ل. أوجِد طول $\overline{ى ل}$،

٧) ا، ب، ع ثلاث نقاط حيث ا(-٧، ٣)، ب(٣، ٩)، ع(١٢، -٦).

أ بيّن أن المثلث ا ب ع قائم الزاوية.

ب أوجِد طول $\overline{ا ع}$.

ج أوجِد معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط ا، ب، ع.

٨) إذا علمت أن الدائرة التي معادلتها $(س - د)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٦$، تمر بنقطة الأصل و ، فأوجد قيمة د (حيث $د > ٠$).

٩) إحداثيات طرفَي قطر دائرة هي ر(أ، ب)، ل(ج، د)، والنقطة هـ (س، ص) تقع على الدائرة.

أ أوجِد قياس $\angle ر هـ ل$.

ب بيّن أنه يمكن التعبير عن معادلة الدائرة في الصورة: $(س - أ)(س - ج) + (ص - ب)(ص - د) = ٠$

٥-٥ علاقة المستقيم بالدائرة

تمارين ٥-٥

١) أوجِد معادلة كلًّا مما يأتي :

أ المماس على الدائرة $س^{٢}$ − ٢س + $ص^{٢}$ = ١٥ عند النقطة (١، ٤).

ب المماس على الدائرة $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + ٦ص = ٢٥ عند النقطة (−٣، ٢).

ج المستقيم العمودي على مماس الدائرة $س^{٢}$ + ٤س + $ص^{٢}$ − ٦ص = ٠ عند النقطة (١، ١).

د المستقيم العمودي على مماس الدائرة $س^{٢}$ − ٤س + $ص^{٢}$ = ٩ عند النقطة (٥، ٢).

هـ المماس على الدائرة التي مركزها (١، ٢)، ونصف قطرها $\sqrt{٥}$ عند النقطة (٣، ٣).

و المماس على الدائرة التي مركزها (−٣، ١)، ونصف قطرها $\sqrt{٣٢}$ عند النقطة (١، ٥).

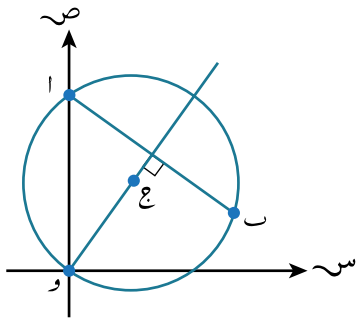
٢) دائرة مركزها ع(٢، ٥)، وتمرّ بنقطة الأصل و .

أ أوجِد معادلة الدائرة.

ب بيّن أن النقطة ا(٠، ١٠) تقع على الدائرة.

_____

ج ب نقطة أخرى على الدائرة حيث الوتر ا ب عمودي على نصف القطر و ع (بعد تمديده).



أوجِد طول $\overline{ا ب}$ مقربًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

_____

٣) دائرة مركزها نقطة الأصل، ومماسها عند النقطة (٢، ٦) يقطع محورَي الإحداثيات عند النقطتَين ى، ل ، أوجِد مساحة المثلث و ى ل.

_____

_____

_____

٤) أوجِد قيم ك حيث المستقيم ص = ك س مماسًا للدائرة التي مركزها (٣، ٦)، ونصف قطرها ٢

_____

_____

_____

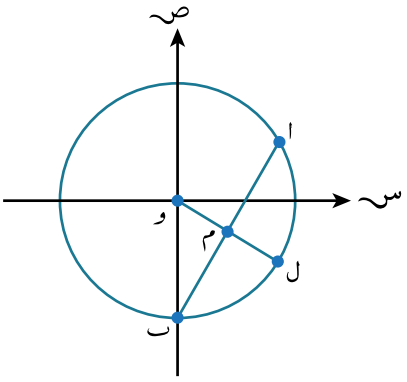
٥) المستقيم ٣س – ص = ٣ مماس للدائرة التي مركزها (٥، –١)، ونصف قطرها نق. أوجِد قيمة نق.

_____

_____

_____

٦) تقطع الدائرة التي مركزها نقطة الأصل و، ونصف قطرها ٥ الجزء السالب من المحور الصادي في النقطة ب، وتقع النقطة ا(٤، ٣) على الدائرة. إذا علمت أن م نقطة منتصف الوتر ا ب، والمستقيم الذي يمرّ بالنقطتين و، م يقطع الدائرة في النقطة ل كما هو مبيّن في الرسم المجاور.

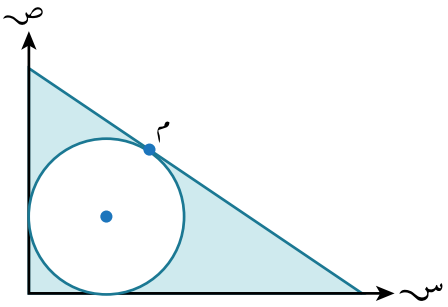


أ أوجِد إحداثيات النقطة م.

ب بيّن أن الشكل الرباعي و ا ل ب ليس معيّنًا.

٧) دائرة معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠س - ١٠ص + ٢٥ = ٠$

يبيّن الرسم المجاور الدائرة، والمماس عند النقطة م.



أ بيّن أن الدائرة مماسة للمحورَين السيني والصادي.

ب بيّن أن النقطة م(٨، ٩) تقع على الدائرة.

ج أوجِد مساحة الجزء المظلل.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الخامسة

١) إذا علمت أن المستقيم الذي يمرّ بالنقطة ا(٠، ٣) يتقاطع مع العمودي على المستقيم ص = ٣س في النقطة ء ، فأوجد:

أ معادلة المستقيم ا ء.

ب إحداثيات النقطة ء.

ج المسافة العمودية من النقطة ا إلى المستقيم ص = ٣س.

٢) النقطتان ا(−٣، −٤)، ع(٥، ٤) هما طرفا قطر المعيّن ا ب ع ء.

أ أوجِد معادلة القطر ب ء.

ب إذا علمت أن ميل المستقيم ب ع يساوي $\frac{٥}{٣}$ ، فأوجد إحداثيات كلًّا من النقطتين: ب، ء.

٣) معادلة المستقيم ل١ هي ٣س − ٢ص + ٧ = ٠

أ تقع النقطة ا(٢ك، ٢ك + ١) على المستقيم ل١. أوجِد قيمة ك.

ب إحداثيات النقطة ب هي (−٢، د). أوجِد قيمة د إذا كان المستقيم ا ب عموديًّا على المستقيم ل١.

ج المستقيم ل٢ موازٍ للمستقيم ل١، ويمرّ بالنقطة ب. أوجِد معادلة ل٢ في صورة أس + ب ص + جـ = ٠، حيث أ، ب، جـ أعداد صحيحة.

د يقطع المستقيم ل٢ المحور السيني في النقطة ج. أوجد إحداثيات النقطة ج.

٤) دائرة معادلتها $س^{٢} - ٢س + ص^{٢} - ١٠ص - ١٩ = ٠$

أ أوجِد إحداثيات مركز الدائرة.

ب بيّن أن النقطة ا(٧، ٢) تقع على الدائرة.

ج إذا علمت أن المستقيم ﻫ عمودي على المستقيم ﻭ ا ويمرّ بالنقطة م (١، −١) ويقطع المستقيم ﻭ ا في النقطة ك، فأوجد إحداثيات النقطة ك.

٥) إذا كان المستقيم ص = −٣س + ٥ مماسًا للدائرة ﻭ التي مركزها (ك − ٤، ك + ٣) عند النقطة (٤، −٧)، فأوجد قيمة ك.

٦) إذا علمت أن رؤوس المثلث هي: ى (٤، ٣)، ب (٣، −٢)، ع (٩، ٢)

أ بيّن أن المثلث ب ى ع قائم الزاوية.

ب أوجِد معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط ى، ب، ع.

ج أوجِد معادلة المماس للدائرة عند النقطة ب. اكتب إجابتك في صورة أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب، جـ أعداد صحيحة.

٧) يقطع المستقيم ص = ٢س + ك دائرة مركزها ع (٣، ٠)، ونصف قطرها ٥ في نقطتَين. أوجِد مجموعة قيم ك الممكنة.

٨) دائرة مركزها (٧، ١٢)، ومماسها عند النقطة ى (٤، ١٠) يقطع محورَي الإحداثيات في النقطتَين ا، ب. أوجد مساحة كل مثلث من المثلثَين:

أ ا و ب.

ب ا ب ج.

٩) أوجِد الشرط الذي يجب أن يتحقّق على م ، جـ عندما يمس المستقيم ص = م س + جـ الدائرة $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ − ٢أ س = ٠

الوحدة السادسة
المصفوفات
Matrices

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٦-١ تعرف معنى المصفوفة وتعبر عنها بدلالة صفوفها وأعمدتها، وتتعرّف على المصفوفة الصفرية والمصفوفة المحايدة.

٦-٢ تتذكر رتبة المصفوفة لزوج من المصفوفات لكي يتم جمعهما أو طرحهما أو ضربهما.

٦-٣ تتعرّف متى تكون المصفوفتان متساويتين.

٦-٤ تجمع وتطرح وتضرب المصفوفات، وتعرف خصائص التبديل والتجميع لضرب المصفوفات.

٦-٥ تحسب محدد المصفوفة التي من الرتبة ٢ × ٢ ، ٣ × ٣

٦-٦ تتذكر معنى المصطلحات 'منفردة' و 'غير منفردة' في المصفوفات المربّعة، وتجد معكوسات المصفوفات غير المنفردة ٢ × ٢ ، ٣ × ٣.

٦-٧ تستخدم المصفوفات لحلّ أنظمة المعادلات الآنية (لمجهولين أو ثلاثة مجاهيل).

٦-١ المصفوفات والعمليات عليها

تمارين ٦-١

١) أوجد كلًّا من: أ ، ب ، ج؟

$$\begin{pmatrix} أ^{٣} & ٢ب + أ \\ ٢٥ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٨ \\ ٢ + ج & ج^{٢} \end{pmatrix}$$

٢) إذا علمت أن $\underline{ا} = \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ -٩ & ٨ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

أ $\underline{ا} + \underline{ب}$ ب $٤\underline{ب}$ ج $\underline{ب}^{٢} - ١٢\underline{ا}$

٣) إذا علمت أن $\underline{ج} = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$، $\underline{ء} = \begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ١- & ١ \end{pmatrix}$، فبيّن أن $\underline{ج} \times \underline{ء} \neq \underline{ء} \times \underline{ج}$.

٤) إذا علمت أن $\underline{هـ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٤- & ٠ & ١- \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$، $\underline{ع} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ٠ \\ ١ & ١- & ٠ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$، فأوجِد كل مصفوفة من المصفوفات الآتية:

أ $\underline{هـ} \times \underline{ع}$

ب $\underline{هـ}^{٢} - ٢\underline{ع}$

ج $٣\underline{هـ} + \underline{هـ} \times \underline{ع}$

٥) إذا علمت أن $\underline{ا} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٠ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢- \\ ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$، $\underline{ج} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ١- & ١ & ٠ \\ ٠ & ٣- & ٥ \end{pmatrix}$،

١) فاذكر رتبة كل من المصفوفات $\underline{ا}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{ج}$؟

٢) حدد المصفوفات التي يمكن إيجادها فيما يأتي، واذكر رتبتها:

أ $\underline{ا}^{٢}$

ب $\underline{ب}^{٢}$

ج $\underline{ج}^{٢}$

د $\underline{ا} \times \underline{ب}$

هـ $\underline{ب} \times \underline{ا}$

و $\underline{ا} \times \underline{ج}$

٦) أوجِد كل مصفوفة من المصفوفات التي يمكن إيجادها في التمرين ٥

_____ _____ _____

_____ _____ _____

٧) إذا علمت أن $\underline{هـ} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$، وأن $\underline{هـ} \times \underline{ب} = \underline{ب} \times \underline{هـ}$، فبيّن أن أ تزيد عن ب بمقدار ٢

_____

_____

٨) إذا علمت أن $\underline{ا} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١- \end{pmatrix}$، فأوجد:

أ $\underline{ا}^{٢}$ ب $\underline{ا}^{٣}$ ج $\underline{ا}^{ن}$ بدلالة ن

_____ _____ _____

_____ _____ _____

٩) إذا كانت $\underline{ا}$ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٢، $\underline{ك} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$، فبين أن $\underline{ا} \times \underline{ك} = \underline{ك} \times \underline{ا}$.

_____

_____

٦-٢ محدّد المصفوفة

تمارين ٦-٢

١) إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ ، فبيّن أن:

$|\underline{أ} \times \underline{ب}| = |\underline{أ}| \times |\underline{ب}| = |\underline{ب} \times \underline{أ}|$

٢) أيّ مصفوفة من المصفوفات الآتية منفردة؟

أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٧ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} ٨ & ٤- \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢٠ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix}$ هـ) $\begin{pmatrix} ٠,٥ & ١,٥ \\ ٢- & ٦- \end{pmatrix}$

٣) أوجِد محدد كل مصفوفة من المصفوفات الآتية:

أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٧ & ٠ \\ ٢ & ٥- & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ١- & ٠ \\ ٢ & ١ & ٤ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} \frac{٣}{٨} & \frac{٣}{٨} & \frac{٣}{٨} \\ \frac{٣}{٨} & \frac{٣}{٨} & \frac{٣}{٨} \\ \frac{٣}{٨} & \frac{٣}{٨} & \frac{٣}{٨} \end{pmatrix}$

٤) إذا كانت المصفوفات الآتية منفردة، فأوجِد القيم الممكنة لكل من س، ص، ع، أ:

أ) $\begin{pmatrix} ٨ & س \\ س & ٢ \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} ص - ١ & -٤ \\ ٢ & ص - ٢ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} ٨ & ٦ \\ ع & ع \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} ٨ & ٦ \\ أ & أ + ١ \end{pmatrix}$

٥) لماذا لا يمكن للمصفوفة $\begin{pmatrix} س & -١ \\ ٢ & س \end{pmatrix}$ أن تكون منفردة؟ فسّر إجابتك.

٦) إذا علمت أن $\underline{ا} = \begin{pmatrix} ٩٩ & ٢ \\ ٤٧ & ١ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١٣ & ١٤ \\ ١٢ & ١٣ \end{pmatrix}$، فأوجد $|\underline{ا} \times \underline{ب}|$.

٧) إذا علمت أن $\begin{vmatrix} س & ٠ & ٢ \\ س & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & س \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٥ \\ ٠ & -٣ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ ، فأوجد قيم س.

٨) لماذا لا يمكن لمصفوفة من الرتبة (٢ × ٢) فيها ثلاثة عناصر موجبة وعنصر واحد سالب أن تكون مصفوفة منفردة؟ فسّر إجابتك.

٦-٣ معكوس المصفوفة

تمارين ٦-٣

١) أوجِد معكوس المصفوفة في كل مما يأتي:

أ $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٧ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$

٢) إذا علمت أن $\underline{ا} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، فأوجد:

أ $\underline{ب}$ عندما $\underline{ا} \times \underline{ب} = \underline{م}$

ب $\underline{ج}$ عندما $\underline{ج} \times \underline{ا} = \underline{م}$

ج $\underline{ى}$ عندما $\underline{ا}^{٢} \times \underline{ى} = \underline{م}$

د $\underline{هـ}$ عندما $\underline{ا} \times \underline{هـ} \times \underline{ا} = \underline{م}$

٣) إذا علمت أن $\underline{ا} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $\underline{ا} \times \underline{ب} = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، فأوجد المصفوفة $\underline{ب}$.

٤) أوجِد معكوس المصفوفة في كل مما يأتي:

أ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ١- & ١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٢- \\ ٣ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

٥) إذا علمت أن $\underline{ا}^{-١} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤- \\ ٢- & ٣ \end{pmatrix}$، $\underline{ب}^{-١} = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$. فأوجد $(\underline{ا} \times \underline{ب})^{-١}$.

٦) إذا علمت أن $\underline{ا} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٥- & ٣- \end{pmatrix}$. فأوجد المصفوفة $\underline{ج}$ في كل حالة من الحالات الآتية:

أ $\underline{ا} \times \underline{ب} \times \underline{ج} = \underline{م}$

ب $\underline{ا} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{م}$

ج $\underline{ج} \times \underline{ا} \times \underline{ب} = \underline{م}$

٦-٤ استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات

تمارين ٦-٤

١) حدد ما إذا كان لكل نظام معادلات من الأنظمة الآتية حلٌ أم لا. وإذا كان لها حلّ، فأوجِده:

أ) س + ٧ص = ٥
٣س + ٢ص = ٣

ب) ٤س − ١٢ص = −٨
−س + ٣ص = ٢

ج) ٢س + ٣ص = −٤
−٦س − ٩ص = ٥

٢) في نظام المعادلتَين:

٣س − ٢ص = ٧

٦س + أص = ب

ما الشروط التي يجب تطبيقهاعلى أ، ب للحصول على:

أ) حلّ منفرد للنظام _____

ب) عدد لا نهائي من الحلول للنظام _____

ج) لا حلول للنظام _____

٣) إذا علمت أن $\underline{ل} = \begin{bmatrix} ج & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$، $\underline{ع} = \begin{bmatrix} ١- \\ د \end{bmatrix}$، $\underline{ك} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ تحقق المعادلة $\underline{ل} \times \underline{ك} = \underline{ع}$

أوجِد قيم ج ، د عندما يكون:

أ) حلّ وحيد للمعادلة.

ب) عدد لا نهائي من الحلول للمعادلة.

ج لا حلول للمعادلة.

٤) حلّ كل نظام من أنظمة المعادلات الآتية:

أ
٦س + ٢ص − ع = ١
٢س − ٣ص + ٣ع = −١
س + ٣ص − ٢ع = ٢

ب
٣س + ص − ٢ع = ٣
س + ٢ص − ع = −٢
س − ٢ص + ع = ٠

ج
س − ص + ٣ع = ٥
٤س + ص + ع = −٢
$\frac{١}{٢}$س + $\frac{١}{٢}$ص + ع = ٢

٥) أوجِد الحلّ الوحيد عندما تتقاطع المستوِيات الثلاثة الآتية:

س + ٢ص + ٢ع = ١

٢س + ص + ٢ع = ١

−٢س + ٢ص + ع = −١

٦) إليك نظام المعادلات الآتي:

س + أص + ع = ٤

٢س − ٢ص − ع = ١

س + ٢ص + ٢ع = ١

حلّ النظام عندما:

أ) أ = ٠ ب) أ = ١ ج) أ = ٢ د) أ = ٣

٧) إليك نظام المعادلات الآتي:

س + ٢ص + ٢ع = −١

٤س + ع = ٣

٤س + ص + أع = ٤

أوجِد قيمة أ عندما لا توجد حلول للنظام.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة السادسة

١) إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢- & ١ \\ ١- & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١- \\ ٢- & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$، فأوجد :

أ $\underline{أ}^{٢}$ ب $٢\underline{أ} - \underline{ب}$ ج $\underline{أ} \times \underline{ب}$ د $\underline{ب} \times \underline{أ}$

٢) أوجِد محدد كل مصفوفة من المصفوفات الآتية:

أ $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢- & ١ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢- & ١ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١- \\ ٢,٥ & ٣ & ١,٥ \\ ١- & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

٣) إذا علمت أن كل مصفوفة من المصفوفات الآتية منفردة، فأوجد القيم الممكنة لـ س، ص، ع:

أ $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & س \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ ٢ & س & ٠ \\ ٥ & ٤ & ص + ١ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ع & ع \\ ٤ & ع \end{pmatrix}$

٤) إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$، فأوجد :

أ $\underline{ب}$ عندما $\underline{ب} \times \underline{أ} = \underline{م}$ ب $\underline{ج}$ عندما $\underline{ج} \times \underline{أ} = \underline{م}$

ج $\underline{ى}$ عندما $\underline{ا} \times \underline{ى} \times \underline{ا} = \underline{م}$

٥) استخدم المصفوفات لحل نظام المعادلات الآتي:

٢س + ص + ع = ٢

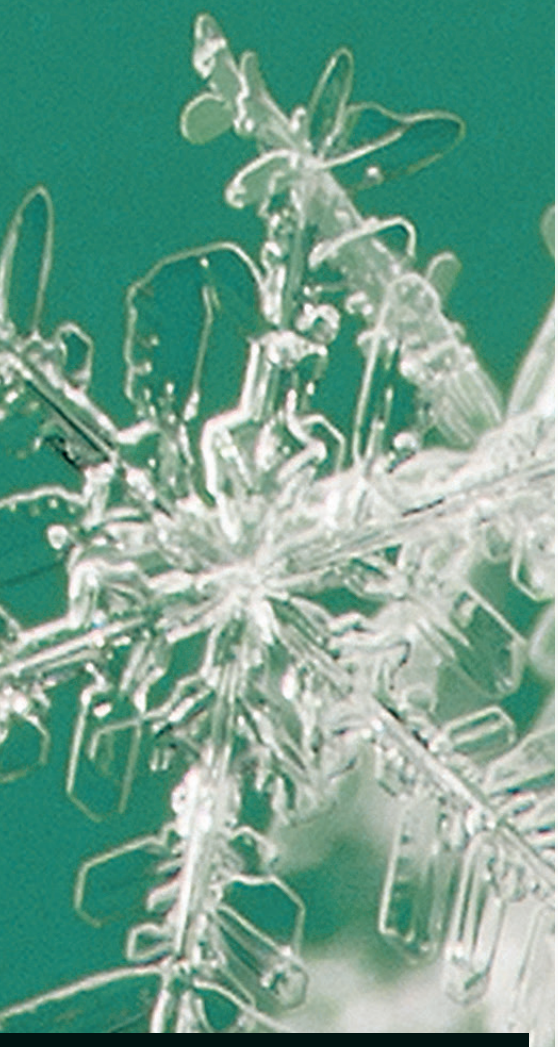
س + ص + ٢ع = −٢

س + ٢ص + ع = ١

تم بحمد الله

رقم الإيداع: ٢٠٢٣/٦٣٨١

طُبع بمطابع النهضة ش.م.م
هاتف : ٢٤٥٦٣١٠٤، فاكس : ٢٤٥٦٥٧٤٧
البريد الإلكتروني : admin@anpressoman.com



الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

كتاب النشاط

يتميز كتاب النشاط بمحتوى سهل يمكن استخدامه إلى جانب كتاب الطالب لمنهاج الرياضيات المتقدمة للصف الحادي عشر .

يتضمن كتاب النشاط:

- تمارين شاملة وهادفة تتبع ترتيب الدروس الموجودة في كتاب الطالب.
- تمارين مراجعة نهاية الوحدة تحتوي على أسئلة تحاكي الاختبار، وتغطي جميع موضوعات الوحدة، ويمكن استخدامها للتحقق من فهم الطالب للموضوعات التي درسها.
- فقرات مساعدة تزودك بالنصائح والإرشادات لحل الأسئلة والتحقق من الإجابات.

يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الحادي عشر أيضًا:

- كتاب الطالب.
- دليل المعلّم.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om