سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

# الرياضيات المتقدمة

## الصف الحادي عشر

### الفصل الدراسي الأول

# كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية
1445 هـ - 2023 م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

# الرياضيات المتقدمة

## الصف الحادي عشر

### الفصل الدراسي الأول

# كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

**مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.**

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.



**الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان**

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف الحادي عشر – من سلسلة
كامبريدج A Level Pure Mathematics 1 & Cambridge International AS –
للمؤلف سو بمبرتن، و Mathematics 1 و Probability & Statistics 1 للمؤلف دين
تشارلمرز و A Level Further Mathematics & Cambridge International AS
للمؤلفين لي ماكلفي و مارتين كروزير.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.



**تمَّت مواءمة الكتاب**

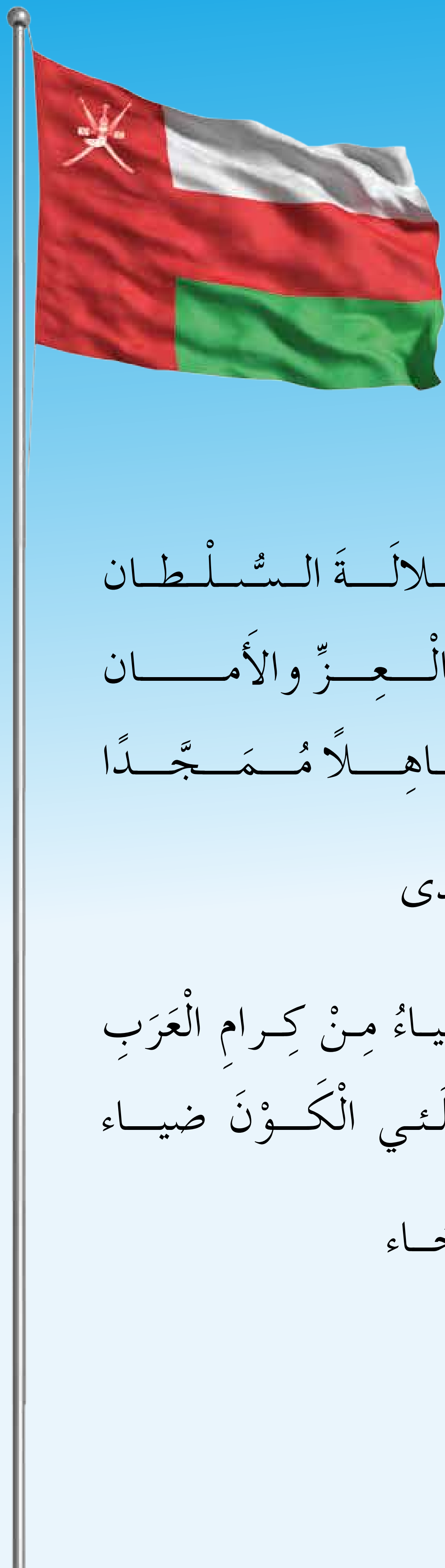
**بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه**

المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
-طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالـة
السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم
-حفظه اللّه ورعاه-

# سلطنـــة عُمـــان

(المحافظات والولايات)



# النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يـا رَبَّنـا احْفَـظْ لـنـا    جَـلالَـةَ الـسُّـلْـطـان

وَالشَّعْـبَ فـي الأَوْطـان    بِـالْـعِـزِّ والأَمـان

وَلْـيَـدُمْ مُـؤَيَّـدًا    عـاهِـلاً مُـمَـجَّـدًا

بِالنُّفـوسِ يُفْتَـدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي    أَوْفِـيـاءُ مِـنْ كِـرامِ الْعَرَبِ

فـارْتَقـي هـامَ السَّمـاء    وَامْلَئي الْكَـوْنَ ضيـاء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخـاء

# تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

**د. مديحة بنت أحمد الشيبانية**

**وزيرة التربية والتعليم**

# المحتويات

## الوحدة الثالثة: المتتاليات والمتسلسلات



## الوحدة الرابعة: تحليل البيانات



## الوحدة الخامسة: الهندسة الإحداثية



## الوحدة السادسة: المصفوفات

# المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والتي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.



بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءٌ عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس، وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة '★، ★، ★ أو ★' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' ولا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

# كيف تستخدم هذا الكتاب

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

**ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:**

١-١ تكتب المعادلة التربيعية ص = أس$^{٢}$ + ب س + جـ (حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠) بصيغة الإكمال إلى مربّع.
١-٢ تستخدم صيغة الإكمال إلى مربّع لتحدّد رأس المنحنى التربيعي، وتعرف ما إذا كانت القيمة عظمى أو صغرى.
١-٣ تجد المميّز، وتستخدمه لتجد عدد الجذور في المعادلة التربيعية.
١-٤ تحلّ المعادلات التربيعية بمجهول واحد باستخدام الصيغة التربيعية.
١-٥ تحلّ معادلتَين إحداهما تربيعية والأخرى خطيّة آنيًا.
١-٦ تحلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا، باستخدام التعويض ص = د(س) لتشكّل معادلة تربيعية وتحلّها.
١-٧ تحلّ متباينات تربيعية بمجهول واحد باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل، الإكمال إلى مربّع، أو الصيغة التربيعية.
١-٨ تجد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية.
١-٩ ترسم المنحنى لدالّة تربيعية، وتحدّد شكلها العام، والأجزاء المقطوعة مع المحورَين، وإحداثيات رأس المنحنى، ومحور التماثل.

**الأهداف التعليمية** تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

**معرفة قبلية**

| المصدر | تعلمت سابقًا أن: | اختبر مهاراتك |
|---|---|---|
| الصف التاسع الوحدة الحادية عشرة | تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل. | ١) حلّ:<br>أ س$^{٢}$ + س − ١٢ = ٠<br>ب س$^{٢}$ − ٦س + ٩ = ٠<br>ج ٣س$^{٢}$ − ١٧س = ٦ |
| الصف التاسع الوحدة السادسة | تحلّ متباينات خطّية. | ٢) حلّ:<br>أ ٥س − ٨ < ٢<br>ب ٣ − ٢س ⩽ ٧ |
| الصف التاسع الوحدة السادسة | تحلّ معادلات خطيّة آنيّة. | ٣) حلّ:<br>أ ٢س + ٣ص = ١٣<br>٧س − ٥ص = $^{-}$١<br>ب ٢س − ٧ص = ٣١<br>٣س − ٥ص = ١٩ |

**المفردات**

الإكمال إلى مُربّع completing the square
نقطة القيمة الصغرى minimum point
نقطة القيمة العظمى maximum point
نقطة الثبات stationary point
نقطة التحوّل turning point
الجذور roots
المميّز discriminant
الصيغة التربيعية

**معرفة قبلية** تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

**المفردات:** هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.



**نتيجة ١**

الدالّة الخطية تكون دائمًا واحدًا إلى واحد، والدالّة التربيعية تكون دائمًا متعدّدًا إلى واحد إذا كان مجالها ع.

**نتيجة**: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

**نقطة الثبات**

**stationary point**

**المفردات الأساسية** هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

**مثـال ١**

إذا علمت أن الدالّة د(س) معرفة كالآتي: د (س) = (س − ٣)$^{٢}$ + ٨، حيث −١ ⩽ س ⩽ ٩،
فارسم منحنى الدالّة، وحدّد مجالها ومداها.

**مُساعَدة**

عندما
د (س) = (س + د)$^{٢}$ + ك
فإن رأس المنحنى
(−د، ك) يمثل قيمة
صغرى أو عظمى.

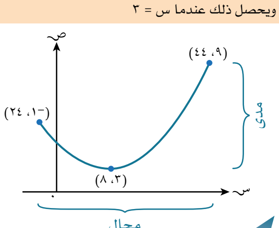
**الحـل:**

د (س) = (س − ٣)$^{٢}$ + ٨ دالّة تربيعية.
∵ معامل س$^{٢}$ موجب،
∴ سيكون المنحنى في صورة ∨، (له قيمة صغرى)

(س − ٣)$^{٢}$ + ٨

الجزء (س − ٣)$^{٢}$ مربّع كامل، لذا فإنه ⩾ ٠ دائمًا.
وعليه، فإن أصغر قيمة يمكن أن يصل إليها هي الصفر.
ويحصل ذلك عندما س = ٣

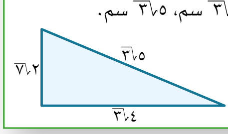
القيمة الصغرى للعبارة هو ٠ + ٨ = ٨، ويحصل ذلك عندما س = ٣
لذا تكون للدالّة د(س) = (س − ٣)$^{٢}$ + ٨ قيمة صغرى عند النقطة (٣، ٨).
عندما س = −١، فإن ص = (−١ − ٣)$^{٢}$ + ٨ = ٢٤
عندما س = ٩، فإن ص = (٩ − ٣)$^{٢}$ + ٨ = ٤٤
المجال هو: −١ ⩽ س ⩽ ٩
المدى هو: ٨ ⩽ د(س) ⩽ ٤٤




**أمثلة** تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

**استكشف ١**

في الشكل المجاور، مثلث أطوال أضلاعه ٢√٧ سم، ٤√٣ سم، ٥√٣ سم.
يدّعي تركي أن هذا المثلث قائم الزاوية.
ناقش ما إذا كان ما يدّعيه تركي صائبًا أم لا.
فسّر إجابتك.




**استكشف** تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

**مُساعَدة**

نحصل على الإجابة نفسها عند استخدام التركيب الثاني من التحويلات الهندسيّة. يمكنك أن تتحقق من ذلك بنفسك.

**لاحقًا**

ستتعلم كيف تستخدم المجاميع المشفرة مثل ∑(س − ب)، ∑(س − ب)$^{2}$ لتجد مقاييس التشتّت في الدرس ٤−٢

**مساعدة:** تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

**هل تعلم؟**

أن أول شخص قدّم الأعداد العشرية غير المنتهية هو سيمون ستيفن Simon Stevin سنة ١٥٨٥م. كان رياضيًّا مهمًا، وهو من جعل استخدام الأعداد العشرية أكثر عمومية في كتابه الذي أسماه 'الأعشار De Thiende'.

**هل تعلم؟** تحتوي على حقائق مثيرة للاهتمام تظهر كيف ترتبط الرياضيات بالعالم الأوسع.

**قائمة التحقّق من التعلّم والفهم**

**المصفوفات والعمليات عليها**

- $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} هـ & و \\ ز & ح \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ \pm هـ & ب \pm و \\ ج \pm ز & د \pm ح \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix} \begin{pmatrix} هـ & و \\ ز & ح \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أهـ + ب ز & أ و + ب ح \\ ج هـ + د ز & ج و + د ح \end{pmatrix}$
- بصورة عامة $\underline{أ} \times \underline{ب} \neq \underline{ب} \times \underline{أ}$ مع وجود بعض الاستثناءات.
- عند ضرب أي مصفوفة في مصفوفة صفرية يكون الناتج مصفوفة صفرية.
- عند ضرب المصفوفات المربّعة ن من المرات يكون: $\underline{أ} \times \underline{أ} \times \underline{أ} \times \ldots \times \underline{أ} = \underline{أ}^{ن}$
- المصفوفة المحايدة هي مصفوفة مربّعة في صورة $\underline{م} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ & \cdots & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & \cdots & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & \cdots & ٠ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٠ & ٠ & ٠ & \cdots & ١ \end{pmatrix}$، وتحقّق الخاصيّة $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{م}$ أو $\underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{م}$

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

**لاحقًا** مربعات توجهك إلى مراجعة المكتسبات ذات الصلة. تشير **سابقًا** إلى التعلم السابق في حال احتجت إلى مراجعة موضوع ما. بينما تشير **لاحقًا** إلى الموضوعات التي ستغطيها في مرحلة لاحقة، في حال رغبت في توسيع معلوماتك.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- ★ (أحمر) تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ (بنفسجي) تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ (أخضر) تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- ★ (أصفر) تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس.
- ★ (أزرق) هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.
- يجب ألّا تستخدم الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

**تمارين مراجعة نهاية الوحدة**

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

**تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى**

**١)** أ) اكتب ٩س$^{٢}$ − ١٥س في صورة (٣س − أ)$^{٢}$ − ب

ب) أوجِد قيم س التي تحقّق المتباينة ٩س$^{٢}$ − ١٥س < ٦

**٢)** أوجِد جذور المعادلة $\frac{٣٦}{س^{٤}} + ٤ = \frac{٢٥}{س^{٢}}$

**٣)** أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ك س − ٣ مع منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٩س في نقطتَين مختلفتَين.

**٤)** أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ٢س + ك مع المنحنى ص = ١ + ٢ك س − س$^{٢}$ في نقطتَين مختلفتَين.



# الوحدة الأولى

# المعادلات والمتباينات والدوالّ التربيعية

# Equations, Inequalities, and Quadratic Functions

**ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:**

١-١ تكتب المعادلة التربيعية ص = أس$^{٢}$ + ب س + جـ (حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ $\neq$ ٠) بصيغة الإكمال إلى مربّع.

١-٢ تستخدم صيغة الإكمال إلى مربّع لتحدّد رأس المنحنى التربيعي، وتعرف ما إذا كانت القيمة عظمى أو صغرى.

١-٣ تجد المميّز، وتستخدمه لتجد عدد الجذور في المعادلة التربيعية.

١-٤ تحلّ المعادلات التربيعية بمجهول واحد باستخدام الصيغة التربيعية.

١-٥ تحلّ معادلتَين إحداهما تربيعية والأخرى خطيّة آنيًّا.

١-٦ تحلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا، باستخدام التعويض ص = د(س) لتشكّل معادلة تربيعية وتحلّها.

١-٧ تحلّ متباينات تربيعية بمجهول واحد باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل، الإكمال إلى مربّع، أو الصيغة التربيعية.

١-٨ تجد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية.

١-٩ ترسم المنحنى لدالّة تربيعية، وتحدّد شكلها العام، والأجزاء المقطوعة مع المحورَين، وإحداثيات رأس المنحنى، ومحور التماثل.

## معرفة قبلية

| المصدر | تعلمت سابقًا أن: | اختبر مهاراتك |
|---|---|---|
| الصف التاسع<br>الوحدة الحادية عشرة | تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل. | ١) حلّ:<br>أ س$^{٢}$ + س − ١٢ = ٠<br>ب س$^{٢}$ − ٦س + ٩ = ٠<br>ج ٣س$^{٢}$ − ١٧س = ٦ |
| الصف التاسع<br>الوحدة السادسة | تحلّ متباينات خطّية. | ٢) حلّ:<br>أ ٥س − ٨ > ٢<br>ب ٣ − ٢س ⩽ ٧ |
| الصف التاسع<br>الوحدة السادسة | تحلّ معادلات خطيّة آنيّة. | ٣) حلّ:<br>أ ٢س + ٣ص = ١٣<br>٧س − ٥ص = ⁻١<br>ب ٢س − ٧ص = ٣١<br>٣س − ٥ص = ١٩ |

## المفردات

الإكمال إلى مُربّع
**completing the square**

نقطة القيمة الصغرى
**minimum point**

نقطة القيمة العظمى
**maximum point**

نقطة الثبات
**stationary point**

نقطة التحوّل
**turning point**

الجذور **roots**

المميّز **discriminant**

الصيغة التربيعية
**quadratic formula**

## لماذا ندرس المعادلات والمتباينات والدوالّ التربيعية؟

تكون الدوالّ التربيعية في صورة ص = أس$^{٢}$ + ب س + جـ (حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠) ولها قيمة عظمى أو قيمة صغرى، ولمنحناها محور تماثل. تؤمّن دراسة الدوالّ التربيعية طريقًا للتفكير بدوالّ أكثر تعقيدًا مثل ص = ٧س$^{٥}$ − ٤س$^{٤}$ + س$^{٢}$ + س + ٣

رسمت سابقًا منحنيات لدوالّ تربيعية مثل ص = ١٠س$^{٢}$ في الصف التاسع (الوحدة الرابعة عشر).

يمكن استخدام الدوالّ التربيعية لتمثيل مجموعة متنوعة من الظواهر الحياتية مثل مسار الكرة عند رميها، ومسار المياه في نافورة المياه، ومجموعة متنوعة من التطبيقات في الأعمال التجارية.

سبق أن تعلّمت كيف تستخدم طريقة التحليل إلى عوامل لحلّ معادلة تربيعية تحتاج إلى إعادة ترتيبها بحيث تكون في صيغة أس$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠

# ١-١ الإكمال إلى مُربّع

## ١-١أ كتابة العبارة الجبرية بطريقة الإكمال الى مُربّع

تهدف طريقة **الإكمال إلى مُربّع** **completing the square** إلى إعادة كتابة العبارة الجبرية التربيعية بحيث يظهر المتغيّر مرّة واحدة فقط ويصبح التعامل معها أسهل.

إذا فككنا العبارتَين الجبريتَين (س + أ)$^{٢}$، (س − أ)$^{٢}$، سنحصل على النتائج الآتية:

(س + أ)$^{٢}$ = س$^{٢}$ + ٢أس + أ$^{٢}$ ، (س − أ)$^{٢}$ = س$^{٢}$ − ٢أس + أ$^{٢}$

إنّ إعادة ترتيب العبارات الجبرية يعطي النتائج الآتية:

**نتيجة ١**

س$^{٢}$ + ٢أس = (س + أ)$^{٢}$ − أ$^{٢}$ ، س$^{٢}$ − ٢أس = (س − أ)$^{٢}$ − أ$^{٢}$

١- لإكمال مُربّع العبارة الجبرية س$^{٢}$ + ١٠س، يمكننا استخدام النتيجة (١) أعلاه على النحو الآتي:

١٠ ÷ ٢ = ٥

س$^{٢}$ + ١٠س = (س + ٥)$^{٢}$ − ٥$^{٢}$

س$^{٢}$ + ١٠س = (س + ٥)$^{٢}$ − ٢٥

٢- لإكمال مُربّع العبارة الجبرية س$^{٢}$ + ٨س − ٧، نستخدم مرة أخرى النتيجة (١) عند تطبيقها على جزء العبارة الجبرية س$^{٢}$ + ٨س على النحو:

٨ ÷ ٢ = ٤

س$^{٢}$ + ٨س − ٧ = (س + ٤)$^{٢}$ − ٤$^{٢}$ − ٧

س$^{٢}$ + ٨س − ٧ = (س + ٤)$^{٢}$ − ٢٣

٣- لإكمال مُربّع العبارة الجبرية ٢س$^{٢}$ − ٨س + ٥،

يجب أولًا أخذ العدد ٢ كعامل مشترك بين أول حدَّين، فيكون:

٢س$^{٢}$ − ٨س + ٥ = ٢(س$^{٢}$ − ٤س) + ٥

−٤ ÷ ٢ = −٢

س$^{٢}$ − ٤س = (س − ٢)$^{٢}$ − ٢$^{٢}$، مما يعطي:

٢س$^{٢}$ − ٨س + ٥ = ٢[(س − ٢)$^{٢}$ − ٤] + ٥ = ٢(س − ٢)$^{٢}$ − ٣

## مثــال ١

أكمل مُربّع العبارة الجبرية ٥س$^{٢}$ + ٢٠س + ٥٥

### الحــلّ:

٥س$^{٢}$ + ٢٠س + ٥٥ = ٥(س$^{٢}$ + ٤س) + ٥٥

خُذ العدد ٥ كعامل مشترك.

٤ ÷ ٢ = ٢

س$^{٢}$ + ٤س = (س + ٢)$^{٢}$ − ٢$^{٢}$، مما يعطي

أكمل المربع.

٥س$^{٢}$ + ٢٠ س + ٥٥ = ٥[(س + ٢)$^{٢}$ − ٤] + ٥٥ = ٥(س + ٢)$^{٢}$ + ٣٥

بسّط، واكتب الناتج.

## مثــال ٢

اكتب العبارة الجبرية ٢س$^{٢}$ − ١٢س + ٣ في صورة ل(س − ك)$^{٢}$ + ر، حيث ل، ك، ر أعداد ثابتة.

### الحــلّ:

**الطريقة (١)**

٢س$^{٢}$ − ١٢س + ٣ = ٢(س$^{٢}$ − ٦س) + ٣

خذ ٢ كعامل مشترك من الحدين.

−٦ ÷ ٢ = ٣

س$^{٢}$ − ٦س = (س − ٣)$^{٢}$ − ٣$^{٢}$

أكمل المربع لـ (س$^{٢}$ −٦س)

٢[(س − ٣)$^{٢}$ − ٩] + ٣

٢(س − ٣)$^{٢}$ − ١٨ + ٣

٢(س − ٣)$^{٢}$ − ١٥

∴ ل = ٢، ك = ٣، ر = −١٥

يمكننا أيضًا استخدام الطريقة البديلة الآتية لمقارنة المعاملات:

**الطريقة (٢)**

٢س$^{٢}$ − ١٢س + ٣ = ل(س − ك)$^{٢}$ + ر

فكّ الأقواس وبسّط الناتج.

٢س$^{٢}$ − ١٢س + ٣ = ل س$^{٢}$ − ٢ ل ك س + ل ك$^{٢}$ + ر

قارن معاملات س$^{٢}$ ومعاملات س والأعداد الثابتة.

٢ = ل ... (١)  −١٢ = −٢ ل ك ... (٢)  ٣ = ل ك$^{٢}$ + ر ... (٣)

عند تعويض ل = ٢ في المعادلة (٢) نجد أن قيمة ك = ٣

عوض عن قيمة ل لتجد قيمة ك

عند تعويض ل = ٢، ك = ٣ في المعادلة (٣) نجد أن قيمة ر = −١٥

عوض عن قيمة ل، ك لتجد قيمة ر

٢س$^{٢}$ − ١٢س + ٣ = ٢(س − ٣)$^{٢}$ − ١٥

أكتب الناتج.

## مثـــال ٣

اكتب ٤س$^{٢}$ + ٢٠س + ٥ في صورة (أس + ب)$^{٢}$ + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة.

### الحــلّ:

٤س$^{٢}$ + ٢٠س + ٥ = (أس + ب)$^{٢}$ + جـ ........ فكّ الأقواس وبسّط الناتج.

٤س$^{٢}$ + ٢٠س + ٥ = أ$^{٢}$س$^{٢}$ + ٢أ ب س + ب$^{٢}$ + جـ ........ قارن معاملات س$^{٢}$ في المعادلات ومعاملات س، والأعداد الثابتة.

٤ = أ$^{٢}$ ....... (١) ٢٠ = ٢أب....... (٢) ٥ = ب$^{٢}$ + جـ....... (٣)

من المعادلة (١) نجد أن أ = ± ٢

عند التعويض عن أ = ٢ في المعادلة (٢)

نجد أن ب = ٥ ........ عوّض عن قيمة أ لتجد قيمة ب

عند التعويض عن ب = ٥ في المعادلة (٣)

نجد أن جـ = −٢٠ ........ عوّض عن قيمة ب لتجد قيمة جـ

∴ ٤س$^{٢}$ + ٢٠س + ٥ = (٢س + ٥)$^{٢}$ − ٢٠ ........ اكتب الناتج.

عند التعويض عن أ = −٢ في المعادلة (٢)

نجد أن ب = −٥ ........ عوّض عن قيمة أ لتجد قيمة ب

عند التعويض عن ب = −٥ في المعادلة (٣)

نجد أن جـ = −٢٠ ........ عوّض عن قيمة ب لتجد قيمة جـ

∴ ٤س$^{٢}$ + ٢٠س + ٥ = (−٢س − ٥)$^{٢}$ − ٢٠

= (٢س + ٥)$^{٢}$ − ٢٠ ........ اكتب الناتج.

**مُساعَدة**

عندما أ$^{٢}$ تساوي عددًا موجبًا، فإن أ يكون لها قيمتان: إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

## تمارين ١-١أ

**١)** اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة (س + أ)$^{٢}$ + ب:

أ س$^{٢}$ − ٦س    ب س$^{٢}$ + ٨س    ج س$^{٢}$ − ٣س    د س$^{٢}$ + ١٥س

هـ س$^{٢}$ + ٤س + ٨    و س$^{٢}$ − ٤س − ٨    ز س$^{٢}$ + ٧س + ١    ح س$^{٢}$ − ٣س + ٤

**٢)** اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة أ(س + ب)$^{٢}$ + جـ:

أ ٢س$^{٢}$ − ١٢س + ١٩    ب ٣س$^{٢}$ − ١٢س − ١

ج ٢س$^{٢}$ + ٥س − ١    د ٢س$^{٢}$ + ٧س + ٥

**٣)** اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة أ − (س + ب)$^{٢}$:

أ ٤س − س$^{٢}$    ب ٨س − س$^{٢}$    ج ٤ − ٣س − س$^{٢}$    د ٩ + ٥س − س$^{٢}$

**٤)** اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة ل − ك(س + ر)$^{٢}$:

أ ٧ − ٨س − ٢س$^{٢}$    ب ٣ − ١٢س − ٢س$^{٢}$

ج ١٣ + ٤س − ٢س$^{٢}$    د ٢ + ٥س − ٣س$^{٢}$

**٥)** اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة (أس + ب)$^{٢}$ + جـ:

أ ٩س$^{٢}$ − ٦س − ٣    ب ٤س$^{٢}$ + ٢٠س + ٣٠

ج ٢٥س$^{٢}$ + ٤٠س − ٤    د ٩س$^{٢}$ − ٤٢س + ٦١

## ١-١ ب استخدام الإكمال إلى مُربّع لحلّ المعادلات التربيعية

### مثـــال ٤

استخدم الإكمال إلى مُربّع لتحلّ المعادلة $\frac{٥}{س + ٢} + \frac{٣}{س - ٥} = ١$، حيث $س \neq -٢$، $س \neq ٥$
اكتب الناتج في أبسط صورة.

**الحـــلّ:**

$\frac{٥(س - ٥)}{س + ٢} + \frac{٣\cancel{(س - ٥)}}{\cancel{س - ٥}} = ١ \times (س - ٥)$ اضرب طرفي المعادلة بـ (س − ٥) وبسط الكسر.

$\frac{٥(س - ٥)\cancel{(س + ٢)}}{\cancel{س + ٢}} + ٣(س + ٢) = ١ \times (س - ٥)(س + ٢)$ اضرب طرفي المعادلة بـ (س + ٢) وبسط الكسر.

$٥(س - ٥) + ٣(س + ٢) = (س - ٥)(س + ٢)$

$٥س - ٢٥ + ٣س + ٦ = س^{٢} - ٥س + ٢س - ١٠$ فكّ وبسّط.

$س^{٢} - ١١س + ٩ = ٠$

$\left(س - \frac{١١}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{١١}{٢}\right)^{٢} + ٩ = ٠$ أكمل المُربّع.

$\left(س - \frac{١١}{٢}\right)^{٢} - \frac{١٢١}{٤} + \frac{٣٦}{٤} = ٠$ بسّط.

$\left(س - \frac{١١}{٢}\right)^{٢} - \frac{٨٥}{٤} = ٠$

$\left(س - \frac{١١}{٢}\right)^{٢} = \frac{٨٥}{٤}$ حل المعادلة.

$س - \frac{١١}{٢} = \pm \sqrt{\frac{٨٥}{٤}}$ خذ الجذرين التربيعيين.

$س = \frac{١١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٨٥}}{٢}$ بسّط.

$س = \frac{١}{٢}\left(١١ \pm \sqrt{٨٥}\right)$

## تمارين ١-١ب

١) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الإكمال إلى مُربّع:

أ س$^{٢}$ + ٨س − ٩ = ٠ ب س$^{٢}$ + ٤س − ١٢ = ٠ ج س$^{٢}$ − ٢س − ٣٥ = ٠

د س$^{٢}$ − ٩س + ١٤ = ٠ هـ س$^{٢}$ + ٣س − ١٨ = ٠ و س$^{٢}$ + ٩س − ١٠ = ٠

٢) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الإكمال إلى مُربّع. اكتب الناتج في أبسط صورة:

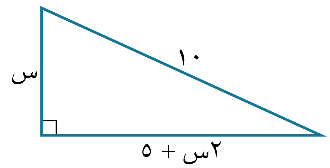
أ س$^{٢}$ + ٤س − ٧ = ٠ ب س$^{٢}$ − ١٠س + ٢ = ٠ ج س$^{٢}$ + ٨س − ١ = ٠

د ٢س$^{٢}$ − ٤س − ٥ = ٠ هـ ٢س$^{٢}$ + ٦س + ٣ = ٠ و ٢س$^{٢}$ − ٨س − ٣ = ٠

٣) حلَّ المعادلة $\frac{٥}{س + ٢} + \frac{٣}{س - ٤} = ٢$، واكتب الناتج في أبسط صورة.

★ ٤) يبيّن الشكل المجاور مثلّثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه (س) سم، (٢س + ٥) سم، ١٠ سم.

أوجد قيمة س، واكتب الناتج في أبسط صورة.



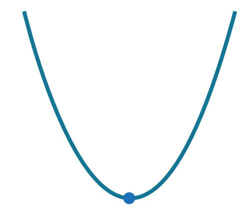

★ ٥) أوجد الحلول الحقيقية للمعادلة (٣س$^{٢}$ + ٥س − ٧)$^{٤}$ = ١

## ١-٢ التمثيل البياني للدالّة التربيعية

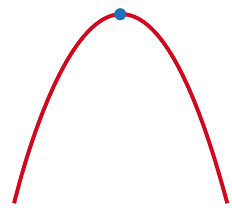
الصورة العامّة للدالّة التربيعية هي د (س) = أس$^{٢}$ + ب س + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ $\neq$ ٠

شكل منحنى الدالّة د(س) = أس$^{٢}$ + ب س + جـ مهمًا ويحتوي دائمًا على محور تماثل رأسي.

يعتمد وضع المنحنى التربيعي على قيمة أ (معامل س$^{٢}$).



إذا كان أ > ٠ يكون لمنحنى الدالّة **قيمة صغرى** **minimum point**، وتكون أسفل نقطة في المنحنى.

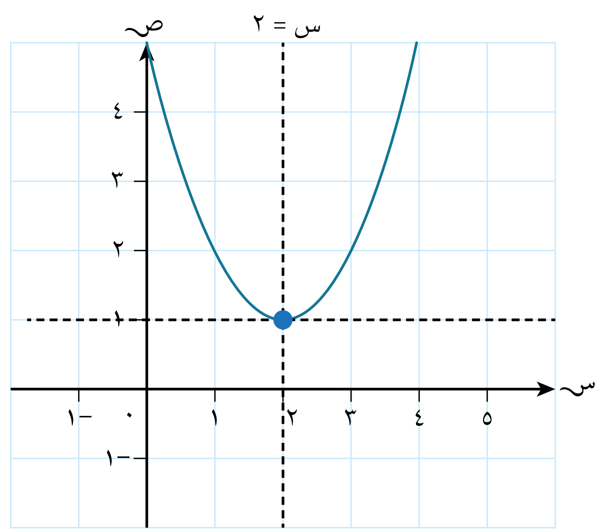


إذا كان أ < ٠ يكون لمنحنى الدالّة **قيمة عظمى** **maximum point**، وتكون أعلى نقطة في المنحنى.

تسمى **نقطة التحوّل** أو **نقطة الثبات** بنقطة **رأس المنحنى**.

**مُساعَدة**

في الدالّة التربيعية، النقطة التي يكون الميل عندها صفرًا تُسمّى **نقطة الثبات** **stationary point** أو **نقطة التحوّل** **turning point**.




لكلّ منحنى تربيعي محور تماثل يمرّ بنقطة رأس المنحنى.

سنطوّر في هذا الدرس مهارة مهمّة وهي مهارة 'رسم المنحنى'.

لرسم المنحنى يجب أن تُعرض ميزات الدالّة وسلوكها.

عند رسم منحنى الدالّة التربيعية، يجب الوقوف عند الميزات الآتية:

- الشكل العام للمنحنى.
- الجزء المقطوع من كلّ محور من المحورَين.
- إحداثيات نقطة رأس المنحنى.

قد يطلب إليك في بعض الأسئلة رسم المنحنى التربيعي، وتسمية بعض خواصه على الرسم.

## مثــال ٥

إذا كانت الدالّة د(س) = $س^٢$ − ٣س − ٤:

أ أوجد نقاط تقاطع منحنى الدالّة د(س) مع المحورَين السيني والصادي.

ب ارسم منحنى الدالّة د(س)، وأوجد إحداثيات الرأس.

### الحــلّ:

أ ص = $س^٢$ − ٣س − ٤

لإيجاد نقاط التقاطع مع المحورَين:

عندما س = ٠، فإنّ ص = −٤

لتجد نقطة التقاطع مع المحور الصادي، اجعل س = ٠

عندما ص = ٠، فإنّ $س^٢$ − ٣س − ٤ = ٠

لتجد نقطتي التقاطع مع المحور السيني، اجعل ص = ٠

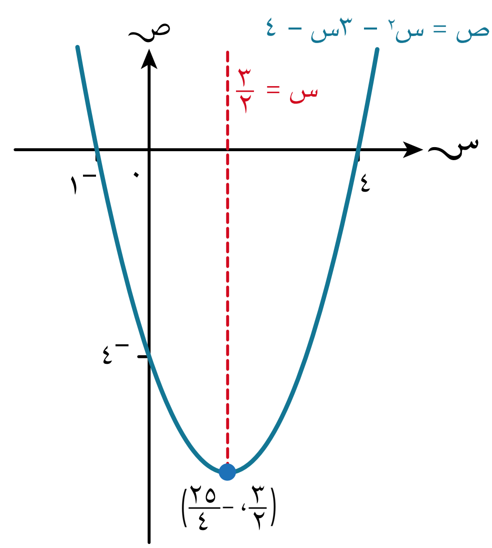
(س + ١)(س − ٤) = ٠

س = −١ أو س = ٤

نقاط التقاطع مع المحورَين هي: (٠، −٤)، (−١، ٠)، (٤، ٠)

ب س = −١ ، س = ٤

يمر محور التماثل في نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتَي المقطع السيني.




وعليه، تكون معادلة محور التماثل هي: س = $\frac{٣}{٢}$

عندما س = $\frac{٣}{٢}$ فإنّ ص = $\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢$ − ٣$\left(\frac{٣}{٢}\right)$ − ٤

ص = −$\frac{٢٥}{٤}$

وحيث إن أ > ٠، فإنّ شكل المنحنى مفتوح إلى الأعلى (شكل الحرف اللاتيني U)

النقطة الصغرى هي: $\left(\frac{٣}{٢}، −\frac{٢٥}{٤}\right)$

يمكنك أيضًا استخدام طريقة الإكمال إلى مربع لتساعدك على رسم منحنى الدالّة التربيعية.

يعطي الإكمال إلى مُربّع العبارة الجبريّة $س^٢ - ٣س - ٤$:

$$س^٢ - ٣س - ٤ = \left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢ - \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ - ٤$$

$$= \left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢ - \frac{٢٥}{٤}$$

الجزء من العبارة الجبريّة $\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢$ مُربّع كامل، لذا فإنّ أقلّ قيمة يأخذها هي الصفر وتحصل عندما $س = \frac{٣}{٢}$

القيمة الصغرى للعبارة الجبريّة $\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢ - \frac{٢٥}{٤}$ هي $- \frac{٢٥}{٤}$ وتحصل عندما $س = \frac{٣}{٢}$

وعليه، يكون للدالّة $د(س) = س^٢ - ٣س - ٤$ قيمة صغرى عند النقطة $\left(\frac{٣}{٢}، - \frac{٢٥}{٤}\right)$

معادلة محور التماثل هي $س = \frac{٣}{٢}$

### نتيجة ٢

إذا كُتبت الدالّة $د(س) = أس^٢ + ب س + جـ$ في صورة $أ(س - ل)^٢ + ك$، فإن:

- معادلة محور التماثل هي: $س = ل = - \frac{ب}{٢أ}$
- إذا كانت $أ > ٠$، فإننا نجد قيمة صغرى عند النقطة $(ل، ك)$.
- إذا كانت $أ < ٠$، فإننا نجد قيمة عظمى عند النقطة $(ل، ك)$.



### مثـــال ٦

ارسم منحنى الدالّة $ص = ١٦س - ٧ - ٤س^٢$

## الحـــلّ:

بالإكمال إلى مُربّع ينتج أن:

$(س - ٢)^٢$ مُربّع كامل فيكون $(س - ٢)^٢ \geqslant ٠$

$$١٦س - ٧ - ٤س^٢ = ٩ - ٤(س - ٢)^٢$$

القيمة العظمى لـ $٩ - ٤(س - ٢)^٢$ هي ٩

تكون أصغر قيمة للمربع الكامل صفرًا، عندما $س = ٢$

وتحصل عندما $س = ٢$

وعليه فإنّ للدالّة $ص = ١٦س - ٧ - ٤س^٢$

قيمة، عظمى عند النقطة $(٢، ٩)$.

معادلة محور التماثل $س = ٢$

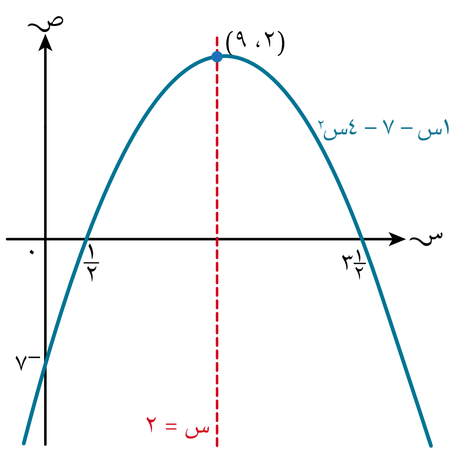
عندما $س = ٠$، فإنّ: $ص = -٧$

وعندما $ص = ٠$، فإنّ: $٩ - ٤(س - ٢)^٢ = ٠$

$$(س - ٢)^٢ = \frac{٩}{٤}$$

$$س - ٢ = \pm \frac{٣}{٢}$$

$$س = ٣\frac{١}{٢} \text{ أو } س = \frac{١}{٢}$$



## تمارين ١-٢

**١)** استخدم تماثل كلّ دالّة من الدوالّ التربيعية الآتية لتجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى. ارسم منحنى كل دالّة مبيّنًا جميع نقاط التقاطع مع المحورَين:

أ) ص = س$^{٢}$ − ٦س + ٨     ب) ص = س$^{٢}$ + ٥س − ١٤

ج) ص = ٢س$^{٢}$ + ٧س − ١٥     د) ص = ١٢ + س − س$^{٢}$

**٢)** أ) اكتب ٢س$^{٢}$ − ٨س + ٥ في صورة أ(س + ب)$^{٢}$ + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد صحيحة.

ب) اكتب معادلة محور التماثل لمنحنى الدالّة ص = ٢س$^{٢}$ − ٨س + ٥

**٣)** أ) اكتب ٧ + ٥س − س$^{٢}$ في صورة أ − (س + ب)$^{٢}$، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب) أوجد إحداثيات نقطة رأس منحنى الدالّة ص = ٧ + ٥س − س$^{٢}$، وحدد ما إذا كانت قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

**٤)** أ) اكتب ٢س$^{٢}$ + ٩س + ٤ في صورة أ(س + ب)$^{٢}$ + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة.

ب) أوجد إحداثيات نقطة رأس منحنى الدالّة ص = ٢س$^{٢}$ + ٩س + ٤، وحدّد ما إذا كانت قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

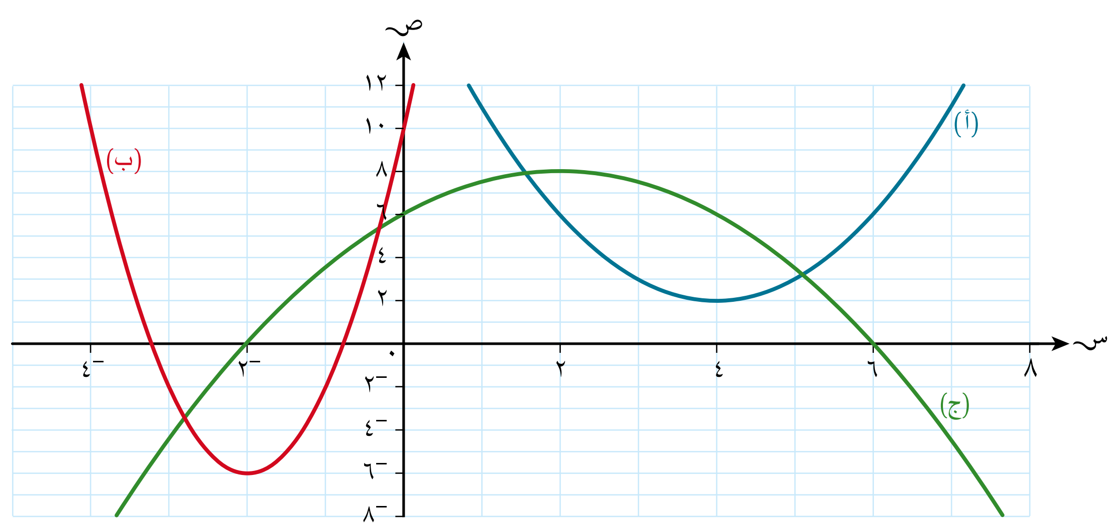
**٥)** أوجد القيمة الصغرى للعبارة الجبرية س$^{٢}$ − ٧س + ٨، وقيمة س المناظرة لها.

**٦)** أ) اكتب العبارة الجبريّة ١ + س − ٢س$^{٢}$ في صورة ل − ٢(س − ك)$^{٢}$.

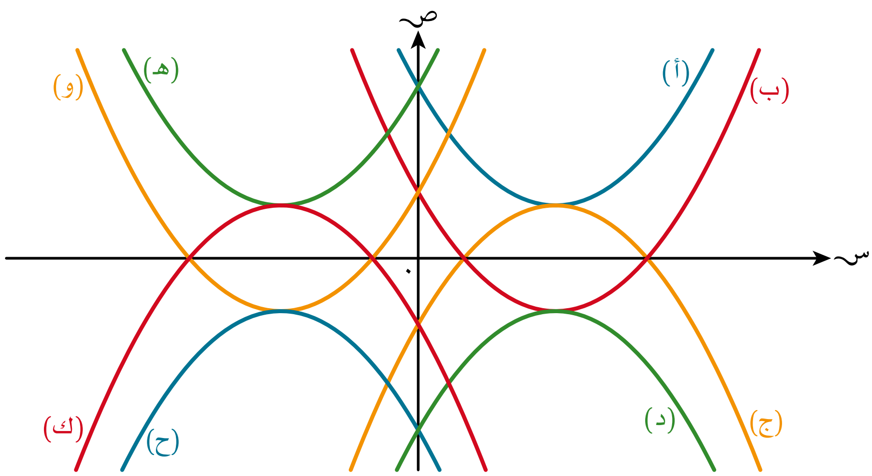
ب) ارسم منحنى الدالّة ص = ١ + س − ٢س$^{٢}$

**٧)** بيّن أنّ منحنى الدالّة ص = ٤س$^{٢}$ + ٢س + ٥ لا يقطع محور السينات.

★ **٨)** اكتب معادلة كلّ دالّة من الدوالّ التي منحنياتها (أ)، (ب)، (ج).



٩) يبيّن الشكل أدناه ثمانية منحنيات لدوالّ تربيعية.
معادلتا منحنيان من المنحنيات الثمانية هما: ص = س$^{٢}$ − ٦س + ١٣، ص = −س$^{٢}$ − ٦س − ٥
حدّد أسماء هذَين المنحنيَين التربيعيَّين، وأَوجد معادلة كلّ منحنى من المنحنيات التربيعية الأخرى.




١٠) إذا علمت أن إحداثيات رأس منحنى دالّة تربيعية (ك، ل)، فبيّن أن معادلة المنحنى هي:
ص = أس$^{٢}$ − ٢أ ك س + أ ك$^{٢}$ + ل حيث أ $\neq$ ٠، واشرح السبب.

## ١-٣ جذور المعادلة التربيعية

إذا كانت د(س) دالّة، نسمّي حلول المعادلة د(س) = ٠ **جذور الدالّة د (س) roots**.

إليك حلّ ثلاث معادلات تربيعية في صورة أ$س^٢$ + ب س + جـ = ٠

باستخدام الصيغة س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

| | | |
|---|---|---|
| $س^٢ + ٢س - ٨ = ٠$<br>س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤ \times ١ \times (-٨)}}{٢ \times ١}$<br>= $\frac{-٢ \pm \sqrt{٣٦}}{٢}$<br>س = ٢ أو س = −٤ | $س^٢ + ٦س + ٩ = ٠$<br>س = $\frac{-٦ \pm \sqrt{٦^٢ - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١}$<br>= $\frac{-٦ \pm \sqrt{٠}}{٢}$<br>س = −٣ أو س = −٣ | $س^٢ + ٢س + ٦ = ٠$<br>س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤ \times ١ \times ٦}}{٢ \times ١}$<br>= $\frac{-٢ \pm \sqrt{-٢٠}}{٢}$<br>لا يوجد جذر حقيقي |
| **$\sqrt{٣٦}$ > ٠ لذا يوجد جذران حقيقيان مختلفان.** | **يوجد جذر حقيقي واحد، لكننا غالبًا نقول إنه يوجد جذران حقيقيان متساويان.** | **$\sqrt{-٢٠}$ ليس عددًا حقيقيًّا، لذا لا توجد جذور حقيقية.** |

**مُساعَدة**

تذكّر أهمية الجزء المتعلق بالرمز ± $\sqrt{\phantom{x}}$ في الصيغة.

يسمّى الجزء الموجود تحت الجذر التربيعي في الصيغة التربيعية **المميّز discriminant**.

**نتيجة ٣**

$ب^٢$ − ٤أجـ هو مميّز المعادلة أ$س^٢$ + ب س + جـ = ٠



تخبرنا إشارة المميّز (موجبة كانت أو صفرًا أو سالبة) عن عدد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية.

| $ب^٢$ − ٤أجـ | نوع الجذور |
|---|---|
| > ٠ | جذران حقيقيان مختلفان. |
| = ٠ | جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر). |
| < ٠ | لا توجد جذور حقيقية. |

### مثـــال ٧

إذا كانت $س^٢$ + ٥س − ٧ = ٠، فأوجد:

أ مميّز المعادلة.

ب عدد جذور المعادلة.

### الحـــلّ:

أ المميّز = $ب^٢$ − ٤ أ جـ ........ عوّض عن أ = ١، ب = ٥، جـ = −٧

= $٥^٢$ − ٤ × ١ × (−٧)

= ٥٣

ب ∵ المميّز ٥٣ > ٠، ∴ يوجد جذران حقيقيان مختلفان للمعادلة.

## مثــال ٨

أوجِد قيم ك إذا كان للمعادلة ٤س$^{٢}$ + ك س + ١ = ٠ جذران متساويان.

**الحــلّ:**

∵ الجذرَين متساويان ∴ ب$^{٢}$ − ٤أجـ = ٠ ............ عوّض عن قيم أ، ب، جـ

ك$^{٢}$ − ٤ × ٤ × ١ = ٠

ك$^{٢}$ = ١٦ ............ حلّ المعادلة.

ك = −٤ أو ك = ٤

## تمارين ١-٣

**١)** أوجِد مميّز كلّ معادلة من المعادلات الآتية، محدّدًا ما إذا كان للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان، أو جذران حقيقيان متساويان، أو لا جذور حقيقية لها:

أ س$^{٢}$ − ١٢س + ٣٦ = ٠ ب س$^{٢}$ + ٥س − ٣٦ = ٠ ج س$^{٢}$ + ٩س + ٢ = ٠

د ٤س$^{٢}$ − ٤س + ١ = ٠ هـ ٢س$^{٢}$ − ٧س + ٨ = ٠ و ٣س$^{٢}$ + ١٠س − ٢ = ٠

**٢)** استخدِم المميّز لتحدّد عدد جذور المعادلة: ٢ − ٥س = $\frac{٤}{س}$.

**٣)** أوجد قيَم ك إذا كان للمعادلة س$^{٢}$ − ٥س + ٩ = ك(٥ − س) جذران متساويان.

**٤)** أوجِد قيمة ك في كلّ معادلة من المعادلات الآتية علمًا بأنّ لكلّ منها جذرَين حقيقيَّين متساويَين:

أ س$^{٢}$ + ك س + ٤ = ٠ ب ٤س$^{٢}$ + ٤(ك − ٢)س + ك = ٠

ج (ك + ٢)س$^{٢}$ + ٤ك = (٤ك + ٢)س د س$^{٢}$ − ٢س + ١ = ٢ك(ك − ٢)

هـ (ك + ١)س$^{٢}$ + ك س − ٢ك = ٠ و ٤س$^{٢}$ − (ك − ٢)س + ٩ = ٠

**٥)** للمعادلة ك س$^{٢}$ + ل س + ٥ = ٠ جذر حقيقي مكرّر. أوجِد قيمة ك بدلالة ل.

# ٤-١ الصيغة التربيعية

يُمكن حلّ المعادلة التربيعية باستخدام **الصيغة التربيعية** **Quadratic formula** .

إذا كانت أس$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ $\neq$ ٠، فإنّ:

**نتيجة ٤**

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

يُمكن إثبات هذه الصيغة التربيعية باستخدام الإكمال إلى مُربّع للمعادلة أس$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ :

$أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$ اقسم طرفَي المعادلة على أ

$س^{٢} + \frac{ب س}{أ} + \frac{جـ}{أ} = ٠$ أكمل المُربّع.

$(س + \frac{ب}{٢أ})^{٢} - (\frac{ب}{٢أ})^{٢} + (\frac{جـ}{أ}) = ٠$ أعد ترتيب المعادلة.

$(س + \frac{ب}{٢أ})^{٢} = \frac{ب^{٢}}{٤أ^{٢}} - \frac{جـ}{أ}$ وحّد المقامات في الطرف الأيسر.

$(س + \frac{ب}{٢أ})^{٢} = \frac{ب^{٢} - ٤أجـ}{٤أ^{٢}}$ أوجد الجذر التربيعي لطرفَي المعادلة.

$س + \frac{ب}{٢أ} = \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ اطرح $\frac{ب}{٢أ}$ من كلا الطرفَين.

$س = -\frac{ب}{٢أ} \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ جمّع حدود الطرف الأيسر.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

**مُساعَدة**

تذكّر أهمية رمز $\pm$ قبل $\sqrt{\phantom{x}}$ في الصيغة.

يجب أن تكون قادرًا على حل المعادلات باستخدام الصيغة التربيعية مباشرة من دون برهنتها.

## مثـــال ٩

حلَّ المعادلة ٦س$^{٢}$ − ٣س − ٢ = ٠ باستخدام الصيغة التربيعية مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

**الحـــلّ:**

$س = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{(-٣)^{٢} - ٤ \times ٦ \times (-٢)}}{٢ \times ٦}$ عوّض في الصيغة التربيعية عن أ = ٦، ب = −٣، جـ = −٢

$س = \frac{٣ + \sqrt{٥٧}}{١٢}$ أو $س = \frac{٣ - \sqrt{٥٧}}{١٢}$ بسّط.

س = ٠,٨٧٩ أو س = −٠,٣٧٩ قرّب إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

**مُساعَدة**

انتبه إلى القيم السالبة للأعداد أ، ب، جـ. يمكنك استخدام الأقواس لأنها تسهل العمليات الحسابية.

## تمارين ١-٤

**١)** حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الصيغة التربيعية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ $س^٢ - ١٠س - ٣ = ٠$

ب $س^٢ + ٦س + ٤ = ٠$

ج $س^٢ + ٣س - ٥ = ٠$

د $٢س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$

هـ $٤س^٢ + ٧س + ٢ = ٠$

و $٥س^٢ + ٧س - ٢ = ٠$

**٢)** مستطيل أطوال أضلاعه (س) سم، (٣س − ٢) سم، ومساحته ٦٣ سم$^٢$. أوجد قيمة س مقربًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

**٣)** المستطيل (أ) طوله (س) سم وعرضه (٢س − ٤) سم، والمستطيل (ب) طوله (س + ١) سم وعرضه (٥ − س) سم. إذا علمت أن مساحة المستطيل (أ) تساوي مساحة المستطيل (ب). فأوجد قيمة س مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

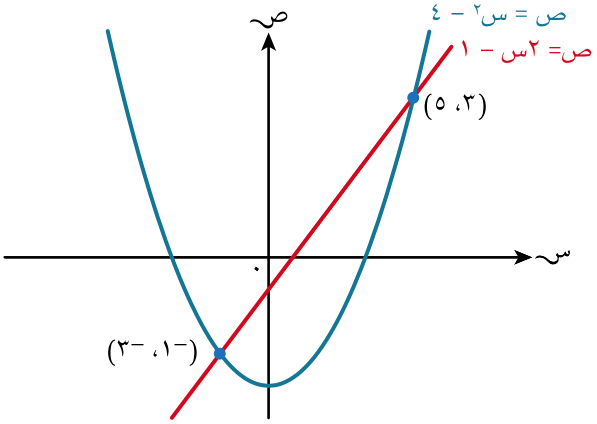
**٤)** حلَّ المعادلة $\frac{٥}{س - ٣} + \frac{٢}{س + ١} = ١$ مقربًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

**٥)** حلَّ المعادلة التربيعية $أس^٢ - ب س + جـ = ٠$ واكتب النواتج بدلالة أ، ب، جـ.

ما العلاقة بين حلول هذه المعادلة وحلول المعادلة $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$؟

## ٥-١ حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطّية ومعادلة تربيعية)

سوف نتعلّم في هذا الدرس كيف نحلّ معادلتَين آنيتَين إحداهما خطّية والأخرى تربيعية.




يُبيّن الشكل أعلاه منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٤، والمستقيم ص = ٢س − ١

إحداثيات نقطتَي التقاطُع هما (−١، −٣)، (٣، ٥)

هذا يعني أن س = −١، ص = −٣ و س = ٣، ص = ٥ حلول للمعادلتَين الآنيتَين

ص = س$^{٢}$ − ٤، ص = ٢س − ١

يُمكن أيضًا إيجاد الحلول جبريًّا:

ص = س$^{٢}$ − ٤ ........ (١)

ص = ٢س − ١ ....... (٢)

عوّض عن ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١):

٢س − ١ = س$^{٢}$ − ٤ أعد ترتيب المعادلة.

س$^{٢}$ − ٢س − ٣ = ٠ حلّل إلى العوامل.

(س + ١)(س − ٣) = ٠

س = −١ أو س = ٣

عوّض عن س = −١ في المعادلة (٢) للحصول على: ص = −٢ − ١ = −٣

عوّض عن س = ٣ في المعادلة (٢) للحصول على: ص = ٦ − ١ = ٥

الحلول هي: س = −١، ص = −٣ و س = ٣، ص = ٥

## مثـــال ١٠

حلَّ المعادلتَين الآتيتَين آنيًّا:

$٢س + ٢ص = ٧$

$س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$

### الحــلّ:

$٢س + ٢ص = ٧$ ....... (١)

$س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$ ....... (٢)

من المعادلة (١)، $س = \frac{٧ - ٢ص}{٢}$ ........ عوّض عن س في المعادلة (٢)

$\left(\frac{٧ - ٢ص}{٢}\right)^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$ ........ فُكَّ الأقواس.

$\frac{٤٩ - ٢٨ص + ٤ص^{٢}}{٤} - ٤ص^{٢} = ٨$ ........ اضرب طرفَي المعادلة في ٤

$٤٩ - ٢٨ص + ٤ص^{٢} - ١٦ص^{٢} = ٣٢$ ........ أعد ترتيب الحدود.

$١٢ص^{٢} + ٢٨ص - ١٧ = ٠$ ........ حلّل إلى العوامل.

$(٦ص + ١٧)(٢ص - ١) = ٠$

$ص = -\frac{١٧}{٦}$ أو $ص = \frac{١}{٢}$

عوّض عن $ص = -\frac{١٧}{٦}$ في المعادلة (١) ........ عوض عن قيمة ص لتجد قيمة س

للحصول على $س = \frac{١٩}{٣}$

عوّض عن $ص = \frac{١}{٢}$ في المعادلة (١) ........ عوض عن قيمة ص لتجد قيمة س

للحصول على $س = ٣$

الحلول هي: $س = \frac{١٩}{٣}$، $ص = -\frac{١٧}{٦}$ و $س = ٣$، $ص = \frac{١}{٢}$

## تمارين ١-٥

**١)** حلَّ كلّ زوج من أزواج المعادلات الآتية آنيًّا:

أ ص = ٦ − س
ص = س$^{٢}$

ب س + ٤ص = ٦
س$^{٢}$ + ٢س ص = ٨

ج ٣ص = س + ١٠
س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١٠٠

د ص = ٣س − ١
٨س$^{٢}$ − ٢س ص = ٤

هـ س − ٢ص = ٦
س$^{٢}$ − ٤س ص = ٢٠

و ٤س − ٣ص = ٥
س$^{٢}$ + ٣س ص = ١٠

ز ٢ص − س = ٥
٢س$^{٢}$ − ٣ص$^{٢}$ = ١٥

ح س + ٢ص = ٦
س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ٤س ص = ٢٤

ط ٥س − ٢ص = ٢٣
س$^{٢}$ − ٥س ص + ص$^{٢}$ = ١

ي ٢س − ص = ١٤
ص$^{٢}$ = ٨س + ٤

ك ٢س + ٣ص + ١٩ = ٠
٢س$^{٢}$ + ٣ص = ٥

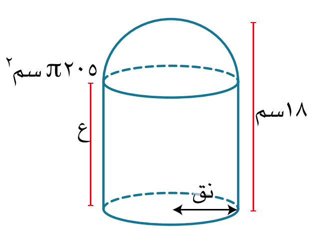
ل س + ٢ص = ٥
س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١٠

م س − ١٢ص = ٣٠
٢ص$^{٢}$ − س ص = ٢٠

**٢)** مُربّعان مجموع محيطَيهما ٥٠ سم، ومجموع مساحتَيهما ٩٣,٢٥ سم$^{٢}$
أوجد طول ضلع كلّ مُربّع.

**٣)** دائرتان مجموع محيطَيهما ($\pi$٣٦) سم، ومجموع مساحتَيهما ($\pi$١٧٠) سم$^{٢}$. أوجد نصف قطر كلّ دائرة.

**٤)** يُبيّن الشكل المجاور مجسَّمًا مكوّنًا من نصف كرة نصف قطرها (نق) سم، وأسطوانة نصف قطر قاعدتها (نق) سم وارتفاعها (ع) سم.
إذا علمت أن ارتفاع المجسّم الكلّي ١٨ سم ومساحته السطحية ٢٠٥ $\pi$ سم$^{٢}$، فأوجد قيمة نق، وقيمة ع.




**مُساعَدة**
المساحة السطحية (م) لأسطوانة نصف قطرها (نق) وارتفاعها (ع) تساوي
م = ٢$\pi$نق ع + ٢ $\pi$ نق$^{٢}$

**٥)** يقطع المستقيم ص = ٢ − س المنحنى ٥س$^{٢}$ − ص$^{٢}$ = ٢٠ عند النقطتَين ا ، ب.
أوجد إحداثيات النقطتَين ا، ب.

**٦)** يقطع المستقيم ٢س + ٥ص = ١ المنحنى س$^{٢}$ + ٥ س ص − ٤ص$^{٢}$ + ١٠ = ٠
عند النقطتَين ا ، ب. أوجد إحداثيات النقطتَين ا ، ب

★ **٧)** أ اقسم العدد ١٠ إلى جزأين بحيث يكون الفرق بين مُربّعَيهما ٦٠
ب اقسم العدد ن إلى جزأين بحيث يكون الفرق بين مُربّعَيهما د .

## ١-٦ حلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا

يُمكن أن يُطلب إليك أن تحلّ معادلة تربيعية بدلالة س.

عند حل هذه المعادلات الأكثر تعقيدًا، من المهم الأخذ بالاعتبار عدد الحلول الموجودة، لأن المعادلات الأصلية ليست تربيعية، فقد نجد أن لدينا عددًا غير متوقع من الحلول أو أن بعض الحلول الفعلية مرفوضة.

### مثــال ١١

حلَّ المعادلة $٤س^{٤} - ٣٧س^{٢} + ٩ = ٠$

**الحــلّ:**

$٤س^{٤} - ٣٧س^{٢} + ٩ = ٠$ ضع $ص = س^{٢}$

$٤ص^{٢} - ٣٧ص + ٩ = ٠$ حلّ المعادلة التربيعية.

$(٤ص - ١)(ص - ٩) = ٠$

$ص = \frac{١}{٤}$ أو $ص = ٩$ عوض $س^{٢}$ بدلًا من ص

$س^{٢} = \frac{١}{٤}$ أو $س^{٢} = ٩$

$س = \pm\frac{١}{٢}$ أو $س = \pm٣$ لاحظ أن هذه المعادلة لها أربعة حلول، وليس حلّين.

### مثــال ١٢

حلَّ المعادلة $س - ٤\sqrt{س} - ١٢ = ٠$

**الحــلّ:**

$س - ٤\sqrt{س} - ١٢ = ٠$ ضع $ص = \sqrt{س}$

$ص^{٢} - ٤ص - ١٢ = ٠$

$(ص - ٦)(ص + ٢) = ٠$

$ص = ٦$ أو $ص = -٢$ عوّض $\sqrt{س}$ عن ص

$\sqrt{س} = ٦$ أو $\sqrt{س} = -٢$ $\sqrt{س} = -٢$ ليس لها حلّ حقيقي لأنّ $\sqrt{س}$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

$\therefore$ $س = ٣٦$ لاحظ أن هذه المعادلة لها حلّ واحد.

**مُساعَدة**

من المعلوم أن $\sqrt{س}$ عدد غير سالب.

## مثــال ١٣

حلَّ المعادلة $٣(٩^{س}) - ٢٨(٣^{س}) + ٩ = ٠$

### الحــلّ:

$٣(٣^{س})^{٢} - ٢٨(٣^{س}) + ٩ = ٠$ ضع $ص = ٣^{س}$

$٣ص^{٢} - ٢٨ص + ٩ = ٠$

$(٣ص - ١)(ص - ٩) = ٠$

$ص = \frac{١}{٣}$ أو $ص = ٩$ عوّض $٣^{س}$ عن ص

$٣^{س} = \frac{١}{٣}$ أو $٣^{س} = ٩$ $\frac{١}{٣} = ٣^{-١}$، $٩ = ٣^{٢}$

$س = -١$ أو $س = ٢$

## تمارين ١-٦

**١)** أوجد قيم س الحقيقية التي تحقّق كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ $س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦ = ٠$

ب $س^{٦} - ٧س^{٣} - ٨ = ٠$

ج $س^{٤} - ٦س^{٢} + ٥ = ٠$

د $٢س^{٤} - ١١س^{٢} + ٥ = ٠$

هـ $٣س^{٤} + س^{٢} - ٤ = ٠$

و $٨س^{٦} - ٩س^{٣} + ١ = ٠$

ز $س^{٤} + ٢س^{٢} - ١٥ = ٠$

ح $س^{٤} + ٩س^{٢} + ١٤ = ٠$

ط $س^{٨} - ١٥س^{٤} - ١٦ = ٠$

ي $٣٢س^{١٠} - ٣١س^{٥} - ١ = ٠$

ك $\frac{٩}{س^{٤}} + \frac{٥}{س^{٢}} = ٤$

ل $\frac{٨}{س^{٦}} + \frac{٧}{س^{٣}} = ١$

**٢)** حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ $٢س - ٩\sqrt{س} + ١٠ = ٠$

ب $\sqrt{س}(\sqrt{س} + ١) = ٦$

ج $٦س - ١٧\sqrt{س} + ٥ = ٠$

د $١٠س + \sqrt{س} - ٢ = ٠$

هـ $٨س + ٥ = ١٤\sqrt{س}$

و $٣\sqrt{س} + \frac{٥}{\sqrt{س}} = ١٦$

## ١-٧ حلّ المتباينات التربيعية

سبق أن تعرّفنا على كيفية حلّ المتباينات الخطيّة.

فيما يأتي مثالَين على ذلك:

| | |
|---|---|
| حلّ المتباينة ٢(س + ٧) < −٤ | فُكّ الأقواس. |
| ٢س + ١٤ < −٤ | اطرح ١٤ من طرفَي المتباينة. |
| ٢س < −١٨ | اقسم الطرفَين على ٢ |
| س < −٩ | |

| | |
|---|---|
| حلّ المتباينة ١١ − ٢س ≥ −٤ | اطرح ١١ من الطرفَين. |
| −٢س ≥ −١٥ | اقسم الطرفَين على −٢ |
| س ≤ $\frac{١٥}{٢}$ | |

استُخدم في المثال الثاني أعلاه النتيجة الآتية:

**نتيجة ٥**

إذا ضربنا طرفَي المتباينة في عدد سالب، أو قسمناهما على عدد سالب يجب عكس إشارة المتباينة.

يمكن حلّ المتباينات التربيعية برسم منحنى ومعرفة متى يكون المنحنى فوق المحور السيني أو تحته.

### مثــال ١٤

حلَّ المتباينة س$^{٢}$ − ٥س − ١٤ > ٠

**الحــلّ:**

أوجد نقاط التقاطع مع المنحنى ارسم منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٥س − ١٤

عندما ص = ٠، فإن س$^{٢}$ − ٥س − ١٤ = ٠

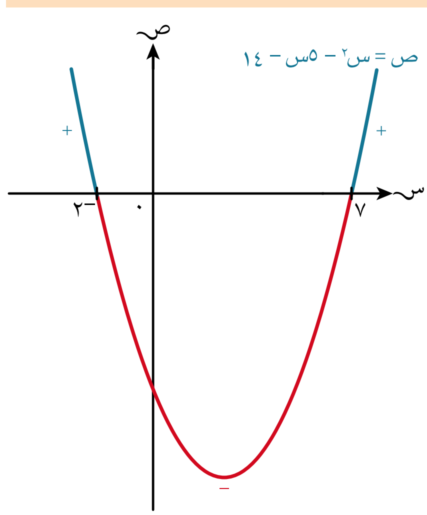
(س + ٢)(س − ٧) = ٠

س = −٢ أو س = ٧

وعليه، فإنّ نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني هي: −٢، ٧

بما أن المطلوب إيجاد الحل عندما تكون المتباينة موجبة، يجب أن نجد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا (فوق المحور السيني).

الحلّ هو: س < −٢ أو س > ٧




**مُساعَدة**

عند رسم منحنى الدالّة، عليك فقط معرفة اتجاهه إلى الأعلى أو إلى الأسفل ونقاط تقاطعه مع المحور السيني. من غير الضروري إيجاد الرأس أو الجزء المقطوع مع المحور الصادي.

## مثـــال ١٥

حلَّ المتباينة ٢س$^{٢}$ + ٣س $\leqslant$ ٢٧

### الحـــلّ:

٢س$^{٢}$ + ٣س − ٢٧ $\leqslant$ ٠ ........ أعد ترتيب الحدود.

ارسم منحنى الدالّة ص = ٢س$^{٢}$ + ٣س − ٢٧

عندما ص = ٠، فإن ٢س$^{٢}$ + ٣س − ٢٧ = ٠

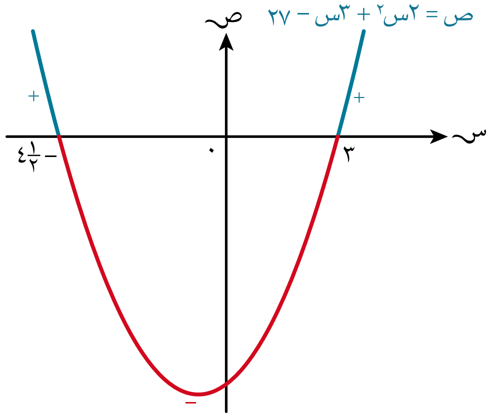
(٢س + ٩)(س − ٣) = ٠

س = −٤$\frac{١}{٢}$ أو س = ٣

∴ الجزء المقطوع من المحور السيني هو −٤$\frac{١}{٢}$، ٣

لحلّ المتباينة ٢س$^{٢}$ + ٣س − ٢٧ $\leqslant$ ٠، نحتاج إلى إيجاد قيم س التي يكون المنحنى عندها صفرًا أو سالبًا (تحت محور السينات).

الحلّ هو: −٤$\frac{١}{٢}$ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٣




## مثـــال ١٦

أوجد قيم ك إذا كان للمعادلة ك س$^{٢}$ − ٢ك س + ٨ = ٠ جذران مختلفان.

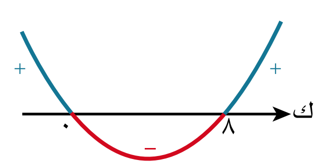
### الحـــلّ:

ك س$^{٢}$ − ٢ك س + ٨ = ٠ ........ لأنه يوجد جذران مختلفان، فإنّ: ب$^{٢}$ − ٤أجـ > ٠

(−٢ك)$^{٢}$ − ٤ × ك × ٨ > ٠ ........ عوّض عن أ، ب، جـ

٤ك$^{٢}$ − ٣٢ك > ٠

٤ك(ك − ٨) > ٠




يمكن أن نستخدم المنحنى لنرى أن قيم النقاط الحرجة هي ٠، ٨، أي أن: ك < ٠ أو ك > ٨

**مُساعَدة**

سيتم التعبير عن ك في صورة متباينة.

## استكشف ١

سُئل نوّاف أن يحلّ المتباينة $\frac{\text{٢س} - ٤}{\text{س}} \geqslant ٧$

فعرض الحل الآتي:

| | |
|---|---|
| اضرب طرفَي المتباينة في س: | ٢س − ٤ ≥ ٧س |
| اطرح ٢س من كلا الطرفَين: | −٤ ≥ ٥س |
| اقسم الطرفَين على ٥: | س ≤ $-\frac{٤}{٥}$ |

جرّب خالد أن يتأكّد ما إذا كان س = −١ يحقّق المتبايتة الأصلية،

فكتب:

عندما س = −١: (٢(−١) − ٤) ÷ (−١) = ٦

وعليه، فإنّ س = −١ هي قيمة لـ س لا تحقّق المتباينة الأصلية.

فيكون حلّ نوّاف غير صحيح!

ناقش حلّ نوّاف مع زملائك في الصف، شارحًا الخطأ الذي وقع فيه.

كيف يمكن أن يعالج نوّاف المسألة ليحصل على الحلّ الصحيح؟



## تمارين ١-٧

**١)** حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ) س(س − ٣) ≤ ٠

ب) (س − ٣)(س + ٢) > ٠

ج) (س − ٦)(س − ٤) ≤ ٠

د) (٢س + ٣)(س − ٢) < ٠

هـ) (٥ − س)(س + ٦) ≥ ٠

و) (١ − ٣س)(٢س + ١) < ٠

**٢)** حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ) س$^{٢}$ − ٢٥ ≥ ٠

ب) س$^{٢}$ + ٧س + ١٠ ≤ ٠

ج) س$^{٢}$ + ٦س − ٧ > ٠

د) ١٤س$^{٢}$ + ١٧س − ٦ ≤ ٠

هـ) ٦س$^{٢}$ − ٢٣س + ٢٠ < ٠

و) ٤ − ٧س − ٢س$^{٢}$ < ٠

**٣)** حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ) س$^{٢}$ < ٣٦ − ٥س

ب) ١٥س < س$^{٢}$ + ٥٦

ج) س(س + ١٠) ≤ ١٢ − س

د) س$^{٢}$ + ٤س < ٣(س + ٢)

هـ) (س + ٣)(س − ١) < س − ١

و) (٤س + ٣)(٣س − ١) < ٢س(س + ٣)

ز) (س + ٤)$^{٢}$ ≥ ٢٥

ح) (س − ٢)$^{٢}$ > ١٤ − س

ط) ٦س(س + ١) < ٥(٧ − س)

**٤)** أوجِد قيم س التي تحقّق $\frac{٥}{٢س^٢ + س - ١٥} > ٠$

**٥)** أوجِد قيم س التي تحقّق:

أ $س^٢ - ٣س \leqslant ١٠$ ، $(س - ٥)^٢ < ٤$

ب $س^٢ + ٤س - ٢١ \geqslant ٠$ ، $س^٢ - ٩س + ٨ < ٠$

ج $س^٢ + س - ٢ > ٠$ ، $س^٢ - ٢س - ٣ \leqslant ٠$

**٦)** أوجِد قيم س التي تحقّق $٢^{س^٢ - ٣س - ٤٠} < ١$

**٧)** حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ $\frac{س(س - ١)}{س + ١} > س$

ب $\frac{س^٢ - ٩}{س - ١} \leqslant ٤$

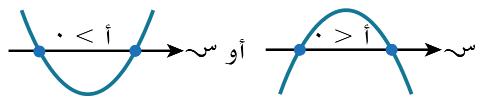
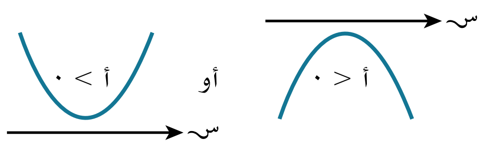
ج $\frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س - ٢} \leqslant ٠$

د $\frac{س^٢ + ٤س - ٥}{س^٢ - ٤} \geqslant ٠$

هـ $\frac{س - ٣}{س + ٤} \leqslant \frac{س + ٢}{س - ٥}$

## ٨-١ التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية

يوجد رابط بين عدد جذور المعادلة التربيعية أس$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠، والمنحنى المناظر للدالّة ص = أس$^{٢}$ + ب س + جـ

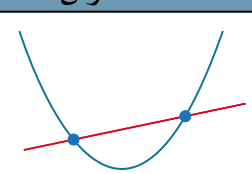
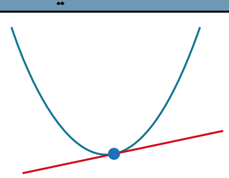
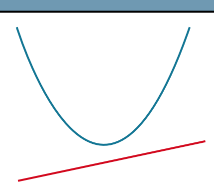
| ب$^{٢}$ − ٤أجـ | نوع الجذور | شكل منحنى الدالّة ص = أس$^{٢}$ + ب س + جـ |
|---|---|---|
| > ٠ | جذران حقيقيان مختلفان. | يقطع المنحنى المحور السيني في نقطتَين مختلفتَين.  |
| = ٠ | جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر). | يلامس المنحنى محور السينات في نقطة واحدة.  |
| < ٠ | لا توجد جذور حقيقية. | يقع المنحنى تحت محور السينات أو فوق محور السينات بشكل كامل.  |

تعلّمنا سابقًا أن نجد نقاط تقاطع مستقيم، ومنحنى الدالّة التربيعية عبر حلّ معادلتَيهما آنيًّا.

يساعدنا مميز المعادلة الناتجة على معرفة عدد نقاط تقاطعهما . الحالات الثلاث الممكنة مبيّنة في الجدول الآتي:

| ب$^{٢}$ − ٤أجـ | نوع الجذور | المستقيم ومنحنى الدالّة |
|---|---|---|
| > ٠ | جذران حقيقيان مختلفان. | نقطتا تقاطع مختلفتان. |
| = ٠ | جذران حقيقيان متساويان (جذر مكرّر). | نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ). |
| < ٠ | لا توجد جذور حقيقية. | لا توجد نقاط تقاطع. |

يوجد ثلاث حالات ممكنة عندما يتقاطع خطّ مستقيم مع منحنى الدالّة التربيعية.

| الحالة الأولى | الحالة الثانية | الحالة الثالثة |
|---|---|---|
|  |  |  |
| يوجد نقطتا تقاطع. | يوجد نقطة تقاطع واحدة. | لا يوجد نقطة تقاطع. |
| يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين. | يلامس المستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط، ممّا يعني أنّ المستقيم مماسّ **Tangent** للمنحنى. | لا يقطع المستقيم المنحنى. |

## مثــال ١٧

أوجِد قيمة ك بحيث يكون المستقيم ص = س + ك مماسّ لمنحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ + ٥س + ٢

### الحــلّ:

س$^{٢}$ + ٥س + ٢ = س + ك ........ ساوِ بين المعادلتين.

س$^{٢}$ + ٤س + (٢ − ك) = ٠ ........ أعد ترتيب الحدود.

بما أنّ المستقيم مماسّ للمنحنى، فإنّ مميّز المعادلة التربيعية يجب أن يساوي صفرًا. لذا:

ب$^{٢}$ − ٤أجـ = ٠

٤$^{٢}$ − ٤ × ١ × (٢ − ك) = ٠ ........ عوِّض.

١٦ − ٨ + ٤ك = ٠

٤ك = −٨

ك = −٢

يتضمن المثال الآتي معادلة تربيعية تساعدنا في إيجاد شروط التقاطع بين المستقيم والمعادلة التربيعية.

## مثــال ١٨

أوجد مجموعة قيم ك بحيث يقطع المستقيم ص = ك س − ١ منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٢س في نقطتَين مختَلفتَين.

### الحــلّ:

س$^{٢}$ − ٢س = ك س − ١ ........ ساوِ بين المعادلتَين.

س$^{٢}$ − (ك + ٢) س + ١ = ٠ ........ أعد ترتيب الحدود.

بما أنّ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتَين مختلفتَين، فإنّ مميّز المعادلة التربيعية يجب أن يكون أكبر من الصفر.

ب$^{٢}$ − ٤أجـ > ٠

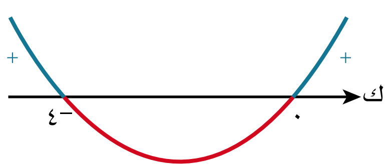
(ك + ٢)$^{٢}$ − ٤ × ١ × ١ > ٠ ........ عوِّض.

ك$^{٢}$ + ٤ك > ٠

ك(ك + ٤) > ٠

القيمتان هما −٤، ٠

وعليه، تكون ك < −٤ أو ك > ٠



## تمارين ١-٨

**١)** أوجِد قيم ك بحيث يكون المستقيم ص = ك س + ١ مماسًّا لمنحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٧س + ٢

**٢)** أوجِد قيم ك بحيث يكون المحور السيني مماسًّا لمنحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − (ك + ٣) س + (٣ك + ٤)

**٣)** المستقيم ص = ك − ٣س مماسّ لمنحنى الدالّة س$^{٢}$ + ٢س ص − ٢٠ = ٠

**أ** أوجِد قيم ك الممكنة.

**ب** لكلّ قيمة من قيم ك، أوجِد إحداثيات التقاطع مع المنحنى.

**٤)** أوجِد قيم م بحيث يكون المستقيم ص = م س + ٦ مماسًّا لمنحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٤س + ٧

أوجد إحداثيات نقطة تماسّ المستقيم مع المنحنى لكلّ قيمة من قيم م.

**٥)** أوجدِ قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ٢س − ١ مع منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ + ك س + ٣ في نقطتَين مختلفتَين.

**٦)** أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ك − س مع منحنى الدالّة ص = ٥ − ٣س − س$^{٢}$ في نقطتَين مختلفتَين.

**٧)** أوجِد قيم ع بحيث لا يتقاطع المستقيم ص = ع س + ٥ مع منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − س + ٦

**٨)** أوجِد قيم ك بحيث لا يتقاطع المستقيم ص = ٢س − ١٠ مع منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٦س + ك

**٩)** أوجِد قيمة ك بحيث يكون المستقيم ص = ك س + ٦ مماسًّا للمنحنى س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ١٠س + ٨ص = ٨٤

★ **١٠)** المستقيم ص = م س + جـ مماسّ لمنحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٤ س + ٤

بيِّن أن م$^{٢}$ + ٨م + ٤ جـ = ٠

★ **١١)** المستقيم ص = م س + جـ مماسّ للمنحنى أس$^{٢}$ + ب ص$^{٢}$ = جـ، حيث أ، ب، جـ، م أعداد ثابتة، ب ≠ ٠.

بيّن أن م$^{٢}$ = $\frac{\text{أب جـ − أ}}{\text{ب}}$.

# قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

**يمكن حلّ المعادلات التربيعية بالطرق الآتية:**

- الإكمال إلى مُربّع.
- استخدام الصيغة التربيعية س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

**حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطيّة ومعادلة تربيعية)**

- أعِد ترتيب حدود المعادلة حيث تكتب س بدلالة ص أو ص بدلالة س.
- عوِّض عن س أو ص في المعادلة التربيعية، ثمّ حلَّ المعادلة الناتجة منها.

**النقطة العظمى والنقطة الصغرى ومحور التماثل**

للدالّة التربيعية د(س) = أ س$^{٢}$ + ب س + جـ والتي تكتب في صورة د(س) = أ(س − ل)$^{٢}$ + ك:

- معادلة محور التماثل هي: س = ل = $-\frac{ب}{٢أ}$
- إذا كان أ $>$ ٠، فيوجد قيمة صغرى عند النقطة (ل، ك).
- إذا كان أ $<$ ٠، فيوجد قيمة عظمى عند النقطة (ل، ك).

**المعادلة التربيعية أس$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ ومنحنى الدالّة ص = أس$^{٢}$ + ب س + جـ**

- المميّز = ب$^{٢}$ − ٤ أجـ.
- إذا كان ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ $>$ ٠، فيكون للمعادلة أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.
- إذا كان ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٠، فيكون للمعادلة أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ جذران حقيقيان متساويان.
- إذا كان ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ $<$ ٠، فلا توجد جذور حقيقية للمعادلة أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠
- الشرط الواجب توافره ليكون للمعادلة التربيعية جذور حقيقية هو: ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ $\geqslant$ ٠

**تقاطع المستقيم مع منحنى الدالّة التربيعية بالصورة العامة**

- إذا تقاطع مستقيم مع منحنى دالّة تربيعية بالصورة العامة في نقطة واحدة، فيكون المستقيم مماسًّا للمنحنى عند تلك النقطة.
- يؤدّي حلّ معادلتَي المستقيم والدالّة التربيعية آنيًّا إلى معادلة في صورة أس$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠
- تعطي العبارة ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ معلومات عن تقاطع المستقيم مع منحنى الدالّة التربيعية:

| ب$^{٢}$ − ٤أجـ | نوع الجذور | المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية |
|---|---|---|
| $>$ ٠ | جذران حقيقيان مختلفان. | نقطتا تقاطع مختلفتان. |
| = ٠ | جذران حقيقيان متساويان (جذر واحد مكرّر). | نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ للمنحنى). |
| $<$ ٠ | لا توجد جذور حقيقية. | لا توجد نقاط تقاطع. |

## تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

١) أ اكتب ٩س$^{٢}$ − ١٥س في صورة (٣س − أ)$^{٢}$ − ب

ب أوجِد قيم س التي تحقّق المتباينة ٩س$^{٢}$ − ١٥س < ٦

٢) أوجِد جذور المعادلة $\frac{٣٦}{س^{٤}}$ + ٤ = $\frac{٢٥}{س^{٢}}$

٣) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ك س − ٣ مع منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٩س في نقطتَين مختلفتَين.

٤) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ٢س + ك مع المنحنى ص = ١ + ٢ك س − س$^{٢}$ في نقطتَين مختلفتَين.

٥) أ أوجِد إحداثيات رأس منحنى الدالّة التربيعية ص = ٤س$^{٢}$ − ١٢س + ٧

ب أوجِد قيم العدد الثابت ك إذا كان المستقيم ص = ك س + ٣ مماسًّا لمنحنى الدالّة ص = ٤س$^{٢}$ − ١٢ س + ٧

٦) منحنى معادلته ص = ٥ − ٢س + س$^{٢}$، ومستقيم معادلته ص = ٢س + ك، حيث ك عدد ثابت.

أ بيِّن أنّ الإحداثَي السيني لنقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم يُحقق المعادلة س$^{٢}$ − ٤س + (٥ − ك) = ٠

ب يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين ا ، ب لإحدى قيم ك. أوجِد إحداثيات النقطة ب إذا علمت أن إحداثيات النقطة ا هي (−٢، ١٣).

ج إذا كان المستقيم مماسًّا للمنحنى عند النقطة ع، فأوجد قيمة ك وإحداثيات النقطة ع.

٧) منحنى معادلته ص = س$^{٢}$ − ٥س + ٧، ومستقيم معادلته ص = ٢س − ٣

أ بيِّن أنّ منحنى الدالّة يقع فوق محور السينات.

ب أوجِد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيم مع منحنى الدالّة.

ج اكتب قيم س التي تحقّق المتباينة س$^{٢}$ − ٥س + ٧ < ٢س − ٣

٨) منحنى معادلته ص = ١٠س − س$^{٢}$

أ اكتب ١٠س − س$^{٢}$ في صورة أ − (س + ب)$^{٢}$

ب اكتب إحداثيات رأس منحنى الدالّة.

ج أوجِد قيم س حيث ص ⩾ ٩

**٩)** منحنى معادلته ص = س$^{٢}$ − ٤س + ٤، ومستقيم معادلته ص = م س، حيث م عدد ثابت.

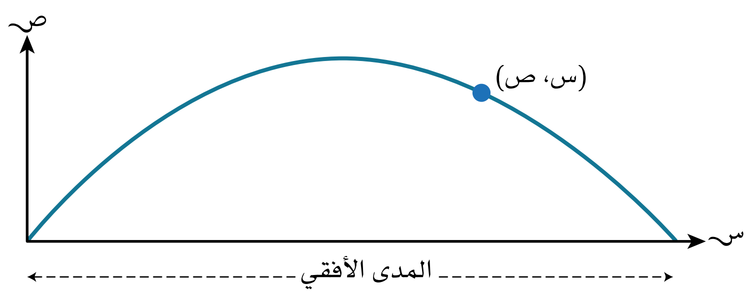
أ إذا كانت م = ١، يتقاطع المستقيم والمنحنى في النقطتَين ا، ب، فأوجِد إحداثيات نقطة المنتصف بين النقطتَين ا، ب

ب أوجِد قيمة م التي تجعل المستقيم مماسًّا للمنحنى، وأوجِد إحداثيات نقطة التماسّ.

**١٠)** أ اكتب ٢س$^{٢}$ − ٤س + ١ في صورة أ(س + ب)$^{٢}$ + جـ، وأوجِد إحداثيات نقطة القيمة الصغرى للمنحنى ص = ٢س$^{٢}$ − ٤س + ١

ب إذا قطع المستقيم س − ص + ٤ = ٠ منحنى الدالّة ص = ٢س$^{٢}$ − ٤س + ١ عند النقطتَين ك، ل، وكانت إحداثيات ك(٣، ٧). أوجد إحداثيات النقطة ل

**١١)** تمثّل المعادلة ص = $\sqrt{٣}$ س − $\frac{٤٩س^{٢}}{٩٠٠٠}$ مسار جسم مقذوف، حيث قيم س، ص بالأمتار.




أ أوجد المدى الأفقي للجسم المقذوف.

ب أوجد أكبر ارتفاع يصل إليه الجسم المقذوف.



# الوحدة الثانية
# الدوالّ Functions

**ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:**

٢-١ تفهم المصطلحات الآتية: الدالّة، المجال، المدى، الدالّة واحد إلى واحد، وتحدّد ما إذا كانت الدالّة هي واحد إلى واحد أم لا، تحدّد المجال والمدى لدوالّ معطاة.

٢-٢ تفهم مصطلح الدوالّ المركّبة، وتفهم تركيب دالّتين، بشرط أنّ الدالّة المركّبة هـ o د ← هـ(د(س)) يمكن تشكيلها عندما يكون مدى الدالّة د(س) مجموعة جزئية من مجال الدالّة هـ(س)، وتجد تركيب دالّتَين مُعطاتَين (باستخدام دوالّ خطية وتربيعية وجذرية وكسرية).

٢-٣ تفهم مصطلح الدالّة العكسية، وتجد الدالّة العكسية لدالّة واحد إلى واحد.

٢-٤ تفهم بيانيًّا العلاقة بين دالّة واحد إلى واحد ومعكوسها.

٢-٥أ) تفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = د(س) + ب، ص = د(س + أ)، ص = د(س + أ) + ب، وتحدّد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، وترسم التمثيلات البيانية المحولة.

ب) تفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = −د(س)، ص = د(−س)، وتحدّد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، وترسم التمثيلات البيانية المحولة.

ج) تفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = أد(س)، ص = د(أس)، وتحدّد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، وترسم التمثيلات البيانية المحولة.

د) تفهم التأثير البياني لتركيب من تحويلين هندسيين لبيانات ص = د(س)، عندما ص = د(س) + ب، ص = د(س + أ)، ص = د(س + أ) + ب، ص = −د(س)، ص = د(−س)، وتحدّد التحويل الهندسي من تمثيل جبري إلى تمثيل آخر، ترسم البيانات المحولة لمنحنى ص = د(س).

## المفردات

واحد إلى واحد
one-one

متعدّد إلى واحد
many-one

واحد إلى متعدد
one-many

مجال الدالّة domain

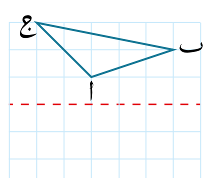
مدى الدالّة range

الدالّة المركّبة
composite function

الدالّة العكسية
inverse function

الدالّة العكسية لنفسها
self-inverse function

## معرفة قبلية

| المصدر | تعلمت سابقًا أن: | اختبر مهاراتك |
|---|---|---|
| الصف العاشر<br>الوحدة الثامنة | توجِد مخرجات دالّة معطاة. | ١) إذا علمت أن د(س) = ٣س − ٢، فأوجد د(٤). |
| الصف العاشر<br>الوحدة الثامنة | توجِد دالّة مركّبة. | ٢) إذا علمت أن د(س) = ٢س + ١، ع(س) = ١ − س، فأوجد (د ∘ ع)(س). |
| الصف العاشر<br>الوحدة الثامنة | توجِد الدالّة العكسية لدالّة بسيطة. | ٣) إذا كانت د(س) = ٥س + ٤، فأوجد $\text{د}^{-1}$(س). |
| الصف الحادي عشر<br>الوحدة الأولى | تُكمِل إلى المربَع. | ٤) اكتب ٢$\text{س}^{2}$ − ١٢س + ٥ في صورة أ$(\text{س} + \text{ب})^{2}$ + جـ. |
| الصف التاسع<br>الوحدة الثامنة | توجد تحويلات هندسية لعدة أشكال. | ٥) أوجد صورة المثلث أ ب ع بالانعكاس حول الخط الأحمر المنقط.  |

## لماذا ندرس الدوالّ؟

سبق أن تعلّمت في الصف العاشر كيفية تفسير العبارات الجبرية في صورة دوالّ لها مدخلات ومخرجات، وكيفية إيجاد تركيب الدوالّ البسيطة والدوالّ العكسية البسيطة.

يوجد الكثير من المواقف اليومية التي يمكن تمثيلها في صورة دوالّ، مثل:

- العلاقة بين درجة حرارة مشروب ساخن، وتبريده مع مرور الزمن.
- العلاقة التي تمثّل ارتفاع نقطة على عجلة سيارة أثناء سيرها.
- العلاقة التي تمثّل ارتفاع الماء في بركة عند ملئها من صنبور الماء، والزمن المستغرق لذلك.
- العلاقة التي تمثل عدد البكتيريا التي تتكاثر بعد بدء تجربة ما.

كل ذلك هي أمثلة على العلاقات بين كمّيتين أو مقياسين: الزمن ودرجة الحرارة، الطول والمسافة، العمق والزمن، عدد البكتيريا والزمن، وكيف يؤثر التغيير في أحدهما على التغيير في الآخر. يساعدنا تمثيل هذه المواقف باستخدام الدوالّ المناسبة على القيام بتوقعات تتعلّق بمواقف من الحياة اليومية، على سبيل المثال: ما الزمن المستغرق ليتجاوز عدد البكتيريا الخمسة ملايين بكتيريا؟

في هذه الوَحدة، سوف نبني فهمًا مُعمّقًا للدوالّ وخواصها.

## ٢-١ تعريف الدالّة

العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعة ما بعناصر مجموعة أخرى.

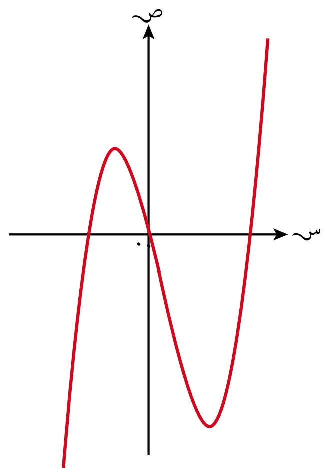
الدالّة هي علاقة بين عناصر مجموعتين، حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

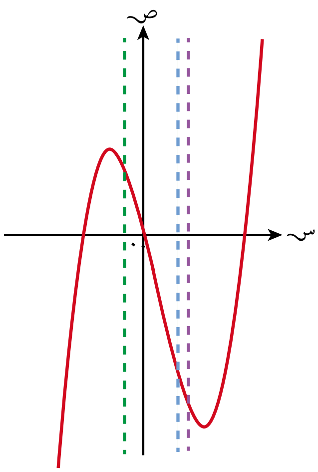
أي دالة تمثل علاقة، ولكن ليست كل علاقة تمثل دالّة.

قد تكون الدالّة **واحدًا إلى واحد** one-one أو **متعدّدًا إلى واحد** many-one (ليست واحدًا إلى واحد).

من الدلائل على إثبات أن منحنى ما يمثّل دالّة هو رسم مستقيم رأسي عليه. فإذا لم يقطع المستقيم الرأسي المنحنى في أكثر من نقطة، فإنه سيكون دالّة.

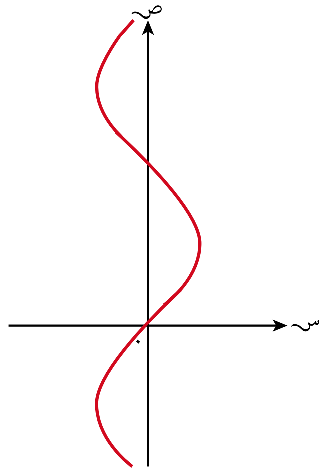
التمثيل البياني الآتي يمثل اختبار العلاقة بأكثر من مستقيم رأسي:

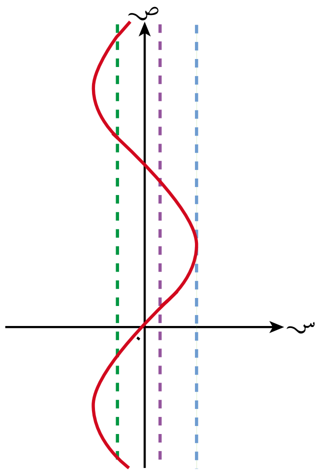



نلاحظ عند رسم أي مستقيم رأسي على منحنى الدالّة، فإنه لا يتقاطع مع المنحنى إلّا في نقطة واحدة فقط؛ **لذا فإن المنحنى يمثل دالّة.**

انظر إلى مجموعة المستقيمات على المنحنى الآتي:




**مُساعَدة**

إذا رسمنا كل المستقيمات الرأسية الممكنة على منحنى العلاقة، فستكون العلاقة:

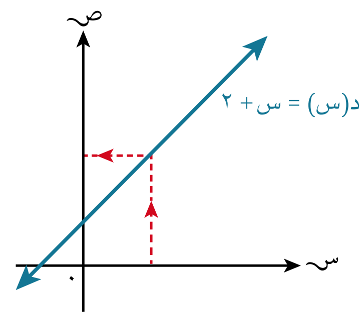
- دالّة، إذا قطع كل مستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط.
- غير دالّة، إذا قطع مستقيم واحد المنحنى في أكثر من نقطة.

تقطع بعض هذه المستقيمات الرأسية المنحنى في أكثر من نقطة، **لذا فإن المنحنى لا يمثل دالّة.**

## الدالّة واحد إلى واحد

تُعدّ الدالّة س ← س + ٢ أو (الدالّة د(س) حيث يرتبط س بـ س + ٢) حيث س ∋ ع مثالًا على الدالّة واحد إلى واحد.

> **مُساعَدة**
>
> س ∋ ع تعني أن س تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.




المدخلة هي: العدد الذي يوضع في الدالّة (أي إذا كانت الدالّة د(س)، فإن المدخلة هي س).

المخرجة هي: العدد الناتج من تعويض المدخلة في الدالّة (أي د(س)).

نجد في الدالّة واحد إلى واحد مخرجة واحدة لكلّ مدخلة، وبالمثل فإن لكلّ مخرجة واحدة نرى مدخلة واحدة فقط مرتبطة بها.

يمكن أن نكتب هذه الدالّة في صورة د: س ← س + ٢ حيث س ∋ ع أو في صورة د(س) = س + ٢ حيث س ∋ ع.

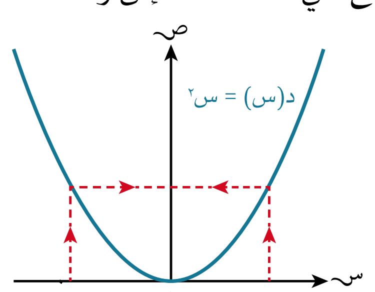
يُقرأ د: س ← س + ٢ على النحو 'الدالّة د حيث يرتبط س بـ س + ٢'، أو على النحو 'الدالّة د(س) تربط س بـ س + ٢'.

د(س) هي قيمة مخرجة للدالّة د عندما تكون قيمة المدخلة س، فمثلًا إذا كانت د(س) = س + ٢، وكانت المدخلة س = ٥، فإن د(٥) تمثّل قيمة المخرجة للدالّة د(س).

> **مُساعَدة**
>
> ارسم منحنى الدالّة. إذا قطع مستقيم أفقي المنحنى في أكثر من نقطة فإنها دالّة متعدد إلى واحد، وإن لم يكن كذلك فإنها دالّة واحد إلى واحد.

## الدالّة متعدّد إلى واحد

الدالّة س ← س$^{2}$ حيث س ∋ ع هي دالّة متعدّد إلى واحد:



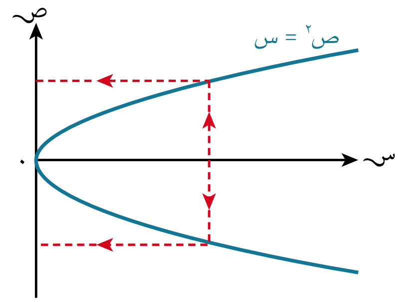

في دالة المتعدّد إلى واحد: يوجد لكل مدخلة مخرجة واحدة، ولكن يمكن أن يكون لكل مخرجة أكثر من مدخلة.

يمكننا أن نكتب هذه الدالّة في صورة د: س ← س$^{2}$ حيث س ∋ ع أو د(س) = س$^{2}$،

وتُقرأ د: س ← س$^{2}$ على النحو 'الدالّة د(س) حيث تربط س بـ س$^{2}$'.

## العلاقة واحد إلى متعدّد

إذا نظرنا إلى منحنى $ص^٢ = س$:




يمكن أن نلاحظ أن لقيمة المدخلة المُبيّنة قيمتَين مخرجتَين، الأمر الذي يعني أن هذه العلاقة ليست بدالّة (علاقة واحد إلى متعدد)، بل إنها مجرّد علاقة.

**تُسمّى مجموعة قيم المدخلات في الدالّة مجال الدالّة domain.**

عند تعريف الدالّة، من المهمّ أن نحدّد مجالها.

على سبيل المثال، مجال الدالّة د(س) = $س^٢$ لكل قيم س ∈ ع هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

**وتُسمّى مجموعة قيم المخرجات في الدالّة مدى الدالّة range.**



يمكن إيجاد المدى بالنظر إلى منحنى الدالّة في مجالها، مثلًا للدالّة د(س) = $س^٢$، حيث س ∈ ع، المخرجات أو المدى تكون دائمًا أكبر من أو تساوي ٠ لأن $س^٢$ عدد غير سالب.

**نتيجة ١**

الدالّة الخطية تكون دائمًا واحدًا إلى واحد، والدالّة التربيعية تكون دائمًا متعدّدًا إلى واحد إذا كان مجالها ع.

## مثــال ١

إذا علمت أن الدالّة د(س) معرفة كالآتي: د(س) = (س − ٣)$^{٢}$ + ٨،
حيث −١ ⩽ س ⩽ ٩، فارسم منحنى الدالّة، وحدّد مجالها ومداها.

### الحــلّ:

د(س) = (س − ٣)$^{٢}$ + ٨ دالّة تربيعية.

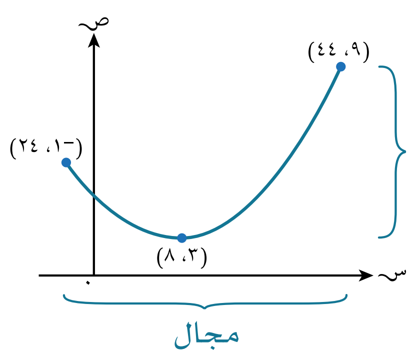
∵ معامل س$^{٢}$ موجب،

∴ سيكون المنحنى في صورة ∨ ، (له قيمة صغرى)

(س − ٣)$^{٢}$ + ٨

الجزء (س − ٣)$^{٢}$ مربّع كامل، لذا فإنه ⩾ ٠ دائمًا.
وعليه، فإن أصغر قيمة يمكن أن يصل إليها هي الصفر.
ويحصل ذلك عندما س = ٣

القيمة الصغرى للعبارة هو ٠ + ٨ = ٨،
ويحصل ذلك عندما س = ٣
لذا تكون للدالّة د(س) = (س − ٣)$^{٢}$ + ٨
قيمة صغرى عند النقطة (٣، ٨).
عندما س = −١، فإن ص = (−١ − ٣)$^{٢}$ + ٨ = ٢٤
عندما س = ٩، فإن ص = (٩ − ٣)$^{٢}$ + ٨ = ٤٤




المجال هو: −١ ⩽ س ⩽ ٩

المدى هو: ٨ ⩽ د(س) ⩽ ٤٤

**مُساعَدة**

عندما
د(س) = (س + د)$^{٢}$ + ك
فإن رأس المنحنى
(−د، ك) يمثل قيمة
صغرى أو عظمى.



## تمارين ٢-١

**١)** أيٌّ من العلاقات الآتية تمثّل دالّة؟ ثم حدّد ما إذا كانت العلاقة واحدًا إلى واحد أو متعدّدًا إلى واحد:

أ ص = ٢س − ٣ ، س ∈ ع

ب ص = س$^{٢}$ − ٣ ، س ∈ ع

ج ص = ٢س$^{٣}$ − ١ ، س ∈ ع

د ص = ٣س$^{٢}$ + ٤ ، س ∈ ع، س ⩾ ٠

**٢)** استخدم برمجيات التمثيلات البيانية لتحديد أي من العلاقات الآتية تمثل دوالّ، وحدد ما إذا كانت هذه الدوالّ واحدًا إلى واحد أو متعدّدًا إلى واحد:

أ ص = ٢$^{س}$ ، س ∈ ع

ب ص = $\frac{١٠}{س}$ ، س ∈ ع، س > ٠

ج ص = $\sqrt{س}$ ، س ∈ ع، س ⩾ ٠

د ص$^{٢}$ = ٤س ، س ∈ ع

**٣)** أ مثّل العلاقة الآتية بيانيًّا:

$$\text{ص} = \begin{cases} ٩ - \text{س}^{٢}،\ \text{حيث س} \in \text{ع}،\ -٣ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \\ ٢\text{س} + ١،\ \text{حيث س} \in \text{ع}،\ ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$$

ب حدّد نوع العلاقة (واحد إلى واحد، أو متعدّد إلى واحد، أو واحد إلى متعدّد).

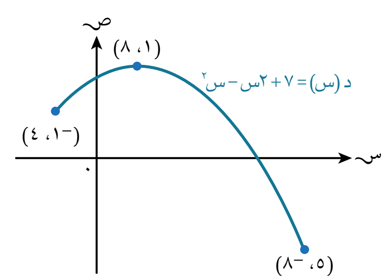
**٤)** أ مثّل العلاقة الآتية بيانيًّا:

$$\text{ص} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١،\ \text{حيث } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \\ ٢\text{س} - ٣،\ \text{حيث } ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$$

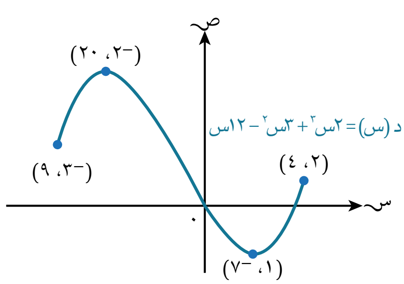
ب وضّح أنّ هذه العلاقة ليست دالّة.

**٥)** حدّد المجال والمدى لكل دالّة من الدالّتَين الممثّلتَين بالمنحنيَين الآتيَين:

أ




ب




**٦)** أوجد مدى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ د(س) = س + ٤، حيث س $<$ ٨

ب د(س) = ٢س − ٧، حيث −٣ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٢

ج د(س) = ٧ − ٢س، حيث −١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٤

د د : س ← ٢س$^{٢}$، حيث ١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٤

هـ د(س) = ٢$^{\text{س}}$، حيث −٥ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٤

و د(س) = $\frac{١٢}{\text{س}}$، حيث ١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٨

**٧)** أوجد مدى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ د(س) = س$^{٢}$ − ٢، حيث س $\in$ ع

ب د : س ← س$^{٢}$ + ٣، حيث −٢ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٥

ج د(س) = ٣ − ٢س$^{٢}$، حيث س $\leqslant$ ٢

د د(س) = ٧ − ٣س$^{٢}$، حيث −١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٢

**٨)** أوجد مدى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ د(س) = (س − ٢)$^{٢}$ + ٥، حيث س ⩾ ٢

ب د(س) = (٢س − ١)$^{٢}$ − ٧، حيث س ⩾ $\frac{١}{٢}$

ج د: س ← ٨ − (س − ٥)$^{٢}$، حيث ٤ ⩽ س ⩽ ١٠

د د(س) = ١ + $\sqrt{\text{س − ٤}}$، حيث س ⩾ ٤

**٩)** اكتب كلّ دالّة من الدوالّ الآتية في صورة أ(س + ب)$^{٢}$ + جـ، حيث أ، ب، جـ ثوابت، ثمّ حدّد مدى كلّ منها:

أ د(س) = س$^{٢}$ + ٦س − ١١، حيث س ∈ ع

ب د(س) = ٣س$^{٢}$ − ١٠س + ٢، حيث س ∈ ع

**١٠)** اكتب كلّ دالّة من الدوالّ الآتية في صورة أ − ب (س + جـ)$^{٢}$، حيث أ، ب، جـ ثوابت، ثمّ حدّد مدى كلّ منها:

أ د(س) = ٧ − ٨س − س$^{٢}$، حيث س ∈ ع

ب د(س) = ٢ − ٦س − ٣س$^{٢}$، حيث س ∈ ع

**١١)** أ مثّل الدالّة الآتية بيانيًّا:

د(س) = { ٣ − س$^{٢}$، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢
 { ٣س − ٧، حيث ٢ ⩽ س ⩽ ٤

ب أوجد مدى الدالّة.

**١٢)** إذا علمت أن الدالّة د: س ← س$^{٢}$ + ٦س + ك معرّفة على س ∈ ع، حيث ك ثابت. فأوجد مدى الدالّة بدلالة ك.

**١٣)** إذا علمت أن الدالّة هـ: س ← ٥ − أس + ٢س$^{٢}$ معرّفة على س ∈ ع، حيث أ ثابت. فأوجد مدى الدالّة بدلالة أ.

**١٤)** إذا كانت د(س) = س$^{٢}$ − ٢س − ٣ حيث س ∈ ع، −أ ⩽ س ⩽ أ،
فأوجد قيمة أ إذا كان مدى الدالّة هو −٤ ⩽ د(س) ⩽ ٥

**١٥)** إذا كانت د(س) = س$^{٢}$ + س − ٤ حيث س ∈ ع، أ ⩽ س ⩽ أ + ٣،
فأوجد قيم أ الممكنة إذا كان مدى الدالّة هو −٢ ⩽ د(س) ⩽ ١٦

**١٦)** إذا كانت د(س) = ٢س$^{٢}$ − ٨س + ٥ حيث س ∈ ع، ٠ ⩽ س ⩽ ك

أ اكتب د(س) في صورة أ(س + ب)$^{٢}$ + جـ.

ب حدّد قيمة ك عندما يكون لمنحنى الدالّة ص = د(س) محور تماثل.

ج أوجد مدى الدالّة، مستخدمًا قيمة ك التي حصلت عليها في الجزئية (ب).

## ٢-٢ الدوالّ المركّبة

يمكن وصف معظم الدوالّ في صورة دالّتَين مركبتَين أو أكثر.

فمثلًا: الدالّة س ← ٣س − ٧ هي الدالّة 'اضرب في ٣، ثم اطرح ٧'.

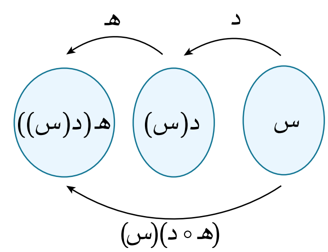
إنها تركيب من الدالّتَين د(س)، هـ(س) حيث:

د: س ← ٣س (الدالّة 'اضرب في ٣')

هـ: س ← س − ٧ (الدالّة 'اطرح ٧')

وعليه، يمكن وصف س ← ٣س − ٧ في صورة دالّة 'طبّق د(س) أولًا، ثم طبّق هـ(س)'.

إذا طبقنا الدالّة د(س) أولًا (س ← ٣س)، فسوف نستطيع تطبيق الناتج على أنه مدخلة في الدالّة هـ(س ← ٣س − ٧) للحصول على س ← ٣س − ٧




عندما تُتبع دالّة بدالّة أخرى، يُسمى الناتج **بالدالّة المركّبة** **composite function**.



**نتيجة ٢**

(هـ ∘ د) (س) تعني تطبيق الدالّة د(س) على س أولًا، ثم تطبيق الدالّة هـ (س) على الناتج.

إليك ثلاث نقاط مهمّة يجب تذكّرها عند تركيب الدوالّ:

**نتيجة ٣**

- تتحقق هـ ∘ د فقط إذا كان مدى الدالّة د(س) مجموعة جزئية من مجال الدالّة هـ (س).
- ليس من الضرورة أن تكون (د ∘ هـ )(س) = (هـ ∘ د)(س) لجميع الدوال.
- (د ∘ د)(س) = د(د(س)).

## استكشف ١

د(س) = ٢س − ٥، حيث س ∈ ع

هـ(س) = ٣س − ١، حيث س ∈ ع

طلب إلى ثلاثة طلبة أن يجدوا دالّة التركيب (هـ ∘ د)(س).

إليك الحلول التي قدّموها:

| حل الطالب (أ) | حل الطالب (ب) | حل الطالب (ج) |
|---|---|---|
| (هـ ∘ د)(س) = (٣س − ١)(٢س − ٥)<br>= ٦س$^{٢}$ − ١٧س + ٥ | (هـ ∘ د)(س) = ٢(٣س − ١) − ٥<br>= ٦س − ٧ | (هـ ∘ د)(س) = ٣(٢س − ٥) − ١<br>= ٦س − ١٦ |

ناقش الحلول مع أقرانك في الصف.

أيّ الطلبة قدّم الحلّ الصحيح؟ ما الخطأ الذي ارتكبه كل من الطالبَين الآخرَين؟

## مثــال ٢

إذا علمت أن د(س) = (س − ٤)$^{٢}$ − ١، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٢س + ٣}{س − ٢}$ ، حيث س ∈ ع، س > ٢

أ أوجد (د ∘ هـ)(٤).

ب إذا علمت أن مدى د(س) هو د(س) ≥ −١، فاشرح سبب عدم إمكانية إيجاد (هـ ∘ د)(س).

### الحــلّ:

أ (د ∘ هـ)(٤) = د$\left(\frac{١١}{٢}\right)$ ........ أوجد هـ(٤) أولًا، هـ (٤) = $\frac{٢(٤) + ٣}{٤ − ٢}$ = $\frac{١١}{٢}$

= $\left(\frac{١١}{٢} − ٤\right)^{٢}$ − ١ ........ د(س) هي الدالّة 'اطرح ٤، رَبّع الناتج، ثم اطرح ١'

= ١$\frac{١}{٤}$

ب لأن مدى الدالة د(س) ليس مجموعة جزئية من مجال الدالة هـ (س).

## مثــال ٣

إذا علمت أنّ د(س) = ٢س + ٣، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = س$^{٢}$ − ١، حيث س ∈ ع،
فأوجد كلاًّ ممّا يأتي:

أ (د ∘ هـ)(س) ب (هـ ∘ د)(س) ج (د ∘ د)(س)

### الحــلّ:

أ (د ∘ هـ)(س) = د(هـ(س)) = د(س$^{٢}$ − ١) ........ عوّض عن هـ(س) أولًا في الدالة د(س).

= ٢(س$^{٢}$ − ١) + ٣ ........ د(س) هي الدالّة 'اضرب في ٢، ثم زد ٣'

= ٢س$^{٢}$ + ١

ب (هـ ∘ د)(س) = هـ(٢س + ٣) ........ عوّض عن د(س) أولًا في الدالة هـ(س)

= (٢س + ٣)$^{٢}$ − ١ ........ هـ(س) هي الدالّة 'رَبّع، ثم اطرح ١'

= ٤س$^{٢}$ + ١٢س + ٩ − ١

= ٤س$^{٢}$ + ١٢س + ٨

ج (د ∘ د)(س) = د(٢س + ٣) ........ د(س) هي الدالّة 'اضرب في ٢، ثم زد ٣'

= ٢(٢س + ٣) + ٣

= ٤س + ٩

## مثــال ٤

إذا علمت أن د(س) = س$^{٢}$ + ٤س، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٣س − ١، حيث س ∈ ع،

فأوجد قيم ك بحيث يكون للمعادلة (د ∘ هـ)(س) = ك حلول حقيقية.

### الحــلّ:

(د ∘ هـ)(س) = (٣س − ١)$^{٢}$ + ٤(٣س − ١) ........ فُكّ الأقواس، ثم بسِّط.

= ٩س$^{٢}$ + ٦س − ٣

عندما (د ∘ هـ)(س) = ك

٩س$^{٢}$ + ٦س − ٣ = ك ........ أعد ترتيب الحدود، ثم بسِّط.

٩س$^{٢}$ + ٦س + (⁻٣ − ك) = ٠

لتكون الحلول حقيقية، فإن: ب$^{٢}$ − ٤أ جـ ≥ ٠

٦$^{٢}$ − ٤ × ٩ × (⁻٣ − ك) ≥ ٠

١٤٤ + ٣٦ك ≥ ٠

ك ≥ ⁻٤



## تمارين ٢-٢

**١)** إذا علمت أن د(س) = س$^{٢}$ + ٦ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\sqrt{س + ٣}$ − ٢ حيث س ≥ ⁻٣،

فأوجد كلاًّ من: أ (د ∘ هـ)(٦) ب (د ∘ هـ)(٤) ج (د ∘ د)(⁻٣)

**٢)** إذا علمت أن ع: س ← س + ٥ حيث س ∈ ع، س > ٠ ، ل: س ← $\sqrt{س}$ حيث س ∈ ع، س > ٠

فعبِّر عن كل دالّة من الدوالّ الآتية (كدوال مركبة)، مستخدمًا الدالّة ع(س) أو الدالّة ل(س) أو كلتَيهما:

أ س ← $\sqrt{س}$ + ٥ ب س ← $\sqrt{س + ٥}$ ج س ← س + ١٠

**٣)** إذا علمت أن د(س) = أ س + ب حيث س ∈ ع، د(٥) = ٣، د(٣) = ⁻٣:

أ أوجد قيمة أ وقيمة ب

ب حلّ المعادلة (د ∘ د)(س) = ٤

**٤)** إذا علمت أن د: س ← ٢س + ٣، حيث س ∈ ع ، هـ: س ← $\frac{١٢}{١ - س}$ حيث، س ∈ ع، س ≠ ١

أ أوجد (هـ ∘ د)(س) إن أمكن ذلك.

ب حلّ المعادلة د(هـ(س)) = ٢ إن أمكن ذلك.

**٥)** إذا علمت أن هـ(س)= س$^{٢}$ − ٢، حيث س ∈ ع ، ل(س) = ٢س + ٥، حيث س ∈ ع.

أ أوجد (هـ ∘ ل)(س).

ب حلّ المعادلة (هـ ∘ ل)(س) = ١٤

**٦)** إذا علمت أن د(س) = س$^{٢}$ + ١ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٣}{س − ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

أ أوجد (د ∘ هـ)(س).

ب حلّ المعادلة (د ∘ هـ)(س) = ٥

**٧)** إذا علمت أن هـ(س) = $\frac{٢}{س + ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ⁻١ ، ل(س) = (س + ٢)$^{٢}$ − ٥ حيث س ∈ ع.

أ أوجد (ل ∘ هـ)(س).

ب حلّ المعادلة (ل ∘ هـ)(س) = ١١

**٨)** إذا علمت أن د : س ← $\frac{س + ١}{٢}$ حيث س ∈ ع ، هـ : س ← $\frac{٢س + ٣}{س − ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ١

حلّ المعادلة (د ∘ هـ)(س) = ١

**٩)** إذا كانت د(س) = $\frac{س + ١}{٢س + ٥}$ حيث س ∈ ع، س > ٠

فأوجد العبارة الجبرية لـ (د ∘ د)(س)، واكتب الناتج في أبسط صورة.

**١٠)** إذا علمت أن د : س ← س$^{٢}$ حيث س ∈ ع ، هـ : س ← س + ١ حيث س ∈ ع

فاكتب كلّ دالّة من الدوالّ الآتية في صورة دالّة مركّبة، مستخدمًا الدالّة د(س) أو الدالّة هـ(س) أو كلتَيهما:

أ س ← (س + ١)$^{٢}$ ب س ← س$^{٢}$ + ١ ج س ← س + ٢

د س ← س$^{٤}$ هـ س ← س$^{٢}$ + ٢س + ٢ و س ← س$^{٤}$ + ٢س$^{٢}$ + ١

**١١)** إذا علمت أن د(س) = س$^{٢}$ − ٣س حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٢س + ٥ حيث س ∈ ع.

فبيّن أن المعادلة (هـ ∘ د)(س) = ٠ ليس لها حلول حقيقية.

**١٢)** إذا علمت أن د(س) = ك − ٢س حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٢}{س}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٠

فأوجد قيم ك ليكون للمعادلة (د ∘ هـ)(س) = س حلّان حقيقيان متساويان.

**١٣)** إذا علمت أن د(س) = س$^{٢}$ − ٣س حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٢س − ٥ حيث س ∈ ع.

فأوجد قيم ك ليكون للمعادلة (هـ ∘ د)(س) = ك حلول حقيقية.

**١٤)** إذا علمت أن د(س) = $\frac{س + ٥}{٢س − ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ $\frac{١}{٢}$،

فبيّن أن (د ∘ د)(س) = س.

**١٥)** إذا علمت أن د(س) = $س^٢$ − ٥س، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٢س + ٣ حيث س ∈ ع، فأوجد:

أ (د ∘ هـ)(س).

ب مدى الدالّة (د ∘ هـ)(س).

**١٦)** ★

| | |
|---|---|
| ل(س) = $س^٢$ − ١ حيث س ∈ ع | ك(س) = س + ٢ حيث س ∈ ع |
| ع(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٠ | ي(س) = $\sqrt{س + ١}$ − ١ حيث س ∈ ع، س ⩾ ⁻١ |

تمّ تركيب الدوالّ ل (س)، ك (س)، ع (س)، ي (س) بطريقة ما لتشكيل دالّة جديدة د(س).

في كل حالة من الحالات الآتية، اكتب د(س) بدلالة كل أو مجموعة من الدوالّ ل (س)، ك (س)، ع (س)، ي (س)، وحدّد مجال كل دالّة مركّبة ومداها:

أ د(س) = $س^٢$ + ٤س + ٣

ب د(س) = $س^٢$ + ١

ج د(س) = س

د د(س) = $\frac{١}{س^٢}$ + ١

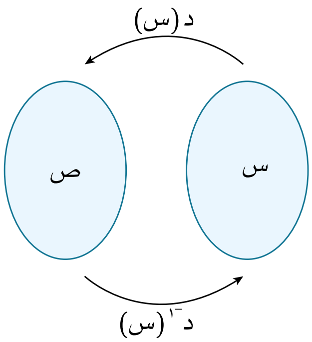
هـ د(س) = س + ٤

و د(س) = س − ٢$\sqrt{س + ١}$ + ١

## ٢-٣ الدوالّ العكسيّة

**الدالّة العكسية inverse function** للدالّة د (س) هي: الدالّة التي تعكس ما تقوم به الدالّة د (س).

نكتب الدالّة العكسية للدالّة د(س) في صورة د$^{-1}$(س).




**نتيجة ٤**

(د ∘ د$^{-1}$)(س) = (د$^{-1}$ ∘ د)(س) = س.
مجال د$^{-1}$(س) هو مدى د (س).
مدى د$^{-1}$(س) هو مجال د (س).

من المهمّ أن نتذكّر أن ليس لكلّ دالّة دالّة عكسية.

**نتيجة ٥**

توجد الدالّة العكسية د$^{-1}$(س) إذا كانت الدالّة د (س) واحدًا إلى واحد فقط.

لقد درست سابقًا كيف تجد الدالّة العكسية لبعض الدوالّ واحد إلى واحد البسيطة.

مثلًا، الدالّة العكسية للدالّة س ← ٢س − ١ هي الدالّة $\frac{س + ١}{٢}$.

لإيجاد الدالّة د$^{-1}$(س)، إذا افترضنا أن ص = د$^{-1}$(س)، فإن د(ص) = د(د$^{-1}$(س)) = س لأن د(س)، د$^{-1}$(س) دالتان عكسيّتان. وإذا افترضنا أن س = د(ص) ثم أعدنا ترتيبها، فسوف نحصل على ص = ... ويكون الجزء الأيسر هو د$^{-1}$(س).

نجد الدالّة العكسية للدالّة د(س) = ٣س − ١ باتباع الخطوات الآتية:

**الخطوة ١:** اكتب الدالّة في صورة ص = ← ص = ٣س − ١

**الخطوة ٢:** بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = ٣ص − ١

**الخطوة ٣:** أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← ص = $\frac{س + ١}{٣}$

وعليه، إذا كانت د(س) = ٣س − ١، فإن د$^{-1}$(س) = $\frac{س + ١}{٣}$.

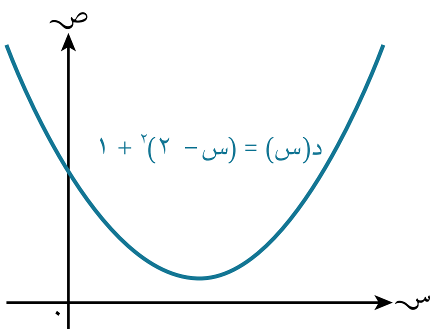
**نتيجة ٦**

إذا كانت الدالتان د(س)، د$^{-1}$(س) متساويتَين، فتُسمى الدالّة د(س) **بالدالّة العكسية لنفسها self-inverse function**.

فمثلًا: إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠، فإن د$^{-1}$(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠

وعليه، تكون د(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠ دالّة عكسية لنفسها.

## استكشف ٢




يبيّن الشكل المجاور الدالّة د(س) = (س − ٢)$^{٢}$ + ١ حيث س ∈ ع.
ناقش الأسئلة الآتية مع أقرانك في الصف:

١) ما نوع العلاقة في هذه الدالّة؟
٢) ما إحداثيات رأس منحنى الدالّة؟
٣) ما مجال الدالّة؟
٤) ما مدى الدالّة؟
٥) هل يوجد دالّة عكسية لهذه الدالّة؟
٦) إذا كان للدالّة د(س) دالّة عكسية، فما معادلتها؟ وإن لم يوجد لها دالّة عكسية، فكيف يمكن أن تغيّر مجالها ليصبح لها دالّة عكسية؟

## مثـــال ٥

إذا كانت د(س) = √(س + ٢) − ٧، حيث س ⩾ −٢

أ أوجد د$^{-١}$(س).

ب حل المعادلة د$^{-١}$(س) = د(٦٢).

### الحـــلّ:

أ د(س) = √(س + ٢) − ٧

**الخطوة ١:** اكتب الدالّة في صورة ص = ⟵ ص = √(س + ٢) − ٧

**الخطوة ٢:** بادل بين المتغيّرَين س، ص ⟵ س = √(ص + ٢) − ٧

**الخطوة ٣:** أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ⟵ س + ٧ = √(ص + ٢)

(س + ٧)$^{٢}$ = ص + ٢

ص = (س + ٧)$^{٢}$ − ٢

∴ د$^{-١}$(س) = (س + ٧)$^{٢}$ − ٢

ب د(٦٢) = √(٦٢ + ٢) − ٧ = ١

(س + ٧)$^{٢}$ − ٢ = ١ ............ اكتب المعادلة.

(س + ٧)$^{٢}$ = ٣ ............ بسّط المعادلة، وحلها.

س + ٧ = ± √٣

س = −٧ ± √٣

س = −٧ − √٣ أو س = −٧ + √٣

مدى الدالّة د(س) هو د(س) ⩾ −٧ وعليه، يكون مجال د$^{-١}$(س) هو س ⩾ −٧

∴ الحلّ الوحيد للمعادلة د$^{-١}$(س) = د(٦٢) هو س = −٧ + √٣

## مثـــال ٦

إذا كانت د(س) = ٥ − (س − ٢)$^{٢}$، حيث س ∋ ع، ك ⩽ س ⩽ ٦

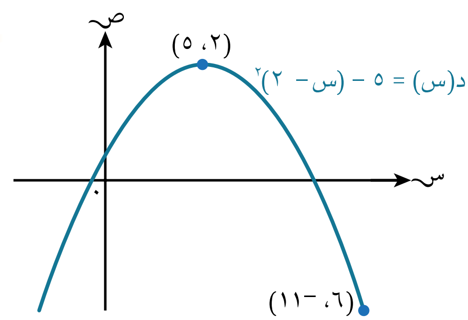
**أ** حدّد أقلّ قيمة للعدد ك عندما يوجد للدالّة د(س) دالّة عكسية.

**ب** أوجد د$^{-١}$(س)، ثم أوجد مجال ومدى الدالّة د$^{-١}$(س) مستخدمًا قيمة ك التي وجدتها في الجزئية (أ).

### الحـــلّ:

**أ** النقطة (٢، ٥) هي رأس منحنى الدالّة ص = ٥ − (س − ٢)$^{٢}$

عندما س = ٦، فإن ص = ٥ − ٤$^{٢}$ = −١١




يكون للدالّة د(س) دالّة عكسية عندما تكون دالّة واحد إلى واحد.

∴ أقلّ قيمة للثابت ك هي ٢ لأنه عندها تكون الدالّة واحد إلى واحد.

**ب** د(س) = ٥ − (س − ٢)$^{٢}$

**الخطوة ١:** اكتب الدالّة في صورة ص = ← ص = ٥ − (س − ٢)$^{٢}$

**الخطوة ٢:** بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = ٥ − (ص − ٢)$^{٢}$

**الخطوة ٣:** أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← (ص − ٢)$^{٢}$ = ٥ − س

ص − ٢ = ± $\sqrt{(٥ - س)}$

ص − ٢ = $\sqrt{٥ - س}$

ص = ٢ + $\sqrt{٥ - س}$

∴ د$^{-١}$(س) = ٢ + $\sqrt{٥ - س}$

اختر الجذر التربيعي الموجب لأن ٢ ⩽ د$^{-١}$(س) ⩽ ٦

مجال د$^{-١}$(س) يساوي مدى د(س)

∴ مجال د$^{-١}$ هو −١١ ⩽ س ⩽ ٥

مدى د$^{-١}$(س) يساوي مجال د(س)

∴ مدى د$^{-١}$(س) هو ٢ ⩽ د$^{-١}$ ⩽ ٦

## تمارين ٢-٣

**١)** أوجد $د^{-١}$(س) لكلّ دالّة من الدوالّ الآتية إن أمكن ذلك:

أ د(س) = ٥س − ٨ حيث س ∈ ع

ب د(س) = $س^{٢}$ + ٣ حيث س ∈ ع، س ⩾ ٠

ج د(س) = $(س − ٥)^{٢}$ + ٣حيث س ∈ ع، س ⩾ ٥

د د(س) = $\frac{٨}{س − ٣}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٣

هـ د(س) = $\frac{س + ٧}{س + ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≠ −٢

و د(س) = $(س − ٢)^{٣}$ − ١ حيث س ∈ ع، س ⩾ ٢

**٢)** إذا كانت د : س ← $س^{٢}$ + ٤س حيث س ∈ ع، س ⩾ −٢

أ اكتب مجال ومدى $د^{-١}$(س)

ب أوجد $د^{-١}$(س).

**٣)** إذا كانت د : س ← $\frac{٥}{٢س + ١}$ حيث س ∈ ع، س ⩾ ٢، فأوجِد:

أ $د^{-١}$(س).

ب مجال $د^{-١}$(س).

**٤)** إذا كانت د : س ← $(س + ١)^{٣}$ − ٤ حيث س ∈ ع، س ⩾ ٠، فأوجِد:

أ $د^{-١}$(س).

ب مجال $د^{-١}$(س).

**٥)** إذا كانت هـ : س ← ٢$س^{٢}$ − ٨س + ١٠ حيث س ∈ ع، س ⩾ ٣

أ وضّح سبب وجود دالّة عكسية للدالّة هـ (س).

ب أوجد $هـ^{-١}$(س).

**٦)** إذا كانت د : س ← ٢$س^{٢}$ + ١٢س − ١٤ حيث س ∈ ع، س ⩾ ك، فأوجِد:

أ أقلّ قيمة للثابت ك بحيث تكون عندها الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد.

ب $د^{-١}$(س).

**٧)** إذا كانت د : س ← $س^{٢}$ − ٦س حيث س ∈ ع.

أ أوجد مدى الدالّة د(س).

ب حدّد ما إذا كان للدالّة د دالّة عكسية أم لا، مبررًا ذلك.

**٨)** إذا كانت د(س) = ٩ − $(س − ٣)^{٢}$ حيث س ∈ ع، ك ⩽ س ⩽ ٧

أ حدّد أقلّ قيمة للثابت ك بحيث تكون الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد.

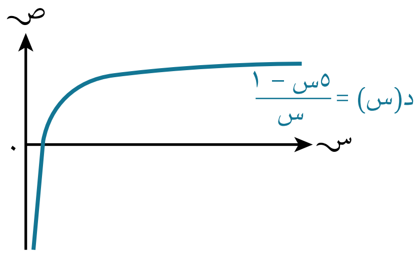
ب لقيمة ك التي وجدتها في الجزئية (أ):

١) أوجد $د^{-١}$(س).

٢) حدّد مجال الدالّة $د^{-١}$(س)، ومداها.

**٩)** يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = $د^{-١}$(س)،

حيث $د^{-١}$(س) = $\frac{٥س - ١}{س}$ لكل س ∈ ع، ٠ < س ⩽ ٣




أ أوجد د(س).

ب حدّد مجال الدالّة د(س).

**١٠)** إذا علمت أن د(س) = ٣س + أ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ب − ٥س حيث س ∈ ع،

فـأوجد قيمة كلّ من أ، ب علمًا بأن (هـ ∘ د)(−١) = ٢، $هـ^{-١}$(٧) = ١

**١١)** إذا علمت أن د(س) = ٣س − ١ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٣}{٢س - ٤}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

أ أوجد كل دالّة من الدالتَين $د^{-١}$(س)، $هـ^{-١}$(س).

ب بيّن أن للمعادلة $د^{-١}$(س) = $هـ^{-١}$(س) جذرَين حقيقيَّين.

**١٢)** إذا كانت د : س ← $(٢س - ١)^{٢}$ − ٣ حيث س ∈ ع، ١ ⩽ س ⩽ ٣، فأوجِد:

أ $د^{-١}$(س).

ب مجال $د^{-١}$(س).

**١٣)** إذا كانت د : س ← $س^{٢}$ − ١٠س حيث س ∈ ع، س ⩾ ٥

أ اكتب د(س) في صورة $(س - أ)^{٢}$ − ب

ب أوجد $د^{-١}$(س) وحدد مجال $د^{-١}$(س).

**١٤)** إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ١

أ أوجد $د^{-١}$(س).

ب بيّن أنه إذا كان د(س) = $د^{-١}$(س)، فإن $س^{٢}$ − س − ١= ٠

ج أوجد قيم س حيث د(س) = $د^{-١}$(س). اكتب إجابتك في أبسط صورة.

**١٥)** حدّد أي دالّة من الدوالّ الآتية هي دالّة عكسية لنفسها:

أ د(س) = $\frac{١}{٣ - س}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٣

ب د(س) = $\frac{٢س + ١}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

ج د(س) = $\frac{٣س + ٥}{٤س - ٣}$ حيث س ∈ ع، س ≠ $\frac{٣}{٤}$

**١٦)** إذا علمت أن د : س ← ٣س − ٥ حيث س ∈ ع ، هـ : س ← ٤ − ٢س حيث س ∈ ع

أ أوجد $(د ∘ هـ)^{-١}$(س).

ب أوجد كل دالّة من الدوالّ الآتية:

١) ($د^{-١}$ ∘ $هـ^{-١}$)(س)

٢) ($هـ^{-١}$ ∘ $د^{-١}$)(س)

ج فسّر النواتج التي حصلت عليها في الجزئية (ب). تأكد ما إذا كانت هذه النواتج صحيحة لدوالّ أخرى.

## ٢-٤ منحنى الدالّة ومنحنى دالتها العكسيّة

لتكن الدالّة المعرّفة في صورة د(س) = ٢س + ١ حيث س ∋ ع، −٤ ⩽ س ⩽ ٢

د(−٤) = −٧، د(٢) = ٥

مجال الدالّة د هو −٤ ⩽ س ⩽ ٢، ومداها هو −٧ ⩽ د(س) ⩽ ٥

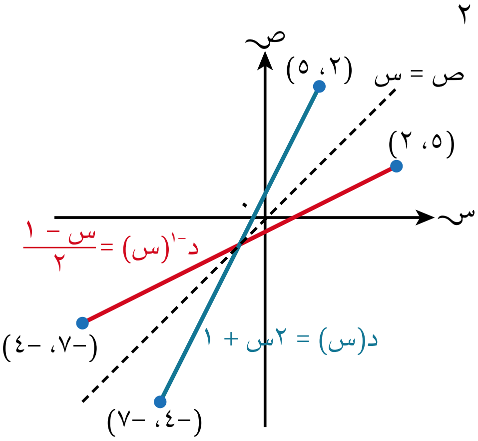
الدالّة العكسية للدالّة د(س) هي د$^{-1}$(س) = $\frac{\text{س} - ١}{٢}$

مجال الدالّة د$^{-1}$(س) هو مدى الدالّة د(س) نفسه.

أي أن مجال د$^{-1}$(س) هو −٧ ⩽ س ⩽ ٥

مدى الدالّة د$^{-1}$(س) هو مجال الدالّة د(س) نفسه.

أي أن مدى الدالّة د$^{-1}$ هو −٤ ⩽ د$^{-1}$(س) ⩽ ٢




يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للدالتَين د(س)، د$^{-1}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه.

من المهمّ أن تلاحظ أن أحد منحنيَي د(س)، د$^{-1}$(س) انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س، ويُعدّ ذلك صحيحًا لجميع الدوالّ واحد إلى واحد ودوالها العكسية.

**نتيجة ٧**

- منحنيا الدالّتَين د(س)، د$^{-1}$(س) أحدهما انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س يحصل ذلك لأن (د ∘ د$^{-1}$)(س) = س = (د$^{-1}$ ∘ د)(س).
- عندما تكون الدالّة د(س) عكسية لنفسها، يكون منحنى الدالّة د(س) متماثلًا حول المستقيم ص = س.



### مثـــال ٧

إذا كانت د(س) = (س − ١)$^{٢}$ − ٢ حيث س ∋ ع، ١ ⩽ س ⩽ ٤

ارسم منحنى د(س)، ومنحنى الدالّة د$^{-1}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه.

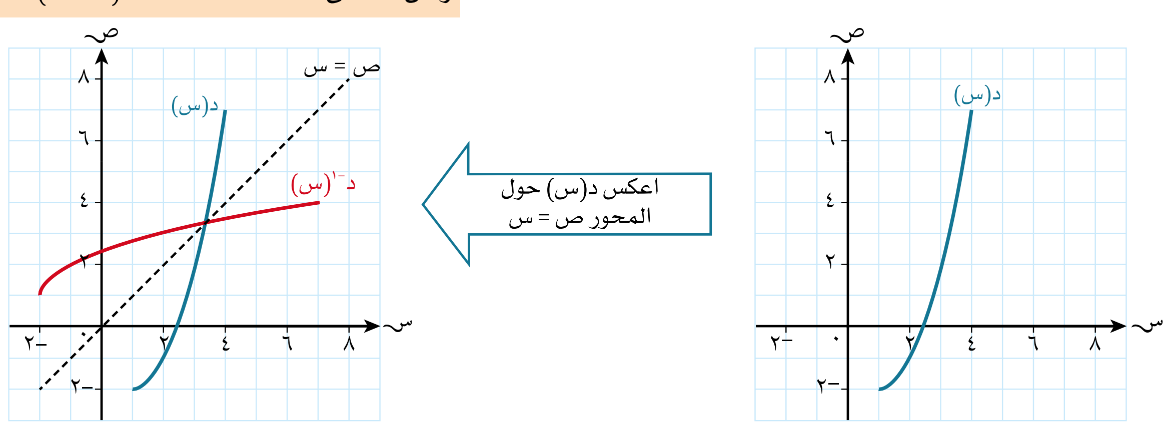
**الحــلّ:**

ص = (س − ١)$^{٢}$ − ٢

الجزء (س − ١)$^{٢}$ مربّع كامل، لذا فإنه ⩾ ٠ دائمًا. وعليه، فإن أصغر قيمة يمكن أن يصل إليها هي صفر. يحصل ذلك عندما س = ١ رأس منحنى الدالّة عند النقطة (١، −٢).

عندما س = ٤، فإن ص = ٧

الدالّة واحد إلى واحد، لذا فإن لها دالّة عكسية.



## مثـــال ٨

إذا كانت د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

أ أوجد $د^{-١}$(س).

ب ماذا تستنتج من الجزئية (أ) عن تماثل المنحنى ص = د(س)؟

**الحــلّ:**

أ د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

**الخطوة ١:** اكتب الدالّة في صورة ص = ← ص = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

**الخطوة ٢:** بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = $\frac{٢ص + ٧}{ص - ٢}$

**الخطوة ٣:** أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← س(ص − ٢) = ٢ص + ٧

س ص − ٢س = ٢ص + ٧

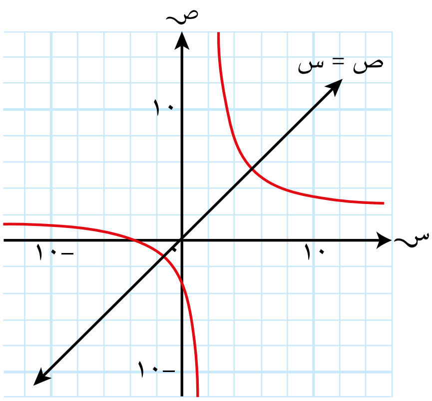
س ص − ٢ص = ٢س + ٧

ص(س − ٢) = ٢س + ٧

ص = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

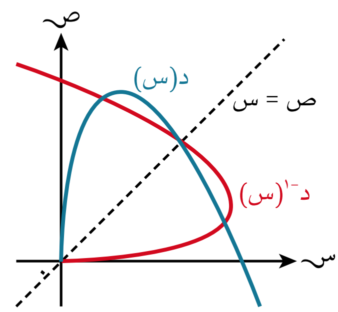
∴ $د^{-١}$(س) = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

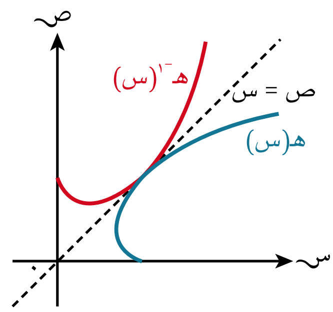
ب ∵ $د^{-١}$(س) = د(س)، فإن الدالّة عكسية لنفسها .




منحنى الدالّة متماثل حول المستقيم ص = س

## استكشف ٣




تقول شهد ما يأتي:

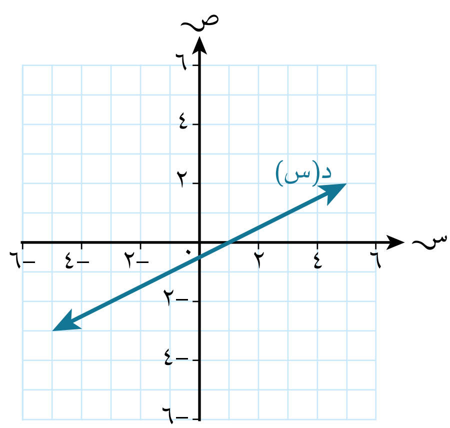
يبيّن الشكلان منحنيَي الدالّتين د(س)، هـ(س) معًا مع معكوس كل منهما د$^{-1}$(س)، هـ$^{-1}$(س)

هل ما تقوله شهد صحيح؟ اشرح إجابتك.

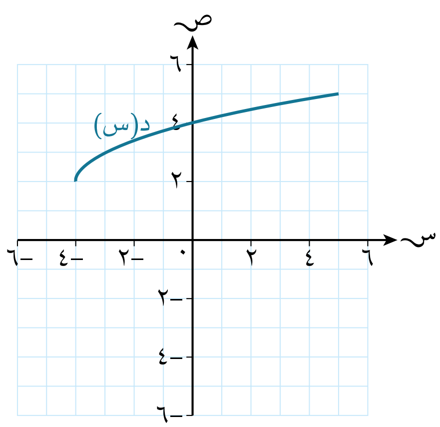
## تمارين ٢-٤

**١)** في كل حالة من الحالات الآتية، انقل الرسم إلى دفترك، وارسم منحنى د$^{-1}$(س) إن وجد:

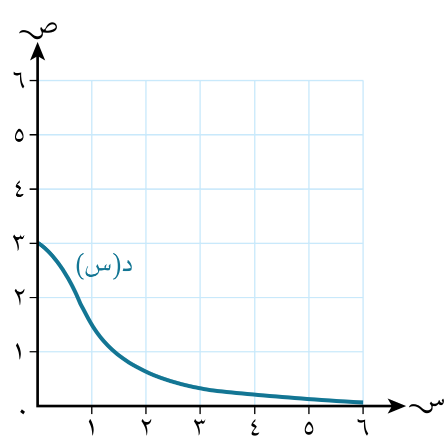
أ



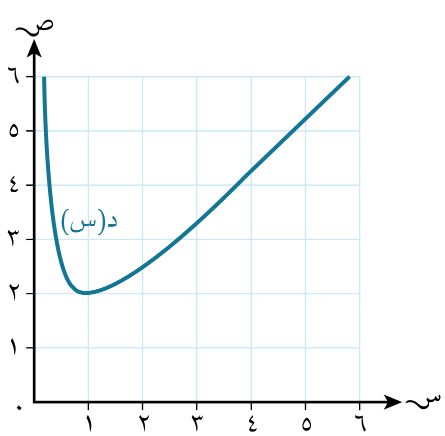

ب




ج




د



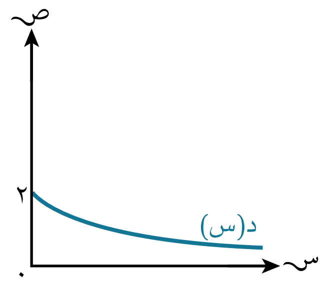
**٢)** إذا كانت د : س ← ٢س − ١، حيث س ∋ ع، −١ ⩽ س ⩽ ٣

أ أوجد $\text{د}^{-١}$(س).

ب حدّد مجال $\text{د}^{-١}$(س)، ومداها.

ج ارسم على المستوى الإحداثي نفسه منحنى ص = د(س)، ومنحنى ص = $\text{د}^{-١}$(س) موضحًا العلاقة بين المنحنيَين.

**٣)** يبيّن الشكل المجاور منحنى ص = د(س) عندما د(س) = $\frac{٤}{\text{س} + ٢}$ حيث س ∋ ع، س ⩾ ٠




أ حدّد مدى الدالّة د(س).

ب اكتب $\text{د}^{-١}$(س).

ج حدّد مجال الدالّة $\text{د}^{-١}$(س)، واكتب مداها.

د انقل الشكل إلى دفترك، وارسم منحنى ص = $\text{د}^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيَين.

**٤)** لكلّ دالّة من الدوالّ الآتية، أوجد $\text{د}^{-١}$(س)، ثم قرّر ما إذا كان منحنى ص = د (س) متماثلًا حول المستقيم ص = س أم لا:

أ د(س) = $\frac{\text{س} + ٥}{٢\text{س} - ١}$ حيث س ∋ ع، س ≠ $\frac{١}{٢}$

ب د(س) = $\frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ٥}$ حيث س ∋ ع، س ≠ ٥

ج د(س) = $\frac{٣\text{س} - ١}{٢\text{س} - ٣}$ حيث س ∋ ع، س ≠ $\frac{٣}{٢}$

د د(س) = $\frac{٤\text{س} + ٥}{٣\text{س} - ٤}$ حيث س ∋ ع، س ≠ $\frac{٤}{٣}$

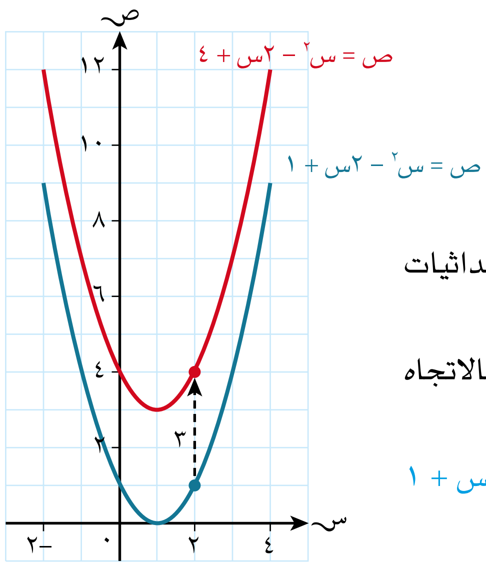
**٥)** أ إذا كانت د(س) = $\frac{\text{س} + \text{أ}}{\text{ب س} - ١}$ لكل س ∋ ع، س ≠ $\frac{١}{\text{ب}}$، حيث أ، ب ثابتان. بيّن أن الدالّة عكسية لنفسها.

ب إذا كانت د(س) = $\frac{\text{أس} + \text{ب}}{\text{جـ س} + \text{د}}$ لكل س ∋ ع، س ≠ − $\frac{\text{د}}{\text{جـ}}$، حيث أ، ب، جـ، د ثوابت، فأوجد الشرط لتكون الدالّة د(س) عكسية لنفسها.

## ٢-٥ التحويلات الهندسيّة للدوالّ

تعلّمت سابقًا، في الصف التاسع، العديد من التحويلات الهندسيّة المختلفة التي يمكن تطبيقها على الأشكال ثنائية الأبعاد، وتتضمّن الانسحاب، والانعكاس، والدوران، والتكبير.
في هذا الدرس، سوف تتعلّم كيف تستخدم الانسحاب والانعكاس والتمدّد (وتركيبات من هذه التحويلات الهندسية) على منحنى الدالّة.

### ٢-٥أ الانسحاب




يبيّن الشكل المجاور منحنيَي دالّتَين تختلفان فقط في قيمة الثابت.

ص = س$^{٢}$ − ٢س + ١

ص = س$^{٢}$ − ٢س + ٤

عندما تتساوى الإحداثيات السينية للمنحنيَين (س = س)، تختلف الإحداثيات الصادية بمقدار ٣ أي أن (ص = ص + ٣).

هذا يعني أن للمنحنيَين الشكل نفسه، لكنهما متباعدان بمقدار ٣ وحدات بالاتجاه الموجب لمحور الصادات.

وعليه، يمثّل المنحنى ص = س$^{٢}$ − ٢س + ٤ انسحابًا للمنحنى ص = س$^{٢}$ − ٢س + ١ بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٣\end{pmatrix}$.



**نتيجة ٨**

منحنى الدالّة ص = د(س) + ب هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\ب\end{pmatrix}$.

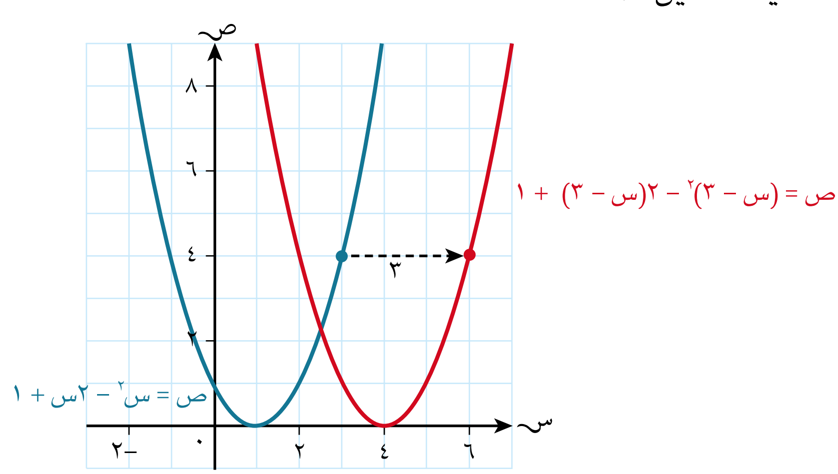
الآن اعتمد الدالّتَين:

ص = س$^{٢}$ − ٢س + ١

ص = (س − ٣)$^{٢}$ − ٢(س − ٣) + ١

نحصل على الدالّة الثانية باستبدال س بـ (س − ٣) في الدالّة الأولى.

منحنيا الدالّتَين هما:



للمنحنيَين شكل واحد لكنهما متباعدان بمقدار ٣ وحدات باتجاه المحور السيني الموجب.
قد تستغرب أن المنحنى تحرّك باتجاه المحور السيني الموجب. لاحظ طريقة الحصول على ص = ص باستبدال س بـ (س − ٣) أو بصورة مكافئة س = س + ٣: هذا يعني أن للمنحنيَين الإحداثي الصادي نفسه (ص = ص) عندما يكون المنحنى الأحمر إلى يمين المنحنى الأزرق بمقدار ٣ وحدات.

لذا فإن المنحنى ص = (س − ٣)$^{٢}$ − ٢(س − ٣) + ١ هو انسحاب للمنحنى ص = س$^{٢}$ − ٢س + ١ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

**نتيجة ٩**

منحنى الدالّة ص = د(س − أ) هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} أ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

دمج النتيجتَين أعلاه يعطي:

**نتيجة ١٠**

منحنى الدالّة ص = د(س − أ) + ب هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$.

## مثال ٩

تمّ سحب منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ + ٥س وحدتَين إلى اليمين. أوجد معادلة منحنى الدالّة بعد الانسحاب، واكتب المعادلة في صورة ص = أس$^{٢}$ + ب س + جـ

### الحـــلّ:

ص = س$^{٢}$ + ٥س ........ استبدل كلّ س بـ (س − ٢).

ص = (س − ٢)$^{٢}$ + ٥(س − ٢) ........ فُكّ، وبسِّط.

ص = س$^{٢}$ + س − ٦



## مثال ١٠

تمّ سحب منحنى الدالّة ص = $\sqrt{٢س}$ بالمتجه $\begin{pmatrix} -٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$. أوجد معادلة منحنى الدالّة الناتج.

### الحـــلّ:

ص = $\sqrt{٢س}$ ........ استبدل س بـ (س + ٥)، ثم أضف ٣ على الدالّة الناتجة.

ص = $\sqrt{٢(س + ٥)}$ + ٣

ص = $\sqrt{٢س + ١٠}$ + ٣

## تمارين ٢-٥أ

**١)** أوجد معادلة كلٍّ مما يأتي بعد إجراء التحويل الهندسيّ المطلوب:

أ $ص = ٢س^{٢}$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \end{pmatrix}$

ب $ص = ٥\sqrt{س}$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٢ \end{pmatrix}$

ج $ص = ٧س^{٢} - ٢س$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$

د $ص = س^{٢} - ١$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \end{pmatrix}$

هـ $ص = \frac{٢}{س}$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$

و $ص = \frac{س}{س + ١}$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

ز $ص = س^{٢} + س$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

ح $ص = ٣س^{٢} - ٢$ بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

**٢)** أوجد متجه الانسحاب الذي يحوّل منحنى الدالّة الأولى إلى منحنى الدالّة الثاني في كل حالة من الحالات الآتية:

أ $ص = س^{٢} + ٥س - ٢$ إلى $ص = س^{٢} + ٥س + ٢$

ب $ص = س^{٣} + ٢س^{٢} + ١$ إلى $ص = س^{٣} + ٢س^{٢} - ٤$

ج $ص = س^{٢} - ٣س$ إلى $ص = (س + ١)^{٢} - ٣(س + ١)$

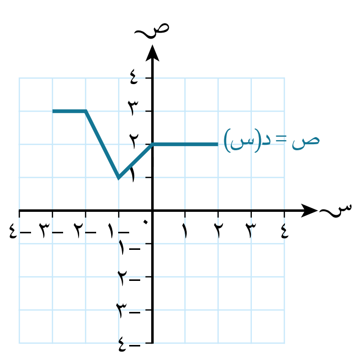
د $ص = س + \frac{٦}{س}$ إلى $ص = س - ٢ + \frac{٦}{س - ٢}$

هـ $ص = \sqrt{٢س + ٥}$ إلى $ص = \sqrt{٢س + ٣}$

و $ص = \frac{٥}{س^{٢}} - ٣س$ إلى $ص = \frac{٥}{(س - ٢)^{٢}} - ٣س + ١٠$

**٣)** يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د(س).

ارسم منحنى كل دالّة من الدوالّ الآتية:




أ $ص = د(س) - ٤$

ب $ص = د(س - ٢)$

ج $ص = د(س + ١) - ٥$

**٤)** **أ** ارسم التمثيل البياني للدالّتَين ص = ٢س، ص = ٢س + ٢ على المستوى الإحداثي نفسه.

**ب** يمكن سحب المستقيم ص = ٢س إلى ص = ٢س + ٢ بإجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ أ \end{pmatrix}$. أوجد قيمة أ.

**ج** يمكن سحب المستقيم ص = ٢س إلى ص = ٢س + ٢ بإجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ب \\ ٠ \end{pmatrix}$. أوجد قيمة ب.

**٥)** إذا كانت ص = (س + ٣) (س − ٢) (س − ٥)، فاكتب معادلتها 'بصورة مشابهة' بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

**٦)** تمّ سحب منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٤ س + ١ بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$.

اكتب معادلة المنحنى الناتج في صورة ص = أس$^{٢}$ + ب س + جـ.

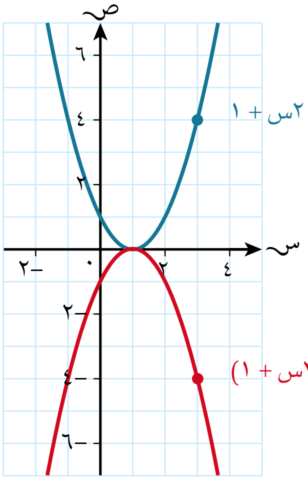
★ **٧)** تمّ سحب منحنى الدالّة ص = أس$^{٢}$ + ب س + جـ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٥ \end{pmatrix}$، فكانت معادلة المنحنى الناتج هي ص = ٢س$^{٢}$ − ١١س + ١٠. أوجد قيمة كلٍّ من: أ، ب، جـ

## ٢-٥ب الانعكاس

يبيّن الشكل المجاور منحنيَي الدالّتَين:

ص = س$^{٢}$ − ٢س + ١

ص = −(س$^{٢}$ − ٢س + ١)




عندما تكون الإحداثيات السينية على المنحنيَين متساوية (س = س)، فإن الإحداثيات الصادية لأحدهما هي معكوس الإحداثي الصادي للآخر (ص = − ص). فمثلًا في المنحنى الأزرق، الإحداثي الصادي يساوي ٤ أي أنه في المنحنى الأحمر الإحداثي الصادي يساوي سالب هذا العدد، أي (−٤).

هذا يعني أنه عندما تكون الإحداثيات السينية متساوية، فإن المنحنى الأحمر يكون على البعد الرأسي نفسه أي من المحور السيني كما هي الحال في المنحنى الأزرق، ولكن إلى الجهة المقابلة للمحور السيني.

وعليه، فإن منحنى الدالّة ص = −(س$^{٢}$ − ٢س + ١) هو انعكاس لمنحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٢س + ١ حول المحور السيني.

**نتيجة ١١**

منحنى الدالّة ص = − د(س) هو انعكاس لمنحنى الدالّة ص = د(س) حول المحور السيني.



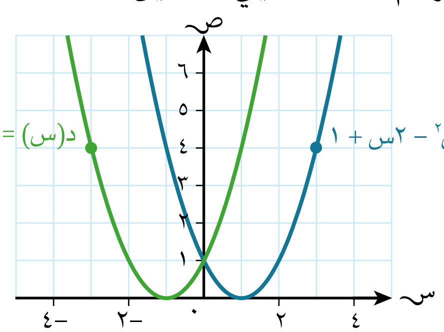
والآن إليك الدالّتَين:

د(س) = س$^{٢}$ − ٢س + ١

د(س) = (−س)$^{٢}$ − ٢(−س) + ١

نحصل على الدالّة الثانية باستبدال س بـ (−س) في الدالّة الأولى.

يوضح الرسم أدناه منحنيَي الدالّتَين:




للمنحنيان الإحداثي الصادي نفسه عندما يكون الإحداثي السيني هو س أو −س

هذا يعني أن الإحداثي الصادي للمنحنيَين هو نفسه عندما يكون المنحنى الأخضر على المسافة الأفقية نفسها من المحور الصادي كما هي الحال للمنحنى، ولكن في الجهة المقابلة من المحور الصادي.

وعليه، فإن منحنى د(س) = (−س)$^{٢}$ − ٢(−س) + ١ هو انعكاس لمنحنى د(س) = س$^{٢}$ − ٢س + ١ حول المحور الصادي.

**نتيجة ١٢**

منحنى الدالّة ص = د(−س) هو انعكاس لمنحنى الدالّة ص = د(س) حول المحور الصادي.

## مثــال ١١

لمنحنى الدالّة التربيعية ص = د(س) قيمة صغرى عند النقطة (٥، −٧). أوجد إحداثيات رأس المنحنى، وحدّد ما إذا كانت لمنحنى كل دالّة من الدوالّ الآتية نقطة عظمى أو نقطة صغرى:

أ ص = −د(س)　　　　ب ص = د(−س)

**الحــلّ:**

أ منحنى ص = −د(س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور السيني.
نقطة التحوّل هي (٥، ٧)، أي إنها النقطة العظمى.

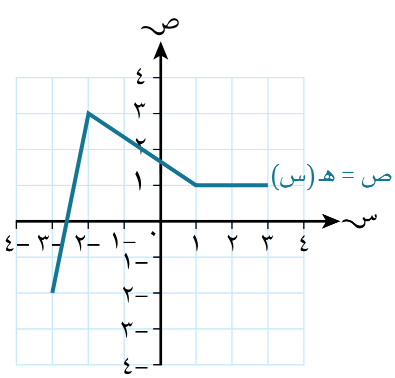
استبدل الإحداثي الصادي للنقطة بمعكوسه.

ب منحنى ص = د(−س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور الصادي.
نقطة التحوّل هي (−٥، −٧)، أي إنها النقطة الصغرى.

استبدل الإحداثي السيني للنقطة بمعكوسه.

## تمارين ٢-٥ب






**١)** يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = هـ(س).
ارسم منحنى كل دالّة من الدالتَين الآتيتَين:

أ ص = −هـ(س).　　　　ب ص = هـ(−س).

**٢)** أوجد معادلة كل دالّة من الدوالّ الآتية بعد إجراء التحويل الهندسي المُعطى:

أ ص = ٥س$^{٢}$ بعد إجراء انعكاس حول المحور السيني.

ب ص = ٢س$^{٤}$ بعد إجراء انعكاس حول المحور الصادي.

ج ص = ٢س$^{٢}$ − ٣س + ١ بعد إجراء انعكاس حول المحور الصادي.

د ص = ٥ + ٢س − ٣س$^{٢}$ بعد إجراء انعكاس حول المحور السيني.

**٣)** أوجد التحويل الهندسي الذي يحول الدالّة الأولى إلى الدالّة الثانية في كل حالة من الحالات الآتية:

أ ص = س$^{٢}$ + ٧س − ٣　　إلى　　ص = −س$^{٢}$ − ٧س + ٣

ب ص = س$^{٢}$ − ٣س + ٤　　إلى　　ص = س$^{٢}$ + ٣س + ٤

ج ص = ٢س − ٥س$^{٢}$　　إلى　　ص = ٥س$^{٢}$ − ٢س

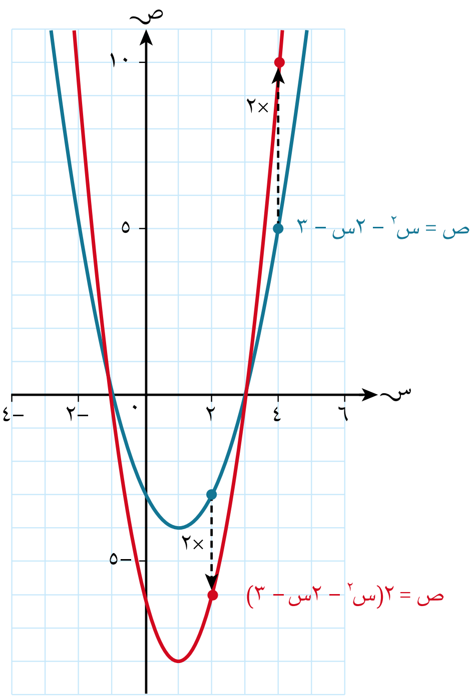
د ص = س$^{٣}$ + ٢س$^{٢}$ − ٣س + ١　　إلى　　ص = −س$^{٣}$ − ٢س$^{٢}$ + ٣س − ١

## ٢-٥ج التمدّد

يبيّن الشكل المجاور منحنيَي الدالّتَين:

ص = س٢ − ٢س − ٣

ص = ٢(س٢ − ٢س − ٣)




عندما يكون الإحداثي السيني على المنحنيَين هو نفسه (س = س)، ويكون الإحداثي الصادي على المنحنى الأحمر ضعف الإحداثي الصادي على المنحنى الأزرق (ص = ٢ص)، أي عندما يكون الإحداثيان السينيان متساويَين يكون بُعد المنحنى الأحمر ضعف بُعد المنحنى الأزرق عن المحور السيني.

وعليه، يكون منحنى ص = ٢(س٢ − ٢س − ٣) تمدّدًا لمنحنى ص = س٢ − ٢س − ٣ من المحور السيني، ونقول إنه تمدّد بمعامل مقداره ٢ موازيًا للمحور الصادي. يكون التمدد رأسيًّا إذا كان المنحنيان أحدهما فوق الآخر. ولتحديد قيمة معامل التمدد، نجد المسافة الرأسية بين المحور السيني والمنحنى الأول (الأزرق)، ثم المسافة الرأسية بين المحور السيني والمنحنى الثاني (الأحمر)، ثم نقسم المسافتَين إحداهما على الأخرى.

ملاحظة: ثمة طرائق بديلة للتعبير عن هذا التحويل:

- تمدّد معامله ٢ مع المستقيم ص = ٠
- تمدّد معامله ٢ مع المحور السيني.
- تمدّد معامله ٢ بالنسبة إلى المحور السيني.
- تمدّد رأسي معامله ٢ بعيدًا عن المحور السيني.

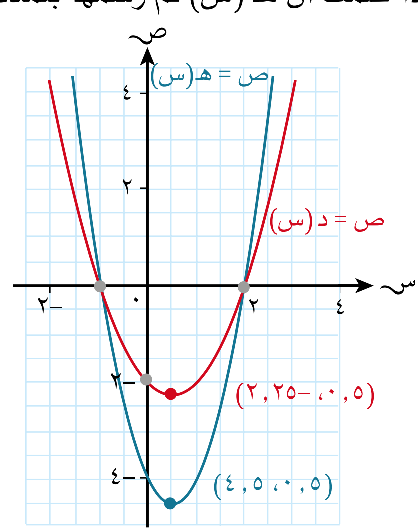


### مثال ١٢

يمثّل المنحنيان أدناه الدالّتَين ص = د(س)، ص = هـ(س).

**أ** أوجِد معادلة د(س).

**ب** إذا علمت أن هـ(س) تمّ رسمها بتمدد د(س)، فأوجِد معادلة هـ(س).



## الحــلّ:

**أ** تبدو د(س) على هيئة دالّة تربيعية. تمرّ بالمستقيمَين س = −١، س = ٢، لذا نعلم أن (س + ١)، (س − ٢) عاملان.

عند إيجاد ناتج ضرب العاملَين، نحصل على س$^{٢}$ − س − ٢ الذي يقطع المحور الصادي في −٢ كما هو مبيّن في المنحنى.

يعطي الإكمال إلى مربع الناتج (س − $\frac{١}{٢}$)$^{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ − ٢ والتي تعطي إحداثيات النقطة الصغرى ($\frac{١}{٢}$، −$\frac{٩}{٤}$) التي تعرض أيضًا على المنحنى.

وعليه، يظهر أن معادلة المنحنى هي د(س) = س$^{٢}$ − س − ٢

**ب** يقطع المنحنيان المحور السيني في النقطتَين نفسَيهما. ∴ هذا تمدد في الاتجاه الصادي.

تقع القيمة الصغرى لمنحنى هـ(س) على مسافة تساوي ضعف المسافة التي تقع فيها النقطة الصغرى للدالّة د(س)، أي أن معامل التمدد يساوي ٢

∴ هـ (س) = ٢د(س) = ٢س$^{٢}$ − ٢س − ٤

### نتيجة ١٣

منحنى الدالّة ص = أ د(س) هو تمدّد لمنحنى الدالّة ص = د(س) بمعامل تمدّد مقداره (أ) موازيًا للمحور الصادي.



**ملاحظة: إذا كان أ < ٠، فإن ص = أد(س) يُعدّ تمدّدًا لـ ص = د(س) بمعامل سالب أو تمدّد معامله موجب، متبوعًا بانعكاس حول المحور السيني.**

الآن إليك الدالّتَين الآتيتَين:

ص = س$^{٢}$ − ٢س − ٣

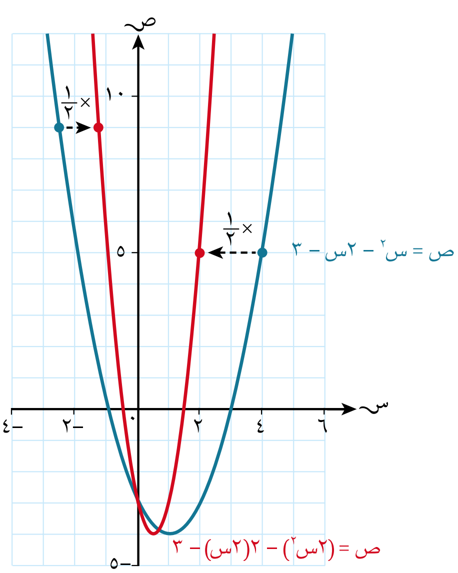
ص = (٢س)$^{٢}$ − ٢(٢س) − ٣

نحصل على الدالّة الثانية باستبدال س بـ (٢س) في الدالّة الأولى.

للدالّتَين الإحداثي الصادي نفسه (ص = ص) عندما س = ٢س أو س = $\frac{١}{٢}$ س.

هذا يعني أن الإحداثي الصادي للمنحنيَين هو نفسه عندما تكون إزاحة المنحنى الأحمر نصف الإزاحة الأفقية للمنحنى الأزرق من المحور الصادي.

وعليه، يمثّل منحنى ص = (٢س)$^{٢}$ − ٢(٢س) − ٣ تمدّدًا لمنحنى ص = س$^{٢}$ − ٢س − ٣ من المحور الصادي. نقول إنه تمدّد بمعامل تمدّد مقداره $\frac{١}{٢}$ موازيًا للمحور السيني إذا تم تمدّده أفقيًا.




### نتيجة ١٤

منحنى الدالّة ص = د(أس) هو تمدّد لمنحنى الدالّة ص = د(س) معامله ($\frac{١}{أ}$) وموازٍ للمحور السيني.

## مثــال ١٣

تمّ تمديد منحنى الدالّة ص = ٥ − $\frac{١}{٢}$ س$^{٢}$ بتمدّد معامله ٤ موازيًا للمحور الصادي. اكتب معادلة المنحنى الناتج.

**الحــلّ:**

لتكن ص = ٥ − $\frac{١}{٢}$ س$^{٢}$ ........ يعطي التمدّد الموازي للمحور الصادي بمعامل ٤ الدالّة ٤ص.

٤ص = ٢٠ − ٢س$^{٢}$

معادلة المنحنى الناتج هي: ص = ٢٠ − ٢س$^{٢}$

## مثــال ١٤

صِف التحويل الوحيد الذي يحوّل منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ − ٣س − ٥ إلى المنحنى ص = ٤س$^{٢}$ − ٦س − ٥

**الحــلّ:**

لتكن د(س) = س$^{٢}$ − ٣س − ٥ ........ اكتب ٤س$^{٢}$ − ٦س − ٥ بدلالة د(س).

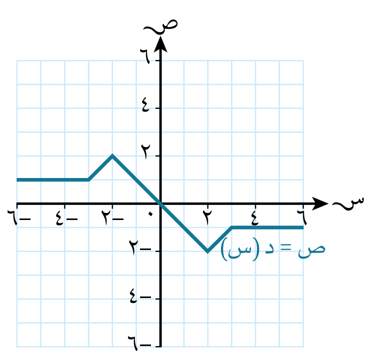
٤س$^{٢}$ − ٦س − ٥ = (٢س)$^{٢}$ − ٣(٢س) − ٥

= د(٢س)

التحويل هو: تمدّد معامله $\frac{١}{٢}$ وموازٍ للمحور السيني.



## تمارين ٢-٥ج




**١)** يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د(س).
ارسم منحنى كل دالّة من الدالّتَين الآتيتَين:

أ ص = ٣ د(س). ب ص = د(٢س).

**٢)** أوجد صورة كل دالّة من الدوالّ الآتية بعد إجراء التحويل المعطى:

أ ص = ٣س$^{٢}$ بعد تمدّد موازٍ للمحور الصادي معامله ٢

ب ص= س$^{٣}$ − ١ بعد تمدّد موازٍ للمحور الصادي معامله ٣

ج ص = ٢$^{س}$ + ٤ بعد تمدّد موازٍ للمحور الصادي معامله $\frac{١}{٢}$

د ص = ٢س$^{٢}$ − ٨ س + ١٠ بعد تمدّد موازٍ للمحور السيني معامله ٢

هـ ص = ٦س$^{٣}$ − ٣٦س بعد تمدّد موازٍ للمحور السيني معامله $\frac{١}{٣}$

**٣)** في كل حالة من الحالات الآتية، صِف التحويل الذي يحوّل المنحنى الأول إلى المنحنى الثاني:

أ ص = س$^{٢}$ + ٢س − ٥ إلى ص = ٤س$^{٢}$ + ٤س − ٥

ب ص = س$^{٢}$ − ٣س + ٢ إلى ص = ٣س$^{٢}$ − ٩س + ٦

ج ص = ٢$^{س}$ + ١ إلى ص = ٢$^{س+١}$ + ٢

د ص = $\sqrt{\text{س} - ٦}$ إلى ص = $\sqrt{٣\text{س} - ٦}$

## ٦-٢ تركيب التحويلات الهندسيّة

سوف تتعلّم في هذا الدرس كيف تطبّق تركيب تحويلات هندسية بسيطة.

يمكن تصنيف التحويلات الهندسية لمنحنى ص = د(س) التي درستها حتى الآن كتحويلات رأسية أو أفقية(حيث أ ∈ ع).

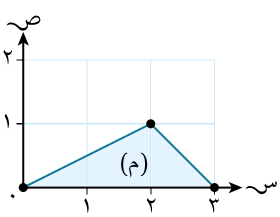
| التحويلات الهندسية الرأسية | |
|---|---|
| ص = د(س) + أ | انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ أ \end{pmatrix}$ |
| ص = − د(س) | انعكاس حول المحور السيني |
| ص = أ د(س) | تمدّد رأسي معامله أ |

| التحويلات الهندسية الأفقية | |
|---|---|
| ص = د(س + أ) | انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -أ \\ ٠ \end{pmatrix}$ |
| ص = د(−س) | انعكاس حول المحور الصادي |
| ص = د(أس) | تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{أ}$، أ ≠ ٠ |

عند تطبيق تركيب التحويلات الهندسيّة، يجب الانتباه إلى ترتيب إجراء هذه التحويلات.

### استكشف ٤

أجرِ التحويلات الهندسيّة على المثلث (م) بالترتيب المعطى، ووضّح فيما إذا كانت الصورة النهائية هي نفسها الصورة الأصلية، أو أنها تختلف عنها.




١) **تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين:**

أ ١) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$، ثم تمدّد رأسي بمعامل $\frac{١}{٢}$

٢) تمدّد رأسي بمعامل $\frac{١}{٢}$، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$.

ب حاول مع أزواج أخرى من التحويلات الهندسيّة الرأسية.

٢) **تركيب تحويلَين هندسيَّين أحدهما رأسي والآخر أفقي:**

أ ١) انعكاس حول المحور السيني، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

٢) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$، ثم انعكاس حول المحور السيني.

ب حاول مع أزواج أخرى من التحويلات الهندسيّة، حيث أحدهما رأسي والآخر أفقي.

٣) **تركيب تحويلَين هندسيَّين أفقيَّين:**

أ ١) تمدّد أفقي معامله ٢ ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

٢) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$، ثم تمدّد أفقي معامله ٢

ب حاول مع أزواج أخرى من التحويلات الهندسيّة الأفقية.

ستجد من النشاط في فقرة 'استكشف ٤' أن:

**نتيجة ١٥**

- عند تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين أو أفقيَّين، فإن ترتيب إجرائهما قد يؤثّر على الناتج.
- عند تركيب تحويلَين هندسيَّين أحدهما أفقي والآخر رأسي، فإن ترتيب إجرائهما لا يؤثّر على الناتج.

## تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين

لتحويل منحنى الدالّة ص = د(س) إلى منحنى الدالّة ص = أ د(س) + ك

نتّبع المخطّط الآتي:

د(س) ← [تمدّد رأسي معامله أ / اضرب الدالّة في أ] ← أ د(س) ← [انسحاب بالمتجه $\binom{\cdot}{ك}$ / أضف ك إلى الدالّة] ← أ د(س) + ك

يؤدّي ذلك إلى النتيجة المهمّة الآتية:

**نتيجة ١٦**

تتبع التحويلات الهندسيّة الرأسية ترتيب العمليات الحسابية نفسه.

## تركيب تحويلَين هندسيَّين أفقيَّين

لتحويل منحنى الدالّة ص = د(س) إلى منحنى الدالّة ص = د(ب س + جـ). نتّبع المخطط الآتي:

د(س) ← [انسحاب بالمتجه $\binom{-جـ}{\cdot}$ / استبدل س بـ (س + جـ)] ← د(س + جـ) ← [تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{ب}$ / استبدل س بـ (ب س)] ← د(ب س + جـ)

يؤدّي ذلك إلى النتيجة المهمّة الآتية:

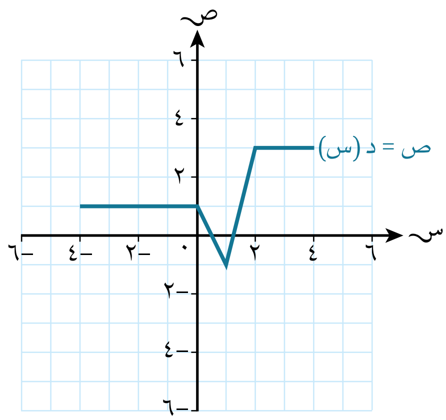
**نتيجة ١٧**

تتبع التحويلات الهندسيّة الأفقية الترتيب المعاكس لترتيب العمليات الحسابية.

## مثــال ١٥

يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د(س).

ارسم منحنى الدالّة ص = ٢د(س) − ٣



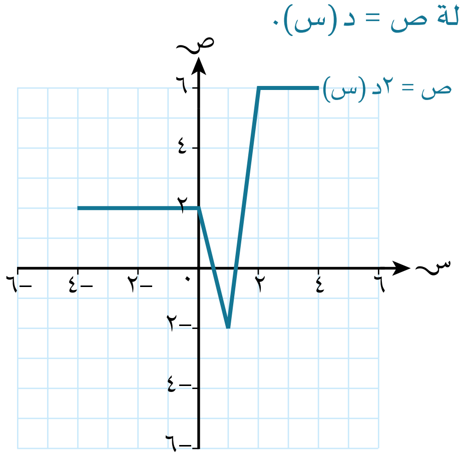

### الحــلّ:

ص = ٢د(س) − ٣ هو تركيب لتحويلَين هندسيَّين رأسيَّين لمنحنى الدالّة ص = د(س).

وعليه، تتبع التحويلات الهندسيّة ترتيب العمليات الحسابية نفسه.

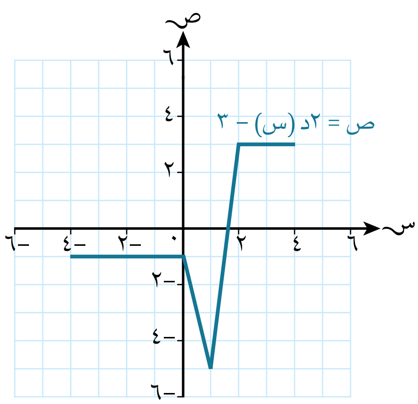
**الخطوة ١:** ارسم منحنى ص = ٢د(س).

مدّد منحنى الدالّة ص = د(س) رأسيًا بمعامل مقداره ٢



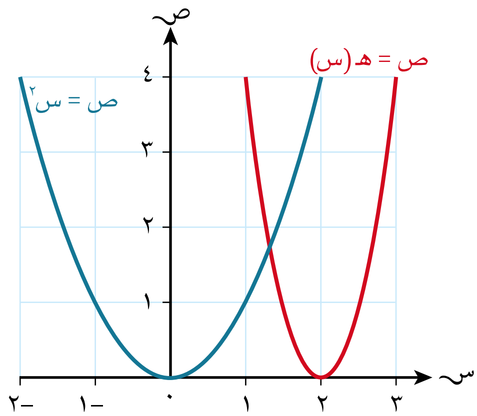

**الخطوة ٢:** ارسم منحنى ص = ٢د(س) − ٣

اسحب ص = ٢د(س) بالمتجه $\binom{٠}{-٣}$.



## مثــال ١٦

يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = $س^{٢}$، وصورته ص = هـ(س) بعد إجراء تركيب من التحويلات الهندسيّة.

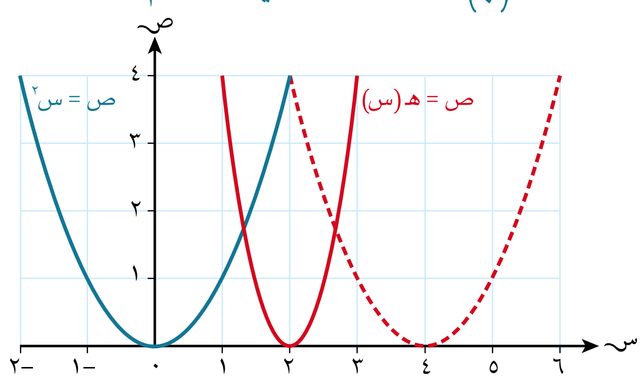



**أ** أوجد طريقتَين مختلفتَين لتصف تركيب التحويلات الهندسيّة.

**ب** اكتب المعادلة التي تمثّل منحنى الدالّة ص = هـ(س).

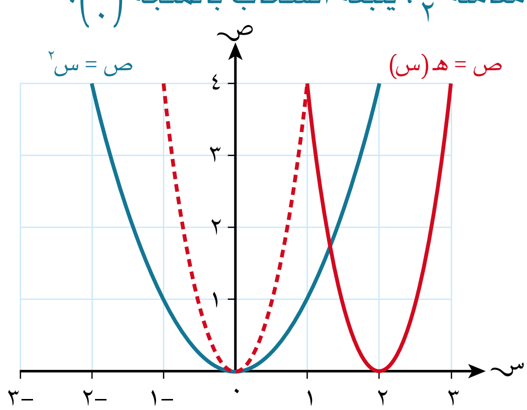
## الحــلّ:

**أ** انسحاب بالمتجه $\binom{٤}{٠}$، يتبعه تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{٢}$




أو

تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{٢}$، يتبعه انسحاب بالمتجه $\binom{٢}{٠}$.




**ب** باستخدام التركيب الأول للتحويلات الهندسيّة:

انسحاب بالمتجه $\binom{٤}{٠}$ يعني استبدال س بـ (س − ٤)

ص = $س^{٢}$ تصبح ص = $(س − ٤)^{٢}$

تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{٢}$ يعني استبدال س بـ (٢س)

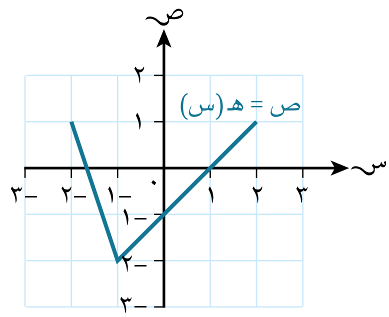
ص = $(س − ٤)^{٢}$ تصبح ص = $(٢س − ٤)^{٢}$

∴ هـ(س) = $(٢س − ٤)^{٢}$

**مُساعَدة**

نحصل على الإجابة نفسها عند استخدام التركيب الثاني من التحويلات الهندسيّة. يمكنك أن تتحقق من ذلك بنفسك.

## تمارين ٢-٦




**١)** يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = هـ(س).
ارسم منحنى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ ص = هـ(س + ٢) + ٣  ب ص = ٢هـ(س) + ١

ج ص = ٢ − هـ(س)  د ص = ٢هـ(−س) + ١

هـ ص = −٢هـ(س) − ١  و ص = هـ(٢س) + ٣

ز ص = هـ(٢س − ٦)  ح ص = هـ(−س + ١)

**٢)** إذا كان ص = س$^{٢}$، فأوجد صورة منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ بعد كل تركيب من التحويلات الهندسيّة الآتية:

أ تمدّد رأسي معامله ٣ يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}١\\٠\end{pmatrix}$.

ب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}١\\٠\end{pmatrix}$ يتبعه تمدّد رأسي معامله ٣

**٣)** أوجد معادلة صورة منحنى الدالّة ص = س$^{٢}$ بعد كل تركيب من التحويلات الهندسيّة الآتية، وارسم المنحنى الناتج في كل حالة:

أ تمدّد أفقي معامله ٢ يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٥\\٠\end{pmatrix}$.

ب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٥\\٠\end{pmatrix}$ يتبعه تمدّد أفقي معامله ٢

ج مثّل على المستوى الإحداثي نفسه ص = س$^{٢}$، وما حصلت عليه في الجُزئيَّتَين (أ)، (ب).

**٤)** إذا علمت أن د(س) = س$^{٢}$ + ١، فأوجد صورة ص = د(س) بعد كل تركيب من التحويلات الهندسيّة الآتية:

أ انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\-٥\end{pmatrix}$ يتبعه تمدّد موازٍ للمحور الصادي معامله ٢

ب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٢\\٠\end{pmatrix}$ يتبعه انعكاس حول المحور السيني.

**٥)** أ انعكاس منحنى الدالّة ص = هـ (س) حول المحور الصادي، ثم يتبعه تمدّد معامله ٢ موازيًا للمحور الصادي. اكتب معادلة المنحنى الناتج.

ب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٢\\-٣\end{pmatrix}$، ثم انعكاس حول المحور السيني. اكتب معادلة المنحنى الناتج.

**٦)** حدّد تركيب التحويلات الهندسيّة الذي يحوّل ص = د(س) إلى كل دالّة من الدوالّ الآتية:

أ ص = $\frac{١}{٢}$ د(س) + ٣

ب ص= −د(س) + ٢

ج ص = د(٢س − ٦)

د ص= ٢د(س) − ٨

**٧)** حدّد تركيب التحويلات الهندسيّة الذي يحوّل:

أ منحنى الدالّة ص = س$^{٣}$ إلى منحنى الدالّة ص = $\frac{١}{٢}$(س + ٥)$^{٣}$

ب منحنى الدالّة ص = س$^{٣}$ إلى منحنى الدالّة ص = −$\frac{١}{٢}$(س + ١)$^{٣}$ − ٢

ج منحنى الدالّة ص = $\sqrt[٣]{س}$ إلى منحنى الدالّة ص = −٢ $\sqrt[٣]{س - ٣}$ + ٤

**٨)** إذا علمت أن الدالّة د(س) = $\sqrt{س}$ فاكتب معادلة في صورة د(س) في كل حالة من الحالات الآتية بعد إجراء:

أ انعكاس حول المحور السيني، يتبعه انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{٣}$، ثم يتبعه انسحاب بالمتجه $\binom{١}{٠}$، ثم تمدّد موازٍ للمحور السيني معامله ٢

ب انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{٣}$، يتبعه تمدّد موازٍ للمحور السيني معامله ٢، ثم يتبعه انعكاس حول المحور السيني، ثم انسحاب بالمتجه $\binom{١}{٠}$.

**٩)** إذا علمت أن الدالّة هـ(س) = س$^{٢}$، فاكتب معادلة صورة هـ(س) بعد إجراء:

أ انسحاب بالمتجه $\binom{-٤}{٠}$، ثم يتبعه انعكاس حول المحور الصادي، ثم يتبعه انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{٢}$، ثم يتبعه تمدّد مواز للمحور الصادي معامله ٣

ب تمدّد مواز للمحور الصادي معامله ٣، يتبعه انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{٢}$، ثم يتبعه انعكاس حول المحور الصادي، ثم يتبعه انسحاب بالمتجه $\binom{-٤}{٠}$.

★ **١٠)** أوجد طريقتَين مختلفتَين لوصف تركيب التحويلات الهندسيّة التي تحوّل منحنى الدالّة د (س) = $\sqrt{س}$ إلى منحنى الدالّة هـ (س) = $\sqrt{-س - ٣}$، وارسم منحيَي الدالّتَين ص = د(س)، ص = هـ(س).

★ **١١)** أوجد طريقتَين مختلفتَين لوصف تركيب التحويلات الهندسيّة التي تحوّل منحنى الدالّة ص = د(س) إلى المنحنى ص = د(٢س + ١٠).

# قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

**الدوالّ**

- العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعة ما بعناصر مجموعة أخرى.
  الدالّة هي علاقة بين عناصر مجموعتين، حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.
  جميع الدوالّ عبارة عن علاقات، لكن ليست كل علاقة دالّة.
- قد تكون الدالّة واحدًا إلى واحد أو متعدّدًا إلى واحد.
- تُسمّى مجموعة المدخلات مجال الدالّة.
- تُسمّى مجموعة المخرجات مدى الدالّة.

**الدوالّ المركبّة**

- (د ∘ هـ )(س) تعني تطبيق الدالّة هـ(س) على س أولًا، ثم تطبيق د(س) على الناتج.
- يمكن إيجاد (د ∘ هـ )(س) فقط عندما يكون مدى هـ(س) مجموعة جزئية من مجال د(س).
- ليس من الضروري أن تكون (د ∘ هـ )(س) = (هـ ∘ د)(س) صحيحة لجميع الدوالّ.

**الدوالّ العكسية**

- الدالّة العكسية للدالّة د(س) هي دالّة تلغي ما تقوم به الدالّة د(س).
  (د ∘ د$^{-1}$)(س) = (د$^{-1}$ ∘ د)(س) = س أو إذا كانت ص = د(س)، فإن س = د$^{-1}$(ص).
- تكتب الدالّة العكسية للدالّة د(س) في صورة د$^{-1}$(س).
- خطوات إيجاد الدالّة العكسية هي:
  **الخطوة ١:** استبدال د(س) بالمتغير ص.
  **الخطوة ٢:** بادل بين المتغيّرَين س، ص.
  **الخطوة ٣:** أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س.
- مجال د$^{-1}$(س) هو مدى د(س).
- مدى د$^{-1}$(س) هو مجال د(س).
- توجد الدالّة العكسية د$^{-1}$(س) إذا كانت الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد فقط.
- منحنى د$^{-1}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم ص = س.
- إذا كان د(س) = د$^{-1}$(س)، فتسمّى الدالّة د(س) عكسية لنفسها.
- إذا كانت الدالّة د عكسية لنفسها، فإن (د ∘ د)(س) = س.
- يكون منحنى الدالّة العكسية لنفسها متماثلًا حول المستقيم ص = س.

**التحويلات الهندسيّة للدوال**

- منحنى ص = د(س) + ب هو انسحاب لمنحنى ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ب \end{pmatrix}$.
- منحنى ص = د(س + أ) هو انسحاب لمنحنى ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} -أ \\ ٠ \end{pmatrix}$.
- منحنى ص = د(س + أ) + ب هو انسحاب لمنحنى ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} -أ \\ ب \end{pmatrix}$.
- منحنى ص = − د(س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور السيني.
- منحنى ص = د(−س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحورالصادي.
- منحنى ص = أ د(س) هو تمدّد لمنحنى ص = د(س) معامله (أ) ومواز ٍ للمحور الصادي.
- منحنى ص = د(أ س) هو تمدّد لمنحنى ص = د(س) معامله $\left(\frac{١}{أ}\right)$ ومواز ٍ للمحور السيني.

**تركيب التحويلات الهندسيّة**

- عند تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين أو تحويلَين أفقيَّين، فإن ترتيب إجرائهما قد يؤثّر على الناتج.
- عند تركيب تحويلَين هندسيَّين أحدهما أفقي والآخر رأسي، فإن ترتيب إجرائهما لا يؤثّر على الناتج.
- تتبع التحويلات الهندسيّة الرأسية ترتيب العمليات الحسابية نفسه.
- تتبع التحويلات الهندسيّة الأفقية معكوس ترتيب العمليات الحسابية.

## تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثانية

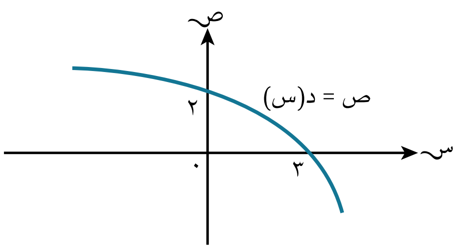
**١)** إذا علمت أن الدالّتَين د(س)، هـ(س) معرّفتان على س ∋ ح كما يأتي:

د : س ← ٣س − ١

هـ : س ← ٥س − س$^{٢}$

فاكتب (هـ ○ د)(س) في صورة أ − ب(س − جـ)$^{٢}$، حيث أ، ب، جـ ثوابت.

**٢)** يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د(س).




أ ارسم منحنى ص = − د($\frac{١}{٢}$ س).

ب أوجد تحويلَين هندسيَّين يحوّلان منحنى ص = د(س) إلى ص = د(٣ − س).

**٣)** منحنى معادلته ص = س$^{٢}$ + ٦س + ٨

أ ارسم المنحنى، واكتب إحداثيات نقاط التقاطع مع المحورَين.

ب تمّ سحب المنحنى بالمتجه $\binom{٢}{٠}$، ثم أُتبِع بتمدّد رأسي معامله ٣

أوجد معادلة المنحنى الناتج في صورة ص = أس$^{٢}$ + ب س.

**٤)** الدالّة د : س ← س$^{٢}$ − ٤ معرّفة على المجال س ⩾ ٠

أ أوجد د$^{-١}$(س)، وحدّد مجال الدالّة د$^{-١}$(س).

ب ارسم منحنى د(س)، ومنحنى د$^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه.

★ **٥)** أ اكتب −س$^{٢}$ + ٦س − ٥ في صورة أ(س + ب)$^{٢}$ + جـ حيث أ، ب، جـ ثوابت.

الدالّة د : س ← −س$^{٢}$ + ٦س − ٥ معرّفة على س ⩾ م، حيث م ثابت.

ب حدّد أصغر قيمة للثابت م لتصبح الدالّة د(س) دالّة واحد إلى واحد.

ج عندما م = ٥، أوجد د$^{-١}$(س)، وحدّد مجال د$^{-١}$(س).

★ **٦)** الدالّة د : س ← س$^{٢}$ − ٤س + ك معرّفة على س ⩾ ل، حيث ل، ك ثابتان.

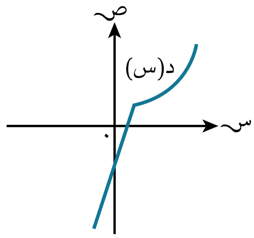
أ اكتب د(س) في صورة (س + أ)$^{٢}$ + ب + ك، حيث أ، ب ثابتان.

ب حدّد مدى الدالّة بدلالة ك.

ج حدّد أصغر قيمة للثابت (ل) لتصبح د(س) دالّة واحد إلى واحد.

د لقيمة (ل) التي أوجدتها في الجزئية (ج)، أوجد د$^{-١}$(س)، وحدّد مجال د$^{-١}$(س) بدلالة ك.

**٧)** يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة د(س)، حيث $-١ \leqslant$ س $\leqslant ٤$




$$\text{د (س)} = \begin{cases} \text{٣س} - ٢ & ، \quad -١ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ \dfrac{٤}{٥ - \text{س}} & ، \quad ١ < \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$$

أ) حدّد مدى الدالّة د(س).

ب) انسخ الشكل، وارسم عليه منحنى ص = د$^{-١}$(س).

ج) اكتب د$^{-١}$، واكتب مجالها.

**٨)** إذا علمت أن الدالّة د(س) = ٤س$^{٢}$ − ٢٤س + ١١ معرّفة على س ∈ ع.

أ) اكتب د(س) في صورة أ(س − ب)$^{٢}$ + جـ، محدّدًا إحداثيات رأس المنحنى ص = د(س).

ب) الدالّة هـ (س) = ٤س$^{٢}$ − ٢٤س + ١١ معرّفة على س $\leqslant$ ١

حدّد مدى الدالّة هـ(س).

ج) أوجد هـ$^{-١}$(س) وحدّد مجالها.

**٩)** أ) اكتب ٢س$^{٢}$ − ١٢س + ١٣ في صورة أ (س + ب)$^{٢}$ + جـ، حيث أ، ب، جـ ثوابت.

ب) الدالّة د(س) = ٢س$^{٢}$ − ١٢س + ١٣ معرّفة لكل س $\geqslant$ ك، حيث ك ثابت. إذا علمت أن د(س) دالّة واحد إلى واحد، فأوجد أصغر قيمة ممكنة للثابت ك.

أوجد قيمة كلٍّ ممّا ياتي عندما ك = ٧:

ج) مدى الدالّة د(س).

د) د$^{-١}$(س)، وحدّد مجالها.

**١٠)** إذا كانت الدالة د(س) = س$^{٢}$ − ٢س − ١٥ معرّفة على ل ≤ س ≤ ك، حيث ل، ك ثابتان موجبان.

ومداها د هو جـ ≤ د(س) ≤ حـ، حيث جـ، حـ ثابتان.

أ) اكتب الدالة د(س) في صورة (س + أ)$^{٢}$ + ب.

ب) حدّد أصغر قيمة للثابت جـ.

ج) إذا علمت ان جـ = ٩، حـ = ٦٥:

١) أوجد قيمة كل من ل، ك.

٢) أوجد د$^{-١}$(س).

**١١)** إذا كانت الدالّة د: س ← $س^٢$ + ٤س − ٥ معرّفة على س ∈ ع.

أ اكتب د(س) في صورة أ$(س − ب)^٢$ − جـ.

ب حدّد مدى د(س).

ج أوجد مجموعة قيم س، حيث د(س) > ١٦

د الدالّة هـ: س ↤ ٢س + ك معرّفة على س ∈ ع.

أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون للمعادلة (هـ ∘ د)(س) = ٠ جذران موجبان.

**١٢)** إذا علمت أن الدالّتَين د(س)، هـ(س) معرّفتان على س ∈ ع كالآتي:

د: س ← ٢س + ١

هـ: س ← $س^٢$ − ٢

أ أوجد عبارة كلّ من الدالّتَين (د ∘ هـ)(س)، (هـ ∘ د)(س)، وبسّط الناتجَين.

ب أوجد قيمة أ، حيث (د ∘ هـ)(أ) = (هـ ∘ د)(أ).

ج أوجد قيم ب (ب ≠ أ)، حيث هـ(ب) = ب.

د أوجد ($د^{-١}$ ∘ هـ)(س) وبسّطها.

هـ إذا كانت الدالّة ع: س ← $س^٢$ − ٢ معرّفة، حيث س ⩾ ٠، فأوجد $ع^{-١}$(س).

**١٣)** إذا علمت أن الدالّتين د(س)، هـ(س) معرّفتان على النحو:

د: س ← $٢س^٢$ − ٨س + ١٠ ، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢

هـ: س ← س ، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ١٠

أ اكتب د(س) في صورة أ$(س + ب)^٢$ + جـ، حيث أ، ب، جـ ثوابت.

ب حدّد مدى الدالّة د(س).

ج حدّد مجال الدالّة $د^{-١}$(س).

د ارسم في المستوى الإحداثي نفسه المنحنيات ص = د(س)، ص = هـ(س)، ص = $د^{-١}$(س)، موضحًا العلاقة بين المنحنيات.

هـ أوجد $د^{-١}$(س).

**١٤)** إذا كانت د(س) = $٢س^٢$ + ٤س − ٨، حيث س ∈ ع ، حيث س ⩾ ك.

أ اكتب $٢س^٢$ + ٤س − ٨ في صورة أ$(س + ب)^٢$ + جـ.

ب أوجد أصغر قيمة للعدد ك بحيث تكون الدالّة واحدًا إلى واحد.

**١٥)** إذا كانت د(س) = $س^٢$ − ٢س + ٤، حيث س ∈ ع.

أ أوجد قيم س عندما د(س) ⩽ ٧

ب اكتب $س^٢$ − ٢س + ٤ في صورة $(س − أ)^٢$ + ب.

ج حدّد مدى الدالّة د(س).



# الوحدة الثالثة

# المتتاليات والمتسلسلات

# Sequences and series

**ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:**

٣-١ تحدّد المتتاليات والمتسلسلات الحسابية، وتتعرّف على الفرق بينهما.

٣-٢ تجد الحدّ الأول والأساس في المتتالية الحسابية.

٣-٣ تجد الحدّ النوني ومجموع الحدود حتى الحدّ النوني في المتتالية الحسابية.

٣-٤ تستخدم صيغ الحد النوني ومجموع الحدود من الحدّ الأول حتى الحدّ النوني لتحلّ مسائل تتضمّن متتاليات حسابية.

٣-٥ تحدّد المتتاليات والمتسلسلات الهندسية، وتتعرّف على الفرق بينهما.

٣-٦ تجد الحدّ الأول والأساس في المتتالية الهندسية.

٣-٧ تجد الحدّ النوني ومجموع الحدود حتى الحدّ النوني في المتتالية الهندسية.

٣-٨ تستخدم صيغ الحد النوني ومجموع الحدود من الحدّ الأول حتى الحدّ النوني لتحلّ مسائل تتضمّن متتاليات هندسية.

٣-٩ تتذكّر وتستخدم شرط التقارب في المتتالية الهندسية لتحدّد المتتاليات المتقاربة.

٣-١٠ تستخدم صيغة المجموع غير المنتهي في متتالية هندسية متقاربة.

٣-١١ تحلّ المسائل التي تتضمّن متتاليات حسابية وهندسية.

## معرفة قبلية

| المصدر | تعلّمت سابقًا أن: | اختبر مهاراتك |
|---|---|---|
| الصف التاسع<br>الوحدة التاسعة | توجد الحدّ العام (الحدّ النوني) في متتالية خطيّة. | ١) أوجِد الحدّ العام للمتتاليات الخطيّة الآتية:<br>أ ٥، ٧، ٩، ١١، ١٣، ...<br>ب ٨، ٥، ٢، −١، −٤، ... |

## المفردات

حدود terms

متتالية حسابية
arithmetic sequence

الفرق المشترك (الأساس) common difference

المتسلسلة series

متتالية هندسية
geometric sequence

النسبة المشتركة (الأساس)
common ratio

متسلسلة متقاربة
convergent series

## لماذا ندرس المتتاليات والمتسلسلات؟

الحياة مليئة بالأنماط والمتتاليات الهندسية والحسابية؛ فقد تحسب عدد مقاعد مسرح عندما يزداد عدد الصفوف، أو مجموع النقود التي تدّخرها خلال فترة زمنية معينة، أو مجموع المسافات الرأسية التي تقطعها كرة بعد ارتطامها بالأرض... جميع هذه الأنشطة تتضمن متتاليات من نوع ما. ستتعلم في هذه الوحدة المتتاليات والمتسلسلات الحسابية الهندسية، وكيف تمثلها جبريًا، وكيف تجد مجموع حدودها.

## ٣-١ المتتاليات الحسابية

في الصف التاسع، عرفت أن المتتالية العددية هي مجموعة من الأعداد التي دوّنت بترتيب معيّن، مع وجود روابط بينها، وتسمّى الأعداد في المتتالية **حدود terms** المتتالية.

تسمى المتتالية ٥، ٨، ١١، ١٤، ١٧، ... **متتالية حسابية arithmetic sequence**، لأن الفرق بين كل حد والحد السابق له مقدار ثابت، ويسمّى **الأساس** (الفرق المشترك **common difference**).

الرموز المستخدمة في المتتالية الحسابية هي:

أ = الحدّ الأول ، د = الأساس ، ل = الحدّ الأخير

يمكن أن يكون الأساس عددًا سالبًا؛ كما في المتتالية: ١٠، ٦، ٢، −٢، ...

أو أن يكون الأساس صفرًا؛ كما في المتتالية: ٥، ٥، ٥، ٥، ...

أول خمسة حدود من أيّة متتالية حسابية حدّها الأول أ وأساسها د هي:

| أ | أ + د | أ + ٢د | أ + ٣د | أ + ٤د |
|---|---|---|---|---|
| الحدّ ١ | الحدّ ٢ | الحدّ ٣ | الحدّ ٤ | الحدّ ٥ |

ستلاحظ من النمط السابق أن الحدّ العام (ح$_{ن}$) يعطى بالصيغة:

**مُساعَدة**

ن تمثل رتبة الحد (ترتيب الحد) أو عدد الحدود في المتتالية.

مثال: يكتب الحد الرابع في صورة ح$_{٤}$.

**نتيجة ١**

ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د، حيث ن عدد صحيح موجب.

### مثــال ١

أوجِد الحد الأول والأساس وعدد الحدود (ن) في المتتالية الحسابية: −٣، ١، ٥، ٩، ١٣، ...، ٢٣٧

**الحــل:**

الحد الأول = −٣

الأساس = ١ − (−٣) = ٤

الحدّ الأخير (ح$_{ن}$) = أ + (ن − ١)د ...... استخدم أ = −٣، د = ٤، الحدّ الأخير = ٢٣٧

٢٣٧ = −٣ + ٤(ن − ١) ...... أوجد قيمة ن.

ن − ١ = ٦٠

ن = ٦١

∴ عدد الحدود = ٦١

## مثــال ٢

إذا كان $ح_٤$ في متتالية حسابية هو ٧، $ح_{١٠}$ = ١٦، فأوجِد $ح_١$ والأساس (د).

**الحــلّ:**

$ح_٤$ = ٧ ⟸ أ + ٣د = ٧ ............ (١)

$ح_{١٠}$ = ١٦ ⟸ أ + ٩د = ١٦ .......... (٢)

المعادلة (٢) − المعادلة (١) تعطي ٦د = ٩

د = ١,٥

بالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة الأساس (د) نحصل على أ + ٤,٥ = ٧

أ = ٢,٥

$ح_١$ = ٢,٥، الأساس (د) = ١,٥

## مثــال ٣

إذا كان الحدّ العام ($ح_ن$) في متتالية حسابية هو ٥ − ٦ن، فأوجِد $ح_١$ والأساس.

**الحــلّ:**

$ح_١$ = ٥ − ٦(١) = −١ ........ عوّض عن ن = ١ في الحدّ العام = ٥ − ٦ن

$ح_٢$ = ٥ − ٦(٢) = −٧ ........ عوّض عن ن = ٢ في الحدّ العام = ٥ − ٦ن

الأساس = $ح_٢$ − $ح_١$

= −٧ − (−١) = −٦

## مجموع حدود المتتالية الحسابية

يطلق على عملية جمع حدود المتتالية **بالمتسلسلة series**.

## استكشف ١

١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ٩٧ + ٩٨ + ٩٩ + ١٠٠ = ؟

يقال إن عالِم الرياضيات كارل جاوس Carl Gauss وهو في السابعة أو الثامنة من عمره قد سُئل عن إيجاد مجموع الأعداد من ١ إلى ١٠٠. ظنّ معلّمه أن هذه المهمّة ستشغله لبعض الوقت، لكنه فوجئ بأن كتب الإجابة الصحيحة مباشرة. كانت طريقته أن جمع الأعداد أزواجًا: ١ + ١٠٠= ١٠١، ٢ + ٩٩ = ١٠١، ٣ + ٩٨ = ١٠١، ...

١) هل يمكنك أن تكمل طريقة جاوس لتجد الإجابة؟

٢) استخدم طريقة جاوس لتجد مجموع:

أ ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + ٤٩٤ + ٤٩٦ + ٤٩٨ + ٥٠٠

ب ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + ... + ١٨٥ + ١٩٠ + ١٩٥ + ٢٠٠

ج ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ... + ٩٣ + ٩٦ + ٩٩ + ١٠٢

٣) استخدم طريقة جاوس لتجد عبارة للمجموع بدلالة ن:

١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + (ن − ٢) + (ن − ١) + ن

يمكن كتابة مجموع متتالية حسابية جـ$_{ن}$ على النحو:

**نتيجة ٢**

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$(أ + ل)   أو   جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

يمكن برهنة هذه النتيجة كما يأتي، وذلك باستخدام كامل المتسلسلة:

جـ$_{ن}$ = أ + (أ + د) + (أ + ٢د) + … + (ل − ٢د) + (ل − د) + ل

اكتب المجموع بصورة عكسية جـ$_{ن}$ = ل + (ل − د) + (ل − ٢د) + … + (أ + ٢د) + (أ + د) + أ

اجمع ٢جـ$_{ن}$ = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + … + (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل)

٢جـ$_{ن}$ = ن(أ + ل) لأن عدد الحدود في المتسلسلة هو ن

وعليه، يكون جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

استخدم ل = أ + (ن − ١)د؛ لتحصل على جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

من المفيد أن تتذكّر القاعدة الآتية التي تطبق على جميع المتتاليات.

**نتيجة ٣**

ح$_{ن}$ = جـ$_{ن}$ − جـ$_{ن-١}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب.

٩٥

## مثـــال ٤

متتالية حسابية حدّها الأوّل −١٢، وحدّها السابع عشر ١٢، وحدّها الأخير ٤٥، أوجِد مجموع جميع حدود المتتالية.

### الحـــلّ:

نبدأ الحلّ بإيجاد الأساس:

ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د ← ضع ح$_{ن}$ = ١٢ عندما ن = ١٧، أ = −١٢

١٢ = −١٢ + ١٦د ← أوجد قيمة د.

د = $\frac{٣}{٢}$

لإيجاد عدد الحدود في المتتالية:

ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١)د ← ضع ح$_{ن}$ = ٤٥ عندما أ = −١٢، د = $\frac{٣}{٢}$

٤٥ = −١٢ + $\frac{٣}{٢}$(ن − ١) ← أوجد قيمة ن.

ن − ١ = ٣٨

ن = ٣٩

لإيجاد مجموع جميع الحدود:

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$(أ + ل) ← ضع أ = −١٢، ل = ٤٥، ن = ٣٩

جـ$_{٣٩}$ = $\frac{٣٩}{٢}$(−١٢ + ٤٥)

= ٦٤٣$\frac{١}{٢}$

**مُساعَدة**

يوجد حل آخر لإيجاد مجموع الحدود باستخدام الصيغة الثانية في النتيجة ٢

## مثــال ٥

إذا علمت أن $ح_{١٠}$ في متتالية حسابية يساوي ١٤، ومجموع أول ٧ حدود يساوي ٤٢، فأوجِد $ح_١$ في المتتالية، وأساسها.

### الحــلّ:

$ح_ن = أ + (ن - ١)د$ ........ استخدم $ح_{١٠} = ١٤$ عندما ن = ١٠

$١٤ = أ + ٩د$ ........ (١)

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$ ........ استخدم ن = ٧، $جـ_٧ = ٤٢$

$٤٢ = \frac{٧}{٢}(٢أ + ٦د)$

$٦ = أ + ٣د$ ........ (٢)

المعادلة (١) − المعادلة (٢) تعطي ٦د = ٨

$د = \frac{٤}{٣}$

بالتعويض عن $د = \frac{٤}{٣}$ في المعادلة (١) نحصل على أ = ٢

$ح_١ = ٢$، والأساس $= \frac{٤}{٣}$



## مثــال ٦

إذا كان مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية هو $جـ_ن = ٤ن^٢ + ن$، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

أ $ح_١$، والأساس.

ب $ح_ن$.

### الحــلّ:

أ $جـ_١ = ٤(١)^٢ + ١ = ٥$ ........ الحد الأول = ٥

$جـ_٢ = ٤(٢)^٢ + ٢ = ١٨$ ........ الحد الأول + الحد الثاني = ١٨

$ح_٢ = ١٨ - ٥ = ١٣$ ........ $ح_٢ = جـ_٢ - جـ_١$

$ح_١ = ٥$، الأساس = ٨ ........ الأساس = الحد الثاني − الحد الأول

ب $ح_ن = أ + (ن - ١)د$ ........ استخدم أ = ٥، د = ٨

$= ٥ + ٨(ن - ١)$

$= ٨ن - ٣$

**طريقة بديلة:**

$ح_ن = جـ_ن - جـ_{ن-١}$

$= (٤ن^٢ + ن) - (٤ (ن - ١)^٢ + (ن - ١))$

$= ٤ن^٢ + ن - ٤ (ن^٢ - ٢ن + ١) - ن + ١$

$= ٤ن^٢ + ن - ٤ن^٢ + ٨ن - ٤ - ن + ١$

$= ٨ن - ٣$

## تمارين ٣-١

**١)** عبّر عن الحدّ السابع، والحدّ التاسع عشر في متتالية حسابية حدّها الأول (أ)، وأساسها (د) بدلالة أ، د.

**٢)** أوجِد عدد الحدود، والمجموع لكل مما يأتي:

أ $١٣ + ١٧ + ٢١ + ... + ٩٧$

ب $١٥٢ + ١٤٩ + ١٤٦ +.. .+ ٥٠$

**٣)** أوجِد مجموع كل مما يأتي:

أ $٥ + ١٢ + ١٩ + ...$ (١٧ حدًّا)

ب $٤ + ١ + (-٢) + ...$ (٣٨ حدًّا)

ج $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} + ...$ (٢٠ حدًّا)

د $-س - ٥س - ٩س - ...$ (٤٠ حدًّا)

**٤)** إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية ١٥، ومجموع أول ٢٠ حدًّا فيها يساوي ١٦٣٠، فأوجِد أساس المتتالية.

**٥)** إذا كان الحد الأول في متتالية حسابية يساوي ⁻٢٧، وحدها السادس عشر يساوي ٧٨، وحدها الأخير يساوي ١٦٩، فأوجد:

أ أساس المتتالية، وعدد حدودها.

ب مجموع حدود المتتالية.

**٦)** إذا كان أول حدَّين في متتالية حسابية هما ١٤٦، ١٣٩، والحدّ الأخير هو -٤٣، فأوجِد مجموع حدود المتتالية.

**٧)** إذا كان أول حدَّين في متتالية حسابية هما ٢، ٩، والحدّ الأخير في المتتالية هو الحدّ الوحيد الأكبر من ١٥٠، فأوجِد مجموع حدود المتتالية.

**٨)** إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية ١٥، والحدّ الأخير ٢٧، وكان مجموع أول خمسة حدود في المتتالية يساوي ٧٩، فأوجِد عدد حدود المتتالية.

**٩)** أوجِد مجموع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ٣٠٠، والتي هي من مضاعفات العدد ٧

**١٠)** إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية هو ٢، والحدّ الحادي عشر هو ١٧، ومجموع حدود المتتالية هو ٥٠٠، فأوجِد عدد حدود المتتالية.

**١١)** اشترى ماجد سيارة بمبلغ ٨٠٠٠ ريال عُماني (تتضمّن الفائدة)، ودفع ثمن السيارة على دفعات شهرية تشكّل متتالية حسابية. إذا علمت أن أول دفعة كانت ٢٠٠ ريال عُماني، وعدد الدفعات ١٦ دفعة، فأوجد الدفعة الخامسة.

**١٢)** إذا كان ح$_{ن}$ في متتالية حسابية هو −٣، ومجموع أول عشرة حدود يساوي −١٠، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

أ الحدّ الأول، والأساس.

ب قيمة ن إذا علمت أن الحدّ النوني يساوي −٥٩

**١٣)** إذا كان مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية هو جـ$_{ن}$ = ٤ن$^{٢}$ + ٣ن، فأوجِد الحدّ الأول، وأساس المتتالية.

**١٤)** إذا كان مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية هو جـ$_{ن}$ = ١٢ن − ٢ن$^{٢}$، فأوجِد الحدّ الأول، وأساس المتتالية.

**١٥)** إذا كان مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية هو جـ$_{ن}$ = $\frac{١}{٤}$(٥ن$^{٢}$ − ١٧ن)، فأوجِد الحدّ العام.

**١٦)** دائرة قُسّمت إلى عشرة قطاعات دائرية، بحيث تشكّل قياسات زوايا القطاعات متتالية حسابية. إذا كان قياس زاوية القطاع الأكبر يساوي سبعة أمثال قياس زاوية القطاع الأصغر، فأوجِد قياس زاوية القطاع الأصغر.

**١٧)** إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية (أ)، وأساسها (د)، وكان مجموع أول ٢٠ حدًّا فيها يساوي سبعة أمثال مجموع أول خمسة حدود، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

أ قيمة د بدلالة أ.

ب الحدّ الخامس والستّين بدلالة أ.

**١٨)** إذا كان الحدّ العاشر في متتالية حسابية يساوي ثلاثة أمثال الحدّ الثالث، فأثبت أن مجموع الحدود العشرة الأولى يساوي ثمانية أمثال مجموع الحدود الثلاثة الأولى.

★ **١٩)** إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية هو جا$^{٢}$س والحدّ الثاني هو ١:

أ اكتب عبارة تمثّل الحدّ الخامس في المتتالية بدلالة جا س.

ب أثبت أن مجموع أول عشرة حدود في المتتالية هو ١٠+ ٣٥جتا$^{٢}$س.

★ **٢٠)** مجموع رقمَي العدد ٦٧ هو ١٣ (٦ + ٧ = ١٣).

أ بيّن أن مجموع أرقام الأعداد الصحيحة من ١٩ إلى ٢١ هو ١٥

ب أوجِد مجموع أرقام الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٩٩

## ٣-٢ المتتاليات الهندسية

تسمّى المتتالية ٢، ٦، ١٨، ٥٤، ... **متتالية هندسية Geometric sequence**. حيث إن كل حدّ في المتتالية يساوي ثلاثة أمثال الحدّ الذي يسبقه مباشرة. يسمّى المقدار الثابت ٣ أساس المتتالية (**النسبة المشتركة Common ratio**).

الرموز التي تستخدم في المتتالية الهندسية هي:

أ = الحدّ الأول ، ر = الأساس (النسبة المشتركة)

الحدود الخمسة الأولى في متتالية هندسية حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) هي:

| أ | $أر$ | $أر^{٢}$ | $أر^{٣}$ | $أر^{٤}$ |
|---|---|---|---|---|
| الحدّ الأول | الحدّ الثاني | الحدّ الثالث | الحدّ الرابع | الحدّ الخامس |

يقود ذلك إلى صيغة الحدّ العام ($ح_ن$) في المتتالية الهندسية:

**نتيجة ٤**

$ح_ن = أر^{ن-١}$، حيث ن عدد صحيح موجب، $ر \neq ٠$

**مُساعَدة**

يمكن إيجاد الأساس من خلال قسمة أي حد على الحد الذي يسبقه مباشرة $\left(ر = \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}\right)$

### مثال ٧

في المتتالية الهندسية ٣، ٦، ١٢، ٢٤، ... أوجد:

أ) الحد الأول (أ).

ب) الأساس (ر).

ج) الحد النوني ($ح_ن$).

**الحل:**

أ) أ = ٣

ب) $ر = \frac{٦}{٣} = ٢$ ..... ر = الحد الثاني ÷ الحد الأول.

ج) $ح_ن = ٣ \times ٢^{ن-١}$ ..... عوّض في الصيغة.

### مثال ٨

متتالية هندسية، حدّها الخامس ١، وأساسها $\frac{١}{٢}$. أوجِد الحدّ الثامن، والحدّ العام ($ح_ن$).

**الحل:**

$ح_ن = أر^{ن-١}$ ..... استخدم $ح_ن = ١$ عندما ن = ٥، $ر = \frac{١}{٢}$

$١ = أ\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

$أ = ١٦$

$ح_٨ = ١٦\left(\frac{١}{٢}\right)^{٧} = \frac{١}{٨}$

$ح_ن = أر^{ن-١} = ١٦\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$

## مثــال ٩

متتالية هندسية حدّها الثاني ١٢، وحدّها الخامس ٤٠,٥، أوجِد حدّها الأول، وأساسها، وحدّها العام.

### الحــلّ:

$\text{١٢} = \text{أر}$ ............ (١)

$\text{٤٠,٥} = \text{أر}^{\text{٤}}$ ........ (٢)

بحل المعادلتَين:

المعادلة (٢) ÷ المعادلة (١): $\dfrac{\text{أر}^{\text{٤}}}{\text{أر}} = \dfrac{\text{٤٠,٥}}{\text{١٢}}$

$\text{ر}^{\text{٣}} = \dfrac{\text{٢٧}}{\text{٨}}$ نأخذ الجذر التكعيبي للطرفين.

$\text{ر} = \dfrac{\text{٣}}{\text{٢}}$

عوّض عن $\text{ر} = \dfrac{\text{٣}}{\text{٢}}$ في المعادلة (١) للحصول على أ = ٨

$\text{ح}_{\text{١}} = \text{٨}$، $\text{ر} = \dfrac{\text{٣}}{\text{٢}}$ نُعوّض عن قيمة أ وقيمة ر في $\text{أر}^{(\text{ن} - \text{١})}$ للحصول على الحد العام.

$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{٨}\left(\dfrac{\text{٣}}{\text{٢}}\right)^{\text{ن} - \text{١}}$

## مثــال ١٠

إذا كان الحدّ العام في متتالية هندسية هو $\text{٩}\left(-\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن}}$، فأوجِد الحدّ الأول، والنسبة المشتركة (الأساس).

### الحــلّ:

$\text{ح}_{\text{١}} = \text{٩}\left(-\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)^{\text{١}} = -\text{٦}$

$\text{ح}_{\text{٢}} = \text{٩}\left(-\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)^{\text{٢}} = \text{٤}$

النسبة المشتركة (ر) = $\dfrac{\text{الحدّ الثاني}}{\text{الحدّ الأول}} = \dfrac{\text{٤}}{-\text{٦}} = -\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}$ كل حدّ يساوي $\left(-\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)$ × الحدّ الذي يسبقه مباشرة.

$\text{ح}_{\text{١}} = -\text{٦}$، $\text{ر} = -\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}$

**طريقة أخرى لإيجاد ر:**

$$\text{ر} = \dfrac{\text{ح}_{\text{ن} + \text{١}}}{\text{ح}_{\text{ن}}} = \dfrac{\cancel{\text{٩}}\left(-\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن} + \text{١}}}{\cancel{\text{٩}}\left(-\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن}}}$$

$$= \dfrac{\cancel{\left(-\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن}}} \times \left(-\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)}{\cancel{\left(-\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن}}}}$$

$$= -\dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

## مجموع حدود المتتالية الهندسية

يطلق على عملية جمع حدود المتتالية **بالمتسلسلة series**.

### استكشف ٢

ليس مسموحًا استخدام الآلة الحاسبة في هذا النشاط من 'استكشف'.

١) افترض أن مجموع أول عشرة حدود من متتالية هندسية هو $جـ_{١٠}$، حيث أ = ١، ر = ٣

$جـ_{١٠} = ١ + ٣ + ٣^{٢} + ٣^{٣} + \ldots + ٣^{٧} + ٣^{٨} + ٣^{٩}$

أ اضرب طرفَي المعادلة السابقة في الأساس وهو ٣، وأكمل العبارة الآتية:

$٣جـ_{١٠} = ٣ + ٣^{٢} + ٣^{\cdots} + ٣^{\cdots} + \ldots + ٣^{\cdots} + ٣^{\cdots} + ٣^{\cdots}$

ب كيف تقارن الناتج مع العبارة الأصلية؟ هل يمكنك استخدام ذلك لتجد طريقة أسهل للتعبير عن $جـ_{١٠}$؟

٢) استخدم الطريقة من الجزئية (١) لتجد طريقة بديلة للتعبير عن كل مجموع من المجاميع الآتية:

أ $١ + ر + ر^{٢} + \ldots$ (١٠ حدود)

ب $أ + أر + أر^{٢} + \ldots$ (١٠ حدود)

ج $أ + أر + أر^{٢} + \ldots$ (ن حدّ)

نستنتج أن مجموع المتتالية الهندسية $جـ_ن$ يمكن كتابته على النحو:

**نتيجة ٥**

$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ أو $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$

**مُساعَدة**

حالة خاصة عندما ر = ١، فإن $جـ_ن = أ \times ن$

**مُساعَدة**

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية هو عملية جمع حدود المتتالية.

إليك برهان الصيغتَين في النتيجة ٥:

$جـ_ن = أ + أر + أر^{٢} + \ldots + أر^{ن-٣} + أر^{ن-٢} + أر^{ن-١} \ldots$ (١)

عند ضرب ر في المعادلة (١)، $رجـ_ن = أر + أر^{٢} + \ldots + أر^{ن-٣} + أر^{ن-٢} + أر^{ن-١} + أر^ن \ldots$ (٢)

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) ينتج أن:

$رجـ_ن - جـ_ن = أر^ن - أ$

$(ر - ١)جـ_ن = أ(ر^ن - ١)$

$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

اضرب البسط والمقام في −١ لتحصل على الصيغة البديلة للمجموع:

$$جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$$

هل تعرف لماذا لا تصلح صيغة المجموع عندما ر = ١؟

## مثـــال ١١

أوجِد مجموع أول ١٢ حدًا من المتسلسلة الهندسية ٣ + ٦ + ١٢ + ٢٤ + ...

### الحـــلّ:

$$جـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$ استخدم أ = ٣، ر = ٢، ن = ١٢

$$جـ_{١٢} = \frac{٣(٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١}$$ بسّط.

$$= ١٢٢٨٥$$

## مثـــال ١٢

إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية يساوي تسعة أمثال الحدّ الأول، وكان مجموع أول ستة حدود منها يساوي **ك** مرة مجموع أول حدَّين، فأوجِد قيمة **ك**.

### الحـــلّ:

الحدّ الثالث = ٩ × الحدّ الأول

$أر^{٢} = ٩أ$ اقسم طرفَي المعادلة على أ، وأوجد قيمة ر.

$ر = \pm ٣$

استخدم $جـ_{٦} = ك\, جـ_{٢}$

$$\frac{أ(ر^{٦} - ١)}{ر - ١} = \frac{ك\, أ(ر^{٢} - ١)}{ر - ١}$$ أعد الترتيب لتكتب ك بدلالة ر.

$$ك = \frac{ر^{٦} - ١}{ر^{٢} - ١}$$

عندما ر = ٣، نحصل على ك = ٩١، وعندما ر = −٣ نحصل على ك = ٩١

∴ ك = ٩١

## تمارين ٣-٢

١) حدّد ما إذا كانت كل متتالية من المتتاليات الآتية هندسية، أم لا، وإذا كانت المتتالية هندسية، فاكتب أساسها، وحدّها الثامن:

أ ٢، ٤، ٨، ١٤، ...
ب ٧، ٢١، ٦٣، ١٨٩، ...
ج ٨١، −٢٧، ٩، −٣، ...
د $\frac{١}{٩}$، $\frac{٢}{٩}$، $\frac{٤}{٩}$، $\frac{٧}{٩}$، ...
هـ ١، ٠,٤، ٠,١٦، ٠,٠٦٤، ...
و ١، −١، ١، −١، ...

٢) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية (أ)، والأساس (ر)، فاكتب الحدَّين السادس والخامس عشر بدلالة أ، ر.

٣) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٢٧٠، والحدّ الرابع ٨٠، فأوجِد أساس المتتالية.

٤) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٥٠، والحدّ الثاني −٣٠، فأوجِد الحدّ الرابع.

٥) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية ١٢، والحدّ الرابع ٢٧، فأوجِد الأساس، والحدّ الأول (إذا علمت أن جميع حدّود المتتالية موجبة).

٦) إذا كان مجموع الحدَّين الثاني والثالث في متتالية هندسية ٨٤، ويقلّ الحدّ الثاني عن الحدّ الأول بمقدار ١٦، فأوجِد الحدّ الأول في المتتالية علمًا بأن جميع الحدود موجبة.

٧) إذا علمت أن ثلاثة حدود متتابعة في متتالية هندسية هي س، ٤، (س + ٦)، فأوجِد القيم الممكنة لـ س.

٨) أوجِد مجموع أول ثمانية حدود في كل مما يأتي:

أ ٣ + ٦ + ١٢ + ٢٤ + ...
ب ١٢٨ + ٦٤ + ٣٢ + ١٦ + ...
ج ١ − ٢ + ٤ − ٨ + ...
د ٢٤٣ + ١٦٢ + ١٠٨ + ٧٢ + ...

٩) إذا كانت الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي ٠,٥، ١، ٢، ٤، فأوجِد أقل عدد ممكن من الحدود يكون مجموعها أكبر من ١٠٠٠٠٠٠

١٠) تمّ رمي كرة رأسيًّا إلى الأعلى (من الأرض). وصلت الكرة إلى ارتفاع ٨ م، ثم ارتطمت بالأرض وارتدّت. بعد كل ارتداد ترتفع $\frac{٣}{٤}$ الارتفاع السابق لهذا الارتداد.

أ اكتب عبارة جبرية لارتفاع الكرة بعد ارتطامها ن مرة بالأرض.

ب أوجِد مجموع المسافات التي تخطّتها الكرة من الرمية الأولى حتى الارتطام الخامس بالأرض.

١١) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية يساوي ٢٤، والحدّ الثالث هو ١٢(س + ١).

أ أوجِد بدلالة س الحدّ الأول في المتتالية.

ب إذا علمت أن مجموع أول ثلاثة حدود هو ٧٦، فأوجِد قيم س الممكنة.

**١٢)** إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية يساوي تسعة أمثال الحدّ الأول، وكان مجموع أول أربعة حدود فيها يساوي ك مرة الحدّ الأول، فأوجِد قيم **ك** الممكنة.

**١٣)** تقدّم شركة تبرّعًا سنويًّا لجمعية خيرية، وتتزايد قيمة التبرّع بمقدار ١٠٪ سنويًّا. إذا علمت أن قيمة التبرّع سنة ٢٠١٠م تساوي ١٠٠٠٠ ريال عُماني، فأوجد:

**أ** قيمة التبرّع سنة ٢٠١٦م.

**ب** مجموع التبرّعات من سنة ٢٠١٠م حتى ٢٠١٦م.

★ **١٤)** إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية (أ) والأساس (ر) ومجموع أول ن حدًّا ($جـ_{ن}$)، فبيّن أن $\frac{جـ_{٣ن} - جـ_{٢ن}}{جـ_{ن}} = ر^{٢ن}$.

★ **١٥)** إذا كانت المتتالية ١، ١، ٣، $\frac{١}{٣}$، ٩ ، $\frac{١}{٩}$، ٢٧، $\frac{١}{٢٧}$، ٨١، $\frac{١}{٨١}$، ...، فأثبت أن مجموع أول ٢ن حدًّا في المتتالية هو $\frac{١}{٢}$ $(٢ + ٣^{ن} - ٣^{١ - ن})$.

★ **١٦)** ليكن $جـ_{ن}$ = ١ + ١١ + ١١١ + ١١١١ + ١١١١١ + ... إلى ن حدًّا. أثبت أن $جـ_{ن} = \frac{١٠^{ن+١} - ١٠ - ٩ن}{٨١}$.

## ٣-٣ المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

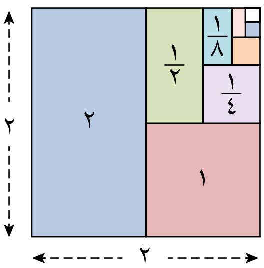
المتتالية غير المنتهية هي متتالية تستمرّ حدودها من دون توقف.

افترض المتتالية الهندسية غير المنتهية حيث أ = ٢، ر = $\frac{١}{٢}$ وعليه، تكتب هكذا

٢، ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، ... يمكننا أن نحسب مجموع أول ن حدّ فيها:

$جـ_١$ = ٢، $جـ_٢$ = ٣، $جـ_٣$ = $٣\frac{١}{٢}$، $جـ_٤$ = $٣\frac{٣}{٤}$، $جـ_٥$ = $٣\frac{٧}{٨}$، وهكذا.

هذه المجاميع تقترب أكثر فأكثر من العدد ٤




الشكل المجاور مربعٌ بُعداه ٢ × ٢، وهو تمثيل بصري لهذه المتتالية.

إذا استمرّ نمط أشكال المستطيلات داخل المربّع، فإن مجموع مساحات المستطيلات تتقارب من مساحة المربّع وهو ٤، كلما تضمّنت المستطيلات مستطيلًا جديدًا.

لذا نقول إن مجموع حدود المتتالية غير المنتهية ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ... هو ٤، لأن مجموع أول ن حدّ يقترب من العدد ٤ وكلما كبر العدد ن نكتب ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ... = ٤، ونقول أيضًا إن مجموع الحدود إلى مالانهاية في المتسلسلة هو ٤، وإن المتسلسلة تقترب من العدد ٤، وتسمّى المتسلسلة من هذا النوع **متسلسلة متقاربة convergent series**.

قد تتعجّب من سبب قولنا هذا، إذا لم تعرف عدد الحدود التي تمّ جمعها. نعلم أن الإجابة دائمًا أقلّ من ٤، وهي الإجابة الأسهل والأنسب.

بحث علماء الرياضيات والفلاسفة، على مدى آلاف السنين، في فكرة 'المتسلسلة غير المنتهية' مثل: «٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ...»، ولكن منذ مئات السنين وُجد حلّ «٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ... = ٤» وكانت النتيجة مفيدة جدًا، كما أنها تعطي إجابة مقنعة عندما نتعامل رياضيًّا مع مواضيع من هذا النوع.

غالبًا ما تتعامل مع مثال لمتسلسلة هندسية غير منتهية، من دون أن تدركها! فماذا نعني بالكسر العشري الدوري ٠,٣٣٣٣٣...؟

يمكن أن نكتبه في صورة متسلسلة $\frac{٣}{١٠}$ + $\frac{٣}{١٠٠}$ + $\frac{٣}{١٠٠٠}$ + ... = ٠,٣٣٣٣٣... إذا حسبنا مجموع أول ن حدّ لهذه المتسلسلة الهندسية نجد أن $جـ_١$ = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣، $جـ_٢$ = $\frac{٣٣}{١٠٠}$ =٠,٣٣، $جـ_٣$ = $\frac{٣٣٣}{١٠٠٠}$ = ٠,٣٣٣ وهكذا. تقترب هذه المجاميع إلى حدّ كبير من $\frac{١}{٣}$، لذا نقول إن مجموع المتسلسلة غير المنتهية هو $\frac{١}{٣}$ وتكتب $\frac{١}{٣}$ = ٠,٣٣٣٣٣... = $٠,\dot{٣}$، وهذا يبرّر ما تعوّدت أن تقوم به في السنوات السابقة. استخدام هذه الصيغة يختصر العمل، وبالتالي يمكننا من كتابة أي كسر عشري دوري في صورة كسر اعتيادي.

### هل تعلم؟

أن أول شخص قدّم الأعداد العشرية غير المنتهية هو سيمون ستيفن Simon Stevin سنة ١٥٨٥م. كان رياضيًّا مشهورًا ، وهو من جعل استخدام الأعداد العشرية أكثر عمومية في كتابه الذي أسماه 'الأعشار De Thiende'.

## استكشف ٣

١) استقصِ ما إذا كانت كل متسلسلة من المتسلسلات الهندسية غير المنتهية متقاربةً أم لا. يمكنك أن تستخدم جدول بيانات لتساعدك على إجراء الحسابات. إذا كانت المتسلسلة متقاربة، فأوجِد مجموعها:

أ) أ $= \frac{٣}{٥}$، ر $= -٢$

ب) أ $= ٣$، ر $= -\frac{١}{٥}$

ج) أ $= ٦$، ر $= \frac{٢}{٣}$

د) أ $= -\frac{١}{٢}$، ر $= -٢$

٢) أوجِد متسلسلات هندسية متقاربة أخرى، وأوجِد مجموعها في كل حالة إلى مالانهاية.

٣) هل يمكنك أن توجد شرطًا لـ ر لتكون المتسلسلة الهندسية متقاربة؟



افترض أن المتسلسلة الهندسية أ + أر + أر$^{٢}$ + أر$^{٣}$ + ... + أر$^{ن-١}$.

يُعطى المجموع جـ$_{ن}$ بالصيغة جـ$_{ن}$ $= \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

إذا كان $-١ <$ ر $< ١$، فكلما زاد عدد الحدود ن، فإن ر$^{ن}$ تقترب أكثر فأكثر من الصفر.

نقول عندما تقترب ن من مالانهاية فإن ر$^{ن}$ تقترب من الصفر، ونكتب «ن $\leftarrow \infty$، ر$^{ن} \leftarrow ٠$»

وعليه، عندما ن $\leftarrow \infty$، فإن $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر} \leftarrow \frac{أ(١ - ٠)}{١ - ر} = \frac{أ}{١ - ر}$.

وهذا يؤدي إلى النتيجة:

### مُساعَدة

تقرأ 'ن $\leftarrow$ ٠' ن تقترب من صفر.

### نتيجة ٦

جـ$_{\infty}$ $= \frac{أ}{١ - ر}$ ، حيث $-١ <$ ر $< ١$

إذا كان ر $\geqslant ١$ أو ر $\leqslant -١$، فإن ر$^{ن}$ ليست متقاربة، الأمر الذي يعني أن المتسلسلة متباعدة.

لذا تكون المتسلسلة الهندسية متقاربة فقط عندما $-١ <$ ر $< ١$

## مثــال ١٣

إذا علمت أن الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي: ٥ ، ٤ ، ٣,٢ ، ٢,٥٦

أ اكتب أساس المتتالية.

ب أوجِد المجموع إلى مالانهاية.

### الحــلّ:

أ الأساس = $\frac{\text{الحدّ الثاني}}{\text{الحدّ الأول}}$ = $\frac{٤}{٥}$

ب $ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ — استخدم أ = ٥، ر = $\frac{٤}{٥}$

$= \frac{٥}{١ - \left(\frac{٤}{٥}\right)}$

$= ٢٥$

## مثــال ١٤

متتالية هندسية أساسها $-\frac{٢}{٣}$، ومجموع أول ثلاثة حدود فيها ٦٣، أوجد:

أ حدّها الأول.

ب مجموعها إلى مالانهاية.

### الحــلّ:

أ $ج_{٣} = \frac{أ(١ - ر^{٣})}{١ - ر}$ — استخدم $ج_{٣}$ = ٦٣، ر = $-\frac{٢}{٣}$

$٦٣ = \frac{أ\left(١ - \left(-\frac{٢}{٣}\right)^{٣}\right)}{١ - \left(-\frac{٢}{٣}\right)}$ — بسّط.

$٦٣ = \frac{أ \times \frac{٣٥}{٢٧}}{\frac{٥}{٣}}$ — أوجد قيمة أ.

$أ = ٨١$

ب $ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ — استخدم أ = ٨١، ر = $-\frac{٢}{٣}$

$= \frac{٨١}{١ - \left(-\frac{٢}{٣}\right)}$

$= ٤٨\frac{٣}{٥}$

## تمارين ٣-٣

١) أوجِد المجموع إلى مالانهاية لكل متسلسلة من المتسلسلات الهندسية الآتية:

أ $٢ + \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٩} + \frac{٢}{٢٧} + ...$

ب $١ + ٠,١ + ٠,٠١ + ٠,٠٠١ + ...$

ج $٤٠ - ٢٠ + ١٠ - ٥ + ...$

د $-٦٤ + ٤٨ - ٣٦ + ٢٧ - ...$

٢) إذا كانت الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي: ١، $(٠,٥)^{٢}$، $(٠,٥)^{٤}$، $(٠,٥)^{٦}$، فأوجِد المجموع إلى مالانهاية.

٣) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٨، والحدّ الثاني هو ٦، فأوجِد المجموع إلى مالانهاية.

٤) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٢٧٠، والحدّ الرابع هو ٨٠، فأوجِد الأساس، والمجموع إلى مالانهاية.

٥) أ اكتب الكسر العشري الدوري $٠,\dot{٥}\dot{٧}$ في صورة مجموع متتالية هندسية.

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتثبت أن $٠,\dot{٥}\dot{٧}$ يمكن كتابته في صورة $\frac{١٩}{٣٣}$

٦) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ١٥٠، ومجموع الحدود إلى مالانهاية هو ٢٠٠، فأوجِد الأساس، ومجموع أول أربعة حدود منها.

٧) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية هو ٤,٥، ومجموع حدودها إلى مالانهاية هو ١٨، فأوجِد الأساس، والحدّ الأول.

٨) ضع الكسر العشري الدوري ...٠,٣١٥١٥١٥١٥ في صورة متسلسلة هندسية غير منتهية، ثم أوجد مجموعها.

٩) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية هو ٩، والحدّ الرابع هو ٤، والأساس موجب، فأوجِد:

أ الأساس، والحدّ الأول.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

١٠) إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية هو ١٦، والحدّ السادس هو $-\frac{١}{٤}$، فأوجد:

أ الأساس، والحدّ الأول.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

١١) إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي: ١٣٥، ك، ٦٠، وكانت جميع حدود المتتالية موجبة، فأوجِد:

أ قيمة ك.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

**١٢)** إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي: ك + ١٢، ك، ك − ٩ على الترتيب، فأوجد:

أ قيمة ك.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

**١٣)** إذا كان الحدّ الرابع في متتالية هندسية هو ٤٨، ومجموع الحدود إلى مالانهاية يساوي خمسة أمثال الحدّ الأول، فأوجِد الحدّ الأول.

**١٤)** إذا علمت أن الحد الأول لمتتالية هندسية هو أ، وأساسها ر، جـ$_{٣}$ = ٣,٩٢، جـ$_{\infty}$ = ٥، فأوجِد قيمة أ، ر.

**١٥)** متتالية هندسية حدّها الأول ١، وحدّها الثاني ٢جتا(س) حيث ٠ $<$ س $<$ $\frac{\pi}{٢}$. أوجِد مجموعة قيم س لتكون المتتالية متقاربة.

## ٣-٤ المزيد من المتتاليات الحسابية والهندسية

### استكشف ٤

أ، ب، جـ، ...

١) إذا علمت أن أ، ب، جـ تشكل متتالية حسابية، فأوجِد معادلة تربط بين أ، ب، جـ.
٢) إذا علمت أن أ، ب، جـ تشكل متتالية هندسية، فأوجِد معادلة تربط بين أ، ب، جـ.

### مثال ١٥

متسلسلة حسابية حدودها الثلاثة الأولى هي س، ص، $س^٢$، ومتسلسلة هندسية حدودها الثلاثة الأولى هي س، $س^٢$، ص، علمًا بأن س $<$ ٠، أوجِد:

أ قيمتَي س، ص.
ب مجموع حدود المتسلسلة الهندسية إلى مالانهاية.
ج مجموع أول ٢٠ حدًّا في المتسلسلة الحسابية.

**الحــلّ:**

أ من المتسلسلة الحسابية: ........ استخدم الأساس (الفرق المشترك).

$ص - س = س^٢ - ص$

$٢ص = س^٢ + س$ ........... (١)

من المتسلسلة الهندسية: ........ استخدم الأساس (النسبة المشتركة).

$\frac{ص}{س^٢} = \frac{س^٢}{س}$

$ص = س^٣$ ........... (٢)

من المعادلتَين (١) و (٢) نحصل على $٢س^٣ = س^٢ + س$

$س(٢س^٢ - س - ١) = ٠$ ........ حلّ إلى العوامل وأوجد قيم س.

$س(٢س + ١)(س - ١) = ٠$

إمّا س = ٠ أو س = $-\frac{١}{٢}$، أو س = ١ ........ س ≠ ١، س ≠ ٠ لأن س $<$ ٠

∴ س = $-\frac{١}{٢}$، ص = $-\frac{١}{٨}$

ب $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ ........ استخدم أ = $-\frac{١}{٢}$، ر = $-\frac{١}{٢}$

$جـ_{\infty} = \frac{-\frac{١}{٢}}{١ - \left(-\frac{١}{٢}\right)} = -\frac{١}{٣}$

ج $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$ ........ استخدم ن = ٢٠، أ = $-\frac{١}{٢}$، د = $-\frac{١}{٨} - \left(-\frac{١}{٢}\right) = \frac{٣}{٨}$

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}\left[-١ + ١٩\left(\frac{٣}{٨}\right)\right]$

$= ٦١,٢٥$

## تمارين ٣-٤

**١)** إذا كان الحدّ الأول في متتالية هو ١٦، والحدّ الثاني هو ٢٤، فأوجِد مجموع أول ثمانية حدود إذا علمت أن المتتالية:

أ حسابية.

ب هندسية.

**٢)** الحدّ الأول في متتالية هو ٢٠، والحدّ الثاني هو ١٦

أ إذا علمت أن المتتالية هندسية، فأوجِد مجموع الحدود إلى مالانهاية.

ب إذا علمت أن المتتالية حسابية، فأوجِد عدد حدود المتتالية إذا كان مجموع جميع الحدود −١٦٠

**٣)** إذا علمت أن الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي الحدود الأول والرابع والعاشر على الترتيب في متتالية حسابية، وكان الحدّ الأول في كل متتالية هو ١٢ وأساس المتتالية الهندسية ر حيث ر $\neq$ ١، فأوجِد:

أ قيمة ر.

ب الحدّ السادس في كل متتالية.

**٤)** تتكوّن متتالية هندسية من ثمانية حدود. حدّها الأول ٢٥٦، وأساسها $\frac{١}{٢}$، وتتكون متتالية حسابية من ٥١ حدًّا، وأساسها $\frac{١}{٢}$. إذا كان مجموع حدود المتتالية الهندسية يساوي مجموع حدود المتتالية الحسابية، فأوجِد الحدّ الأول، والحدّ الأخير في المتتالية الحسابية.

**٥)** إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي الحدود الأول والسادس والتاسع على الترتيب في متتالية حسابية. إذا علمت أن الحدّ الأول في كل متتالية هو ١٠٠، وأساس المتتالية الهندسية ر حيث ر $\neq$ ١، فأوجِد:

أ قيمة ر.

ب الحدّ الخامس في كل متتالية.

**٦)** الحدّ الأول في متتالية حسابية هو ١٦، ومجموع أول ٢٠ حدًّا فيها هو ١٠٨٠

أ أوجِد أساس هذه المتتالية.

ب إذا علمت أن الحدّ الأول، والحدّ الثالث، والحدّ العام في هذه المتتالية الحسابية هي الحدود الثلاثة الأولى على الترتيب لمتتالية هندسية، فأوجِد أساس المتتالية الهندسية، وقيمة ن.

**٧)** الحدّ الأول في متتالية هو (٢س)، والحدّ الثاني هو ($س^٢$).

أ إذا كانت المتتالية حسابية، وأساسها ١٥، فأوجِد القيمتَين الممكنتَين لـ س، والقيم المناظرة للحدّ الثالث.

ب إذا كانت المتتالية هندسية، وحدّها الثالث يساوي $-\frac{١}{١٦}$، فأوجِد مجموعها إلى مالانهاية.

# قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

**المتسلسلات الحسابية**

في المتتالية الحسابية التي حدّها الأول (أ)، وأساسها (د)، وحدها الأخير (ل)، وعدد حدودها (ن):

- الحد النوني ($ح_ن$) هو أ + (ن − ١)د.
- مجموع الحدود $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) أو $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د].

**المتسلسلات الهندسية**

في المتتالية الهندسية التي حدّها الأول (أ)، وأساسها (ر)، وعدد حدودها (ن):

- الحدّ النوني ($ح_ن$) = $أر^{ن - ١}$.
- مجموع الحدود $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ أو $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$، ر ≠ ١

عندما تتقارب المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، فإن $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$، −١ < ر < ١

## تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثالثة

١) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية هو ١,٧٥، والحدّ الثاني هو ١,٥، ومجموع أول ن حدًّا فيها هو −ن، فأوجِد قيمة ن.

٢) إذا كان الحدّ الثاني من متتالية هندسية هو −١٤٥٨، والحدّ الخامس هو ٤٣٢، فأوجِد:

أ أساس (النسبة المشتركة) المتتالية.

ب الحدّ الأول في المتتالية.

ج مجموع الحدود في المتتالية إلى مالانهاية.

٣) متتالية حسابية حدّها الأول (أ)، وأساسها (د)، ومجموع أول ١٠٠حدّ فيها يساوي ٢٥ مرّة مجموع أول ٢٠ حدًّا.

أ أوجِد قيمة د بدلالة أ.

ب اكتب عبارة جبرية بدلالة أ للحدّ الخمسين.

٤) إذا كان الحدّ العاشر في متتالية حسابية ١٧، ومجموع أول خمسة حدود فيها ١٩٠، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

أ الحدّ الأول، وأساس هذه المتتالية.

ب قيمة ن إذا علمت أن قيمة الحدّ العام في المتتالية −١٩

٥) أ إذا كان الحدّ الخامس في متتالية حسابية هو ١٨، ومجموع أول ثمانية حدود فيها يساوي ١٨٦، فأوجِد الحدّ الأول، وأساس المتتالية.

ب إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٣٢، والحدّ الرابع هو $\frac{١}{٢}$، فأوجِد مجموع المتتالية إلى مالانهاية.

٦) أ إذا كان الحدّ السابع في متتالية حسابية هو ١٩، ومجموع أول اثني عشر حدًّا يساوي ٢٢٤، فأوجِد الحدّ الرابع.

ب إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٣، وأساسها ر، وفي متتالية هندسية أخرى إذا كان الحدّ الأول ٢، والأساس $\frac{١}{٥}$ر، وكان للمتتاليتَين المجموع نفسه إلى مالانهاية أ، فأوجِد قيمة كلٍّ من ر، أ

٧) أ إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو (أ)، وأساسها هو (ر)، ومجموع حدودها إلى مالانهاية هو (ك)، والحدّ الأول في متتالية هندسية ثانية (٥أ)، وأساسها (٣ر)، ومجموع حدودها إلى مالانهاية ١٠ك، فأوجِد قيمة (ر).

ب إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية −٤، والحدّ العام (الحدّ النوني) هو ٨، والحدّ (٢ن) هو ٢٠,٨، فأوجِد قيمة ن

**٨)** يجرى اختبار قصير في أحد برامج الألعاب التلفزيونية، حيث يربح المتسابق جائزة مقدارها ١٠٠٠ ريال عُماني. إذا لم يجب أحد المتسابقين بطريقة صحيحة، تتراكم الجائزة وتزداد قيمتها في اليوم التالي. وتزداد قيمتها بالطريقة نفسها كل يوم حتى يتمّ ربحها. اعتمدت إدارة التلفاز نموذجَين مختلفَين لزيادة الجائزة المالية:

النموذج الأول: زيادة الجائزة المالية ١٠٠٠ ريال عُماني كل يوم.

النموذج الثاني: زيادة الجائزة المالية ١٠ ٪ كل يوم.

في كل يوم لا يتمّ فيه ربح الجائزة تقدّم إدارة التلفاز تبرّعًا خيريًّا مقداره ٥٪ من قيمة الجائزة في ذلك اليوم. إذا لم يتمّ ربح الجائزة بعد مرور ٤٠ يومًا، فاحسب مجموع التبرّعات الخيرية:

١) إذا تمّ اعتماد النموذج الأول.

٢) إذا تمّ اعتماد النموذج الثاني.

**٩)** متتالية حسابية أول حدَّين فيها هما ١، جتا$^{٢}$س على الترتيب. بيّن أنه يمكن التعبير عن مجموع أول عشرة حدود في صورة أ − ب جا$^{٢}$س، حيث أ، ب عددان ثابتان.

**١٠)** الحدّ الأول في متتالية (٤س)، والحدّ الثاني (س$^{٢}$).

أ إذا كانت المتتالية حسابية، وأساسها ١٢، فأوجِد القيم الممكنة للعدد س، والقيم المناظرة للحدّ الثالث.

ب إذا كانت المتتالية هندسية، ومجموع حدودها إلى مالانهاية يساوي ٨، فأوجِد الحدّ الثالث.

**١١)** أ إذا كان الحدّان الثالث والرابع في متتالية هندسية هما $\frac{١}{٣}$، $\frac{٢}{٩}$ على الترتيب، فأوجِد مجموع حدود المتتالية إلى مالانهاية.

ب دائرة قُسّمت إلى ٥ قطاعات دائرية بحيث تشكّل قياسات زوايا القطاعات متتالية حسابية. إذا علمت أن قياس زاوية أكبر قطاع يعادل ٤ أمثال قياس زاوية أصغر قطاع، فأوجِد قياس زاوية أكبر قطاع.

**١٢)** أ مجموع أول ١٠ حدود في متتالية حسابية هو ٤٠٠، ومجموع الحدود العشرة التالية هو ١٠٠٠، أوجِد أساس المتتالية، وحدّها الأول.

ب في إحدى المتتاليات الهندسية، الحدّ الأول (أ)، وأساسها (ر)، ومجموع حدودها إلى مالانهاية يساوي ٦، وفي متتالية هندسية ثانية، الحدّ الأول (٢أ)، وأساسها (ر$^{٢}$)، ومجموع حدودها إلى مالانهاية ٧، أوجِد قيمة كل من أ، ر.



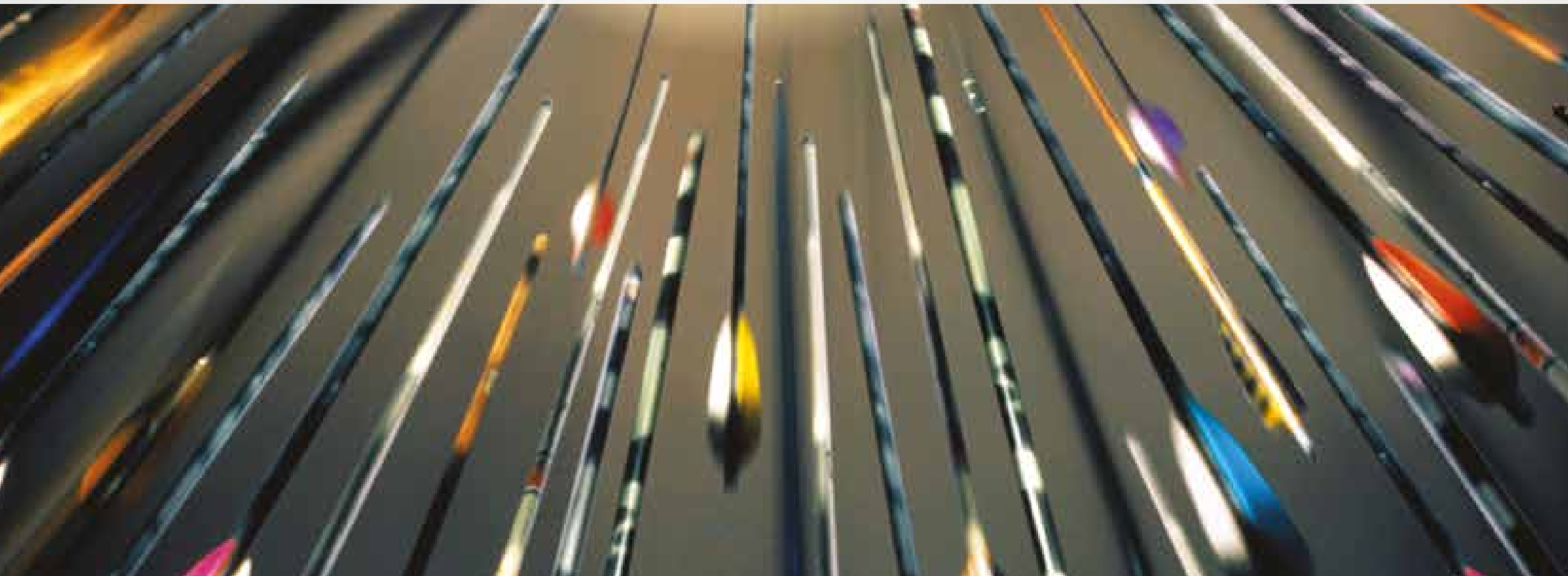
# الوحدة الرابعة

# تحليل البيانات Data Analysis

**ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:**

**٤-١** تحسب وتستخدم الوسط الحسابي لبيانات أولية ومجمّعة ومعروضة في جدول متضمنة بيانات مشفرة.

**٤-٢** تحسب وتستخدم التباين والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات، ولمجموعة بيانات مجمّعة من البيانات الأولية، مع المجاميع أو المجاميع المشفّرة (Σس، Σس$^{٢}$، Σ(س − أ)، Σ(س − أ)$^{٢}$).



## معرفة قبلية

| المصدر | تعلّمت سابقًا أن: | اختبر مهاراتك |
|---|---|---|
| الصف العاشر الوحدة الخامسة | تحسب الوسط الحسابي لبيانات مفردة أو منفصلة. | ١) أوجد الوسط الحسابي للأعداد ٧,٣، ٣,٩ ، ١,٣ ، ٦,٦ ، ٩,٢ ، ٤,٧ ، ٣,٩ ، ٣,١ |
| | تستخدم الحاسبة بكفاءة وتطبّق اختبارات الدقة المناسبة. | ٢) استخدم الآلة الحاسبة لتوجد قيمة $\frac{٦ \times ١,٧ + ٨ \times ١,٩ + ١١ \times ٢,١}{٦ + ٨ + ١١}$، ثم تحقّق من أن الناتج منطقي. |

## المفردات

النزعة المركزية central tendency

البيانات المشفرة coded data

الوسط الحسابي mean

التباين variance

الانحراف المعياري standard deviation

## لماذا ندرس تحليل البيانات؟

تعد القدرة على فهم البيانات وتنظيمها وترتيبها ثم تحليلها وتفسير نتائجها من المهارات المهمة في الحياة نظرًا لارتباطها باتخاذ القرار وحل المشكلات في العديد من المجالات، فالتقنيات التي سيتم دراستها في هذه الوحدة مفيدة لدراسة مواضيع مختلفة في الجامعة وعند قراءة الأخبار.

## ٤-١ الوسط الحسابي (المعدل)

يُعدّ الوسط الحسابي من أشهر مقاييس **النزعة المركزية central tendency**. نستخدم مقاييس النزعة المركزية لتلخيص القيم في مجموعة بيانات؛ حيث يمكن إيجاد مجموع قيم البيانات من وسطها الحسابي.

افترض مثلًا أن الوسط الحسابي لـ ١٢ قيمة هو ٧,٥:

$$\because \text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع قيم البيانات}}{\text{عدد القيم}}$$

$$٧,٥ = \frac{\text{مجموع قيم البيانات}}{١٢}$$

مجموع قيم البيانات = ٧,٥ × ١٢ = ٩٠

ستتعلّم الحسابات التي تتضمّن الوسط الحسابي، لذا سنقدم رمزًا يُستخدم بدلًا من التعريف اللغوي أعلاه.

سنستخدم الحرف الإغريقي 'سيجما'، ويكتب في صورة $\sum$ لتمثيل 'المجموع'، وسنستخدم أيضًا الرمز $\overline{\text{س}}$ لتمثيل الوسط الحسابي، حيث يمثل س قيم البيانات.

يبيّن الجدول الآتي كيفية استخدام الصيغة في البيانات المجمّعة وغير المجمّعة في صفوف منفصلة:

| | المجموع | قيم البيانات | تكرار قيم البيانات | عدد قيم البيانات | مجموع قيم البيانات | الوسط الحسابي |
|---|---|---|---|---|---|---|
| غير مجمعة (مُفردة) | $\sum$ | س | – | ن | $\sum\text{س}$ | $\overline{\text{س}} = \frac{\sum\text{س}}{\text{ن}}$ |
| مجمّعة | $\sum$ | س | ت | $\sum\text{ت}$ | $\sum\text{س ت}$ أو $\sum\text{ت س}$ | $\overline{\text{س}} = \frac{\sum\text{س ت}}{\sum\text{ت}}$ |

### نتيجة ١

الوسط الحسابي للبيانات غير المجمّعة هو $\overline{\text{س}} = \frac{\sum\text{س}}{\text{ن}}$

أمّا للبيانات المجمّعة فهو $\overline{\text{س}} = \frac{\sum\text{س ت}}{\sum\text{ت}}$، أو $\frac{\sum\text{ت س}}{\sum\text{ت}}$

**مُساعَدة**

تشير مقاييس النزعة المركزية إلى أنواع مختلفة، وهي: الوسط الحسابي (سندرسه في هذه الوحدة)، بالإضافة إلى الوسيط والمنوال (وقد تمت تغطيتهما في الصفوف السابقة).

**مُساعَدة**

تستخدم $\text{ن} = \sum\text{ت}$ للبيانات المجمّعة.

### مثال ١

الوسط الحسابي لكتل خمسة عمّال يساوي ٧٠,٢ كغم. يريد هؤلاء العمّال حمل الإسمنت والصعود به إلى سطح عمارة باستخدام المصعد. أوجِد أكبر كتلة من الإسمنت التي يمكنهم أن يحملوها إذا كانت الكتلة العظمى المسموح أن يحملها المصعد هي ٥٠٠ كغم.

**الحــل:**

$\sum\text{س} = \overline{\text{س}} \times \text{ن}$ ........ أعد ترتيب الصيغة $\overline{\text{س}} = \frac{\sum\text{س}}{\text{ن}}$ لتوجد مجموع كتل العمّال.

= ٧٠,٢ × ٥

= ٣٥١ كغم

٣٥١ + ص = ٥٠٠ ........ شكّل معادلة في ص لتمثل أكبر كتلة ممكنة من الإسمنت.

ص = ١٤٩

أكبر كتلة من الإسمنت مسموح حملها هي ١٤٩ كغم.

**مُساعَدة**

$\sum\text{ت س} = \sum\text{س ت}$ يشير مجموع ناتج ضرب كل قيمة في تكرارها. فمثلًا، مجموع خمس عشرات، وست عشرينات يساوي

(١٠ × ٥) + (٢٠ × ٦) =

(٥ × ١٠) + (٦ × ٢٠) = ١٧٠

## مثـــال ٢

أوجِد الوسط الحسابي لأربعين قيمة لـ س المعطاة في الجدول الآتي:

| س | ٣١ | ٣٢ | ٣٣ | ٣٤ | ٣٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| ت | ٥ | ٧ | ٩ | ٨ | ١١ |

**الحـــلّ:**

| س | ٣١ | ٣٢ | ٣٣ | ٣٤ | ٣٥ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ت | ٥ | ٧ | ٩ | ٨ | ١١ | مجـ ت = ٤٠ |
| س × ت | ١٥٥ | ٢٢٤ | ٢٩٧ | ٢٧٢ | ٣٨٥ | مجـ س ت = ١٣٣٣ |

أوجِد مجموع الـ ٤٠ قيمة (مجـ س × ت)، وذلك بجمع ناتج ضرب كل قيمة من قيم س في تكرارها. يتمّ ذلك في الصف المشار إليه في س × ت في الجدول. مجموع قيم س الـ ٤٠ يساوي ١٣٣٣

الوسط الحسابي ($\overline{س}$) = $\frac{\text{مجـ س ت}}{\text{مجـ ت}} = \frac{١٣٣٣}{٤٠} = ٣٣{,}٣٢٥$

## مجموعات البيانات المجمّعة



هناك طرائق مختلفة لتجميع مجموعات البيانات، وسنستخدم في هذه الوحدة جميع القيم معًا. فلإيجاد الوسط الحسابي لمجموعتَي بيانات مجمّعة، علينا أن نقسم مجموع كل القيم في المجموعتَين على المجموع الكلي لعدد القيم.

على سبيل المثال: عند تجميع مجموعة البيانات ١، ٢، ٣، ٤ مع مجموعة البيانات ٤، ٥، ٦ نحصل على مجموعة البيانات الجديدة المكوّنة من سبع قيم هي: ١، ٢، ٣، ٤، ٤، ٥، ٦

لاحظ ظهور القيمة ٤ مرّتَين.

الوسط الحسابي للمجموعة الأولى $\frac{١ + ٢ + ٣ + ٤}{٤} = ٢{,}٥$، والوسط الحسابي للمجموعة الثانية $\frac{٤ + ٥ + ٦}{٣} = ٥$

الوسط الحسابي للمجموعة المجمّعة = $\frac{١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٤ + ٥ + ٦}{٤ + ٣} = ٣\frac{٤}{٧}$

**مُساعَدة**

لاحظ أن الوسط الحسابي لمجموعتَي البيانات لا يساوي $\frac{٢{,}٥ + ٥}{٢}$.

## مثـــال ٣

تحتوي علبة كبيرة على ٧٢ قطعة حلوى وكتلها الكلية ٨٥٢,٤ غم، وتحتوي علبة صغيرة على ٢٤ قطعة حلوى وكتلها الكلية ٢٨٢,٨ غم. ما الوسط الحسابي لكتل الحلوى جميعها؟

**الحـــلّ:**

مجموع قطع الحلوى = ٧٢ + ٢٤ = ٩٦

أوجِد مجموع عدد قطع الحلوى ومجموع كتلها.

المجموع الكلي لكتل قطع الحلوى

= ٨٥٢,٤ + ٢٨٢,٨ = ١١٣٥,٢ غم

الوسط الحسابي للكتل = $\frac{١١٣٥{,}٢}{٩٦} = ١١{,}٨٢٥$ غم

**مُساعَدة**

الكتل المعطاة مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، حيث إن عدد قطع الحلوى صحيح، وإن كتل العلب غير متضمّن في المجاميع المعطاة.

## مثـــال ٤

لدى عائلة ٣٨ فيلمًا على أقراص مدمجة، الوسط الحسابي لزمن تشغيل كل منها هو ساعة و٣٢ دقيقة، ولديها أيضًا ٢٦ فيلم فيديو، الوسط الحسابي لزمن تشغيل كل منها هو ساعتان و٤ دقائق. أوجِد الوسط الحسابي لزمن تشغيل كل الأفلام لدى العائلة.

### الحـــلّ:

٣٨ + ٢٦ = ٦٤ فيلمًا.

(ساعة و٣٢ دقيقة × ٣٨) + (ساعتان و٤ دقائق × ٢٦) ........ أوجِد العدد الكلي للأفلام، والزمن الكلي لتشغيلها.

= (٩٢ × ٣٨) + (١٢٤ × ٢٦)

= ٦٧٢٠ دقيقة ........ مجموع زمن تشغيل الـ ٦٤ فيلمًا يساوي ٦٧٢٠ دقيقة.

الوسط الحسابي لزمن التشغيل = $\frac{٦٧٢٠}{٦٤}$

= ١٠٥ دقيقة أو ساعة و ٤٥ دقيقة.

## استكشف ١

في المثال (٤)، الوسط الحسابي لزمن التشغيل ١٠٥ دقيقة لا يساوي $\frac{٩٢ + ١٢٤}{٢}$

الوسط الحسابي لـ (أ)، (ب) $\neq$ $\frac{\text{الوسط الحسابي (أ) + الوسط الحسابي (ب)}}{٢}$، ولكن ذلك لا يحدث دائمًا.

افترض أن مجموعتَي بيانات (أ)، (ب) عدد قيم كل منهما م، ن والوسط الحسابي لهما $\frac{\sum أ}{م}$، $\frac{\sum ب}{ن}$ على الترتيب:

ما الحالة التي يكون فيها الوسط الحسابي لـ (أ)، (ب) معًا يساوي $\frac{\text{الوسط الحسابي (أ) + الوسط الحسابي (ب)}}{٢}$؟

**مُساعَدة**

الرمز $\neq$ يعني 'لا يساوي'.



## الوسط الحسابي في الجداول التكرارية المجمّعة (ذات الفئات)

عندما تقدَّم البيانات في جداول تكرارية مجمّعة، أو في مدرج تكراري، أو في منحنى تكراري تراكمي، نفقد بعض المعلومات عن البيانات الأولية. لهذا السبب لا نستطيع تحديد الوسط الحسابي بدقة، ولكن نستطيع حساب الوسط الحسابي التقديري. نقوم بذلك من خلال استخدام مراكز الفئات لتمثيل القيم في كل فئة.

نستخدم الصيغة $\bar{س} = \frac{\sum م ت}{\sum ت}$ الموجودة في النتيجة ١ لنحسب الوسط الحسابي التقديري، حيث تمثل م مركز الفئة.

## مثــال ٥

تمّ تنظيم حبّات جوز الهند في ٧٥ صندوقًا، في كل صندوق ٤٠ حبة لها الكتلة نفسها.

٤٦ صندوقًا تحتوي على حبّات جوز الهند كتلها الكلية من ٢٠ كغم إلى ٢٥ كغم ولا تساوي ٢٥ كغم.

٢٢ صندوقًا تحتوي على حبّات جوز الهند كتلها الكلية من ٢٥ كغم إلى ٤٠ كغم ولا تساوي ٤٠ كغم.

٧ صناديق تحتوي على حبّات جوز الهند كتلها الكلية من ٤٠ كغم إلى ٥٤ كغم ولا تساوي ٥٤ كغم.

أ احسب وسطًا حسابيًّا تقديريًّا لكتلة صندوق من جوز الهند.

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتحسب الوسط الحسابي التقديري لكتلة حبّة واحدة من جوز الهند.

### الحــلّ:

أ

| الكتلة (كغم) | ٢٠– | ٢٥– | ٤٠–٥٤ | |
|---|---|---|---|---|
| عدد الصناديق (ت) | ٤٦ | ٢٢ | ٧ | ∑ ت = ٧٥ |
| مركز الفئة (م) | ٢٢,٥ | ٣٢,٥ | ٤٧,٠ | |
| م × ت | ١٠٣٥ | ٧١٥ | ٣٢٩ | ∑ م ت = ٢٠٧٩ |

نرتب البيانات في جدول لتتضمّن مراكز الفئات م، ونواتج الضرب م × ت.

قدّر الوسط الحسابي لكتلة الصندوق:

$\bar{س} = \frac{∑ م ت}{∑ ت} = \frac{٢٠٧٩}{٧٥} = ٢٧,٧٢$ كغم.

نقدّر أن مجموع كتل ٧٥ صندوقًا هو ٢٠٧٩ كغم.

ب الوسط الحسابي التقديري لكتلة حبّة واحدة من جوز الهند $= \frac{٢٧,٧٢}{٤٠}$

$= ٠,٦٩٣$ كغم.

نقسم إجابة الجزئية (أ) على ٤٠ لأن كل صندوق يحتوي على ٤٠ حبة.

**مُساعَدة**

(٢٠–) تعني من القيمة ٢٠ إلى القيمة الأقل من ٢٥، و(٢٥–) تعني من القيمة ٢٥ إلى القيمة الأقل من ٤٠، وهكذا.

**مُساعَدة**

إذا لم يكن طول الفئات هو نفسه، فإن قيم المركز لن تتبع نمطًا محددًا.

## مثــال ٦

احسب الوسط الحسابي التقديري لأعمار ٥٠ طالبًا، حيث يوجد ستة عشر طالبًا أعمارهم ١٨ سنة، وعشرون طالبًا أعمارهم ١٩ سنة، وأربعة عشر طالبًا أعمارهم إما ٢٠ أو ٢١ سنة.

### الحــلّ:

| العمر بالسنوات (أ) | مركز الفئات (م) | عدد الطلبة (ت) | م × ت |
|---|---|---|---|
| ١٨ ⩽ أ < ١٩ | ١٨,٥ | ١٦ | ٢٩٦ |
| ١٩ ⩽ أ < ٢٠ | ١٩,٥ | ٢٠ | ٣٩٠ |
| ٢٠ ⩽ أ < ٢٢ | ٢١,٠ | ١٤ | ٢٩٤ |
| | | ∑ت = ٥٠ | ∑م ت = ٩٨٠ |

الطلبة ذوو الأعمار ١٨سنة تكون أعمارهم ١٨ سنة فأكثر ولكن لا تساوي ١٩

الطلبة ذوو الأعمار ١٩سنة تكون أعمارهم ١٩ سنة فأكثر ولكن لا تساوي ٢٠

الطلبة ذوو الأعمار ٢٠، ٢١ سنة تكون أعمارهم ٢٠ سنة فأكثر ولكن لا تساوي ٢٢

فئات الأعمار والمجاميع الفعلية مبيّنة في الجدول.

الوسط الحسابي التقديري للأعمار = $\frac{\text{∑م ت}}{\text{∑ت}} = \frac{٩٨٠}{٥٠}$

= ١٩,٦ سنة

لاحظ أن:

الوسط الحسابي للحدود الدنيا = $\frac{١٨ \times ١٦ + ١٩ \times ٢٠ + ٢٠ \times ١٤}{٥٠}$ = ١٨,٩٦

الوسط الحسابي للحدود العليا = $\frac{١٩ \times ١٦ + ٢٠ \times ٢٠ + ٢٢ \times ١٤}{٥٠}$ = ٢٠,٢٤

المتوسط الحسابي = (١٨,٩٦ + ٢٠,٢٤) ÷ ٢ = ١٩,٦ سنة.

(لاحظ أن متوسط الوسط الحسابي للحدود الدنيا والعليا يساوي الوسط الحسابي التقديري للأعمار).

## البيانات المشفّرة

لتشفير مجموعة من البيانات، يمكننا تحويل كل قيمها بإضافة ثابت موجب أو سالب، ويؤدّي ذلك إلى مجموعة من البيانات تسمى **البيانات المشفّرة coded data**.

أحد أسباب التشفير هو جعل البيانات أسهل عند التعامل معها بالحسابات يدويًا. كما يكون التعامل مع البيانات المشفرة أسهل أحيانًا من التعامل مع البيانات الأصلية (كأن نجعل الوسط الحسابي عددًا مناسبًا، كالصفر مثلًا).

إذا كانت قيم س هي ١٠١، ١٠٣، ١٠٤، ١٠٩، ١١٣

فتكون ١، ٣، ٤، ٩، ١٣هي القيم المناظرة لـ (س − ١٠٠).

الوسط الحسابي للقيم المشفّرة هو $\frac{\text{∑(س − ١٠٠)}}{٥} = \frac{١ + ٣ + ٤ + ٩ + ١٣}{٥}$ = ٦

**لاحقًا**

ستتعلم كيف تستخدم المجاميع المشفرة مثل ∑(س − ب)، ∑(س − ب)$^٢$ لتجد مقاييس التشتّت في الدرس ٤−٢

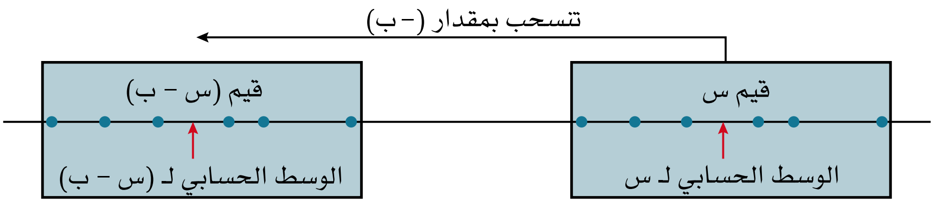
لقد طرحنا ١٠٠ من كل قيمة من قيم س، لذا نجمع ١٠٠ إلى قيمة الوسط الحسابي المشفّر لنجد الوسط الحسابي لقيم س.

الوسط الحسابي $(\bar{\text{س}})$ = الوسط الحسابي (س − ١٠٠) + ١٠٠ = ١٠٦

أو $\bar{\text{س}} = \frac{\sum(\text{س} - ١٠٠)}{٥} + ١٠٠ = ١٠٦$

بالاعتماد على المخطّط الآتي، إذا طرحنا (ب) من مجموعة قيم س فإنها جميعًا تنسحب بمقدار − ب وكذلك وسطها الحسابي.

وعليه، يكون الوسط الحسابي لـ (س − ب) = $\bar{\text{س}}$ − ب.




## نتيجة ٢

في البيانات المشفرة يكون:

$\bar{\text{س}} = \frac{\sum(\text{س} - \text{ب})}{\text{ن}} + \text{ب}$ (للقيم غير المجمعة).

$\bar{\text{س}} = \frac{\sum(\text{س} - \text{ب})\text{ت}}{\sum \text{ت}} + \text{ب}$ (للقيم المجمعة).

يمكن تلخيص هاتَين الصيغتَين بالصيغة $\bar{\text{س}}$ = الوسط الحسابي (س − ب) + ب.

**مُساعَدة**

لتشفير البيانات، يمكنك اختيار أيّة قيمة عشوائيًّا وطرحها من القيم المعطاة، (١٠٠ في هذه الحالة) لأنها تجعل الحسابات أكثر سهولة.

**مُساعَدة**

إذا حذفنا الأقواس من $\sum$(س − ب) نحصل على $\sum$س − $\sum$ب. الحد $\sum$ب يعني 'مجموع كل أحرف ب الموجودة' وعددها ن، فيكون $\sum$(س − ب) = $\sum$س − ن ب.

## مثــال ٧

تمّ تشفير أربعين قيمة لـ س كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

| س − ٣ | ٠− | ١٨− | ٢٤−٣٢ |
|---|---|---|---|
| التكرار | ٩ | ١٣ | ١٨ |

احسب الوسط الحسابي التقديري لقيم س.

### الحــلّ:

| س − ٣ | ٠−١٨ | ١٨−٢٤ | ٢٤−٣٢ |
|---|---|---|---|
| التكرار | ٩ | ١٣ | ١٨ |
| مركز الفئة (ت) (م) | ٩ | ٢١ | ٢٨ |
| م × ت | ٨١ | ٢٧٣ | ٥٠٤ |

$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{م ت}}{\sum \text{ت}} + ٣$

احسب الوسط الحسابي التقديري للبيانات المشفّرة باستخدام مراكز الفئات ٩، ٢١، ٢٨، ثم زيادة ٣ للحصول على الوسط الحسابي التقديري $\bar{\text{س}}$.

$= \frac{(٩ \times ٩) + (٢١ \times ١٣) + (٢٨ \times ١٨)}{٤٠} + ٣$

$= ٢٤{,}٤٥$

**مُساعَدة**

ليس ضروريًا أن تفكّ تشفير قيم س − ٣

## تمارين ٤-١

**١)** احسب الوسط الحسابي لكل ممّا يأتي:

أ ٢٨ ، ١٦ ، ٨٣ ، ٧٢ ، ١٠٥ ، ٥٥ ، ٦ ، ٣٥

ب ٧,٣ ، ٨,٦ ، ١١,٧ ، ٩,١ ، ١,٧ ، ٤,٢

ج $٣\frac{١}{٢}$ ، $٥\frac{١}{٤}$ ، $٩\frac{٣}{٤}$ ، $-٤\frac{١}{٤}$ ، $٧\frac{٣}{٨}$

**٢)** أ الوسط الحسابي للأعداد ١٥ ، ٣١ ، ٤٧ ، ٨٣ ، ٩٧ ، ١١٩ ، ب$^{٢}$ يساوي ٦٣، أوجِد قيم ب الممكنة.

ب الوسط الحسابي للأعداد ٦ ، ٢٩ ، ٣ ، ١٤ ، ق، (ق + ٨)، ق$^{٢}$، (١٠ − ق) يساوي ٢٠، أوجِد قيم ق الممكنة.

**٣)** إذا علمت أن:

أ ن = ١٤، Σس = ٣٢٥,٥، فأوجِد قيمة $\overline{س}$.

ب ن = ٤٥، $\overline{ص}$ = ٢٣,٦، فأوجِد قيمة Σص.

ج Σع = ٤٥٩٨، $\overline{ع}$ = ٥٢,٢٥، فأوجِد عدد القيم في مجموعة البيانات.

د Σس ت = ٨٦، $\overline{س}$ = $٧\frac{١}{٦}$، فأوجِد قيمة Σت.

هـ Σت = ١٣٥، $\overline{س}$ = ٠,٨٤٢، فأوجِد قيمة Σس ت.



**٤)** أوجِد الوسط الحسابي لقيم س وقيم ص في الجدولَين الآتيَين:

أ

| س | ١٨,٠ | ١٨,٥ | ١٩,٠ | ١٩,٥ | ٢٠,٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ت | ٨ | ١٠ | ١٧ | ٢٤ | ١ |

ب

| ص | ٣,٦٢ | ٣,٦٥ | ٣,٦٨ | ٣,٧١ | ٣,٧٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ت | ١٢٧ | ٢٠٩ | ٣٢٢ | ٢٩١ | ٢٥١ |

**٥)** للبيانات المعطاة في الجدول الآتي:

| ق | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|
| ت | ٩ | ١٣ | أ | ١١ |

إذا علمت أن $\overline{ق}$ = $٨\frac{٥}{٩}$، فاحسب قيمة أ.

٦) احسب الوسط الحسابي التقديري لقيم س وقيم ص المعطاة في الجدولَين الآتيَين:

أ

| س | ٠ ≤ س < ٢ | ٢ ≤ س < ٤ | ٤ ≤ س < ٨ | ٨ ≤ س < ١٤ |
|---|---|---|---|---|
| ت | ٨ | ٩ | ١١ | ٢ |

ب

| ص | ١٣ ≤ ص < ١٦ | ١٦ ≤ ص < ٢١ | ٢١ ≤ ص < ٢٨ | ٢٨ ≤ ص < ٣٣ | ٣٣ ≤ ص < ٣٦ |
|---|---|---|---|---|---|
| ت | ٧ | ١٧ | ٢٩ | ١٦ | ١١ |

٧) تَقدّم ٥٠ طالبًا وطالبة لاختبار ما، الوسط الحسابي لدرجات الـ ٢٢ طالبًا ٧١٪، والوسط الحسابي لدرجات الطالبات ٧٦٪. أوجِد الوسط الحسابي لدرجات الطلبة جميعهم.

٨) الوسط الحسابي للرواتب الشهرية لـ ١٢ سائقًا في شركة يساوي ٦٥٠ ريالًا عُمانيًا. إذا تمّ توظيف سائق جديد فسينقص الوسط الحسابي للرواتب ٨ ريالات عُمانية. أوجِد الراتب الشهري للسائق الجديد.

٩) الوسط الحسابي لأعمار ١٦ عضوًا في نادي الكاراتيه ٢٦سنة و٣ أشهر. ترك أحد الأعضاء النادي وأصبح الوسط الحسابي لأعمار الأعضاء الباقين ٢٦ سنة، أوجِد عمر العضو الذي ترك النادي. وضّح سبب إمكانية عدم دقة الإجابة.

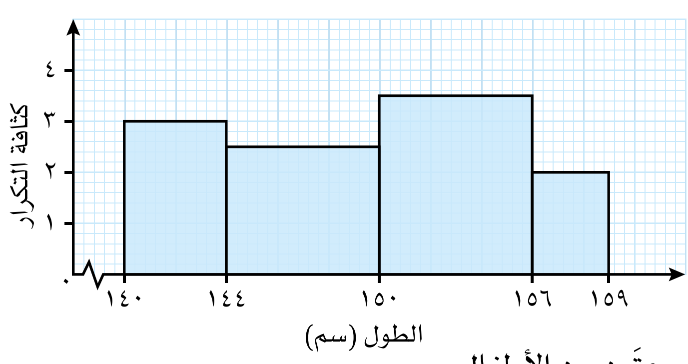
١٠) يبيّن الجدول الآتي معدّل الأجور في الساعة (بالريال العُماني) لموظفي إحدى الشركات:

| معدّل الأجور بالساعة (ريال عُماني) | ٢ | ٣ | ٤ | ٣٦ |
|---|---|---|---|---|
| عدد الموظفين (ت) | ٨ | ١١ | ١٧ | ١ |

أ أوجِد الوسط الحسابي لأجور الموظفين.

ب هل الوسط الحسابي يمثل مقياسًا جيّدًا للأجور؟ أعطِ تفسيرًا لإجابتك.

١١) يمثّل المخطّط المجاور أطوال ٥٤ طفلًا بالسنتيمتر.
تمّ تقسيم الأطفال إلى مجموعتَين متساويتَين في العدد: 'نصف الأطفال طويلو القامة وتتألّف مجموعتهم من ٢٧ طفلًا' و'نصف الأطفال قصيرو القامة وتتألف مجموعتهم من ٢٧ طفلًا أيضًا'. أعطِ تقديرًا للفرق بين الوسط الحسابي لأطوال هاتَين المجموعتَين من الأطفال.




١٢) يبيّن الجدول الآتي عدد حبّات الطماطم المزروعة في عدد من الأقسام في مزرعة ما:

| عدد حبّات الطماطم | ٢٠ – ٢٩ | ٣٠ – ٤٩ | ٥٠ – ٧٩ | ٨٠ – ١٠٠ |
|---|---|---|---|---|
| عدد الأقسام (ت) | ٣٢٩ | ٤١٣ | ٧٠٤ | ٢٥٨ |

احسب الوسط الحسابي التقديري لكمية الطماطم المنتجة في المزرعة.

**مُساعَدة**

في الأعمدة البيانية الموضحة في التمرين (١١)، يظهر التكرار حسب مساحة المستطيلات.

$\text{كثافة التكرار} = \dfrac{\text{التكرار}}{\text{عرض الفئة}}$

**١٣)** إذا كان الوسط الحسابي لـ ١٠ قيم للمتغيّر س هو سَ = ٧,٤، فأوجِد:

**أ** ∑س. **ب** ∑(س + ٢). **ج** ∑(س − ١).

**١٤)** إذا كان مجموع خمس وعشرين قيمة للمتغيّر ع معطى على النحو ∑(ع − ٧) = ٢٧٥، فأوجِد عَ.

**١٥)** إذا علمت أن عَ = ٢٢، و ∑(ع − ٤) = ٣٦٧٢، فأوجِد عدد قيم ع.

**١٦)** إذا كان مجموع أطوال ٢٥٠٠ مسمار (س ملم)، معطى بالعلاقة ∑(س − ٤٠) = ٨٧٥ ، فأوجِد الوسط الحسابي لأطوال المسامير.

★ **١٧)** تمّ تشفير بيانات ستّ قيم بطرح ١٣ من كلّ قيمة، إذا كانت خمس من القيم المشفّرة هي ٩,٣ ، ٥,٤ ، ٣,٩ ، ٧,٦ ، ٢,٢، والوسط الحسابي للقيم الستّ قبل التشفير هو ١٧,٦، فأوجِد القيمة السادسة المشفّرة.

★ **١٨)** الوسط الحسابي التقديري لسعة ١٢٠ ثلاجة موجودة في مستودع هو ٣٤٨ لترًا. سعة الثلاجات مبيّنة في الجدول الآتي:

| السعة (لتر) | ١٦٠− | ٢٠٠− | ٣٢٠− | ٤٠٠ − ل |
|---|---|---|---|---|
| عدد الثلاجات (ت) | ١٢ | ٢٨ | ٤٨ | ٣٢ |

وصل إلى المستودع شحنة جديدة من الثلاجات عددها **ن** جميعها من سعة بين ٢٠٠ و ٣٢٠ لترًا. أدّى ذلك إلى نقصان الوسط الحسابي للسعة بمقدار ٨ لترات. أوجِد قيمة **ن**.



★ **١٩)** تم تأثيث ٧٢ غرفة في فندق جديد. يبيّن الجدول الآتي عدد الغرف التي اكتمل تأثيثها خلال أول ١٠ أيام من العمل:

| عدد الغرف المؤثثة | ٥ | ٦ أو ٧ |
|---|---|---|
| عدد الأيام (ت) | ٢ | ٨ |

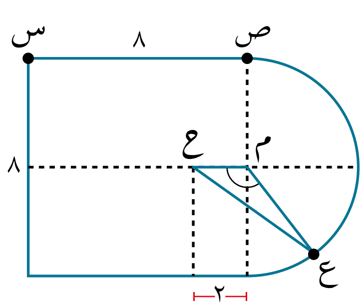
اعتمادًا على الأعداد المعطاة (يجب أن يستخدم الزوار ٦,٥ كمركز للفئة ٦ و٧)، قدّر عدد الأيام الإضافية اللازمة لإنهاء المهمّة. ما الفرضيات التي اعتمدتها في الحلّ؟

★ **٢٠)** في الشكل المجاور: تجاور مربّع طول ضلعه ٨ سم مع نصف دائرة مركزها م. تقع النقطة ع على محور تماثل الشكل وتبعد مسافة ٢ سم عن النقطة م، النقطتان س، ص ثابتتان لكن موقع النقطة ع متغيّر على محيط الشكل:

**أ** أوجِد الوسط الحسابي لطول المسافة من النقطة ع إلى كل من س، ص، ع عندما يكون قياس الزاوية عَ مَ ع يساوي:

(١) ١٨٠° (٢) ١٣٥°

**ب** أوجِد قياس الزاوية المنفرجة عَ مَ ع ليكون الوسط الحسابي لطول المسافة من النقطة ع إلى كل من س، ص، ع مطابقًا للوسط الحسابي من النقطة ع إلى النقطة س والنقطة ص.



## ٢-٤ التباين والانحراف المعياري

### استكشف ٢

اختر مجموعة من خمسة أعداد وسطها الحسابي ١٠

يدلنا انحراف العدد على بُعده عن الوسط الحسابي، وعلى موقعه منه. الأعداد الأكبر من الوسط الحسابي لها انحراف موجب، بينما الأعداد الأصغر من الوسط الحسابي لها انحراف سالب، كما هو موضّح في الشكل الآتي:


أوجِد انحراف كل عدد من الأعداد الخمسة عن الوسط الحسابي، ثم احسب الوسط الحسابي لانحرافاتها عن الوسط. ناقش نتائجك وقارنها مع أقرانك، ثم استقصِ مجموعة أخرى من الأعداد.

هل يمكنك أن تتوقّع النتيجة لأيّة مجموعة من خمسة أعداد وسطها الحسابي ١٠؟

هل يمكنك تبرير توقّعك؟ ماذا تتوقّع أن يحدث لو بدأت بأيّة مجموعة من الأعداد؟

في نشاط استكشف ٢، تكون قد اكتشفت أن الوسط الحسابي للانحراف ليس طريقة سليمة لقياس انحراف مجموعة من البيانات لأن الانحراف الموجب والانحراف السالب يلغي أحدهما الآخر. لذا إن أردنا قياس الانحراف عن الوسط الحسابي، فإننا نتأكد من أن كل انحراف يكون إمّا موجبًا أو صفرًا.



إن الطريقة التي نحل بها تساعدنا على حساب مربّع الانحراف لجميع قيم البيانات، وعلى إيجاد وسطها الحسابي. يسمّى ذلك 'متوسط مربّع الانحراف عن الوسط الحسابي'، وهو ما نسمّيه **تباين** البيانات **Variance**.

$$\text{تباين (س)} = \frac{\sum(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}$$

ويتم ذلك بحساب $\bar{\text{س}}$ أولًا، ثم إيجاد الفرق بين كل قيمة من قيم البيانات وس $\bar{\text{س}}$ وتربيعه، بحيث يكون الناتج غير سالب دائمًا.

بعدها، نجد مجموع هذه النواتج ونقسم الناتج على عدد القيم (ن).

لإيجاد الانحراف المعياري للبيانات، نأخذ الجذر التربيعي للتباين.

**الانحراف المعياري standard deviation** لـ س $= \sqrt{\text{تباين (س)}} = \sqrt{\frac{\sum(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}}$

**مُساعَدة**

لنوجد $\sum \text{س}^{٢}$ فإننا نجد تربيع كل قيمة من قيم البيانات، ثم نجمع كل التربيعات. من الأخطاء الشائعة إيجاد مجموع القيم ثم تربيع الناتج، يعبّر عن ذلك بالرمز $(\sum \text{س})^{٢}$.

ويمكن تبسيط صيغة التباين لتصبح:

$$\text{تباين (س)} = \frac{\sum \text{س}^{٢}}{\text{ن}} - (\bar{\text{س}})^{٢} = \frac{\sum \text{س}^{٢}}{\text{ن}} - \left(\frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}\right)^{٢}$$

يمكن أن نوجد التباين والانحراف المعياري بمعرفة ن، $\sum$ س، $\sum$ $س^2$، وهي عدد القيم ومجموعها ومجموع مربّعاتها على الترتيب. غالبًا ما نستخدم ع (س) للدلالة على الانحراف المعياري للمتغيّر س.

**تدل القيمة الصغيرة للانحراف المعياري على أن أغلب القيم قريبة من الوسط الحسابي، بينما تدل القيمة الكبيرة للانحراف المعياري على أن أغلب القيم تنتشر بعيدًا أكثر عن الوسط الحسابي.**

**مُساعَدة**

لنجد قيمة $س^2$ × ت (وهي قيمة ت × $س^2$ نفسها)، يمكن أن نضرب $س^2$ في ت أو أن نضرب س في س × ت.

على سبيل المثال، لدينا ماكينة لإعداد القهوة تقطّر ٤٠٠ مل من القهوة لكل كوب. سنتوقّع بعض التغيّر في كمية التقطير، ولكن إذا كان الانحراف المعياري كبيرًا، فسيشعر بعض الزبائن بأنهم قد خدعوا، لأنها يمكن أن تعطي أقل أو أكثر من ٤٠٠ مل في الكوب الواحد.

**نتيجة ٣**

للبيانات غير المجمّعة:

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{تباين (س)}} = \sqrt{\frac{\sum(س - \bar{س})^2}{ن}} = \sqrt{\frac{\sum س^2}{ن} - (\bar{س})^2}$$

$$\text{حيث } \bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

للبيانات المجمّعة:

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{تباين (س)}} = \sqrt{\frac{\sum(س - \bar{س})^2 ت}{\sum ت}} = \sqrt{\frac{\sum س^2 ت}{\sum ت} - (\bar{س})^2}$$

$$\text{حيث } \bar{س} = \frac{\sum س ت}{\sum ت}$$

**مُساعَدة**

يمكن أن نتذكّر صيغة التباين على أنها 'الفرق بين الوسط الحسابي للمربّعات ومربّع الوسط الحسابي'.



## مثـــال ٨

لمجموعة الأعداد الخمسة الآتية ٣، ٩، ١٥، ٢٤، ٢٩ أوجِد:

أ الانحراف المعياري.

ب الأعداد التي تنحرف عن الوسط الحسابي بأكثر من انحراف معياري واحد.

### الحــلّ:

أ التباين $= \frac{\sum س^2}{ن} - \left(\frac{\sum س}{ن}\right)^2$

$$= \frac{٣^2 + ٩^2 + ١٥^2 + ٢٤^2 + ٢٩^2}{٥} - \left(\frac{٣ + ٩ + ١٥ + ٢٤ + ٢٩}{٥}\right)^2$$

نطرح مربّع الوسط الحسابي من الوسط الحسابي للمربّعات لنوجِد التباين.

$$= \frac{١٧٣٢}{٥} - \left(\frac{٨٠}{٥}\right)^2$$

$$= ٣٤٦{,}٤ - ١٦^2$$

$$= ٩٠{,}٤$$

الانحراف المعياري $= \sqrt{٩٠{,}٤}$

$= ٩{,}٥١$

نأخذ الجذر التربيعي للتباين لنوجِد الانحراف المعياري مقرّبًا إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

**ب** $16 - 9{,}51 = 6{,}49$

$16 + 9{,}51 = 25{,}51$

نوجِد القيم التي تقلّ عن الوسط الحسابي بمقدار ٩,٥١ والقيم التي تزيد عن الوسط الحسابي بمقدار ٩,٥١ باستخدام الوسط الحسابي ١٦

العددان هما ٣، ٢٩

من بين الأعداد الخمسة، حدّد العدد الذي يقع خارج المجال $6{,}49 \leqslant$ العدد $\leqslant 25{,}51$

## مثــال ٩

أوجِد الانحراف المعياري لقيم س في الجدول الآتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية:

| س | ت |
|---|---|
| ١٢ | ١٣ |
| ١٤ | ٢٨ |
| ١٦ | ١٠ |

### الحــلّ:

| س | ت | س × ت | س$^2$ت = س × س ت |
|---|---|---|---|
| ١٢ | ١٣ | ١٥٦ | ١٢ × ١٥٦ = ١٨٧٢ |
| ١٤ | ٢٨ | ٣٩٢ | ١٤ × ٣٩٢ = ٥٤٨٨ |
| ١٦ | ١٠ | ١٦٠ | ١٦ × ١٦٠ = ٢٥٦٠ |
| | ∑ت = ٥١ | ∑س ت = ٧٠٨ | ∑س$^2$ ت = ٩٩٢٠ |

الجدول المجاور هو جدول تكراري موسّع يستخدم لإيجاد ∑ت، ∑س ت، ∑س$^2$ت المطلوبة لحساب الانحراف المعياري.

$$ع(س) = \sqrt{\frac{∑س^2 ت}{∑ت} - (\overline{س})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٩٩٢٠}{٥١} - \left(\frac{٧٠٨}{٥١}\right)^2}$$

$$= ١{,}٣٤$$

نستخدم المجاميع ٥١، ٧٠٨، ٩٩٢٠ لنوجِد الانحراف المعياري.

**مُساعَدة**

يمكنك أيضًا استخدام الصيغة البديلة في الحل إن رغبت في ذلك.

**مُساعَدة**

لاحظ كيف تمّ احتساب قيم س$^2$ت

**مُساعَدة**

استخدم دائمًا قيمة الوسط الحسابي الدقيقة لتحسب التباين والانحراف المعياري.

ماذا يحدث إذا استخدمنا قيمة مقرّبة للوسط الحسابي؟

عند تقريب الوسط الحسابي في المثال ٩ إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، يصبح الناتج ٧٠٨ ÷ ٥١ = ١٣,٩

إذا استخدمنا $\overline{س}$ = ١٣,٩ في حساباتنا، فسنحصل على ع (س) = $\sqrt{\frac{٩٩٢٠}{٥١} - (١٣{,}٩)^2}$ = ١,١٤

يوجد خطأ مقداره ٠,٢

تقريب الوسط الحسابي تسبّب في خطأ أساسي (٠,٢ يساوي ١٥٪ من القيمة الفعلية ١,٣٤). لذا عند حساب التباين أو الانحراف المعياري نستخدم $\frac{\sum س}{ن}$ أو $\frac{\sum س\ ت}{\sum ت}$ وليس قيمة الوسط الحسابي التقديري.

عندما تكون البيانات مجمّعة، تكون القيم الفعلية غير مرئية، لكننا نحسب التباين التقديري أو الانحراف المعياري التقديري. تستخدم الصيغ في النتيجة ٣ لحسابها، حيث تمثل م مراكز الفئات، $\bar{س} = \frac{\sum م\ ت}{\sum ت}$ الوسط الحسابي التقديري.

## مثـــال ١٠

يبيّن الجدول الآتي أطوال ٢٠ طفلًا (بالمتر)، احسب الانحراف المعياري التقديري لأطوال الأطفال.

| الطول (متر) | ١,٢− | ١,٤− | ١,٥−١,٧ |
|---|---|---|---|
| عدد الأطفال (ت) | ٢ | ١٢ | ٦ |

### الحـــلّ:

| الطول (متر) | ١,٢− | ١,٤− | ١,٥−١,٧ | |
|---|---|---|---|---|
| عدد الأطفال (ت) | ٢ | ١٢ | ٦ | $\sum$ت = ٢٠ |
| مركز الفئة (م) | ١,٣ | ١,٤٥ | ١,٦ | |
| م × ت | ٢,٦ | ١٧,٤ | ٩,٦ | $\sum$م ت = ٢٩,٦ |
| $م^2$ × ت | ٣,٣٨ | ٢٥,٢٣ | ١٥,٣٦ | $\sum م^2 ت$ = ٤٣,٩٧ |

لقد وسّعنا الجدول التكراري ليتضمّن مراكز الفئات (م)، ولنوجِد $\sum$ت، $\sum$م ت، $\sum م^2$ت كما هو مبيّن في الجدول المجاور.

الانحراف المعياري التقديري = $\sqrt{\frac{\sum م^2 ت}{\sum ت} - (\bar{س})^2}$

$= \sqrt{\frac{٤٣,٩٧}{٢٠} - \left(\frac{٢٩,٦}{٢٠}\right)^2}$

$= \sqrt{٠,٠٠٨١}$

= ٠,٠٩ متر.

## مثـــال ١١

إذا كان ن = ٢٥، مجـ س = ٢٧٥، وتباين(س) = ٧، فأوجِد مجـ س$^٢$.

### الحـــلّ:

$$\frac{\text{مجـ س}^{٢}}{٢٥} - \left(\frac{٢٧٥}{٢٥}\right)^{٢} = ٧$$

عوّض عن القيم المعطاة في صيغة التباين، ثم أعِد ترتيب الحدود، واكتبها بدلالة مجـ س$^٢$.

$$\text{مجـ س}^{٢} = ٢٥ \times \left[٧ + \left(\frac{٢٧٥}{٢٥}\right)^{٢}\right]$$

$$= ٣٢٠٠$$

## البيانات المشفّرة

### استكشف ٣

يبيّن الجدول الآتي درجات ثلاثة من الطلبة في خمسة اختبارات (الاختبارات نفسها والعلامة القصوى على كل منها ٢٠):

| | الاختبار ١ | الاختبار ٢ | الاختبار ٣ | الاختبار ٤ | الاختبار ٥ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عامر | ١٢ | ١٧ | ١١ | ٩ | ١٦ | س |
| بدر | ١١ | ١٦ | ١٠ | ٨ | ١٥ | س − ١ |
| سليم | ١٥ | ٢٠ | ١٤ | ١٢ | ١٩ | س + ٣ |

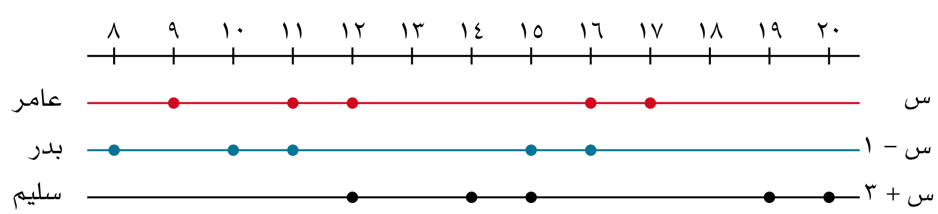
لاحظ أن درجات بدر تقل درجة واحدة بصورة ثابتة عن درجات عامر، وتزيد درجات سليم ٣ درجات بصورة ثابتة عن درجات عامر.

أوجِد التباين، والانحراف المعياري لدرجات كل طالب.

هل يمكنك أن تفسّر نتائجك؟

ما تأثير إضافة عدد ثابت إلى كل قيمة من قيم مجموعة البيانات على قيمة التباين؟ وكيف يمكن أن نوجد التباين والانحراف المعياري للبيانات الأصلية باستخدام البيانات المشفّرة؟

في نشاط استكشف ٣، اكتشفت أن لمجموعة البيانات س، س − ١، س + ٣ لها الفروقات نفسها. فتأثير إضافة −١ أو ٣ تسحب مجموعة القيم كاملة، ولكن ليس لها تأثير على نمط الانتشار، كما هو موضّح في المخطّط الآتي. فلدرجات الطلبة الثلاثة التباين والانحراف المعياري نفسه:



### نتيجة ٤

في البيانات المشفرة يحسب التباين كالآتي:

$$\frac{\sum \text{س}^2}{\text{ن}} - (\bar{\text{س}})^2 = \frac{\sum (\text{س} - \text{ب})^2}{\text{ن}} - \left(\frac{\sum (\text{س} - \text{ب})}{\text{ن}}\right)^2$$ للبيانات غير المجمّعة.

$$\frac{\sum \text{س}^2 \text{ت}}{\sum \text{ت}} - (\bar{\text{س}})^2 = \frac{\sum (\text{س} - \text{ب})^2 \text{ت}}{\sum \text{ت}} - \left(\frac{\sum (\text{س} - \text{ب}) \text{ت}}{\sum \text{ت}}\right)^2$$ للبيانات المجمّعة.

يمكن تلخيص هذه الصيغ على النحو: تباين(س) = تباين(س − ب).

## مثال ١٢

إذا كان لديك بعض البيانات المشفرة حيث التباين (س − ١٠٠٠) = ٤,١٢
فأوجد تباين (س).

**الحل:**

∵ تباين (س − ١٠٠٠) = تباين (س).
∴ تباين (س) = تباين (س − ١٠٠٠) = ٤,١٢
وبالتالي: تباين (س) = ٤,١٢

## تمارين ٤-٢



**١)** أوجِد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل ممّا يأتي:

أ ٢٧، ٤٣، ٢٩، ٣٤، ٥٣، ٣٧، ١٩، ٥٨

ب ٦,٢، −٥,٨، ٧,٧، −٣,٤، ١٣,٥، −٩,١١

**٢)** يبيّن الجدول الآتي درجات إبراهيم في مواد العلوم لثلاث سنوات متتالية:

| الأحياء | الكيمياء | الفيزياء |
|---|---|---|
| ٢١، ٣٣، ٤٥ | ٤١، ٥٣، ٦٥ | ٥١، ٦٣، ٧٥ |

أ احسب التباين لدرجات إبراهيم في كل مادة من المواد الثلاث.

ب فسّر النتائج الثلاث التي حصلت عليها في الجزئية (أ). هل ينطبق التفسير نفسه على الوسط الحسابي لدرجات إبراهيم في كل مادة؟

**٣)** يبيّن الجدول الآتي عدد أشجار النخيل لدى ٣٥ عائلة:

| عدد أشجار النخيل | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد العائلات (ت) | ٦ | ١٢ | ٩ | ٤ | ٣ | ١ |

أوجِد الوسط الحسابي، والتباين لعدد أشجار النخيل.

**٤)** يبيّن الجدول الآتي عدد الأكواز (ثمرة الذرة) التي تنتجها ٣٦٠ نبتة ذرة:

| عدد الأكواز | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد نبتات الذرة (ت) | ١١ | ٧٥ | ١٨٥ | ٨١ | ٨ |

احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد أكواز الذرة.

**٥)** يبيّن الجدول الآتي عدد الدقائق التي يستغرقها ٤٠ طالبًا، و ٣٠ طالبة لإنجاز الواجب المنزلي:

| عدد الدقائق المستغرقة (دقيقة) | ٢٠- | ٣٠- | ٤٠- | ٦٠-٨٠ |
|---|---|---|---|---|
| عدد الطالبات (ت) | ٦ | ١٤ | ٧ | ٣ |
| عدد الطلاب (ت) | ١٥ | ١١ | ٧ | ٧ |

**أ** احسب الوسط الحسابي التقديري، والانحراف المعياري التقديري للزمن المستغرق لكل الطالبات، ثم لكل الطلاب.

**ب** قارن بين الزمن المستغرق للمجموعتَين من خلال:

١) الوسط الحسابي التقديري.

٢) الانحراف المعياري التقديري.

**٦)** يبيّن الجدول الآتي أطوال ٥٠ عصًا مقرّبة إلى أقرب سنتيمتر:

| الطول (سم) | ١٥-١٧ | ١٨-٢٤ | ٢٥-٢٩ | ٣٠-٣٧ |
|---|---|---|---|---|
| عدد العصي (ت) | ١٣ | ١٨ | ١١ | ٨ |

احسب الانحراف المعياري التقديري لأطوال العصي.

**٧)** يبيّن الجدول الآتي مجموعة من البيانات للمتغيّر س:

| س | ١٥ | ١٦ | ١٧ | ١٨ | ١٩ | ٢٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ت | ٢ك | ك + ٥ | ك − ٣ | ١٠ | ٨ | ٣ |

**أ** أوجِد قيمة ك.

**ب** احسب التباين للمتغيّر س إذا علمت أن $\overline{س}$ = ١٧

**٨)** يلخّص الجدول الآتي أطوال ١٥٠ طفلًا (بالسنتيمتر):

| الطول (سم) | عدد الأطفال (ت) |
|---|---|
| ١٤٠ إلى ١٤٤ | أ |
| ١٤٤ إلى ١٥٠ | ب |
| ١٥٠إلى ١٦٠ | ٦٩ |
| ١٦٠ إلى ١٦٥ | ٢٨ |

**أ** إذا علمت أن الوسط الحسابي التقديري للطول يساوي ١٥٣,١٤ سم، فبيّن أن ١٤٢ أ + ١٤٧ ب = ٧٧٢٦، ثم احسب قيمة كل من أ، ب

**ب** احسب الانحراف المعياري التقديري للطول.

**٩)** إذا علمت أن:

أ $\sum$و$^{٢}$ = ٥٤٨٠، $\sum$و = ٢٨٨، ن = ٦٤، فأوجِد التباين لقيم و.

ب $\sum$ك$^{٢}$ = ٤٠٠٠، $\bar{ك}$ = ٢,٥، ن = ٣٦، فأوجِد الانحراف المعياري لقيم ك.

ج $\sum$س$^{٢}$ت = ٦١٢٠، $\sum$ت = ٤٠، والانحراف المعياري لقيم س هو ١٢، فأوجِد $\sum$س ت.

د $\sum$س ت = ٢٨٠٠، $\sum$ت = ٥٠، وتباين قيم س هو ١٠٠، فأوجِد $\sum$س$^{٢}$ت.

هـ $\sum$ل$^{٢}$ = ١٩٣١٤٤، $\sum$ل = ٢٣٢٤، والانحراف المعياري لقيم ل هو ٣، فأوجِد عدد القيم (ن).

**١٠)** تمثّل البيانات الآتية عشرين قراءة للمتغيّر ص وقد لخّصت على النحو: $\sum$(ص − ٥)$^{٢}$ = ٨٩٠، $\sum$(ص − ٥) = ١٣٠، أوجِد الانحراف المعياري لـِ ص.

**١١)** تم تسجيل ارتفاع منسوب مياه الأمطار (د) بوحدة الملمتر (ملم) في أحد المواقع على مدار ٣٦٥ يومًا متتاليًا، ولُخِّصت البيانات على النحو: $\sum$(د − ٣)$^{٢}$ = ٩٩٥٠ و $\sum$(د − ٣) = ١٧٩٥,٨، احسب:

أ الوسط الحسابي لارتفاع منسوب مياه الأمطار في اليوم.

ب قيمة $\sum$د$^{٢}$.

★ **١٢)** تمّ تسجيل كتلة المخلّفات (طن) في منتجع سياحي خلال ٣٩ أسبوعًا مقرّبة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين. تمّ تدوين البيانات في الجدول الآتي:

| كتلة المخلفات (طن) | ٠,١٥ – ٠,٢٩ | ٠,٣٠ – ٠,٨٦ | ٠,٨٧ – ١,٣٥ | ١,٣٦ – ٢,٠٠ |
|---|---|---|---|---|
| عدد الأسابيع (ت) | ٥ | ٨ | ٢٠ | ٦ |

أ احسب الوسط الحسابي التقديري، والانحراف المعياري التقديري لكتلة المخلفات في كل أسبوع مقرّبًا كل ناتج من الناتجَين إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

ب يتم إغلاق المنتجع السياحي لمدة ١٣ أسبوعًا إضافيًّا من العام، ولا يتم إنتاج أيّة نفايات خلال تلك الفترة. لو تضمّنت الحسابات هذه البيانات الإضافية، فما أثرها على الوسط الحسابي وعلى الانحراف المعياري؟

★ **١٣)** يبيّن الجدول الآتي أعمار ٥٠ موظفًا (الأعمار أعداد صحيحة) لهيئة إدارة فندق ما. الوسط الحسابي التقديري للبيانات يساوي ٣٧,٣٢، والتباين التقديري يساوي ٦٩,١١٧٦:

| العمر (سنوات) | ٢٣–٣٠ | ٣١–٣٧ | ٣٨–٤٥ | ٤٦–٥٩ |
|---|---|---|---|---|
| عدد الموظفين (ت) | ١٤ | س | ص | ٦ |

بعد سنة واحدة بالضبط من هذه الحسابات، التحق سالم فكان الموظف ٥١، وأصبح الوسط الحسابي ٣٨ سنة بالضبط. أوجِد عُمُرَ سالم عندما التحق بالعمل، محدّدًا الأثر الحاصل على تباين أعمار موظفي الهيئة. فسر إجابتك.

## قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

**الوسط الحسابي**

- الوسط الحسابي هو أحد مقاييس النزعة المركزية.
  - للبيانات غير المجمّعة، $\overline{\text{س}} = \dfrac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$
  - للبيانات المجمّعة، $\overline{\text{س}} = \dfrac{\sum \text{س ت}}{\sum \text{ت}}$ أو $\dfrac{\sum \text{ت س}}{\sum \text{ت}}$

**البيانات المشفّرة**

- يمكن تلخيص صيغ التشفير للبيانات المجمّعة وغير المجمّعة في:
  - $\overline{\text{س}} = \text{الوسط الحسابي }(\text{س} - \text{ب}) + \text{ب}$
  - للبيانات غير المجمّعة:

$$\overline{\text{س}} = \frac{\sum(\text{س} - \text{ب})}{\text{ن}} + \text{ب}$$

  - للبيانات المجمّعة:

$$\overline{\text{س}} = \frac{\sum(\text{س} - \text{ب})\text{ت}}{\sum \text{ت}} + \text{ب}$$

  - للبيانات غير المجمّعة:

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{تباين }(\text{س})} = \sqrt{\frac{\sum(\text{س} - \overline{\text{س}})^{2}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\sum \text{س}^{2}}{\text{ن}} - (\overline{\text{س}})^{2}} \text{ حيث } \overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$$

  - للبيانات المجمّعة:

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{تباين }(\text{س})} = \sqrt{\frac{\sum(\text{س} - \overline{\text{س}})^{2}\text{ت}}{\sum \text{ت}}} = \sqrt{\frac{\sum \text{س}^{2}\text{ت}}{\sum \text{ت}} - (\overline{\text{س}})^{2}} \text{ حيث } \overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{س ت}}{\sum \text{ت}}$$

- لمجموعة بيانات س وبيانات ص عدد قيمها على الترتيب $\text{ن}_{\text{س}}$، $\text{ن}_{\text{ص}}$:
  - $\text{الوسط الحسابي} = \dfrac{\sum \text{س} + \sum \text{ص}}{\text{ن}_{\text{س}} + \text{ن}_{\text{ص}}}$، والتباين $= \dfrac{\sum \text{س}^{2} + \sum \text{ص}^{2}}{\text{ن}_{\text{س}} + \text{ن}_{\text{ص}}} - \left(\dfrac{\sum \text{س} + \sum \text{ص}}{\text{ن}_{\text{س}} + \text{ن}_{\text{ص}}}\right)^{2}$
- يمكن تلخيص صيغ تشفير البيانات المجمّعة وغير المجمّعة على النحو:

$$\text{تباين }(\text{س}) = \text{تباين }(\text{س} - \text{ب})$$

  - للبيانات غير المجمّعة والمشفّرة:

$$\frac{\sum \text{س}^{2}}{\text{ن}} - (\overline{\text{س}})^{2} = \frac{\sum(\text{س} - \text{ب})^{2}}{\text{ن}} - \left(\frac{\sum(\text{س} - \text{ب})}{\text{ن}}\right)^{2}$$

  - للبيانات المجمّعة والمشفّرة:

$$\frac{\sum \text{س}^{2}\text{ت}}{\sum \text{ت}} - (\overline{\text{س}})^{2} = \frac{\sum(\text{س} - \text{ب})^{2}\text{ت}}{\sum \text{ت}} - \left(\frac{\sum(\text{س} - \text{ب})\text{ت}}{\sum \text{ت}}\right)^{2}$$

## تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الرابعة

**١)** إذا كان الوسط الحسابي لقيم البيانات س المبيّنة في الجدول الآتي هو ٧٫١٥:

| س | ٣ | ٦ | ١٠ | ١٥ |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | أ | ب | ج | د |

**أ** أوجِد الوسط الحسابي لقيم البيانات ص المبيّنة في الجدول الآتي:

| ص | ١١ | ١٤ | ١٨ | ٢٣ |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | أ | ب | ج | د |

**ب** أوجِد الوسط الحسابي التقديري لقيم ع المبيّنة في الجدول الآتي:

| ع | ٢– | ٨– | ١٤– | ٢٤–٣٤ |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | أ | ب | ج | د |

**٢)** يبيّن الجدول الآتي عدد الكتب التي قرأها مجموعة من الطلبة خلال أحد الأشهر:

| عدد الكتب | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|
| عدد الطلبة | ٣ | ٨ | ١٥ | ك |

أوجِد قيمة ك إذا كان الوسط الحسابي للكتب التي تمّت قراءتها ٣٫٧٥

**٣)** سُئل ثلاثة أولاد وسبع بنات عن النقود التي في حوزة كل منهم. يوجد مع كل ولد ٢٫٥٠٠ ريال عُماني، والوسط الحسابي للنقود مع العشرة أطفال هو ٣٫٩٠٠ ريال عُماني.

**أ** بيّن أن مجموع النقود الموجودة مع البنات ٣١٫٥٠٠ ريال عُماني.

**ب** إذا كان مع كل بنت المقدار نفسه من النقود، فأوجِد الانحراف المعياري لكمّية النقود مع الأطفال الـ ١٠

**٤)** كان عمق الثلج على أحد الجبال قبل يومَين من مسابقة التزلّج س متر، عند ٣٢ نقطة على المسار. تم قياس سماكة الثلج، فاكتشف أن القيمة العددية لـ $\sum$س، و $\sum$س$^2$ متساوية.

**أ** إذا علمت أن متوسط عمق الثلج كان ٠٫٨٨٥ م، فأوجِد الانحراف المعياري للمتغيّر س.

**ب** سقط الثلج في اليوم السابق للمسابقة، فازدادت سماكة الثلج على كامل المسار بمقدار ١٫٥ سم. اشرح تأثير ذلك على الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للمتغيّر س.

**٥)** حصل ١١ شخصًا عند رمي ثلاثة أسهم على لوحة الأسهم على الدرجات ٥٤، ٤٦، ٤٣، ٥٢، ١٨٠، ٥٠، ٤١، ٥٦، ٥٢، ٤٩، ٥٤:

أ أوجِد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لهذه الدرجات.

ب فسّر قيم المقاييس الإحصائية في الجزئية (أ).

**٦)** تمّ قياس الأطوال لمجموعة من ٢٨ شخصًا، فكان المتوسط الحسابي للأطوال ١٧٢,٦ سم، والانحراف المعياري ٤,٥٨ سم. ترك المجموعة شخص واحد طوله ١٦١,٨ سم:

أ أوجِد الوسط الحسابي لأطوال مَن تبقّى من المجموعة، وعددهم ٢٧ شخصًا.

ب أوجِد $\sum$س$^{2}$ للمجموعة الأصلية التي عددها ٢٨ شخصًا، وأوجِد الانحراف المعياري لأطوال مَن تبقّى منها، وعددهم ٢٧ شخصًا.

**٧)** طلب من ١٢٠ شخصًا أن يقرأوا مقالًا في صحيفة. يبيّن الجدول الآتي الزمن الذي استغرقه الأشخاص في قراءة المقال مقربًا إلى أقرب ثانية:

| الزمن (ث) | ١–٢٥ | ٢٦–٣٥ | ٣٦–٤٥ | ٤٦–٥٥ | ٥٦–٩٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد الأشخاص | ٤ | ٢٤ | ٣٨ | ٣٤ | ٢٠ |

احسب الوسط الحسابي التقديري، والانحراف المعياري التقديري لزمن القراءة.



# الوحدة الخامسة

# الهندسة الإحداثية Coordinate Geometry

**ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:**

٥-١ تحسب طول القطعة المستقيمة، وتجد إحداثيات منتصفها.

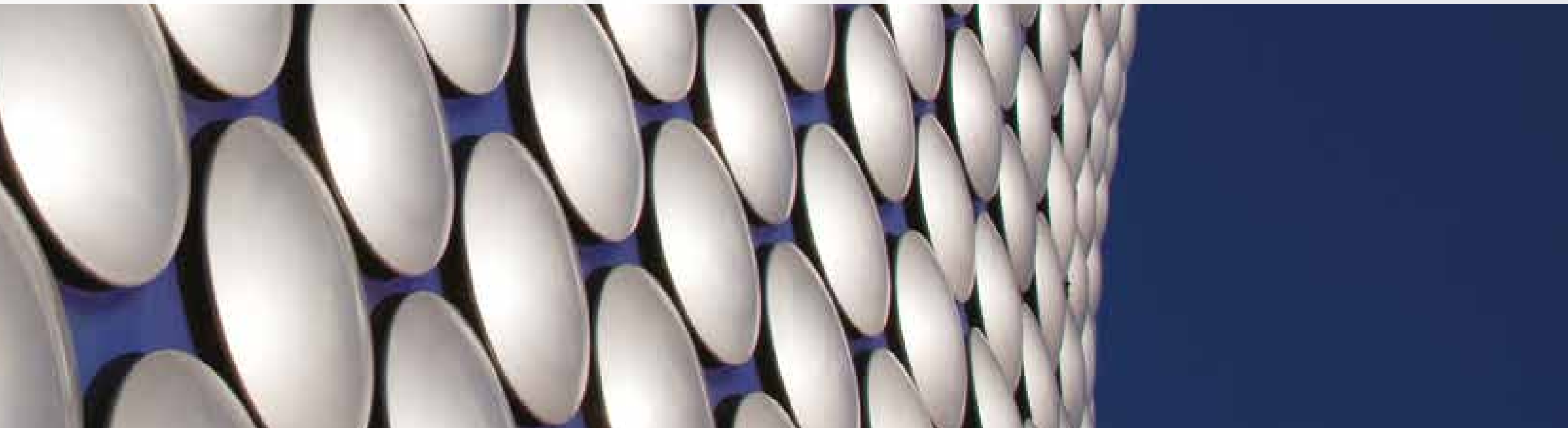
٥-٢ تجد ميل مستقيم بمعلومية نقطتين، وميل المستقيم العمودي عليه.

٥-٣ تجد معادلة المستقيم عند توفر المعلومات الكافية بما في ذلك معادلة المستقيمات المتوازية أو العمودية لمستقيم آخر.

٥-٤ تجد معادلة الدائرة (باستخدام الإكمال إلى مربّع عند الضرورة).

٥-٥ تستخدم طرق جبرية لحلّ مسائل تتضمّن المستقيمات والدوائر، والعلاقة فيما بينها.

٥-٦ تجد مجموعة قيم ك حيث المستقيم ص = س + ك يتقاطع أو يلامس أو لا يتقاطع مع منحنى الدالة التربيعية أو الدائرة.



## المفردات

قطعة مستقيمة
Line segment

نقطة المنتصف
Midpoint

الصورة العامة للدائرة
General form of a circle

ميل المستقيم
Gradient of a straight line

المستقيمات المتوازية
Parallel lines

المستقيمات المتعامدة
Perpendicular lines

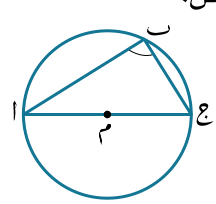
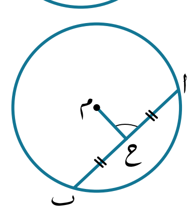
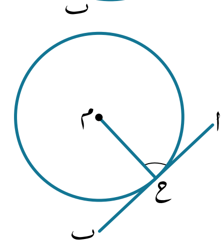
مركز الدائرة
Center of a circle

نصف قطر الدائرة
Radius of a circle

مماس الدائرة
tangent to a circle

الصورة القياسية للدائرة
Standard form of a circle

## معرفة قبلية

| المصدر | تعلمت سابقًا أن: | اختبر مهاراتك |
|---|---|---|
| الصف التاسع<br>الوحدة السابعة | توجد طول القطعة المستقيمة ونقطة منتصفها. | ١) أوجد إحداثيات نقطة المنتصف، وطول القطعة المستقيمة التي تصل بين (−٧، ٤)، (−٢، −٨). |
| الصف التاسع<br>الوحدة السابعة | توجد ميل مستقيمٍ، وتوجد ميل المستقيم العمودي عليه. | ٢) أ أوجد ميل المستقيم الذي يمرُّ بالنقطتَين ا(−١، ٣)، ب(٥، ٢).<br>ب أوجِد ميل المستقيم العمودي على المستقيم اب. |
| الصف التاسع<br>الوحدة السابعة | تفسّر معادلات المستقيمات التي في صورة ص = م س + جـ، وتستخدمها. | ٣) مستقيم معادلته ص = $\frac{٢}{٣}$س − ٥<br>اكتب:<br>أ ميل المستقيم.<br>ب الجزء المقطوع من المحور الصادي.<br>ج الجزء المقطوع من المحور السيني. |
| الصف الحادي عشر<br>الوحدة الأولى | تكمل المربّع، وتحلّ المعادلات التربيعية. | ٤) أ ضع س$^{٢}$ − ٨س − ٥ في صورة مربع كامل.<br>ب حلّ المعادلة<br>س$^{٢}$ − ٨س − ٥ = ٠ |
| الصف العاشر<br>الوحدة الرابعة | تستخدم نظريات الدوائر. | ٥) ما قياس الزاوية المحددة في كل شكل؟<br>أ  <br>ب  <br>ج   |

١٣٨

## لماذا ندرس الهندسة الإحداثية؟

بنيت هذه الوحدة على الهندسة الإحداثية التي سبق أن درستها في الصف التاسع، وستتعلّم في هذه الوحدة معادلة الدائرة بصورتيها القياسية والعامة.

إن المنحنيات البيانية مهمّة جدًا في دراسة علم الفضاء، إذ نستخدم خصائص انعكاساتها في تصميم الصحون اللاقطة الفضائية، وفي أبحاث الضوء والمناظير الشعاعية والبصرية.

## ٥-١ طول القطعة المستقيمة وإحداثيات نقطة منتصفها

لقد درست سابقًا، في الصف التاسع، كيف تجد إحداثيات نقطة المنتصف م للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتَين ء $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$، ل $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$، وطول القطعة المستقيمة ء ل باستخدام الصيغ في النتيجة ١؛ عليك أن تعرف كيف تطبق هاتين الصيغتَين في حل المسائل.

**مُساعَدة**

من المهم أن تبين العمليات الحسابية المناسبة في أسئلة الهندسة الإحداثية، ولا يمكن الاعتماد على الرسم في الاجابة لعدم دقة مقياس الرسم.

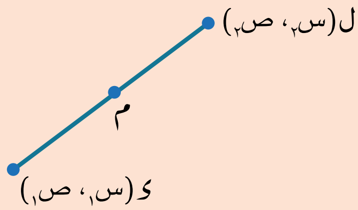
**نتيجة ١**

إحداثيات نقطة المنتصف م للقطعة المستقيمة ء ل:

$$\text{م} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}\right)$$

طول القطعة المستقيمة ء ل:

$$\text{ء ل} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$






### مثـــال ١

إذا علمت أن النقطة م $\left(\frac{٣}{٢} ، -١١\right)$ هي منتصف القطعة المستقيمة ء $(-٧ ، ٤)$، ل $(\text{أ} ، \text{ب})$، فأوجِد قيمتَي أ ، ب.

**الحـــلّ:**

$$\begin{array}{cc} (-٧ ، ٤) & (\text{أ} ، \text{ب}) \\ \uparrow \quad \uparrow & \uparrow \quad \uparrow \\ (\text{س}_1 ، \text{ص}_1) & (\text{س}_2 ، \text{ص}_2) \end{array}$$

حدّد القيم التي ستستخدمها بدلًا من: $\text{س}_1$، $\text{ص}_1$، $\text{س}_2$، $\text{ص}_2$

باستخدام صيغة منتصف القطعة المستقيمة $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}\right)$،

وإحداثيات نقطة المنتصف $\left(\frac{٣}{٢} ، -١١\right)$ نحصل على:

عوّض عن ء $(-٧ ، ٤)$، ل $(\text{أ} ، \text{ب})$ في الصيغة.

$$\left(\frac{-٧ + \text{أ}}{٢} ، \frac{٤ + \text{ب}}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢} ، -١١\right)$$

بمساواة الإحداثي السيني للطرفين:

$$\frac{-٧ + \text{أ}}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

$$-٧ + \text{أ} = ٣$$

$$\text{أ} = ١٠$$

بمساواة الإحداثي الصادي للطرفين:

$$\frac{٤ + ب}{٢} = -١١$$

$$٤ + ب = -٢٢$$

$$ب = -٢٦$$

$$\therefore\ أ = ١٠ \quad ، \quad ب = -٢٦$$

## مثــال ٢

متوازي أضلاع ا ب ج ى إحداثيات ثلاثة من رؤوسه هي ا(−٥، −١)، ب(−١، −٤)، ج(٦، −٢). أوجِد:

**أ** إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ج.

**ب** إحداثيات الرأس ى.

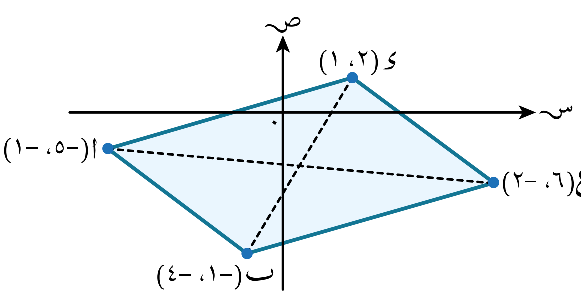
### الحــلّ:

**أ** إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ج = $\left(\frac{-٥ + ٦}{٢} ، \frac{-١ + -٢}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢} ، -\frac{٣}{٢}\right)$.

**ب** افترض أن إحداثيات ى(م، ن).

∵ ا ب ج ى متوازي أضلاع، فإن نقطة منتصف القطعة المستقيمة ب ى هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ج نفسها.

∴ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ب ى = $\left(\frac{-١ + م}{٢} ، \frac{-٤ + ن}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢} ، -\frac{٣}{٢}\right)$.




بمساواة الإحداثي السيني للطرفين: $\frac{-١ + م}{٢} = \frac{١}{٢}$

$$-١ + م = ١$$

$$م = ٢$$

بمساواة الإحداثي الصادي للطرفين: $\frac{-٤ + ن}{٢} = -\frac{٣}{٢}$

$$-٤ + ن = -٣$$

$$ن = ١$$

∴ إحداثيات الرأس ى هي (٢، ١)

## مثــال ٣

إذا علمت أن المسافة بين النقطتَين ى(−٢ ، أ)، ل(أ − ٢، −٧) تساوي ١٧، فأوجد قيمتَي (أ).

**الحــلّ:**

(−٢، أ) ← ($س_١$، $ص_١$)  ،  (أ − ٢ ، −٧) ← ($س_٢$، $ص_٢$) ...... حدّد القيم التي ستستخدمها بدلًا من: $س_١$، $ص_١$، $س_٢$، $ص_٢$

∵ طول $\overline{ىل}$ = ١٧

∴ $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ = ١٧

$\sqrt{(أ - ٢ + ٢)^٢ + (-٧ - أ)^٢}$ = ١٧ ...... ربّع الطرفين.

$أ^٢ + (-٧ - أ)^٢$ = ٢٨٩ ...... فُكّ الأقواس.

$أ^٢$ + ٤٩ + ١٤أ + $أ^٢$ = ٢٨٩ ...... جمّع الحدود في جهة واحدة.

$٢أ^٢$ + ١٤أ − ٢٤٠ = ٠ ...... اقسم الطرفَين على ٢

$أ^٢$ + ٧أ − ١٢٠ = ٠ ...... حلّل إلى العوامل.

(أ − ٨)(أ + ١٥) = ٠ ...... أوجد قيمتَي أ.

أ − ٨ = ٠ أو أ + ١٥ = ٠

أ = ٨ أو أ = −١٥

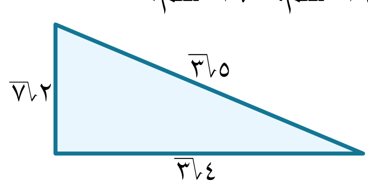
## استكشف ١

في الشكل المجاور، مثلث أطوال أضلاعه $٢\sqrt{٧}$ سم، $٤\sqrt{٣}$ سم، $٥\sqrt{٣}$ سم.

يدّعي تركي أن هذا المثلث قائم الزاوية.

ناقش ما إذا كان ما يدّعيه تركي صائبًا أم لا.

فسّر إجابتك.



## تمارين ٥-١

١) في كل حالة من الحالتَين الآتيتَين، احسب طول كل ضلع من أضلاع المثلث ى ل ر، ثم استخدم إجاباتك لتحدّد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا:

أ ى(−٤، ٦) ، ل(٦، ١) ، ر(٢، ٩).

ب ى(−٥، ٢) ، ل(٩، ٣) ، ر(−٢، ٨).

٢) إذا علمت أن رؤوس المثلث هي: ى(١، ٦) ، ل(−٢، ١) ، ر(٣، −٢)، فبيّن أن المثلث ى ل ر قائم الزاوية ومتطابق الضلعَين، ثم احسب مساحته.

٣) إذا علمت أن المسافة بين النقطتَين ى(أ، −١)، ل(−٥، أ) تساوي ٤$\sqrt{٥}$ ، فأوجد القيمتَين الممكنتَين لـ أ.

٤) إذا علمت أن المسافة بين النقطتَين ى(−٣، −٢)، ل(ب، ٢ب) تساوي ١٠، فأوجد القيمتَين الممكنتَين لـ ب.

٥) النقطة (−٢، −٣) هي منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين ى(−٦، −٥)، ل(أ ، ب). أوجِد قيمتَي أ، ب.

٦) متوازي الأضلاع ا ب ج ى إحداثيات ثلاثة من رؤوسه هي: ا(−٧، ٣)، ب(−٣، −١١)، ج(٣، −٥). أوجِد:

أ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ج.

ب إحداثيات الرأس ى.

ج طول كل من القطرَين: $\overline{\text{ا ج}}$، $\overline{\text{ب ى}}$

★ ٧) تقع النقطة ى(ك، ٢ك) على مسافة واحدة من النقطتَين ا(٨، ١١)، ب(١، ١٢). إذا علمت أن: النقاط ا، ب، ى لا تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة ك.

٨) المثلث ا ب ج إحداثيات رؤوسه ا(−٦، ٣)، ب(٣، ٥)، ج(١، −٤). بيّن أن المثلث ا ب ج متطابق الضلعَين، وأوجِد مساحته.

٩) المثلث ا ب ج إحداثيات رؤوسه ا (−٧، ٨)، ب (٣، ك)، ج (٨، ٥). أوجِد قيمة ك إذا علمت أن طول $\overline{\text{ا ب}}$ = ٢ × طول $\overline{\text{ب ج}}$.

١٠) يتقاطع المستقيم س + ص = ٤، والمنحنى ص = ٨ − $\frac{٥}{\text{س}}$ في النقطتَين ا، ب. أوجِد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ب.

١١) يتقاطع المستقيم ص = س − ٣، والمنحنى $\text{ص}^٢$ = ٤س في النقطتَين ا، ب:

أ أوجِد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ب.

ب أوجِد طول القطعة المستقيمة ا ب.

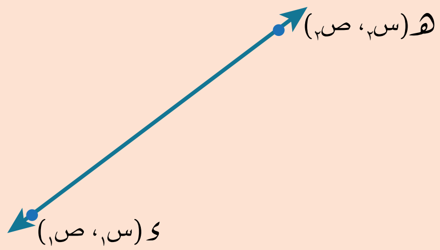
★ ١٢) في المثلّث ا ب ج، إحداثيات نقاط منتصف الأضلاع ا ب، ب ج، ا ج هي: (١، ٤)، (٢، ٠)، (−٤، ١) على الترتيب. أوجِد إحداثيات الرؤوس ا، ب، ج.

## ٥-٢ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

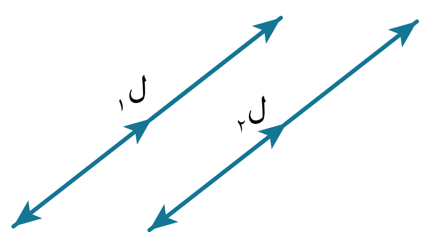
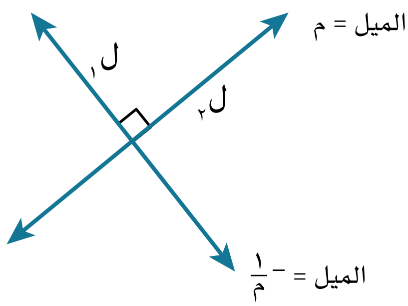
لقد درست في الصف التاسع كيف توجِد ميل مستقيم يصل بين النقطتَين ء($س_١$، $ص_١$)، هـ($س_٢$، $ص_٢$) باستخدام الصيغة الموجودة في النتيجة ٢:

**نتيجة ٢**

ميل المستقيم $\overline{ءهـ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$




ودرست كذلك القواعد الآتية التي تتعلق بتوازي المستقيمات، وتعامدها:

| المستقيمات المتوازية | المستقيمات المتعامدة |
|---|---|
|  |  |
| إذا توازى مستقيمان ($ل_١$ // $ل_٢$)، فإن ميلَيهما متساويان. | إذا تعامد مستقيمان ($ل_١ \perp ل_٢$)، وكان ميل المستقيم $ل_١$ هو م، فإن ميل المستقيم $ل_٢$ يساوي $-\frac{١}{م}$. |





يمكننا أيضًا أن نكتب القواعد المتعلّقة بالمستقيمات المتوازية والمتعامدة على النحو الآتي:

**نتيجة ٣**

إذا كان $م_١$ ميل المستقيم الأول، و $م_٢$ ميل المستقيم الثاني، فإن:

- $م_١ = م_٢$ إذا كان المستقيمان متوازيَين.
- $م_١ \times م_٢ = -١$ إذا كان المستقيمان متعامدَين.

تحتاج إلى أن تعرف كيف تطبّق قواعد الميل لتحلّ مسائل تتضمّن المستقيمات المتوازية، والمستقيمات المتعامدة.

## مثال ٤

إحداثيات ثلاث نقاط هي: ا(ك − ٥، −١٥)، ب(١٠، ك)، ج(٦، −ك). أوجِد قيم ك الممكنة إذا علمت أن النقاط ا، ب، ج، تقع على استقامة واحدة.

### الحــلّ:

إذا كانت ا، ب، ج على استقامة واحدة، فإنها تقع على المستقيم نفسه.

ميل $\overline{\text{اب}}$ = ميل $\overline{\text{ب ج}}$

| | |
|---|---|
| $\frac{\text{ك} - (-١٥)}{١٠ - (\text{ك} - ٥)} = \frac{-\text{ك} - \text{ك}}{٦ - ١٠}$ | بسّط. |
| $\frac{\text{ك} + ١٥}{١٥ - \text{ك}} = \frac{\text{ك}}{٢}$ | اضرب تبادليًا. |
| $٢(\text{ك} + ١٥) = \text{ك}(١٥ - \text{ك})$ | فُكّ الأقواس. |
| $٢\text{ك} + ٣٠ = ١٥\text{ك} - \text{ك}^٢$ | جمّع الحدود في طرف واحد من المساواة. |
| $\text{ك}^٢ - ١٣\text{ك} + ٣٠ = ٠$ | حلّل إلى العوامل. |
| $(\text{ك} - ٣)(\text{ك} - ١٠) = ٠$ | أوجد قيمتي ك. |

ك − ٣ = ٠ أو ك − ١٠ = ٠

∴ ك = ٣ أو ك = ١٠

١٤٤

## مثال ٥

إحداثيات ثلاثة رؤوس لمثلث هي: ا(١١، ٣)، ب(٢ك، ك)، ج(−١، −١١).

أ أوجِد قيم ك الممكنة إذا كان قياس $\text{ا}\hat{\text{ب}}\text{ج}$ يساوي °٩٠

ب ارسم شكل يبين المثلثات الممكنة.

### الحــلّ:

أ ∵ قياس $\text{ا}\hat{\text{ب}}\text{ج}$ يساوي °٩٠، فإن ميل $\overline{\text{اب}}$ × ميل $\overline{\text{ب ج}}$ = −١

| | |
|---|---|
| $\frac{\text{ك} - ٣}{٢\text{ك} - ١١} \times \frac{-١١ - \text{ك}}{-١ - ٢\text{ك}} = -١$ | بسّط الكسر الثاني. |
| $\frac{\text{ك} - ٣}{٢\text{ك} - ١١} \times \frac{\text{ك} + ١١}{٢\text{ك} + ١} = -١$ | اضرب طرفَي المعادلة في (٢ك − ١١)(٢ك + ١). |
| $(\text{ك} - ٣)(\text{ك} + ١١) = -(٢\text{ك} - ١١)(٢\text{ك} + ١)$ | فُكّ الأقواس. |
| $\text{ك}^٢ + ٨\text{ك} - ٣٣ = -٤\text{ك}^٢ + ٢٠\text{ك} + ١١$ | جمّع الحدود في طرف واحد من المساواة. |
| $٥\text{ك}^٢ - ١٢\text{ك} - ٤٤ = ٠$ | حلّل إلى العوامل، ثم أوجد قيمتي ك. |

(٥ك − ٢٢)(ك + ٢) = ٠

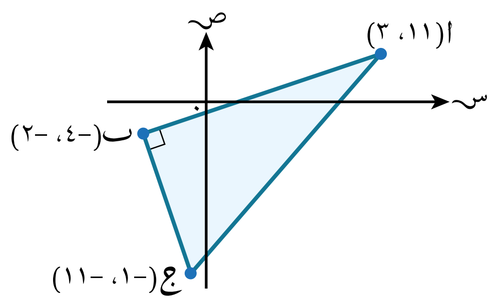
٥ك − ٢٢ = ٠ أو ك + ٢ = ٠

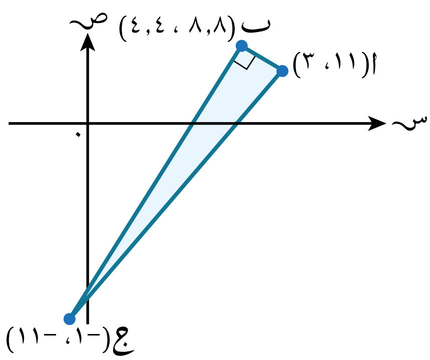
∴ ك = ٤,٤ أو ك = −٢

**ب** إذا كان ك = ٤,٤ فإن ب(٨,٨ ، ٤,٤).

إذا كان ك = −٢ فإن ب(−٤، −٢).

المثلثان الممكنان هما :




## تمارين ٥-٢

**١)** إحداثيات ثلاث نقاط هي ا(−٦، ٤)، ب(٤، ٦)، ج(١٠، ٧).

**أ** أوجِد ميل كل من: $\overline{\text{اب}}$، $\overline{\text{ب ج}}$.

**ب** استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتحدد ما إذا كانت النقاط ا، ب، ج تقع على استقامة واحدة أم لا.

**٢)** إذا علمت أن م نقطة منتصف المسافة بين ء(−٤، ٥)، ل(٦، ١)، فبيّن أن ن م ⊥ ء ل حيث ن(−٣، −٧).

**٣)** مستطيل اب ج ء إحداثيات رأسَين من رؤوسه هما: ا(−٦، −٤)، ب(٤، −٨). أوجِد ميل كلٍّ من: $\overline{\text{ج ء}}$، $\overline{\text{ب ج}}$.

**٤)** شبه المنحرف ا ب ج ء إحداثيات ثلاثة من رؤوسه هي: ا(٣، ٥)، ب(−٥، ٤)، ج(١، −٥). $\overline{\text{اء}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$، ق (ا$\hat{\text{ء}}$ ج) = ٩٠°

أوجِد إحداثيات النقطة ء.

**٥)** إحداثيات ثلاث نقاط هي: ا(٥، ٨)، ب(ك، ٥)، ج(−ك، ٤). أوجِد قيمة ك إذا علمت أن النقاط ا، ب، ج تقع على استقامة واحدة.

**٦)** إحداثيات رؤوس المثلث اب ج هي: ا(−٩، ٢ك − ٨)، ب(٦، ك)، ج(ك، ١٢). أوجِد قيمتَي ك الممكنتَين إذا كان ق (ا$\hat{\text{ب}}$ ج) = ٩٠°

**٧)** إحداثيات النقطة ا هي (٠، ٨)، وإحداثيات النقطة ب هي (٨، ٦). أوجِد إحداثيات النقطة ج الواقعة على المحور الصادي بحيث يكون ق (ا$\hat{\text{ب}}$ ج) = ٩٠°

**٨)** إحداثيات ثلاث نقاط هي: ا(٧، ٤)، ب(١٩، ٨)، ج(ك، ٢ك).
أوجِد قيمة ك في كل حالة من الحالات الآتية:

- **أ** تقع النقطة ج على المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين ا، ب.
- **ب** $ق(ج\hat{ا}ب) = ٩٠°$

**٩)** يقطع المستقيم $\frac{س}{أ} - \frac{ص}{ب} = ١$ المحور السيني في النقطة ى، المحور الصادي في النقطة ل، وكان ميل $\overline{ى ل}$ يساوي $\frac{٢}{٥}$، وطول $\overline{ى ل} = ٢\sqrt{٢٩}$، فأوجِد قيمة كلٍّ من: أ، ب. (علمًا بأن أ، ب عددان موجبان)

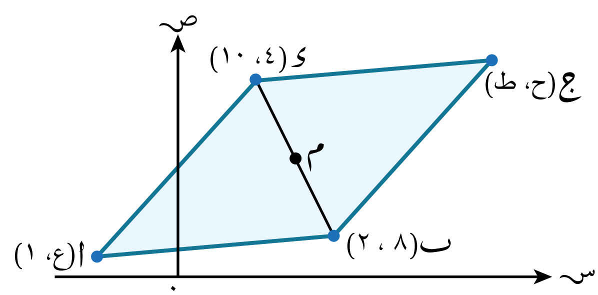
**١٠)** إذا علمت أن إحداثيات النقطة ى هي (أ، أ − ٢)، وإحداثيات النقطة ل هي (٤ − ٣أ، −أ)، فأوجد:

- **أ** ميل المستقيم ى ل.
- **ب** ميل المستقيم العمودي على المستقيم ى ل.
- **ج** قيم أ الممكنة إذا علمت أن طول $\overline{ى ل} = ١٠\sqrt{٥}$

**مُساعَدة**

مساحة المعيّن تساوي نصف حاصل ضرب طولَي القطرَين.

**١١)** في الشكل أدناه اب ج ى معيَّن، م نقطة منتصف القطعة المستقيمة ب ى، أوجد:



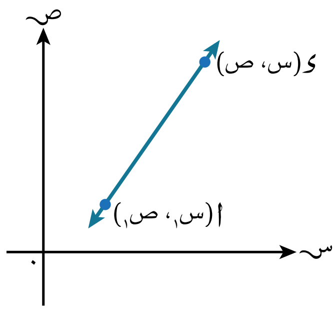

- **أ** إحداثيات النقطة م.
- **ب** قيمة كلّ من: ع، ح، ط.
- **ج** محيط المعيّن.
- **د** مساحة المعيّن.

# ٥-٣ معادلة الخط المستقيم

لقد درست في الصف التاسع معادلة المستقيم وهي:

**نتيجة ٤**

ص = م س + جـ، حيث م الميل، جـ هو الجزء المقطوع من المحور الصادي.




توجد صيغة بديلة يمكن استخدامها عندما نعرف ميل المستقيم، وإحداثيات نقطة واقعة عليه.
افترض أن المستقيم الذي ميله (م)، ويمرّ بالنقطة أ(س$_١$، ص$_١$)، وإحداثيات أيّة نقطة عليه هي ء(س، ص).

ميل $\overline{أء}$ = م، فيكون $\dfrac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$ اضرب طرفَي المعادلة في (س − س$_١$).

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$.

**نتيجة ٥**

معادلة المستقيم الذي ميله م، ويمرّ بالنقطة (س$_١$، ص$_١$) هي:
$ص - ص_١ = م(س - س_١)$



## مثــال ٦

أوجِد معادلة مستقيم ميله −٢، ويمرّ بالنقطة (٤، ١).

**الحــلّ:**

استخدم $ص - ص_١ = م(س - س_١)$ ، حيث م = −٢، س$_١$ = ٤، ص$_١$ = ١

$ص - ١ = -٢(س - ٤)$

$ص - ١ = -٢س + ٨$

$٢س + ص = ٩$

## مثــال ٧

أوجِد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين (−٤، ٣)، (٦، −٢).

**الحــلّ:**

(−٤، ٣) ← (س$_١$، ص$_١$)    (٦، −٢) ← (س$_٢$، ص$_٢$)    حدّد القيم التي ستستخدمها بدلًا من: س$_١$، ص$_١$، س$_٢$، ص$_٢$

الميل = م = $\dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \dfrac{(-٢) - ٣}{٦ - (-٤)} = -\dfrac{١}{٢}$

باستخدام $ص - ص_١ = م(س - س_١)$، حيث م = $-\dfrac{١}{٢}$، س$_١$ = −٤، ص$_١$ = ٣

$ص - ٣ = -\dfrac{١}{٢}(س + ٤)$    اضرب طرفي المعادلة في ٢

$٢ص - ٦ = -س - ٤$

$س + ٢ص = ٢$

## مثــال ٨

أوجِد معادلة المستقيم العمودي المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين أ(−٥، ١)، ب(٧، −٢).

### الحــلّ:

ميل $\overline{أب}$ = $\frac{-٢ - ١}{٧ - (-٥)}$ = $\frac{-٣}{١٢}$ = $-\frac{١}{٤}$ ........ استخدم الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

ميل المستقيم العمودي على المستقيم اب = ٤ ........ استخدم $م_١ \times م_٢ = -١$

نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي $\left(\frac{-٥ + ٧}{٢}، \frac{١ + (-٢)}{٢}\right) = \left(١، -\frac{١}{٢}\right)$ ........ استخدم قانون نقطة المنتصف: $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

∴ ميل العمود المنصف هو ٤، ويمرّ بالنقطة $\left(١، -\frac{١}{٢}\right)$

استخدم $ص - ص_١ = م(س - س_١)$ حيث $س_١ = ١$، $ص_١ = -\frac{١}{٢}$، م = ٤

$ص + \frac{١}{٢} = ٤(س - ١)$ ........ اضرب طرفَي المعادلة في ٢

$٢ص = ٨س - ٩$

## تمارين ٥-٣

**١)** أوجِد معادلة المستقيم الذي:

أ  ميله ٢، ويمرّ بالنقطة (٤، ٩).

ب  ميله −٣، ويمرّ بالنقطة (١، −٤).

ج  ميله $-\frac{٢}{٣}$، ويمرّ بالنقطة (−٤، ٣).

**٢)** أوجِد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين في كل ممّا يأتي:

أ  (١، ٠)، (٥، ٦).

ب  (٣، −٥)، (−٢، ٤).

ج  (٣، −١)، (−٣، −٥).

**٣)** أوجِد معادلة المستقيم الذي:

أ  يوازي المستقيم ص = ٣س − ٥، ويمرّ بالنقطة (١، ٧).

ب  يوازي المستقيم س + ٢ص = ٦، ويمرّ بالنقطة (٤، −٦).

ج  يعامد المستقيم ص = ٢س − ٣، ويمرّ بالنقطة (٦، ١).

د  يعامد المستقيم ٢س − ٣ص = ١٢، ويمرّ بالنقطة (٨، −٣).

**٤)** أوجِد معادلة المستقيم العمودي المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتَين:

أ (٥، ٢)، (−٣، ٦).

ب (−٢، −٥)، (٨، ١).

ج (−٢، −٧)، (٥، −٤).

**٥)** ل$_1$، ل$_2$ مستقيمان متوازيين بحيث يمر المستقيم ل$_1$ بالنقطتين ى(−١٠، ١)، ع(٢، ١٠)، والمستقيم ل$_2$ بالنقطة (٤، −١). إذا علمت أن النقطة ر تقع عل المستقيم ل$_2$ بحيث يكون $\overline{\text{رع}}$ عموديًّا على المستقيم ل$_2$، فأوجد إحداثيات النقطة ر.

**٦)** إحداثيات النقطة ى هي (−٤، ٢)، وإحداثيات النقطة ع هي (٥، −٤).

رسم من النقطة ى المستقيم ل العمودي على $\overline{\text{ىع}}$، ويقطع المحور الصادي في النقطة ر. أوجِد:

أ معادلة المستقيم ل.

ب إحداثيات النقطة ر.

ج مساحة المثلث ى ع ر.

**٧)** معادلة المستقيم ل$_1$ هي ٣س − ٢ص = ١٢، ومعادلة المستقيم ل$_2$ هي ص = ١٥ − ٢س، ويتقاطع المستقيمان ل$_1$، ل$_2$ في النقطة ا. أوجِد:



أ إحداثيات النقطة ا.

ب معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة ا، ويكون عموديًّا على المستقيم ل$_1$.

**٨)** العمودي المنصف للمستقيم الواصل بين النقطتَين ا (−١٠، ٥)، ب (−٢، −١) يقطع المحور السيني في النقطة ى، ويقطع المحور الصادي في النقطة ل. أوجِد:

أ معادلة المستقيم ى ل.

ب إحداثيات النقطة ى، والنقطة ل.

ج طول القطعة المستقيمة ى ل.

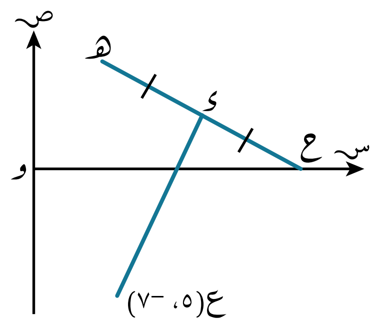
**٩)** معادلة المستقيم ل$_1$ هي ٢س + ٥ ص = ١٠

يمرّ المستقيم ل$_2$ بالنقطة ا(−٩، −٦) ويكون عموديًّا على المستقيم ل$_1$.

أ أوجِد معادلة المستقيم ل$_2$.

ب إذا علمت أن المستقيمَين ل$_1$، ل$_2$ يتقاطعان في النقطة ب، فأوجِد مساحة المثلث ا ب و حيث و نقطة الأصل.

**١٠)** يبيّن الشكل أدناه النقاط هـ، ی، ع الواقعة على المستقيم س + ٢ص = ١٦، تقع النقطة ع على المحور السيني، كما أن هـ ی = ی ع، والمستقيم ی ع عموديّ على المستقيم هـ ع. أوجِد إحداثيات النقطتَين هـ، ی.




**١١)** إحداثيات ثلاث نقاط هي: ا(-٤، -١)، ب(٨، -٩)، ع(ك، ٧)، م منتصف $\overline{\text{اب}}$، والمستقيم م ع عمودي على المستقيم اب. أوجِد قيمة ك.

**١٢)** النقطة ی صورة للنقطة (-٢، ١٠) بالانعكاس حول المستقيم ٤س - ٣ص = ١٢. أوجِد إحداثيات النقطة ی.

**١٣)** إحداثيات رؤوس المثلث ا ب ج هي: ا(-٧، ٣)، ب(٣، -٧)، ج(٨، ٨). ی نقطة تقاطع العمود النازل من ب على المستقيم ا ج، أوجِد:

- أ معادلة المستقيم ب ی.
- ب إحداثيات النقطة ی.
- ج طول كل من: $\overline{\text{اج}}$، $\overline{\text{بی}}$.
- د مساحة المثلث ا ب ج، مستخدمًا إجابتك في الجزئية ج.

**١٤)** إذا علمت أن إحداثيات رؤوس المثلث ی ل ں هي: ی(١، ١)، ل(١، ٨)، ں(٦، ٦)، فأوجِد:

- أ معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة:
  ١) ی ل        ٢) ی ں
- ب إحداثيات النقطة م التي تقع على مسافات متساوية من النقاط ی، ل، ں.

**١٥)** إذا علمت أن معادلتَي ضلعَين من أضلاع المثلث ا ب ج هما س + ٢ص = ٨ ، ٢س + ص = ١، وإحداثيات ا(٢، -٣)، ق(ا$\hat{\text{ب}}$ج)= ٩٠°، فأوجِد:

- أ معادلة الضلع الثالث في المثلث ا ب ج.
- ب إحداثيات النقطة ب.

## ٥-٤ معادلة الدائرة

في هذا الدرس ستتعلّم معادلة الدائرة. تُعرّف الدائرة على أنها مجموعة نقاط تبعد مسافة ثابتة (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز).

### استكشف ٢

١) استخدم إحدى برمجيات الرسم البياني (مثل Desmos أو GeoGebra) لترسم كلًا من الدوائر الآتية. أوجِد إحداثيات مركز كل دائرة رسمتها، وأوجِد نصف قطرها، وانسخ الجدول الآتي وأكمله:

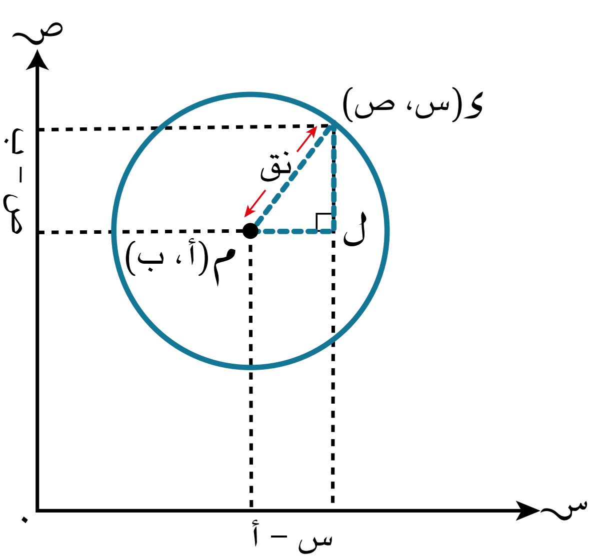
| | معادلة الدائرة | المركز | نصف القطر |
|---|---|---|---|
| أ | $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٥$ | | |
| ب | $(\text{س} - ٢)^{٢} + (\text{ص} - ١)^{٢} = ٩$ | | |
| ج | $(\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٥)^{٢} = ١٦$ | | |
| د | $(\text{س} - ٨)^{٢} + (\text{ص} + ٦)^{٢} = ٤٩$ | | |
| هـ | $\text{س}^{٢} + (\text{ص} + ٤)^{٢} = ٤$ | | |
| و | $(\text{س} + ٦)^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٦٤$ | | |

٢) ناقش ما توصلت إليه مع أقرانك في الصف، واشرح كيف تمكنت من إيجاد إحداثيات مركز الدائرة وطول نصف قطرها بمجرّد النظر إلى معادلة الدائرة.



## الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

لإيجاد معادلة دائرة، نفترض أن ء(س، ص) أيّة نقطة على محيط دائرة مركزها م(أ، ب).




بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث م ل ء ينتج:

$$(\text{م ل})^{٢} + (\text{ء ل})^{٢} = (\text{ء م})^{٢}$$

بتعويض م ل = س − أ ، ء ل = ص − ب، ء م = نق في المعادلة:

$(\text{م ل})^{٢} + (\text{ء ل})^{٢} = (\text{ء م})^{٢}$ يعطي:

$$(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢} = \text{نق}^{٢}$$

**نتيجة ٦**

الصورة القياسية لمعادلة دائرة مركزها م (أ، ب) ونصف قطرها نق هي:
$(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = نق^٢$ حيث نق $\geqslant$ ٠

## استكشف ٣

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها م (أ، ب)، ونصف قطرها نق هي $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = نق^٢$. استخدم برمجية رسم المنحنيات لتستقصي أثر:

- **أ** زيادة قيمة أ.
- **ب** نقصان قيمة أ.
- **ج** زيادة قيمة ب.
- **د** نقصان قيمة ب.

## مثال ٩

اكتب إحداثيات المركز (م) لكل دائرة من الدوائر الآتية، واحسب نصف قطرها (نق):

- **أ** $س^٢ + ص^٢ = ٤$
- **ب** $(س - ٢)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٠٠$
- **ج** $(س + ١)^٢ + (ص - ٨)^٢ = ١٢$

### الحــلّ:

- **أ** م = (٠، ٠)، نق = $\sqrt{٤}$ = ٢
- **ب** م = (٢، ٤)، نق = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠
- **ج** م = (−١، ٨)، نق = $\sqrt{١٢}$ = $٢\sqrt{٣}$

## مثال ١٠

دائرة مركزها (−٤، ٣)، ونصف قطرها ٦، أوجِد معادلتها.

### الحــلّ:

معادلة الدائرة هي: $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = نق^٢$، حيث أ = −٤، ب = ٣، نق = ٦

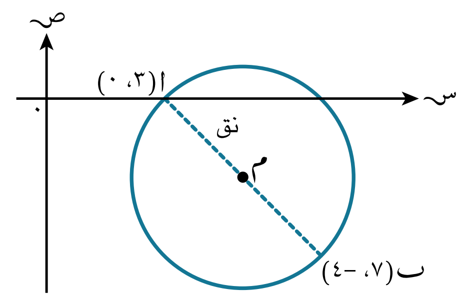
$$(س - (-٤))^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٦^٢$$

$$(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٣٦$$

## مثـــال ١١

إحداثيات النقطة أ هي (٣، ٠)، وإحداثيات النقطة ب هي (٧، −٤).
أوجِد معادلة الدائرة التي قطرها أب.

### الحــلّ:




مركز الدائرة م هو نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$:

$$\text{م} = \left(\frac{٣ + ٧}{٢}، \frac{٠ + (-٤)}{٢}\right) = (٥، -٢)$$

نصف قطر الدائرة نق يساوي طول $\overline{\text{أم}}$:

$$\text{نق} = \sqrt{(٥ - ٣)^{٢} + (-٢ - ٠)^{٢}} = \sqrt{٨}$$

يمكنك إيجاد نصف القطر بطرائق أخرى.

وعليه، تكون معادلة الدائرة: $(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢} = \text{نق}^{٢}$ أ = ٥، ب = −٢، نق = $\sqrt{٨}$

$$(\text{س} - ٥)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} = (\sqrt{٨})^{٢}$$

$$(\text{س} - ٥)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} = ٨$$

## الصورة العامة لمعادلة الدائرة

يعطي فكّ أقواس المعادلة $(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢} = \text{نق}^{٢}$ :

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{أ س} + \text{أ}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{ب ص} + \text{ب}^{٢} = \text{نق}^{٢}$$

إعادة الترتيب يعطي:

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{أ س} - ٢\text{ب ص} + (\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{نق}^{٢}) = ٠$$

تمثل المعادلة السابقة معادلة دائرة إذا تحقّقت فيها الشروط الآتية:

- تربيعية في س، ص.
- معامل $\text{س}^{٢}$ ومعامل $\text{ص}^{٢}$ متساويان.
- لا يوجد حدّ يحتوي على س ص (معامل س ص يساوي صفرًا).
- نق $\geq$ ٠، وفي حالة نق = ٠ تكون الدائرة عبارة عن نقطة.

وعليه، يمكن كتابة معادلة الدائرة في الصورة العامة كما في النتيجة الآتية:

**نتيجة ٧**

**الصورة العامة** لمعادلة الدائرة **General form of a circle** هي:

$س^٢ + ص^٢ + ل س + ن ص + جـ = ٠$

حيث: مركزها (م) هو: $\left(-\frac{ل}{٢}، -\frac{ن}{٢}\right)$

ونصف قطرها (نق) هو: $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ن^٢ - ٤جـ}$

**مُساعَدة**

في الصورة العامة لمعادلة الدائرة يمكنك إيجاد المركز كالتالي:

$م\left(-\frac{معامل\ س}{٢}، -\frac{معامل\ ص}{٢}\right)$

## مثـــال ١٢

أوجِد مركز ونصف قطر الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ١٠س - ٨ص - ٤٠ = ٠$

### الحـــلّ:

$س^٢ + ص^٢ + ١٠س - ٨ص - ٤٠ = ٠$ أكمل المربّع.

$(س + ٥)^٢ - ٥^٢ + (ص - ٤)^٢ - ٤^٢ - ٤٠ = ٠$ جمّع الحدود الثابتة معًا.

$(س + ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٨١$ قارن المعادلة الناتجة مع $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = نق^٢$

$أ = -٥$ $ب = ٤$ $نق^٢ = ٨١$

المركز (−٥، ٤) ونصف القطر = ٩

**طريقة بديلة:**

استخدم الصيغة من النتيجة ٧:

$س^٢ + ص^٢ + ل س + ن ص + جـ = ٠$

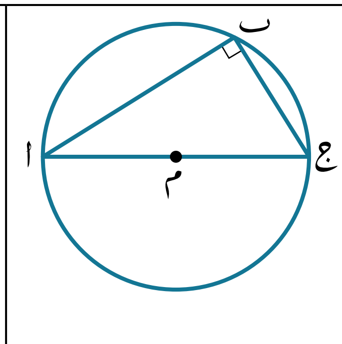
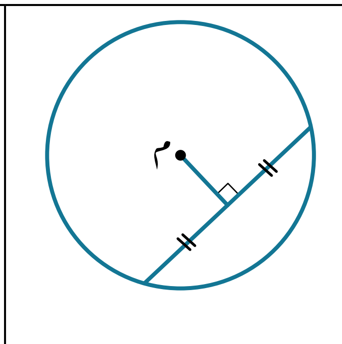
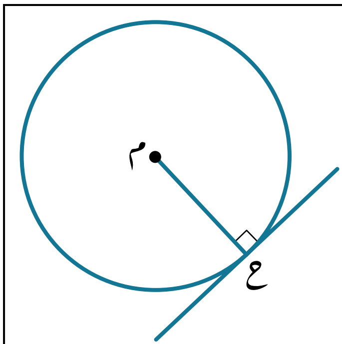
وقارنها بالمعادلة المعطاة في السؤال:

$س^٢ + ص^٢ + ١٠س - ٨ص - ٤٠ = ٠$

من السهل ملاحظة أن ل = ١٠، ن = −٨، جـ = −٤٠

∴ مركز الدائرة هو (−٥، ٤)، ونصف القطر هو $\frac{١}{٢}\sqrt{(١٠٠ + ٦٤ + ١٦٠)} = \frac{١}{٢} \times \sqrt{٣٢٤} = \frac{١}{٢} \times ١٨ = ٩$

من المفيد أن تتذكّر الحقائق الآتية عن الزوايا القائمة الثلاث في الدوائر:

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة هي زاوية قائمة. | العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر ينصفه. | مماس الدائرة عند نقطة يكون عموديًا على نصف القطر المارّ بنقطة التماس. |

نستنتج من الحقائق السابقة:

- إذا كان المثلث ا ب ع قائم الزاوية عند النقطة ب عندها تقع النقاط ا، ب، ع على محيط دائرة قطرها ا ع.
- العمود المنصف للوتر يمرّ بمركز الدائرة.
- إذا كانت الزاوية المحصورة بين مستقيم ونصف قطر دائرة عند النقطة ع زاوية قائمة عندها تكون القطعة المستقيمة مماسًا للدائرة عند تلك النقطة.

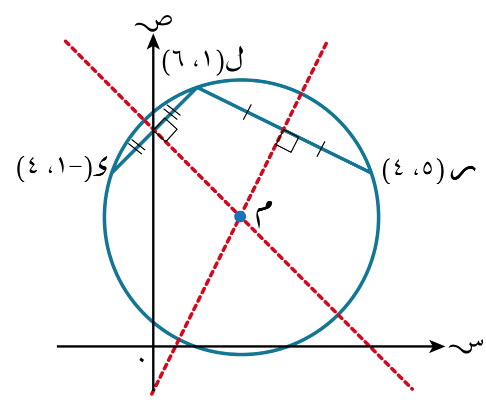


## مثـال ١٣

تمرّ دائرة بالنقاط الثلاث د (−١، ٤)، ل (١، ٦)، ر (٥، ٤).

أوجِد معادلة الدائرة.

### الحـلّ:




يقع مركز الدائرة م على العمود المنصف للقطعة المستقيمة د ل وعلى العمود المنصف للقطعة المستقيمة ل ر.

نقطة منتصف $\overline{\text{د ل}}$ = $\left(\frac{-١ + ١}{٢} ، \frac{٤ + ٦}{٢}\right)$ = (٠، ٥)

ميل $\overline{\text{د ل}}$ = $\frac{٦ - ٤}{١ - (-١)}$ = ١

ميل العمود المنصف للقطعة المستقيمة ى ل = −١

معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ى ل هي:

$$(ص - ٥) = -١(س - ٠)$$

$$ص = -س + ٥ \quad ........... (١)$$

$$نقطة منتصف ل ر = \left(\frac{١ + ٥}{٢}، \frac{٦ + ٤}{٢}\right) = (٣، ٥)$$

$$ميل ل ر = \frac{٤ - ٦}{٥ - ١} = -\frac{١}{٢}$$

ميل العمود المنصف للقطعة المستقيمة ل ر = ٢

معادلة العمود المنصف للقطعة ل ر هي:

$$(ص - ٥) = ٢(س - ٣)$$

$$ص = ٢س - ١ \quad ........... (٢)$$

حلّ المعادلتَين (١)، (٢) يعطي:

س = ٢، ص = ٣

وعليه، فإن مركز الدائرة = (٢، ٣)

$$نصف القطر = طول \overline{م ر} = \sqrt{(٥ - ٢)^{٢} + (٤ - ٣)^{٢}} = \sqrt{١٠}$$

∴ معادلة الدائرة هي: $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ١٠$

**مُساعَدة**

يمكن حل المثال بتعويض النقاط الثلاث في الصورة العامة.



## تمارين ٥-٤

**١)** أوجِد مركز ونصف قطر كل دائرة من الدوائر الآتية:

أ $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

ب $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} = ٩$

ج $س^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٢٥$

د $(س - ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٤$

هـ $(س + ٧)^{٢} + ص^{٢} = ١٨$

و $٢(س - ٣)^{٢} + ٢(ص + ٤)^{٢} = ٤٥$

ز $س^{٢} + ص^{٢} - ٨س + ٢٠ص + ١١٠ = ٠$

ح $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ١٤س - ١٠ص - ١٦٣ = ٠$

**٢)** أوجِد معادلة كل دائرة من الدوائر الآتية:

أ م (٠، ٠)، نق ٨

ب م (٥، −٢)، نق ٤

ج م (−١، ٣)، نق $\sqrt{٧}$

د م $(\frac{١}{٢}، -\frac{٣}{٢})$، نق $\frac{٥}{٢}$

**٣)** أوجِد معادلة دائرة مركزها (٢، ٥)، وتمرّ بالنقطة (٦، ٨).

**٤)** طرفا قطر دائرة هما أ(−٦، ٨)، ب(٢، −٤). أوجِد معادلة هذه الدائرة.

**٥)** أوجِد معادلة الدائرة التي تمسّ محور السينات، ومركزها (٦، −٥).

**٦)** تقع النقطتان ى (١، -٢)، ل (٧، ١) على محيط دائرة. بيّن أن مركز الدائرة يقع على المستقيم ٤س + ٢ص = ١٥

**٧)** تمرّ دائرة بالنقطتَين (٣، ٢)، (٧، ٢)، ونصف قطرها ٢$\sqrt{٢}$. أوجِد المعادلتَين الممكنتَين لهذه الدائرة.

**٨)** تمرّ دائرة بالنقاط و (٠، ٠)، ا (٨، ٤)، ب (٦، ٦). بيّن أن و ا قطر في الدائرة، وأوجِد معادلة الدائرة.

**٩)** بيّن أنه يمكن كتابة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ٦س + ٢ص = ٦ في صورة (س − أ)$^{٢}$ + (ص − ب)$^{٢}$ = نق$^{٢}$، حيث أ، ب، نق أعداد ثابتة. اكتب إحداثيات مركز الدائرة، ونصف قطرها.

**١٠)** دائرة معادلتها (س − ٣)$^{٢}$ + (ص + ٢)$^{٢}$ = ٢٥:

أ) بيّن أن النقطة ا (٦، -٦) تقع على الدائرة.

ب) أوجِد معادلة مماس الدائرة عند النقطة ا.

**١١)** يقطع المستقيم ٢س + ٥ص = ٢٠ المحور السيني في النقطة ا، ويقطع المحور الصادي في النقطة ب. النقطة ع هي نقطة منتصف $\overline{\text{اب}}$:

أ) أوجِد معادلة الدائرة التي مركزها ع، وتمرّ بالنقطتَين ا، ب.

ب) بيّن أن الدائرة تمرّ بالنقطة و (٠، ٠).



**١٢)** تشكّل النقاط ى (-٥، ٦)، ل (-٣، ٨)، م (٣، ٢) مثلثًا.

أ) بيّن أن ى$\hat{\text{ل}}$م قائمة.

ب) أوجِد معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط ى، ل، م.

**١٣)** أوجِد معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقطتَين (٧، ٣)، (١١، -١)، ويقع مركزها على المستقيم ٢س + ص = ٧

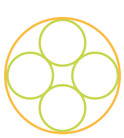
**١٤)** أوجِد معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط و (٠، ٠)، ى (٣، ٩)، ل (١١، ١١).

**١٥)** دائرة نصف قطرها ١٠ وحدات، وتمرّ بالنقطة (٥، -١٦)، وتمسّ محور السينات. أوجِد المعادلات الممكنة لهذه الدائرة.

★ **١٦)** أ) التصميم المجاور مكوّن من أربع دوائر خضراء اللون ودائرة برتقالية:

١) نصف قطر كل دائرة خضراء وحدة واحدة. أوجِد نصف قطر الدائرة البرتقالية.

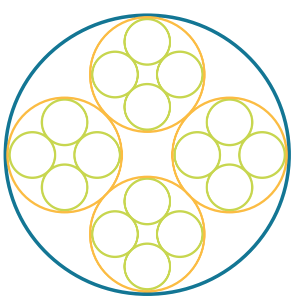
٢) استخدم برمجية رسم المنحنيات لترسم التصميم.



ب) تمّ توسيع التصميم في الجزئية (أ) كما هو مبيّن في الرسم المجاور:

١) نصف قطر كل دائرة خضراء وحدة واحدة. أوجِد نصف قطر الدائرة الزرقاء.

٢) استخدم برمجية رسم المنحنيات لترسم التصميم الموسع.



## ٥-٥ علاقة المستقيم بالدائرة

لقد درست في الوحدة الأولى أنه يمكن إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع منحنى بحلّ معادلتَيهما آنيًّا. ودرست أيضًا أنه إذا كانت المعادلة الناتجة في صورة أس$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠، فإن المميّز ب$^{٢}$ − ٤ أجـ يعطي معلومات حول المستقيم والمنحنى.

| ب$^{٢}$ − ٤أجـ | طبيعة الجذور | المستقيم والمنحنى التربيعي |
|---|---|---|
| > ٠ | جذران حقيقيان مختلفان. | نقطتا تقاطع مختلفتان. |
| = ٠ | جذران حقيقيان متساويان (جذر مكرّر). | نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ). |
| < ٠ | لا توجد جذور حقيقية. | لا توجد نقاط تقاطع. |

**مُساعَدة**

يمكننا أيضًا وصف المعادلة التي لها 'جذران حقيقيان متساويان' على النحو: 'لها جذر حقيقي واحد مكرّر'.

في هذا الدرس، سوف تحلّ مسائل تتضمّن التقاطع بين المستقيمات والدوائر.

### مثـــال ١٤

إذا علمت أن المستقيم س = ٣ص + ١٠ يقطع الدائرة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٠ في النقطتَين ا، ب، والعمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب يقطع الدائرة في النقطتَين ى، ل، فأوجد:

أ إحداثيات النقطتَين ا، ب.

ب معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب وبيّن أنه يمرّ بمركز الدائرة.

ج إحداثيات النقطتَين ى، ل.

### الحـــلّ:

أ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٠ ........ عوّض عن س بـ (٣ص + ١٠).

(٣ص + ١٠)$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٠ ........ فُكّ الأقواس وبسّط.

ص$^{٢}$ + ٦ص + ٨ = ٠ ........ حلّل إلى العوامل.

(ص + ٢) (ص + ٤) = ٠

ص = −٢ أو ص = −٤

عندما ص = −٢ تكون س= ٤، وعندما ص = −٤ تكون س = −٢

النقطتان ا، ب هما (−٢، −٤) ، (٤، −٢).

ب ميل $\overline{\text{ا ب}}$ = $\frac{-٢ - (-٤)}{٤ - (-٢)} = \frac{١}{٣}$

وعليه، يكون ميل العمود المنصف = −٣

نقطة منتصف ا ب = $\left(\frac{-٢ + ٤}{٢}، \frac{-٤ + (-٢)}{٢}\right)$ = (١، −٣)

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$) ........ استخدم م = −٣، س$_{١}$ = ١، ص$_{١}$ = −٣

ص − (−٣) = −٣ (س − ١)

معادلة العمود المنصف ص = −٣س

عندما س = ٠ يكون ص = −٣ × ٠ = ٠

وعليه، فإن العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب يمرّ بالنقطة (٠، ٠) وهي مركز الدائرة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٠

ج $س^٢ + ص^٢ = ٢٠$ ............ عوّض $-٣س$ بدلًا عن ص

$١٠س^٢ = ٢٠$

$س = \pm\sqrt{٢}$

عندما $س = -\sqrt{٢}$ تكون $ص = ٣\sqrt{٢}$، وعندما $س = \sqrt{٢}$ تكون $ص = -٣\sqrt{٢}$

إحداثيات النقطتَين ى، ل هي $(-\sqrt{٢}، ٣\sqrt{٢})$ و $(\sqrt{٢}، -٣\sqrt{٢})$ على الترتيب.

## مثــال ١٥

بيّن أن المستقيم $ص = س - ١٣$ مماسّ للدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٨س + ٦ص + ٧ = ٠$

### الحــلّ:

$س^٢ + ص^٢ - ٨س + ٦ص + ٧ = ٠$ ..... عوّض عن ص بـ $(س - ١٣)$

$س^٢ + (س - ١٣)^٢ - ٨س + ٦(س - ١٣) + ٧ = ٠$ ..... فُكّ الأقواس وبسّط.

$س^٢ - ١٤س + ٤٩ = ٠$ ..... حلّل إلى العوامل.

المميز $ب^٢ - ٤أجـ = (-١٤)^٢ - ٤ \times ١ \times ٤٩ = ٠$

هذا يعني وجود جذر حقيقي مكرر.

∴ للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرّر، وعليه يكون المستقيم $ص = س - ١٣$ مماسًا للدائرة.



## مثــال ١٦

تم رسم المستقيم $ص = س + جـ$ ، والدائرة $(س - ٤)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٨$ في المستوى الإحداثي نفسه.

أوجد قيم جـ في الحالات الآتية:

أ عندما يكون المستقيم مماسًا للدائرة.

ب عندما يتقاطع المستقيم مع الدائرة في نقطتين.

ج عندما لا يتقاطع المستقيم مع الدائرة.

### الحــلّ:

عوّض عن $ص = س + جـ$ في $(س - ٤)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٨$

$(س - ٤)^٢ + (س + جـ - ٢)^٢ = ٨$

فك الأقواس:

$س^٢ - ٨س + ١٦ + س^٢ + جـ^٢ + ٤ + ٢جـ س - ٤س - ٤جـ = ٨$ ..... انتبه عند تفكيك القوس الثاني.

$٢س^٢ + (٢جـ - ١٢)س + (١٢ - ٤جـ + جـ^٢) = ٠$

سيحدّد المميز عدد الحلول المتوافرة:

$المميز = (٢جـ - ١٢)^٢ - ٤ \times ٢ \times (١٢ - ٤جـ + جـ^٢)$

$= ٤جـ^٢ - ٤٨جـ + ١٤٤ - ٩٦ + ٣٢جـ - ٨جـ^٢$

$= -٤جـ^٢ - ١٦جـ + ٤٨$

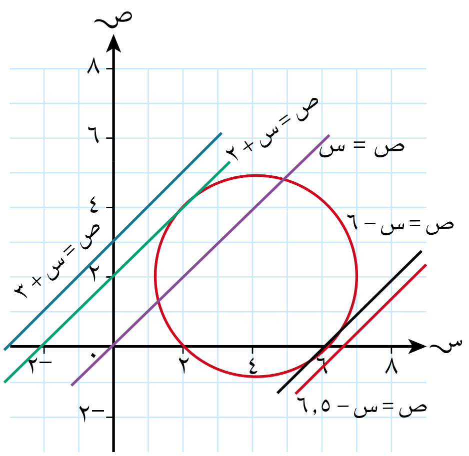
حلّل النتيجة لتحصل على ٤(−جـ$^{٢}$ − ٤جـ + ١٢)

ثم على ٤(جـ + ٦)(٢ − جـ)

أصفار المميز هي: جـ = −٦ أو جـ = ٢

تكون موجبة عندما −٦ < جـ < ٢، وتكون سالبة عندما

تكون جـ < −٦ أو جـ > ٢




أ) يكون المستقيم مماسًا للدائرة عند جـ = −٦ أو جـ = ٢

ب) يتقاطع المستقيم مع الدائرة في نقطتين عندما تكون −٦ < جـ < ٢

ج) لا يتقاطع المستقيم مع الدائرة عندما تكون جـ < −٦ أو جـ > ٢

## تمارين ٥-٥

١) أوجِد نقاط تقاطع المستقيم ص = س − ٣ مع الدائرة (س − ٣)$^{٢}$ + (ص + ٢)$^{٢}$ = ٢٠

٢) يقطع المستقيم ٢س − ص + ٣ = ٠ الدائرة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ٤س + ٦ص − ١٢ = ٠ في النقطتَين ى، هـ. أوجِد طول القطعة المستقيمة ى هـ

٣) بيّن أن المستقيم ٣س + ص = ٦ مماسّ للدائرة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ٤س + ١٦ص + ٢٨ = ٠

٤) أوجِد مجموعة قيم م بحيث يقطع المستقيم ص = م س + ١ الدائرة (س − ٧)$^{٢}$ + (ص − ٥)$^{٢}$ = ٢٠ في نقطتَين مختلفتَين.

٥) إذا علمت أن المستقيم ٢ص − س = ١٢ يقطع الدائرة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ١٠س − ١٢ص + ٣٦ = ٠ في النقطتَين ا، ب والعمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب يقطع الدائرة في النقطتَين ى، ل، فأوجد:

أ) إحداثيات النقطتَين ا، ب.

ب) معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب.

ج) إحداثيات النقطتَين ى، ل.

د) مساحة الشكل الرباعي ا ى ب ل.

★ ٦) بيّن أن الدائرتَين س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٥، س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ٢٤س − ١٨ص + ١٢٥ = ٠ متماستان، ثم أوجِد إحداثيات نقطة التماس.

٧) يتم رسم المستقيم ص = س + جـ على المحورَين نفسيهما حيث مركز الدائرة نقطة الأصل ونصف القطر ٢. أوجد قيم جـ عندما يكون المستقيم:

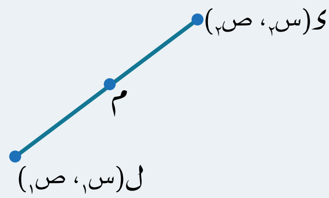
أ) مماسًا على الدائرة.

ب) يتقاطع مع الدائرة بنقطتين.

ج) لا يتقاطع مع الدائرة.

# قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

**نقطة المنتصف والميل وطول القطعة المستقيمة**




- إحداثيات نقطة المنتصف م للقطعة المستقيمة ء ل هي:
  $\left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}\right)$
- ميل $\overline{ءل} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$
- طول $\overline{ءل} = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

**المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة**

- إذا كان ميلا مستقيمَين متوازيَّين $م_{١}$، $م_{٢}$، فإن $م_{١} = م_{٢}$
- إذا كان ميلا مستقيمَين متعامدَين $م_{١}$، $م_{٢}$، فإن $م_{١} \times م_{٢} = {}^{-}١$

**معادلة الخط المستقيم**

- $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$، حيث م الميل، $(س_{١}، ص_{١})$ نقطة على المستقيم.

**معادلة الدائرة**

- $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$ حيث (أ، ب) مركز الدائرة، نق نصف قطر الدائرة.
- $س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ن ص + جـ = ٠$
  حيث المركز (م) هو: $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ن}{٢}\right)$
  ونصف القطر (نق) هو: $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ن^{٢} - ٤جـ}$

## تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الخامسة

**١)** إحداثيات النقطة ا(م، ٣)، وإحداثيات ب(٤، ن).
طول $\overline{\text{اب}}$ هو ٤$\sqrt{٥}$ وحدة، وميلها $-\frac{١}{٢}$
أوجِد قيم م، ن الممكنة.

**٢)** يتقاطع منحنى الدالة ص = ٣$\sqrt{\text{س} - ٢}$ والمستقيم ٣س − ٤ص + ٣ = ٠ في النقطتَين ى، ل.
أوجِد طول القطعة المستقيمة ى ل.

**٣)** يمرّ المستقيم م س − ٢ص = ٣٠ بالنقطتَين ا (١٠، ١٠)، ب (ن، ١٠ن) حيث م، ن ثابتان. أوجِد:

- **أ** قيمة كل من م، ن.
- **ب** إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة ا ب.
- **ج** معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب.

★ **٤)** مستقيم ميله −٢، ويمرّ بالنقطة ى (٣ت، ٢ت)، كما أنه يقطع المحور السيني في النقطة ا ويقطع المحور الصادي في النقطة ب.

- **أ** أوجِد مساحة المثلث ا و ب بدلالة ت، حيث و نقطة الأصل.
- **ب** المستقيم الذي يمرّ بالنقطة ى والعمودي على القطعة المستقيمة ا ب، ويقطع المحور السيني في النقطة ع.
  بيّن أن نقطة منتصف $\overline{\text{ى ع}}$ تقع على المستقيم ص = س.

**٥)** النقطة ى هي صورة انعكاس النقطة (−٧، ٥) حول المستقيم ٥س − ٣ص = ١٨
أوجِد إحداثيات النقطة ى.

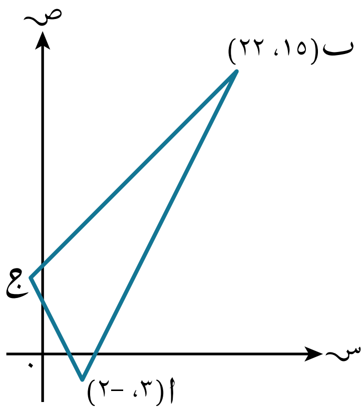
**٦)** يتقاطع منحنى الدالة ص = س + ٢ − $\frac{٤}{\text{س}}$، والمستقيم س − ٢ص + ٦ = ٠ في النقطتَين ا، ب، أوجِد:

- **أ** إحداثيات النقطتَين ا، ب.
- **ب** معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب.

**٧)** يقطع المستقيم ص = م س + ١ الدائرة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ١٩س − ٥١ = ٠ في النقطتَين ل (س، ص)، ى (٥، ١١). أوجِد:

- **أ** إحداثيات النقطة ل.
- **ب** معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ى ل.
- **ج** الإحداثي السيني للنقاط التي يقطع فيها العمود المنصف الدائرة.

**٨)** يبيّن الشكل المجاور المثلث ا ب ج حيث ا (٣، −٢) ، ب (١٥، ٢٢). ميل كل من $\overline{اب}$ ، $\overline{اج}$ ، $\overline{بج}$ هو (٢م)، (−٢ م)، (م) على الترتيب، حيث م عدد صحيح موجب. أوجِد:




أ) ميل ا ب، وقيمة م.

ب) إحداثيات النقطة ج.

ج) إحداثيات النقطة ى، حيث ى نقطة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب مع القطعة المستقيمة ب ج.

**٩)** أ) أوجِد معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب حيث ا (−١، ٦) والنقطة ب (٧ ، ٢)، واكتب الإجابة في صورة ص = م س + جـ.

ب) تقع النقطة ج على العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب وإحداثياتها (د، ل). المسافة و ج = ٢ وحدة، حيث و نقطة الأصل. اكتب معادلتَين تتضمّنان د، ل، وكذلك أوجِد الإحداثيات الممكنة للنقطة ج.



**١٠)** ا، ب نقطتان إحداثياتهما ا (−٣، ٢)، ج (٥، ٦)، م نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ج، العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ج يقطع المحور السيني في النقطة ب.

أ) أوجِد معادلة م ب، وإحداثيات النقطة ب.

ب) أثبت أن $\overline{اب} \perp \overline{بج}$.

ج) إذا علمت أن ا ب ج ى مربّع، فأوجِد إحداثيات النقطة ى، وطول القطعة المستقيمة ا ى.

**١١)** تقع النقطتان ا (١، −٢)، ب (٥، ٤) على دائرة مركزها ج (٦، ت).

أ) أوجِد معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب.

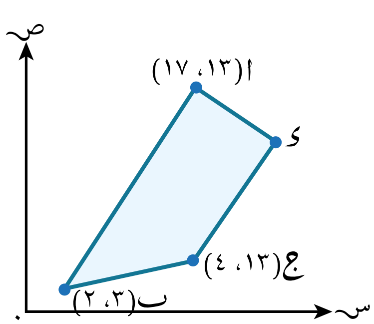
ب) استخدم إجابة الجزئية (أ) لتوجد قيمة ت.

ج) أوجِد معادلة الدائرة.

**١٢)** يبيّن الشكل المجاور شبه المنحرف ا ب ج ى، حيث ا ب // ى ج، ق (ب$\hat{ا}$ى) = ٩٠°، أوجِد:

أ) إحداثيات النقطة ى.

ب) مساحة شبه المنحرف ا ب ج ى.



**١٣)** منحنى معادلته س ص = ١٢، ومستقيم معادلته ٣س + ص = ك، حيث ك ثابت.

أ عندما ك = ٢٠، يتقاطع المنحنى والمستقيم في النقطتَين ا، ب. أوجِد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{اب}}$.

ب أوجِد مجموعة قيم ك، حيث يقطع المستقيم ٣س + ص = ك المنحنى في نقطتَين مختلفتَين.

**١٤)** أ أوجِد معادلة المستقيم ا ب، حيث ا (−٣ ، ٦)، ب (٩، −١٠).

ب بيّن أن معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ا ب هي ٣س − ٤ص = ١٧

ج تمرّ دائرة بالنقطتَين ا، ب، ويقع مركزها على المستقيم س = ١٥، أوجِد معادلة الدائرة.

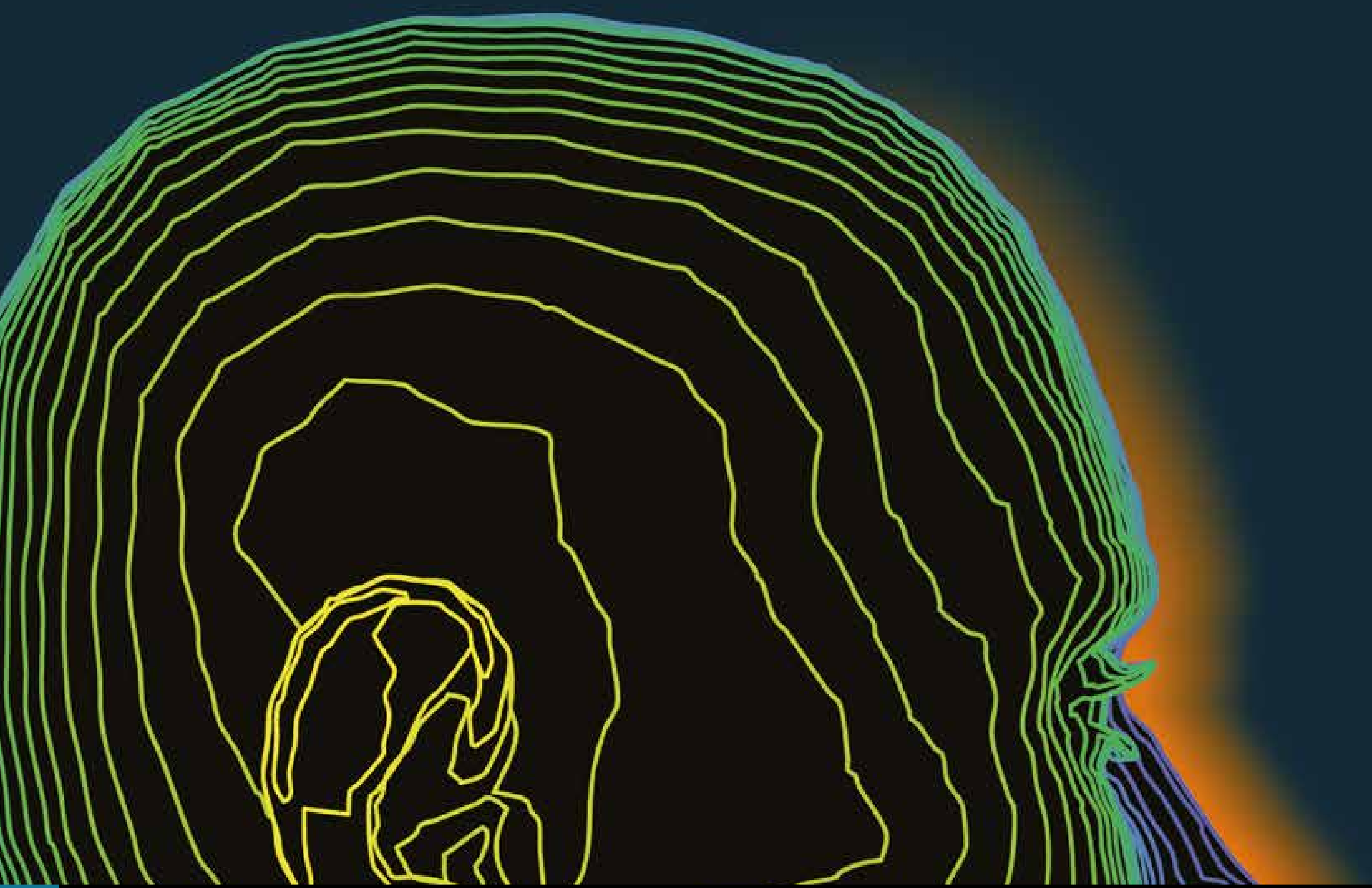
**١٥)** دائرة معادلتها س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ٨س + ٤ص + ٤ = ٠

أ أوجِد نصف قطر الدائرة، وإحداثيات مركزها.

ب أوجِد إحداثيات نقاط تقاطع الدائرة مع المحور السيني، واكتب الناتج في أبسط صورة.

ج بيّن أن النقطة ا(٦، ٢$\sqrt{٣}$ − ٢) تقع على الدائرة.

د بيّن أن معادلة مماسّ الدائرة عند النقطة ا هي $\sqrt{٣}$س + ٣ص = ١٢$\sqrt{٣}$ − ٦





# الوحدة السادسة

# المصفوفات Matrices

**ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:**

٦-١ تعرف معنى المصفوفة وتعبر عنها بدلالة صفوفها وأعمدتها، وتتعرّف على المصفوفة الصفرية والمصفوفة المحايدة.

٦-٢ تتذكر رتبة المصفوفة لزوج من المصفوفات لكي يتم جمعهما أو طرحهما أو ضربهما.

٦-٣ تتعرف متى تكون المصفوفتان متساويتين.

٦-٤ تجمع وتطرح وتضرب المصفوفات، وتعرف خصائص التبديل والتجميع لضرب المصفوفات.

٦-٥ تحسب محدد المصفوفة التي من الرتبة ٢ × ٢، ٣ × ٣.

٦-٦ تتذكر معنى المصطلحات 'منفردة' و'غير منفردة' في المصفوفات المربّعة، وتجد معكوسات المصفوفات غير المنفردة ٢ × ٢ ، ٣ × ٣.

٦-٧ تستخدم المصفوفات لحلّ أنظمة المعادلات الآنية (لمجهولين أو ثلاثة مجاهيل).

## لماذا ندرس المصفوفات؟

تعرف **المصفوفة matrix** بأنها ترتيب لقيم على شكل صفوف وأعمدة داخل قوسَين، ويشار إلى المصفوفة برتبتها (أو قياسها) ويرمز إليها بحرف تحته خط مثل أ. تستخدم المصفوفات على نطاق واسع في العديد من التطبيقات والمواقف الحياتية مثل الانعكاس، والانكسار في رسوم أو نماذج حاسوبية لاحتمالات النشرة الجوية. كما يمكن استخدام المصفوفات لتمثيل معلومات مثل إحداثيات موقع ثلاثي الأبعاد.

سنركز في هذه الوحدة على العمليات على المصفوفات، ومعكوس المصفوفة، وأنواع خاصة من المصفوفات، وكيفية استخدامها في حلّ المعادلات الآنية.

# ٦-١ المصفوفات والعمليات عليها

## رتبة المصفوفة

- العناصر داخل المصفوفة تكون مرتبة في **صفوف rows** و**أعمدة columns**.
- إذا كان لدينا المصفوفة أ رتبتها (م × ن)، فإنها تحتوي على م صفوف و ن أعمدة.

$$\begin{pmatrix} أ_{١ن} \cdots & أ_{١٢} & أ_{١١} \\ أ_{٢ن} \cdots & أ_{٢٢} & أ_{٢١} \\ \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ أ_{من} \cdots & أ_{م٢} & أ_{م١} \end{pmatrix} = \underline{أ}$$

كلّ $أ_{من}$ داخل المصفوفة يُمثل **عنصرًا element** فيها، فمثلًا $أ_{٢١}$ يشير إلى أن العنصر موجود في الصف الثاني والعمود الأول.

و $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ هي مصفوفة من الرتبة (٢ × ٣). **رتبة المصفوفة order of a matrix** أمر مهم عند إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب.

## أنواع المصفوفات

للمصفوفات عدة أنواع منها:

١- مصفوفة صف مثل (٢ ٥ ٦) وهي مصفوفة من الرتبة (١ × ٣)

٢ – مصفوفة عمود مثل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \\ ٦ \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة من الرتبة (٣ × ١).

٣- **المصفوفة المربّعة square matrix**: هي مصفوفة بها ن من الصفوف، وبها ن من الأعمدة، وصورتها العامة هي: $\begin{pmatrix} أ_{١ن} \cdots & أ_{١٢} & أ_{١١} \\ أ_{٢ن} \cdots & أ_{٢٢} & أ_{٢١} \\ \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ أ_{نن} \cdots & أ_{ن٢} & أ_{ن١} \end{pmatrix}$

٤- **المصفوفة الصفرية zero matrix**: هي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفارًا، ويمكن أن تكون هذه المصفوفة من أيّ رتبة.

### المفردات

**المصفوفة matrix**

**العنصر element**

**صفوف rows**

**أعمدة columns**

**رتبة المصفوفة order of a matrix**

**مصفوفة مربعة square matrix**

**مصفوفة صفرية zero matrix**

**المصفوفة محايدة identity matrix**

**محدد المصفوفة determinant of a matrix**

**المصفوفة المنفردة singular matrix**

**المصفوفة غير المنفردة non-singular matrix**

**مصفوفة صف row matrix**

**مصفوفة عمود column matrix**

**المصفوفة المعززة augmented matrix**

**معكوس المصفوفة inverse matrix**

## تساوي المصفوفات

تتساوى المصفوفتان، إذا كانت لهما الرتبة نفسها، وكانت جميع عناصرها المتناظرة متساوية.

### مثـــال ١

إذا كانت $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{٣} \\ \text{٥} & \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{١} & \text{-جـ} \\ \text{٥} & \text{٠} \end{pmatrix}$، فأوجِد قيمة كلًا من: أ، ب، جـ.

**الحـــلّ:**

أ = ١، ب = ٠، جـ = -٣

## جمع المصفوفات وطرحها

يمكن جمع أو طرح مصفوفتين أو أكثر إذا كان لهما الرتبة نفسها، بحيث نجمع أو نطرح كل عنصر في المصفوفة الأولى مع العناصر المناظرة لها في باقي المصفوفات، فمثلًا لجمع أو طرح مصفوفتَين من الرتبة (٢ × ٢)، نستخدم الصيغة الآتية المبيّنة في النتيجة ١:

**نتيجة ١**

لجمع أو طرح مصفوفتَين من الرتبة (٢ × ٢):

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} \pm \text{هـ} & \text{ب} \pm \text{و} \\ \text{ج} \pm \text{ز} & \text{د} \pm \text{ح} \end{pmatrix}$$

ناتج جمع المصفوفتَين $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٢} \\ \text{٤} & \text{٦} \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{-٤} \\ \text{١} & \text{٣} \end{pmatrix}$ يعطي $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} \text{٨} & \text{-٢} \\ \text{٥} & \text{٩} \end{pmatrix}$، ويكون ناتج الطرح

$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} \text{-٢} & \text{٦} \\ \text{٣} & \text{٣} \end{pmatrix}$.

## ضرب المصفوفات

### ضرب عدد في مصفوفة

عند ضرب عدد في مصفوفة، فإننا نضرب ذلك العدد في كل عنصر من عناصر المصفوفة كما في النتيجة ٢ الآتية:

**نتيجة ٢**

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$، فإن $\text{ك}\,\underline{\text{أ}} = \text{ك} \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ك أ} & \text{ك ب} \\ \text{ك ج} & \text{ك د} \end{pmatrix}$

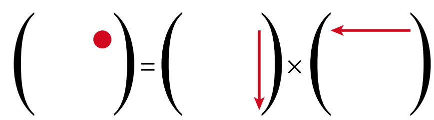
فمثلًا، إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{٢} & \text{٠} \\ \text{٤} & \text{-١} \end{pmatrix}$ فإن $\text{٥}\underline{\text{أ}} = \text{٥} \begin{pmatrix} \text{٢} & \text{٠} \\ \text{٤} & \text{-١} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{١٠} & \text{٠} \\ \text{٢٠} & \text{-٥} \end{pmatrix}$

### ضرب مصفوفة في مصفوفة

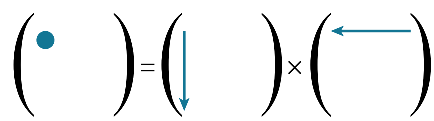
لضرب مصفوفة في مصفوفة نتبع الخطوات الآتية:

١- تحقق من أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية.

٢- نضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى في عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية، ثم نوجِد مجموع ناتجي الضرب.



نضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى في عناصر العمود الثاني من المصفوفة الثانية، ثم نوجِد مجموع ناتجي الضرب، وهكذا لباقي الصفوف والأعمدة.



**مُساعَدة**

إذا كانت $\underline{\text{أ}}$ مصفوفة من الرتبة ن × ل والمصفوفة $\underline{\text{ب}}$ من الرتبة ل × ك فإن رتبة المصفوفة $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$ هي: ن × ك

**نتيجة ٣**

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{pmatrix}$، فإن $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} \text{أ هـ + ب ز} & \text{أ و + ب ح} \\ \text{ج هـ + د ز} & \text{ج و + د ح} \end{pmatrix}$

وعليه، إذا علمت أن $\underline{\text{هـ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ع}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$،

فإن $\underline{\text{هـ}} \times \underline{\text{ع}} = \begin{pmatrix} ١ \times ٥ + ٢ \times ٧ & ١ \times ٦ + ٢ \times ٨ \\ ٣ \times ٥ + ٤ \times ٧ & ٣ \times ٦ + ٤ \times ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٩ & ٢٢ \\ ٤٣ & ٥٠ \end{pmatrix}$

## مثـــال ٢

إذا علمت أن $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$، فأوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

أ $\underline{\text{أ}} + ٣\underline{\text{ب}}$    ب $\underline{\text{ب}} - ٤\underline{\text{أ}}$    ج $\underline{\text{أ}}^{٢}$    د $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$    هـ $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}$

### الحـــلّ:

أ $\underline{\text{أ}} + ٣\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} + ٣\begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

اضرب العدد ٣ في المصفوفة $\underline{\text{ب}}$ ثم اجمع الناتج مع المصفوفة $\underline{\text{أ}}$.

$= \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢٤ & ٢١ \\ ١٨ & ١٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٨ & ٢٤ \\ ٢٠ & ١٦ \end{pmatrix}$

**ب** $ب - ٤أ = \begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} - ٤\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٨ & -٥ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

اضرب العدد ٤ في المصفوفة أ ثم اطرحها من المصفوفة ب.

**ج** $أ^٢ = أ \times أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٢ & ١٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

مربّع المصفوفة أ هو ناتج ضرب المصفوفة في نفسها. لاحظ أننا لم نربّع كل حدّ في المصفوفة، ولكننا نجري عملية الضرب على المصفوفات.

**د** $أ \times ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٥٠ & ٤٣ \\ ٢٢ & ١٩ \end{pmatrix}$

تحقق أولًا من أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية.

**هـ** $ب \times أ = \begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤٦ & ٣١ \\ ٣٤ & ٢٣ \end{pmatrix}$



عند ضرب مصفوفتَين من الرتبة (٣ × ٣)، نستخدم الأسلوب السابق نفسه، ولكن مع وجود العديد من الحسابات في كل عملية.

بصورة عامة $\begin{pmatrix} أ & ب & ج \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} د & * & * \\ هـ & * & * \\ و & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أد + ب هـ + ج و & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

فمثلًا، إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & -٢ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٢ & ١ \\ -٢ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$، فإن:

$$أ \times ب = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & -٢ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٢ & ١ \\ -٢ & ١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١٣ & ٢١ \\ -١٦ & -١ & ١٠ \\ -٢ & ١٢ & ١٤ \end{pmatrix}$$

$$ب \times أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٢ & ١ \\ -٢ & ١ & ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & -٢ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٢٣ \\ ٧ & ٦ & ٣٥ \\ ٦ & -٦ & ٩ \end{pmatrix}$$ ، وعليه $أ \times ب \neq ب \times أ$

## استكشف ١

استقصِ ضرب المصفوفات غير المربّعة.

كيف ترتبط رتبة مصفوفة الناتج برتبتَي المصفوفتَين المضروبتَين؟

## مثـــال ٣

إذا علمت أن أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ٢- \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ٦ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$، ج = $\begin{pmatrix} ١- & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١- & ١- \end{pmatrix}$، فأوجِد أ × ب، ج × أ، ب × ج.

**الحـــلّ:**

أ × ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ٢- \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ٦ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٢ \\ ١٣ & ١٢ \end{pmatrix}$

تذكّر أن تضرب العناصر من الصفوف في العناصر من الأعمدة.

يبيّن تقاطع الصفوف والأعمدة العنصر الذي يتم حسابه.

ج × أ لا يمكن حسابها لأن عدد الأعمدة في المصفوفة ج لا يساوي عدد الصفوف في المصفوفة أ.

ب × ج = $\begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ٦ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١- & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١- & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٨- & ٠ \\ ٢- & ٢- & ١٠ \\ ١ & ٢- & ٤ \end{pmatrix}$

**ملاحظة:** اضرب المصفوفات بالترتيب الصحيح.

بصورة عامة ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية، كما يظهر في النتيجة ٤

### نتيجة ٤

في المصفوفتَين أ، ب يكون أ × ب ≠ ب × أ على الرغم من وجود حالات تتساوى فيها.

توصّلنا ممّا سبق إلى أن أ × ب ≠ ب × أ، ثمّة بعض الاستثناءات لهذه القاعدة.

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$، فإن أ × ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$، وكذلك ب × أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

### نتيجة ٥

عند ضرب أيّ مصفوفة في مصفوفة صفرية يكون الناتج مصفوفة صفرية.

افترض المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$، ب = أ$^{٢}$ = $\begin{pmatrix} ٩ & ٢٠ \\ ٤ & ٩ \end{pmatrix}$

∴ أ × ب = أ × أ$^{٢}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٩ & ٢٠ \\ ٤ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ & ٨٥ \\ ١٧ & ٣٨ \end{pmatrix}$

وكذلك ب × أ = أ$^{٢}$ × أ = $\begin{pmatrix} ٩ & ٢٠ \\ ٤ & ٩ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ & ٨٥ \\ ١٧ & ٣٨ \end{pmatrix}$

كذلك يمكن استنتاج أن أ × أ$^{٣}$ = أ$^{٢}$ × أ$^{٢}$ = أ × أ$^{٣}$ = أ$^{٤}$، وبصورة عامة:

**نتيجة ٦**

$\underline{\text{أ}}^{م} \times \underline{\text{أ}}^{ن} = \underline{\text{أ}}^{ن} \times \underline{\text{أ}}^{م} = \underline{\text{أ}}^{م+ن}$ حيث م، ن أعداد صحيحة موجبة.

ثمّة مصفوفة خاصة أخرى عليك ملاحظتها. لتكن لديك المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix}$، واضربها في المصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix}$، وكذلك $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix}$

تعرف المصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ بالمصفوفة المحايدة **identity matrix**، ويرمز إليها بالرمز '$\underline{\text{م}}$'.

المصفوفة المحايدة هي مصفوفة مربّعة في صورة $\underline{\text{م}} = \begin{pmatrix} ٠ & \cdots & ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & \cdots & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & \cdots & ١ & ٠ & ٠ \\ & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ١ & \cdots & ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

تتميز هذه المصفوفة بميزة خاصة. عندما تضرب أي مصفوفة في المصفوفة المحايدة $\underline{\text{م}}$، فإنها لا تتغيّر. يشبه ذلك ضرب أي عدد في العدد ١

وبصورة عامة $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{م}} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}}$ حيث يكون ضرب المصفوفات ممكنًا.

لندرس ترتيب ضرب المصفوفات بتفصيل أكثر.

ليكن لديك المصفوفات $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٦ & ٢ & ١ \\ -١ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٩ & ٤ \\ ١ & -١ & -١ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٢ \\ ٧ & ١ & ٨ \\ ٠ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$

لإيجاد ناتج ضرب $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}}$ فإننا نجد ذلك بطريقتَين:

أولًا، نجد $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٣٦ & ٢٧ & ١٢ \\ ٣٨ & ١٣ & ٢٠ \\ ٧٢ & ٤٩ & ١٧ \end{pmatrix}$ ثم نجد $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} ١٨٩ & ٢٣١ & ٢٤٠ \\ ٩١ & ٢٦٥ & ١٤٤ \\ ٣٤٣ & ٤٢٢ & ٤٢٦ \end{pmatrix}$

أو نجد $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} ٦٣ & ٧٧ & ٨٠ \\ -٧ & -٢ & -١٠ \\ ٧ & ٣٢ & ١٤ \end{pmatrix}$ ثم نجد $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} ١٨٩ & ٢٣١ & ٢٤٠ \\ ٩١ & ٢٦٥ & ١٤٤ \\ ٣٤٣ & ٤٢٢ & ٤٢٦ \end{pmatrix}$

نلاحظ أن: $(\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{ج}} = \underline{\text{أ}} \times (\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}})$، ويسمّى ذلك بالخاصية التجميعية.

**نتيجة ٧**

تتحقق الخاصية التجميعية عند ضرب ثلاث مصفوفات فأكثر.

مثلًا في المصفوفات $\underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{ب}}$، $\underline{\text{ج}}$، $\underline{\text{ى}}$ يكون:

$(\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ى}} = \underline{\text{أ}} \times (\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}}) \times \underline{\text{ى}} = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} \times (\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ى}}) = (\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}) \times (\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ى}})$

## تمارين ٦-١

**١)** إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ & -٣ & ٠ \\ -٢ & ٨ & ١١ & ٦ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ & ٢ \\ -٦ & ٢ & ٥٢ \\ ٦ & ٨ & ٧٢ \end{pmatrix}$، $\underline{ج} = \begin{pmatrix} ٧ \\ -١٢ \\ ٤ \end{pmatrix}$، فأوجد ما يلي:

أ رتبة كل مصفوفة.

ب قيم $أ_{٢٢}$، $ب_{١٢}$، $ج_{٢١}$

ج $-٤\underline{ج}$، $-٢\underline{أ}$، $\frac{١}{٢}\underline{ب}$

**٢)** أوجِد ناتج ضرب المصفوفات في كلٍّ مما يأتي إن أمكن ذلك:

أ $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & -٢ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ٠ \\ ٣ & ٨ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٥ & -١ \\ ٤ & -٤ & ٠ & ٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

**٣)** أوجد المجاهيل في كل مما يأتي:

أ $\begin{pmatrix} -٦ & ٥ \\ س + ١٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ص + ٥ & ٥ \\ ١٤ & ٤ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٦ & \frac{٢}{٣}س \\ -٤ & ص + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & س + ٣ \\ -٤ & \frac{١}{٢}ص + ٥ \end{pmatrix}$

**٤)** تحقّق من أن $\underline{أ} \times \underline{ب} \neq \underline{ب} \times \underline{أ}$ حيث $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ -٩ & ٤ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ٤ & ١٢ \end{pmatrix}$

**٥)** إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$، فأوجِد كلًا ممّا يأتي:

أ $\underline{أ}^{٢} + ٢\underline{أ} \times \underline{ب}$

ب $\underline{ب}^{٢} \times \underline{أ}$

ج $\underline{أ}^{٢} - \underline{ب} \times \underline{أ}$

**٦)** إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ ٦ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$، فأوجِد الناتج في كل حالة من الحالتَين الآتيتَين:

أ $\underline{أ} \times \underline{ب}^{٢}$

ب $\underline{أ}^{٢} - \underline{أ} \times \underline{ب}$

**٧)** إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ٩ & ٣ \\ -١ & -٥ & ١٠ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٥ & -٣ & -٦ \end{pmatrix}$، فأوجد كلًا مما يأتي:

أ $٢\underline{أ} + ٥\underline{ب}$

ب $\underline{أ} \times \underline{ب}^{٢}$

ج $\underline{ب} \times \underline{أ}^{٢}$

د $٢\underline{أ} + ٣\underline{أ}^{٢}$

**٨)** إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١− & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، فبيّن أن أ$^{ن}$ = $\begin{pmatrix} ن− & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ .

**٩)** إذا علمت أن أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٦ & ٤ \\ ٠ & ١− & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣− & ٠ \\ ١− & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٣− & ٩ & ٥ \\ ٧ & ١ & ٢− \\ ٤ & ٨ & ١ \end{pmatrix}$ ،

فأوجِد ب × م × ج × م × أ حيث م المصفوفة المحايدة.

**١٠)** إذا علمت أن المصفوفة أ معرّفة كالآتي أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ١− & ٠ & ١− \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، فأوجد :

أ) أ$^{٢}$ ، أ$^{٣}$

ب) المصفوفة أ$^{ن}$ (لست في حاجة إلى إثبات نتيجتك).

## ٦-٢ محدّد المصفوفة

للمصفوفة المربّعة محدّد. يبيّن المحدّد ما إذا كان للمصفوفة معكوس أم لا (حيث ستدرسه في الدرس ٦-٣).

### محدد المصفوفة التي رتبتها ٢ × ٢

ليكن لديك المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$.

يكتب **محدّد المصفوفة** **determinant of a matrix** $\underline{أ}$ في صورة $\Delta$ = أد − ب ج (وتقرأ $\Delta$: دلتا)

ويمكن أن نستخدم خطّين رأسيَين لنبيّن أننا نجد محدّد المصفوفة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{vmatrix} = أد - ب\,ج$$

**نتيجة ٦**

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$، فإن $\Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{vmatrix} = أد - ب\,ج$

إذا كانت قيمة محدّد المصفوفة صفرًا تسمّى المصفوفة **منفردة** **singular**؛ وإذا لم يكن المحدّد صفرًا فإن المصفوفة **غير منفردة** **non-singular**.

**نتيجة ٧**

إذا كان $\Delta$ = ٠ ، فإن المصفوفة منفردة.

إذا كان $\Delta \neq$ ٠ ، فإن المصفوفة غير منفردة.

### مثـال ٤

أيّ مصفوفة من المصفوفتَين الآتيتَين منفردة؟

**أ** $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ٧ \end{pmatrix}$ **ب** $\begin{pmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & ١٢ \end{pmatrix}$

**الحـلّ:**

**أ** $\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ٧ \end{vmatrix} = ٤ \times ٧ - ٥ \times (-٢) = ٢٨ + ١٠ = ٣٨$ ∵ قيمة المحدد ليست صفرًا، فتكون المصفوفة غير منفردة.

**ب** $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix} = ٢ \times ١٢ - ٨ \times ٣ = ٢٤ - ٢٤ = ٠$ ∵ قيمة المحدد صفر، فتكون المصفوفة منفردة.

## محدد المصفوفة التي رتبتها ٣ × ٣

لتكن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 5 & 20 & 4 \end{pmatrix}$، فإن $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 5 & 20 & 4 \end{vmatrix}$

يمكن إيجاد قيمة المحدد، وذلك بضرب كل عدد في الصف الأول في المحدد من الرتبة (٢ × ٢) المناظر له. يتشكل المحدّد من ثلاثة محدّدات أصغر

بحيث $\Delta = 1 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 20 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}$

$= 1(16 - 160) - 6(4 - 40) + 3(20 - 20) = 72$

إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$، فإن محدّدتها

$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 33$

**مُساعَدة**

$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 5 & 20 & 4 \end{vmatrix} \quad 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 20 & 4 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 5 & 20 & 4 \end{vmatrix} \quad -6 \times \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 5 & 20 & 4 \end{vmatrix} \quad 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}$

**مُساعَدة**

عند إيجاد محدد المصفوفة من الرتبة ٣ × ٣ يمكنك اختيار أي صف أو أي عمود مع مراعاة الإشارات.

### مثـــال ٥

أوجِد محدّد كل مصفوفة من المصفوفات الآتية:

أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**الحــلّ:**

أ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$

ب) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 13$

ج) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$

### استكشف ٢

استقصِ تأثير تبديل صفَّين في المصفوفة على قيمة المحدّد.

إذا كان $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٨ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix}$، فإن قيمة محدّديهما هو $|\underline{\text{أ}}| = ١١$، $|\underline{\text{ب}}| = ٢٢$

$\therefore$ قيمة $|\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}| = \begin{vmatrix} ١ & ٣٨ \\ -٥ & ٥٢ \end{vmatrix} = ٥٢ + ١٩٠ = ٢٤٢$

كما أن ناتج الضرب $١١ \times ٢٢ = ٢٤٢$ أيضًا

$|\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} ١٠ & ٤٧ \\ ٤ & ٤٣ \end{vmatrix} = ٢٤٢$

باستخدام مثال آخر حيث $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ١ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$، فإن قيمة $|\underline{\text{أ}}| = ٨$، $|\underline{\text{ب}}| = -٣$

وعليه، فإن $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ١ & -١ & ٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -١ & ٤ \\ ١٠ & -١ & ٧ \\ ١ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$

$$|\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}| = ٧ \begin{vmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} ١٠ & ٧ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} + ٤ \begin{vmatrix} ١٠ & -١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = -٩١ - ١٧ + ٨٤ = -٢٤$$

وكذلك $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ١ & -١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ٥ \\ ٢ & ٠ & -٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$، ومحددتها $= -٢٤$



من المثالين السابقين؛ نتوصل إلى النتيجة الآتية:

**نتيجة ٨**

إذا كانت $\underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{ب}}$ مصفوفتين من الرتبة ن × ن فإن:

$|\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}| = |\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}| = |\underline{\text{أ}}| \times |\underline{\text{ب}}|$

## تمارين ٦-٢

**١)** أيّ مصفوفة من المصفوفات الآتية غير منفردة؟

أ $\begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ -٦ & -١٤ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

**٢)** أوجِد قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س} & ٤ \\ ١ & \text{س} - ٣ \end{pmatrix}$ منفردة.

**٣)** بيّن أن المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س} & -٢ \\ ٥ & \text{س} + ١ \end{pmatrix}$ ليست منفردة لجميع قيم س الحقيقية.

**٤)** إذا علمت أن $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix}$، فأثبت أن:

أ $|\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}| = |\underline{\text{أ}}| \times |\underline{\text{ب}}|$

ب $|\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}| = |\underline{\text{أ}}| \times |\underline{\text{ب}}|$

**٥)** أوجِد محدّد كل مصفوفة من المصفوفات الآتية:

**أ** $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٣ \\ ٤ & ١ & ٣ \\ ٣ & -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

**ب** $\begin{pmatrix} ٧ & ٢ & ١ \\ -١٣ & ٠ & -٣ \\ ٣٢ & ١١ & ٤ \end{pmatrix}$

**ج** $\begin{pmatrix} ٦ & ٨ & ١ \\ ٤ & -٨ & ٠ \\ ١٢ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

★ **٦)** إذا علمت أن $\begin{vmatrix} ٢\text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ ٠ & -\text{أ} & ٣\text{أ} \\ \text{أ} & ٢\text{أ} & ٤\text{أ} \end{vmatrix}$ = ٢، فأوجِد قيمة أ.

**٧)** إذا علمت أن $\underline{\text{أ}}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ ٠ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ & ١ \end{pmatrix}$، فأوجِد $|\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}|$.

## ٦-٣ معكوس المصفوفة

تعلمت في الدرس (٦-١) جمع المصفوفات، وطرحها، وضربها. ولم تدرس كيف تقسم المصفوفات لأنه لا يمكن قسمتها، ولكنك تستطيع إيجاد معكوس المصفوفة.

افترض المعادلة المصفوفية $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{م}}$، حيث $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$. لتجد المصفوفة $\underline{\text{ب}}$ ستستخدم ما يعرف **بالمصفوفة المعزّزة augmented matrix**.

تتشكل المصفوفة المعزّزة بتجميع أعمدة مصفوفتَين في مصفوفة واحدة. نستخدم المصفوفة المعزّزة لنتمكن من ملاحظة تطبيق عمليات الصف على كل من المصفوفة الأصلية ومصفوفة الوحدة (المصفوفة المحايدة).

تُستخدم عمليات الصف لتغيير عناصر المصفوفات. ثمّة ثلاثة أنواع من عمليات الصف:

- تبديل صف مع صف، حيث $\text{ص}_\text{م} \leftrightarrow \text{ص}_\text{ن}$
- ضرب صف في عدد، حيث $\text{ص}_\text{م} \leftrightarrow \text{ك}\,\text{ص}_\text{ن}$، $\text{ك} \neq$ صفر
- جمع صف مع صف، حيث $\text{ص}_\text{م} \leftrightarrow \text{ص}_\text{م} + \text{ك}\,\text{ص}_\text{ن}$، $\text{ك} \neq$ صفر

المصفوفة المعزّزة: $\left(\begin{array}{cc|cc} ٠ & ١ & ٥ & ٢ \\ ١ & ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right)$

الجزء الأيمن
عناصر المصفوفة $\underline{\text{أ}}$

الجزء الأيسر
عناصر المصفوفة المحايدة



**مُساعَدة**

توجد عمليات أخرى تجعل الطرف الأيمن مصفوفة محايدة، وكل الطرائق الممكنة ستعطي المصفوفة نفسها على الطرف الأيسر.

- يجب تغيير الجزء الأيمن من المصفوفة للحصول على المصفوفة المحايدة، وبالتالي سيكون الجزء الأيسر هو **معكوس المصفوفة inverse matrix** لـ $\underline{\text{أ}}$ ويرمز لها $\underline{\text{أ}}^{-١}$.
- يتم استخدام عمليات الصف على المصفوفة المعزّزة لتغيير الجزء الأيمن (عناصر $\underline{\text{أ}}$) إلى عناصر مصفوفة الوحدة (المصفوفة المحايدة) من خلال الخطوات الآتية:

أوّلًا: $\text{ص}_٢ \leftarrow \text{ص}_٢ - \text{ص}_١$ لتحصل على $\left(\begin{array}{cc|cc} ٠ & ١ & ٥ & ٢ \\ ١ & -١ & -٤ & ٠ \end{array}\right)$

ثانيًا: $\text{ص}_١ \leftarrow ٤\,\text{ص}_١ + ٥\text{ص}_٢$ لتحصل على $\left(\begin{array}{cc|cc} ٥ & -١ & ٠ & ٨ \\ ١ & -١ & -٤ & ٠ \end{array}\right)$

ثالثًا: $\text{ص}_١ \leftarrow \frac{١}{٨}\text{ص}_١$ لتحصل على $\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{٥}{٨} & -\frac{١}{٨} & ٠ & ١ \\ ١ & -١ & -٤ & ٠ \end{array}\right)$

رابعًا: $\text{ص}_٢ \leftarrow -\frac{١}{٤}\text{ص}_٢$، وتصبح $\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{٥}{٨} & -\frac{١}{٨} & ٠ & ١ \\ -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} & ١ & ٠ \end{array}\right)$

معكوس المصفوفة $\underline{\text{أ}}$

$\therefore \underline{\text{أ}}^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{٨} & -\frac{١}{٨} \\ -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \end{pmatrix}$، أو يمكن كتابتها $\underline{\text{أ}}^{-١} = -\frac{١}{٨}\begin{pmatrix} -٥ & ١ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$

وبصورة عامة كما هو موضح في النتيجة الآتية:

**نتيجة ٩**

معكوس المصفوفة $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{pmatrix}$ من الرتبة (٢ × ٢) هو $\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{\text{أ د} - \text{ب جـ}} \begin{pmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{pmatrix}$

حيث (أ د − ب جـ) يمثّل محدد المصفوفة، أ د − ب جـ $\neq$ صفر

نتعامل مع معكوس المصفوفة، وكأنه مقلوب المصفوفة، أي $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$، $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-١} = \underline{\text{م}}$. وهذا يشبه ٥ × $\frac{١}{٥}$ = ١، فهي استراتيجية مفيدة لقسمة المصفوفات حيث لا يمكن قسمتها.

لنعود إلى المعادلة المصفوفية $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{م}}$، اضرب طرفَي المعادلة من جهة اليمين في معكوس المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ لتحصل على $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{م}}$.

وحيث إن $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$، $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{أ}}^{-١}$، فإن $\underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-١}$

## مثــال ٦

أوجِد المصفوفات $\underline{\text{ب}}$، $\underline{\text{ج}}$، حيث $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{م}}$ ، $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} = \underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix}$.

### الحــلّ:

$\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{م}}$ — اضرب الطرفين في معكوس المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ من جهة اليمين.

$\underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ — حدّد النتيجة وهي المصفوفة $\underline{\text{ب}}$

$\therefore \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

$\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} = \underline{\text{أ}} \Leftarrow \underline{\text{ب}}^{-١} \times \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} = \underline{\text{ب}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} \Leftarrow \underline{\text{ج}} = \underline{\text{ب}}^{-١} \times \underline{\text{أ}}$ — استخدم الخصائص الجبرية للمصفوفات لإيجاد $\underline{\text{ج}}$

$\underline{\text{ب}}^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix} = \underline{\text{أ}}$ — أوجِد معكوس المصفوفة $\underline{\text{ب}}$

$\therefore \underline{\text{ج}} = \underline{\text{ب}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}}^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix}$ — توصل إلى أن $\underline{\text{ج}}$ هي المصفوفة $\underline{\text{أ}}^{٢}$

وعليه، يكون $\underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢٤ \\ ١٦ & ٥٥ \end{pmatrix}$

أي مصفوفة محدّدها صفر (والتي سمّيناها سابقًا مصفوفة **منفردة**) ليس لها معكوس، وأي مصفوفة لها معكوس تكون مصفوفة **غير منفردة**.

لإيجاد معكوس مصفوفة من الرتبة (٣ × ٣):

نبدأ بالمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

نستخدم المصفوفة المعزّزة $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

نبدأ بالعملية ص$_{٣}$ ← ص$_{٣}$ − ٢ × ص$_{١}$ لنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ثم نطبّق العملية ص$_{٣}$ ← ص$_{٣}$ − ص$_{٢}$ لنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

نلاحظ وجود مثلث من الأصفار في الأسفل. هذا ما يُسمّى **بصيغة أيشلون**.

ثم نطبّق العملية ص$_{١}$ ← ص$_{١}$ + ٢ص$_{٢}$ لنحصل على المصفوفة:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

نتبعها بالعملية ص$_{١}$ ← ٣ص$_{١}$ + ٥ص$_{٣}$، ص$_{٢}$ ← ٣ص$_{٢}$ + ٢ص$_{٣}$

لنحصل على $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -7 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

وأخيرًا نطبّق العملية ص$_{١}$ ← $\frac{1}{3}$ص$_{١}$، ص$_{٢}$ ← −$\frac{1}{3}$ص$_{٢}$، ص$_{٣}$ ← −$\frac{1}{3}$ص$_{٣}$

لنحصل على المصفوفة المعززة $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$.

**مُساعَدة**

تكون المصفوفة في صورة أيشلون عندما يوجد مثلث من الأصفار في أسفل الزاوية اليمنى:

$\begin{pmatrix} أ & ب & جـ \\ 0 & د & هـ \\ 0 & 0 & و \end{pmatrix}$،

يمكن أن نرى المثلث في الشكل الآتي:

$\begin{pmatrix} أ & ب & جـ \\ 0 & د & هـ \\ 0 & 0 & و \end{pmatrix}$

يسمّى الجزء الأيمن **صيغة أيشلون المبسّطة** حيث يوجد واحدات (جمع ١) في القطر الرئيسي وبقية العناصر أصفار.

الجزء الأيسر هو معكوس المصفوفة أ وهو، $أ^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**مُساعَدة**

من الأفضل أخذ الكسر إلى خارج المصفوفة كعامل مشترك لتسهيل الحسابات بحيث تكون العناصر داخل المصفوفة أعدادًا صحيحة.

## مثال ٧

أوجِد معكوس المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

### الحــلّ:

ابدأ مع: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

استخدم عملية الصف ص$_{٣}$ ← ٤ص$_{٣}$ − ٣ص$_{١}$، لتعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 19 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

ثم: ص$_{٢}$ ← ٢ص$_{٢}$ − ص$_{١}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & 19 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

بعد ذلك، احذف −١١ من الصف ٣، ويمكنك استخدام ص$_{٣}$ ← ص$_{٣}$ − ١١ص$_{٢}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 8 & -22 & 4 \end{array}\right)$$

ثم استخدم: ص$_{١}$ ← ١٤ص$_{١}$ − ص$_{٣}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 56 & 14 & 0 & 6 & 22 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 8 & -22 & 4 \end{array}\right)$$

بعد ذلك استخدم: ص$_٢$ ← ١٤ص$_٢$ + ٣ص$_٣$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 56 & 14 & 0 & 6 & 22 & -4 \\ 0 & -14 & 0 & 12 & -38 & 12 \\ 0 & 0 & -14 & 8 & -22 & 4 \end{array}\right)$$

وأخيرًا، ص$_١$ ← ص$_١$ + ص$_٢$ تعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 56 & 0 & 0 & 16 & -16 & 8 \\ 0 & -14 & 0 & 10 & -38 & 12 \\ 0 & 0 & -14 & 8 & -22 & 4 \end{array}\right)$$

ثم: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{19}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{11}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$

ضع الأعداد في الجزء الأيمن واحدات بالقسمة على ٥٦، ⁻١٤، ⁻١٤ على الترتيب لكل صف.

وعليه، يكون ب$^{-1}$ = $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -5 & 19 & -6 \\ -4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$

خذ $\frac{1}{7}$ عاملًا مشتركًا واكتب العناصر في صورة أعداد صحيحة.

**مُساعَدة**

يمكنك التحقق من إجابتك من خلال ضرب المصفوفة الناتجة بالمصفوفة الأصلية. يجب أن تكون نتيجة الضرب المصفوفة المحايدة.

لتكن المصفوفة ج = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$، وبتنفيذ عمليات الصف الآتية ص$_٢$ ← ٢ص$_٢$ − ٥ص$_١$، ص$_٣$ ← ٢ص$_٣$ − ٩ص$_١$، نحصل على المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. لا يمكن تحويل هذه المصفوفة إلى المصفوفة المحايدة لأنها مصفوفة منفردة (محددها = ٠).

عند وجود صف مكرّر في مصفوفة من الرتبة ( ن × ن ) فإنه لا يوجد لها معكوس. لأن طرح الصفين المتطابقين سوف يُنتج دائمًا صفًا جميع عناصره أصفار. هذا يعني أن محدد المصفوفة صفر، وبالتالي لا يوجد للمصفوفة ج معكوس. وكما نعلم من درس سابق أن المصفوفة التي ليس لها معكوس تسمّى **مصفوفة منفردة**. وبالعكس، أيّ مصفوفة لها معكوس تسمّى **مصفوفة غير منفردة**.

## مثـــال ٨

أيّ مصفوفة من المصفوفات الآتية منفردة:

أ $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٤ \\ ٦ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣٧ & -٨٦ \end{pmatrix}$ ب $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ ج $\underline{ج} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٢ & ٥ & ٨ \\ ٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix}$

### الحـــلّ:

أ ص$_{٢}$ ← ص$_{٢}$ − ٦ ص$_{١}$، $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٤ \\ ٠ & -١١ & ٢٦ \\ ٢ & ٣٧ & -٨٦ \end{pmatrix}$

ص$_{٣}$ ← ص$_{٣}$ − ٢ص$_{١}$ تعطي $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٤ \\ ٠ & -١١ & ٢٦ \\ ٠ & ٣٣ & -٧٨ \end{pmatrix}$.

نفّذ عمليات الصف حتى ترى ما إذا كان الصف ٢، والصف ٣ مرتبطَين أم لا.

ص$_{٣}$ ← −$\frac{١}{٣}$ص$_{٣}$ تعطي $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٤ \\ ٠ & -١١ & ٢٦ \\ ٠ & -١١ & ٢٦ \end{pmatrix}$

تبيّن الصفوف المتكررة عدم وجود معكوس للمصفوفة.

هذا يعني أن المصفوفة $\underline{أ}$ مصفوفة منفردة.

ب ص$_{٢}$ ← ص$_{٢}$ − ٤ص$_{١}$، $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٧ & -١٠ \\ ٠ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

ص$_{٣}$ ← ٧ × ص$_{٣}$ + ٦ص$_{٢}$ تعطي $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٧ & -١٠ \\ ٠ & ٠ & -٣٩ \end{pmatrix}$.

إذا أمكن أن نكتب المصفوفة في صورة $\begin{pmatrix} أ & ب & ج \\ ٠ & د & هـ \\ ٠ & ٠ & و \end{pmatrix}$، فيكون للمصفوفة معكوس، شرط ألّا تكون جميع عناصر المصفوفة أصفارًا.

وتكون المصفوفة $\underline{ب}$ مصفوفة غير منفردة.

ج ص$_{٢}$ ← ص$_{٢}$ − ٢ص$_{١}$، $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٠ & -٣ & -٦ \\ ٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix}$

ص$_{٣}$ ← ص$_{٣}$ − ٣ص$_{١}$ تعطي $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٠ & -٣ & -٦ \\ ٠ & -٦ & -١٢ \end{pmatrix}$.

ثم ص$_{٣}$ ← $\frac{١}{٢}$ص$_{٣}$ تعطي $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٠ & -٣ & -٦ \\ ٠ & -٣ & -٦ \end{pmatrix}$

وعليه، تكون المصفوفة $\underline{ج}$ مصفوفة منفردة.

**مُساعَدة**

يمكن تحديد ما إذا كانت المصفوفة منفردة باستخدام المحدد.

## استكشف ٣

ماذا يحدث إذا أجريت العمليات على الأعمدة بدلًا من الصفوف؟ هل يمكن الحصول على النتائج نفسها؟ هل العمليات على الأعمدة تصلح على المصفوفة المعزّزة؟

## معكوس حاصل ضرب مصفوفتين

افترض المصفوفتَين $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$

نجد $\underline{\text{أ}}^{-١} = -\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}}^{-١} = -\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٨ & -٦ \\ -٧ & ٥ \end{pmatrix}$

$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ١٩ & ٢٢ \\ ٤٣ & ٥٠ \end{pmatrix}$ فيكون معكوس مصفوفتها،

$$(\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٥٠ & -٢٢ \\ -٤٣ & ١٩ \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}}^{-١} \times \underline{\text{أ}}^{-١} = -\frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٨ & -٦ \\ -٧ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٥٠ & -٢٢ \\ -٤٣ & ١٩ \end{pmatrix}$$

$\therefore\ (\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-١} = \underline{\text{ب}}^{-١} \times \underline{\text{أ}}^{-١}$.

مما سبق نتوصل إلى النتيجة الآتية:



### نتيجة ١٠

وبصورة عامة في المصفوفات غير المنفردة: $(\text{أ} \times \text{ب})^{-١} = \text{ب}^{-١} \times \text{أ}^{-١}$،

ولكن $(\text{أ} \times \text{ب})^{-١} \neq \text{أ}^{-١} \times \text{ب}^{-١}$

## استكشف ٤

استخدم المصفوفات $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ لتجد العلاقة بين $\underline{\text{أ}}^{-١}$، $\underline{\text{ب}}^{-١}$، $\underline{\text{ج}}^{-١}$ مع المصفوفات $(\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-١}$، $(\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}})^{-١}$

تطبّق النتيجة نفسها على المصفوفات من الرتبة (ن × ن)، فإذا علمت أن $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$، يمكن أن نجد أن $(\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-١}$ هي نفسها $\underline{\text{ب}}^{-١} \times \underline{\text{أ}}^{-١}$.

في هذا المثال $\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ & -٤ & ٢ \\ ٣ & ٢ & -١ \\ -٦ & ٦ & ٢ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}}^{-١} = \frac{١}{-١٥}\begin{pmatrix} ١٢ & -١٠ & ٣ \\ -٣ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

$$\underline{\text{ب}}^{-١} \times \underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{-١٥٠}\begin{pmatrix} ٠ & -٥٠ & ٤٠ \\ -٣٠ & ٣٠ & ٠ \\ ١٥ & ١٠ & -٥ \end{pmatrix}$$

كما أن أ × ب = $\begin{pmatrix} ١ & ١- & ٨ \\ ١ & ٤ & ٨ \\ ٥ & ٥ & ١٠ \end{pmatrix}$

وباتباع الطريقة المبيّنة سابقًا، ومع عمليات الصف الست سنتوصل إلى أن:

(أ × ب)$^{-١}$ = $\frac{١}{١٥٠-}$ $\begin{pmatrix} ٠ & ٥٠- & ٤٠ \\ ٣٠- & ٣٠ & ٠ \\ ١٥ & ١٠ & ٥- \end{pmatrix}$

## مثـــال ٩

إذا علمت أن أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ١- & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١- \end{pmatrix}$. فأوجِد المصفوفة ج حيث أ × ب × ج = م

### الحـــلّ:

أ$^{-١}$ × أ × ب × ج = أ$^{-١}$ × م ⟸ ب × ج = أ$^{-١}$

استخدم الخصائص الجبرية للمصفوفات لتجد المصفوفة ج. وذلك بضرب طرفي المعادلة في أ$^{-١}$ من جهة اليمين لكلا الطرفين.

ب$^{-١}$ × ب × ج = ب$^{-١}$ × أ$^{-١}$ ⟸ ج = ب$^{-١}$ × أ$^{-١}$

اضرب طرفي المعادلة في ب$^{-١}$ من جهة اليمين

وعليه، فإن ج = (أ × ب)$^{-١}$

استخدم النتيجة (أ × ب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$ × أ$^{-١}$

أ × ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ × $\begin{pmatrix} ١- & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١- \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ١- & ١ & ١- \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix}$

أوجِد المصفوفة أ × ب

ابدأ بـ:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١- & ١ & ١- & ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ & ٠ & ٠ & ١ \end{array}\right)$

طبّق عمليات الصف لتنقل الجزء الأيمن من المصفوفة المعزّزة إلى صورة أيشلون المبسّطة.

إن استخدام عملية الصف ص$_٢$ ← ص$_٢$ + ص$_١$، تعطي:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١- & ١ & ١- & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١- & ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ & ٠ & ٠ & ١ \end{array}\right)$

ثم $ص_{٣} \leftarrow ص_{٣} - ص_{٢}$، تعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & ١- & ١ & ١- \\ ٠ & ١ & ١ & ١- & ١ & ٠ \\ ١ & ١- & ١- & ٢ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_{١} \leftarrow ص_{١} - ص_{٢}$، تعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ١- & ٠ & ٠ & ٠ & ١- \\ ٠ & ١ & ١ & ١- & ١ & ٠ \\ ١ & ١- & ١- & ٢ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

أخيرًا $ص_{٢} \leftarrow ٢ص_{٢} + ص_{٣}$، تعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ١- & ٠ & ٠ & ٠ & ١- \\ ١ & ١ & ١ & ٠ & ٢ & ٠ \\ ١ & ١- & ١- & ٢ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

أخرِج عاملًا مشتركًا لتغيّر الجزء الأيمن إلى المصفوفة المحايدة م.

$ص_{١} \leftarrow ص_{١} \div ١-$

$ص_{٢} \leftarrow ص_{٢} \div ٢$

$ص_{٣} \leftarrow ص_{٣} \div ٢$

وعليه، فإن $ج = (أ \times ب)^{١-} = \frac{١}{٢}\left(\begin{array}{ccc} ٠ & ٢ & ٠ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١- & ١- \end{array}\right)$

كما يمكننا إيجاد معكوس المصفوفة من خلال التبديل بين صفوفها، فمثلًا لإيجاد معكوس

المصفوفة $أ = \left(\begin{array}{ccc} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ١ \end{array}\right)$

ضع المصفوفة في صورة مصفوفة معززة وهي $\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ & ١ & ٣ & ١ \end{array}\right)$

طبّق عمليات الصف الآتية:

$ص_{١} \leftrightarrow ص_{٣}$، فتحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ١ & ٣ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_{٢} \leftarrow ص_{٢} - ص_{١}$، فتحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ١ & ٣ & ١ \\ ١- & ١ & ٠ & ١- & ١- & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

وبعد ذلك ص١ ← ص١ + ٣ص٢ + ٢ص٣، فتحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٢- & ٣ & ٢ & ٠ & ٠ & ١ \\ ١- & ١ & ٠ & ١- & ١- & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم ص٢ ← ص٢ + ص٣ فتعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٢- & ٣ & ٢ & ٠ & ٠ & ١ \\ ١- & ١ & ١ & ٠ & ١- & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

اضرب الصف ٢ في –١، فتحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٢- & ٣ & ٢ & ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ١- & ١- & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

فتكون المصفوفة $\underline{أ}^{١-} = \begin{pmatrix} ٢- & ٣ & ٢ \\ ١ & ١- & ١- \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

**مُساعَدة**

حلول المعادلة تكون عادة ثابتة. يمكن للمتغير الحر أن يأخذ أي قيمة.

لاحظ أن تبديل السطرين أنقص عدد العمليات عمليتين، لأن الصف الأخير يجب أن يكون في صورة ٠ ٠ ١

ففي هذا المثال، عملية الصف، ص١ ← ص١ + ٣ص٢ + ٢ص٣ وفّرت بعض الوقت. وحيث إن الأعداد في هذا المثال سهلة فإن العمليات كانت مباشرة.

## تمارين ٦-٣

**١)** أوجِد المعكوس لكل مصفوفة من المصفوفات الآتية:

أ $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٥- & ٢- \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١٢ & ٨- \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ١١ & ٨ \end{pmatrix}$

**٢)** أ أوجِد قيمة الثابت ك، حيث لا يوجد معكوس للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ك & ٥ \end{pmatrix}$.

ب إذا علمت أن ك = ٨، فأوجِد المصفوفة $\underline{ب}$ حيث $\underline{ب} \times \underline{أ}^{٢} = \underline{م}$

**٣)** إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$، فأوجِد المصفوفة $\underline{ج}$ حيث $\underline{أ} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{م}$

**٤)** أوجد المعكوس للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢- & ٣ & ١ \\ ١ & ٤ & ٠ \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix}$

**٥)** إذا علمت أن $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$:

أ أوجِد المصفوفة $\underline{\text{أ}}^{٢}$

ب بيّن أن $\underline{\text{أ}}(\underline{\text{أ}} - ٥\underline{\text{م}}) = ٢\underline{\text{م}}$، حيث $\underline{\text{م}}$ المصفوفة المحايدة.

ج استخدم المعادلة في الجزئية (ب) لتبيّن أن $\underline{\text{أ}}^{-١} = -\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$.

**٦)** إذا علمت أن المصفوفة $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$، فأوجِد:

أ المصفوفتَين $\underline{\text{أ}}^{٢}$، $\underline{\text{أ}}^{٣}$

ب قيمة ك بحيث يكون $\underline{\text{أ}}^{٣} - \text{ك}\,\underline{\text{أ}}^{٢} + ٢\underline{\text{أ}} - ٤\underline{\text{م}} = ٠$

ج المصفوفة $\underline{\text{أ}}^{-١}$

**٧)** إذا علمت أن $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & -١ & -١ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$، فأوجِد المصفوفة $\underline{\text{ج}}$ حيث $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{م}}$

## ٦-٤ استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات

إليك نظام المعادلات الآتي:

٢س − ص + ٣ع = ٤

٣س + ٢ص + ٨ع = ١٣

٤س + ٢ص + ١١ع = ١٦

لإيجاد قيم المتغيرات س، ص، ع نتبع الآتي:

أولًا: اكتب النظام في صورة
$$\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٨ \\ ٤ & ٢ & ١١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ١٣ \\ ١٦ \end{pmatrix}$$

ثانيًا: ضع النظام في صورة المصفوفة المعزّزة:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٨ & ١٣ \\ ٤ & ٢ & ١١ & ١٦ \end{array}\right)$$

ثالثًا: طبق عمليات الصف: $\text{ص}_{٣} \leftarrow \text{ص}_{٣} - ٢\text{ص}_{١}$، لتحصل على
$$\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٨ & ١٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ & ٨ \end{array}\right)$$

ثم طبّق $\text{ص}_{٢} \leftarrow ٢\text{ص}_{٢} - ٣\text{ص}_{١}$، لتحصل على
$$\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٧ & ١٤ \\ ٠ & ٤ & ٥ & ٨ \end{array}\right)$$

و$\text{ص}_{٣} \leftarrow ٧\text{ص}_{٣} - ٤\text{ص}_{٢}$، لتحصل على
$$\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٧ & ١٤ \\ ٠ & ٠ & ٧ & ٠ \end{array}\right)$$
. ومنها: ٢س − ص + ٣ع = ٤

٧ص + ٧ع = ١٤

٧ع = ٠

وعليه، يكون ع = ٠ ، ص = ٢ ، س = ٣

ويكون للنظام حلّ وحيد هو (٣، ٢، ٠)

### مثــال ١٠

أوجِد الحلّ الوحيد لنظام المعادلات الآتي:

٢س + ٥ع = −٣

س + ص + ٢ع = ٠

س − ص + ٤ع = −٤

### الحــلّ:

لتكن
$$\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٥ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١ & -١ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ \\ ٠ \\ -٤ \end{pmatrix}$$

ضع المعاملات والمتغيرات والنواتج في صورة مصفوفات.

وعليه، فإن المصفوفة المعزّزة هي
$$\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ٠ & ٥ & -٣ \\ ١ & ١ & ٢ & ٠ \\ ١ & -١ & ٤ & -٤ \end{array}\right)$$

شكّل المصفوفة المعزّزة.

طبّق عمليات الصف، $ص_٢ \leftarrow ٢ص_٢ - ص_١$، لتحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ٠ & ٥ & -٣ \\ ٠ & ٢ & -١ & ٣ \\ ١ & -١ & ٤ & -٤ \end{array}\right)$$

ثم، $ص_٣ \leftarrow ٢ص_٣ - ص_١$، لتحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ٠ & ٥ & -٣ \\ ٠ & ٢ & -١ & ٣ \\ ٠ & -٢ & ٣ & -٥ \end{array}\right)$$

ثم، $ص_٣ \leftarrow ص_٣ + ص_٢$

لتحصل على المصفوفة $\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ٠ & ٥ & -٣ \\ ٠ & ٢ & -١ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٢ & -٢ \end{array}\right)$ ........ طبّق عمليات الصف لتحصل على صيغة أيشلون.

$\therefore$ ع = −١، ص = ١، س = ١ ........ أوجد الحلّ الوحيد.

من الممكن وجود معادلات آنية لها أكثر من حل، مثلًا: المعادلتان أ + ٢ب = ٧، ٤ب − ١ = ١٣ − ٢أ

توجد معادلتان بمجهولين، ولكن عند إعادة ترتيب الحدود في المعادلة الثانية نحصل على ٢أ + ٤ب = ١٤، والتي يمكن تبسيطها إلى أ + ٢ب = ٧ وهي المعادلة الأولى نفسها، هاتان المعادلتان لهما أكثر من حل لأن أي زوج من قيم أ، ب يحقق المعادلة الأولى فإنه يحقق أيضًا المعادلة الثانية.



يمكن الحصول على نتائج مشابهة عند وجود ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل. يشرح هذا الدرس كيف نعرف أنه لا يوجد حل وحيد، وما يتوجّب فعله في هذه الحالة.

مثلًا النظام:

س + ٢ص + ٣ع = ١

٣س + ٤ص + ١٣ع = ٥

٤س + ٧ص + ١٤ع = ٥

استخدم المعادلة المصفوفية $\underline{\text{أ}}\ \underline{\text{س}} = \underline{\text{ب}}$ حيث $\underline{\text{أ}}$ هي مصفوفة المعاملات، $\underline{\text{س}}$ هي مصفوفة المتغيرات، $\underline{\text{ب}}$ هي مصفوفة الثوابت.

أولًا: اكتب النظام في صورة $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ١٣ \\ ٤ & ٧ & ١٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٥ \\ ٥ \end{pmatrix}$،

أي أن المصفوفة المعزّزة هي: $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ٤ & ١٣ & ٥ \\ ٤ & ٧ & ١٤ & ٥ \end{array}\right)$

شكّل العمليات ص$_٣$ ← ص$_٣$ − ٣ص$_١$، تعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 14 & 5 \end{array}\right)$$

وص$_٣$ ← ص$_٣$ − ٤ص$_١$، لتعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

وص$_٣$ ← ٢ص$_٣$ − ص$_٢$ لتحصل على $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$، عندما يكون في المصفوفة صفًا

جميع عناصره صفر، فهذا يعني أن عدد الحلول لا نهائي.

يوجد صف مكتمل من الأصفار، لذا يبقى لدينا معادلتان فقط ممّا يدل على أنه لن نحصل على حلّ وحيد لأن هناك معادلتَين بثلاثة مجاهيل.

## مثــال ١١

حُل نظام المعادلات الآتي: ٢س + ٣ص + ع = ١

٤س + ١٠ص + ٥ع = ٣

٢س + ١١ص + ٧ع = ٣

### الحــلّ:

المصفوفة المعزّزة هي $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 5 & 3 \\ 2 & 11 & 7 & 3 \end{array}\right)$

اكتب جميع المعاملات في المصفوفة المعزّزة.

عمليات الصف ص$_٢$ ← ص$_٢$ − ٢ص$_١$، تعطي

طبّق عمليات الصف حتى لا يمكن تغيير الصف الأخير أكثر من ذلك.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

ثم ص$_٣$ ← ص$_٣$ − ص$_١$، تعطي

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

وأخيرًا ص$_٣$ ← ص$_٣$ − ٢ص$_٢$

لتحصل على المصفوفة $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

وعليه، جميع عناصر الصف الأخير هي صفر، لذلك يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

في نظام المعادلات الآتي:

٢س − ٣ص = −٧

−٦س + ٩ص = ٢٣

هل يمكن أن نقرّر ما إذا كان للنظام حلّ أم لا؟

نبدأ بالمعادلة المصفوفية: $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٦ & ٩ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ \\ ٢٣ \end{pmatrix}$ لنحصل على المصفوفة المعزّزة الآتية:

$$\left(\begin{array}{cc|c} ٢ & -٣ & -٧ \\ -٦ & ٩ & ٢٣ \end{array}\right)$$

من خلال عمليات الصف: $ص_{٢} \leftarrow ص_{٢} + ٣ص_{١}$،

فتصبح المصفوفة المعزّزة

$$\left(\begin{array}{cc|c} ٢ & -٣ & -٧ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{array}\right)$$

لاحظ أن الصف الأخير يعني أن ٠ = ٢،

وهذا لا يمكن أن يكون صحيحًا، **لذا لا توجد حلول لهذا النظام من المعادلات.**

## مثـــال ١٢

بيّن أن نظام المعادلات س + ٤ص − ٢ع = ١

س + ٥ص = ٢

٣س + ١٣ص − ٤ع = ٣ لا حلول له.

### الحـــلّ:

ابدأ بـ $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & -٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ١٣ & -٤ & ٣ \end{array}\right)$،

استخدم المصفوفة المعزّزة مع عمليات الصف لتحصل على شكل صيغة أيشلون.

طبّق عمليات الصف $ص_{٢} \leftarrow ص_{٢} - ص_{١}$، لتعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & -٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١٣ & -٤ & ٣ \end{array}\right)$$

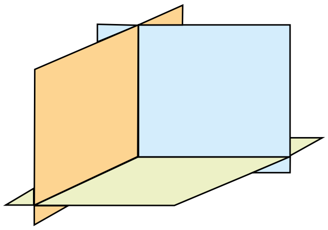
$ص_{٣} \leftarrow ص_{٣} - ٣ص_{١}$، لتعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & -٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$$

$ص_{٣} \leftarrow ص_{٣} - ص_{٢}$، لتعطي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & -٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & -١ \end{array}\right)$$

نرى من الصف الأخير أن ٠ = −١، لذا لا حلول للنظام.



سوف نفسر حلّ هذه الأنظمة من المعادلات كالآتي:

**الحالة الأولى**: إذا كان النظام س + ٢ص − ع = ١

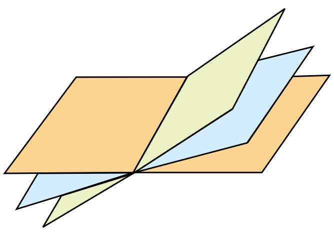
٢س + ٥ص + ع = ٩

س + ٣ص + ٣ع = ١٠

بتنفيذ عمليات الصف، سوف نقلّص المصفوفة المعزّزة إلى

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٢ & ١^- & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ & ٧ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right).$$

وحيث إن الصف الأخير يبيّن حلًا للمتغيّر ع، يمكن أن نلاحظ **وجود حلّ وحيد**. يمكن نمذجة المعادلات الثلاث في صورة مستويات، والحلّ الوحيد هو نقطة التقاطع بين المستويات الثلاثة.

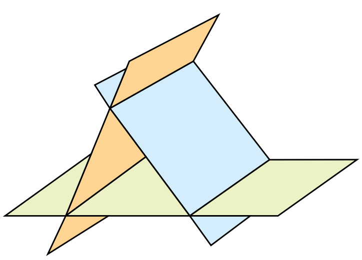


**الحالة الثانية**: نجري عمليات الصف للنظام س + ٣ص + ٢ع = ١

٢س + ٤ص + ٣ع = ٣

س + ٧ص + ٤ع = −١

حتى تصبح المصفوفة المعزّزة في صورة $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & −٢ & −١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$. لهذا النظام **عدد لا نهائي** من الحلول، لذا تتقاطع المستويات الثلاثة في مستقيم.



**الحالة الثالثة**: ليكن لديك النظام س + ٤ص − ٣ع = ١

س + ٣ص − ٢ع = ٢

٢س + ٩ص − ٧ع = ٣

عندما ننفّذ عمليات الصف على المصفوفة المعزّزة فسنحصل على المصفوفة $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & −٣ & ١ \\ ٠ & −١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٢ \end{array}\right)$. ما يدلّ على أنه **لا حلول لهذا النظام**.

الشكل المجاور مثال لثلاثة مستويات لا تتقاطع معًا.

## تمارين ٦-٤

**١)** استخدم الخصائص الجبرية للمصفوفات لتحدّد ما إذا كان لكل نظام من الأنظمة الآتية حلّ وحيد، وإذا كان كذلك فأوجِده:

**أ** ٣س − ص = ٦
−٦س + ٢ص = −١٢

**ب** ٢س + ص = ٤
٣س − ص = ٧

**ج** ٥س − ٤ص = ٢
١٠س − ٨ص = ٤

**٢)** إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ج \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$، والمصفوفة $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٣ \\ د \end{pmatrix}$، فاستخدم المعادلة $\underline{أ}\,\underline{س} = \underline{ب}$ حيث $\underline{س} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ لتوجد قيمتَي ج، د في الحالات الآتية:

أ) عندما لا يوجد حلّ للمعادلة.

ب) عندما يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

ج) عندما يوجد حلّ وحيد للمعادلة.

**٣)** حدّد ما إذا كان لكل نظام من أنظمة المعادلات الآتية حلّ وحيد، أو عدد لا نهائي من الحلول، أو لا حلول له. إذا كان الحلّ وحيدًا أو عدد الحدود لا نهائيًا، فاحسب هذه الحلول:

أ) $س + ٤ص - ٢ع = ٢$
$-٢س - ١٠ص - ٦ع = ٣$
$٣س + ١٤ص + ٤ع = ٧$

ب) $٢س + ص + ع = ١$
$٢س + ٣ص + ١٠ع = ٣$
$٤س - ع = ١$

ج) $س + ٥ص - ع = ١$
$٢س + ٧ص - ٤ع = ٠$
$٤س + ١١ص - ١٠ع = -٢$

**٤)** في نظام المعادلات $س - ص = ١$
$٢س - ص + ٥ع = ٤$
$س + ٢ص + ١٥ع = ك$،
أوجِد قيمة ك بحيث يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

**٥)** أوجِد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة الممثلة بالمعادلات الآتية:
$س - ٤ص + ٤ع = ٣$
$س - ٧ص + ١١ع = ٤$
$٢س - ٥ص + ٣ع = ٥$

**٦)** أوجِد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة الممثلة بالمعادلات الآتية:
$س - ٦ص = ٢$
$٢س + ٤ص - ١٧ع = ٤$
$٣س + ١٢ص - ٣٣ع = ٦$

**٧)** لنظام المعادلات $س + ص + ٣ع = ١$
$س - ٢ص + ٢ع = {}^{-}١$
$٣س + ٦ص + ل ع = ك$،
حدّد عدد الحلول عندما:

أ) $ل = ٥$، $ك = ٥$

ب) $ل = ١٠$، $ك = ١٠$

ج) $ل = ١٠$، $ك = ٥$

# قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

**المصفوفات والعمليات عليها**

- $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} \pm \text{هـ} & \text{ب} \pm \text{و} \\ \text{ج} \pm \text{ز} & \text{د} \pm \text{ح} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ هـ} + \text{ب ز} & \text{أ و} + \text{ب ح} \\ \text{ج هـ} + \text{د ز} & \text{ج و} + \text{د ح} \end{pmatrix}$
- بصورة عامة $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}$ مع وجود بعض الاستثناءات.
- عند ضرب أي مصفوفة في مصفوفة صفرية يكون الناتج مصفوفة صفرية.
- عند ضرب المصفوفات المربّعة ن من المرات يكون: $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}} \times \ldots \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}}^{\text{ن}}$
- المصفوفة المحايدة هي مصفوفة مربّعة في صورة $\underline{\text{م}} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ & \cdots & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & \cdots & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & \cdots & ٠ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٠ & ٠ & ٠ & \cdots & ١ \end{pmatrix}$، وتحقّق الخاصيّة $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-١} = \underline{\text{م}}$ أو $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$

**المحدّدات:**

- إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$ فإن $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أد} - \text{ب ج}$

إذا كانت قيمة محدّد المصفوفة صفرًا تسمّى المصفوفة منفردة؛ وإذا لم يكن المحدّد صفرًا فإن المصفوفة غير منفردة.

- يحسب محدّد المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ من الرتبة (٣ × ٣) حيث $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} & \text{ط} \end{pmatrix}$ كالآتي:

$$\Delta = \text{أ} \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} - \text{ب} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ط} \end{vmatrix} + \text{ج} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{هـ} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{vmatrix}.$$

- عندما يكون محدد المصفوفة صفرًا تسمّى المصفوفة منفردة.
- لأي مصفوفتَين $\underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{ب}}$:

$$\Delta\, |\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}| \times |\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}| = |\underline{\text{أ}}| \times |\underline{\text{ب}}|.$$

**معكوس المصفوفة:**

- في المصفوفات من الرتبة (٢ × ٢): إذا كان $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$ فإن $\underline{\text{أ}}^{-١} = \dfrac{١}{\text{أ د} - \text{ب ج}} \begin{pmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{ج} & \text{أ} \end{pmatrix}$
- في المصفوفات من الرتبة (٣ × ٣): نستخدم عمليات الصف على المصفوفة المعزّزة في صورة $\left(\begin{array}{ccc|ccc} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} & ١ & ٠ & ٠ \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} & ٠ & ١ & ٠ \\ \text{ز} & \text{ح} & \text{ط} & ٠ & ٠ & ١ \end{array}\right)$
- لأي مصفوفتَين مربّعتَين $\underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{ب}}$. يكون $(\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-١} = \underline{\text{ب}}^{-١} \times \underline{\text{أ}}^{-١}$

$(\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})^{-١} \neq \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{ب}}^{-١}$

- المصفوفة التي ليس لها معكوس مصفوفة تكون منفردة؛ أما التي لها معكوس مصفوفة فتكون غير منفردة.

**في نظام من المعادلات الخطية:**

- في نظام من المعادلات الخطية حيث المصفوفة المعزّزة في صورة:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \text{ب} & \text{أ} & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$ ثمّة ثلاث حالات تؤخذ في الحسبان.

  - إذا كان أ $=$ ٠، ب $=$ ٠، فإن عدد حلول نظام المعادلات لا نهائي.
  - إذا كان أ $=$ ٠، ب $\neq$ ٠، فإنه لا يوجد حل لنظام المعادلات.
  - إذا كان أ $\neq$ ٠، فإنه لأي قيمة ب $\in$ ح يوجد حلّ وحيد للنظام.

## تمارين مراجعة نهاية الوَحدة السادسة

**١)** إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$، فأوجِد:

أ $\underline{ج}$ حيث $\underline{ب} \times \underline{ج} = \underline{أ} + \underline{أ}^{٢}$

ب $\underline{ى}$ حيث $\underline{أ} \times \underline{ى} \times \underline{ب} = \underline{م}$ ($\underline{م}$ المصفوفة المحايدة)

**٢)** إذا علمت أن $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & أ \\ ٠ & ٢ & أ - ٣ \\ ١ & ٠ & أ + ٤ \end{pmatrix}$، فأوجِد:

أ قيمة العدد الثابت أ إذا كانت المصفوفة منفردة.

ب $\underline{ب}^{-١}$ عندما أ = ٤

**٣)** حدّد ما إذا كانت كل مصفوفة من المصفوفتَين الآتيتَين منفردة أم لا:

أ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٨ & ٧ \\ ١ & ١٠ & ١١ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ -١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & ٦ & ٦ \end{pmatrix}$

**٤)** إذا كانت $\begin{pmatrix} ١ & -س + ٢ \\ ٥ & ن^{٢} + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{\sqrt{م} + ١} & -٣ \\ ٢ & ن \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة كلًا من: س، ن، م.

# مصطلحات علمية

## أ

**الإكمال إلى مُربّع completing the square**: كتابة العبارة الجبرية أس$^{٢}$ + ب س + جـ في صورة د(س + هـ)$^{٢}$ + ز. (ص ١٩)

**الانحراف المعياري standard deviation**: الجذر التربيعي للتباين. (ص ١٢٦)

## ب

**البيانات المشفرة coded data**: تشفير مجموعة من البيانات من خلال تحويل كل قيمها بإضافة عدد ثابت موجب أو سالب. (ص ١٣٠)

## ت

**التباين variance**: متوسط مربع انحراف القيم عن الوسط الحسابي؛ وهو يمثل مربع الانحراف المعياري. (ص ١٢٦)

**التبديل substitution**: استخدام المعادلة الخطية لكتابة عبارة جبرية لمتغير واحد بدلالة متغير آخر (على سبيل المثال كتابة ص بدلالة س ثم استبدال هذا المتغير في المعادلة التربيعية بالعبارة الجبرية). (ص ٣٤)

**التحليل الى عوامل factorize**: كتابة عبارة مثل المعادلة التربيعية في صورة ضرب لمعاملاتها. (ص ١٨)

## ج

**الجذور roots**: إذا كانت د(س) دالة، نسمي حلول المعادلة د(س) = ٠ جذور الدالة د(س). (ص ٣٠)

## ح

**الحدود terms**: أعداد في المتتالية. (ص ٩٣)

## د

**الدالة function**: علاقة بين عناصر مجموعتَين، حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية. (ص ٥١)

**الدالّة العكسية inverse function**: الدالة العكسية د$^{-١}$(س) للدالة د(س) هي الدالة التي تعكس ما تقوم به الدالة د(س). (ص ٦٢)

**الدالّة العكسية لنفسها self–inverse function**: تكون الدالة د(س) دالة عكسية لنفسها إذا كانت د$^{-١}$(س) = د(س)، لكل قيم س. (ص ٦٧)

**الدالّة المركّبة composite function**: دالة يتم الحصول عليها من دالتَين محددتَين بتطبيق الدالة الأولى أولًا، ثم تطبيق الدالة الثانية على الناتج. (ص ٥٧)

**الدالة متعدّد إلى واحد many–one**: كل مخرجة ترتبط بأكثر من مدخلة واحدة. (ص ٥٢)

**الدالة واحد إلى متعدد one-many**: كل مدخلة ترتبط بأكثر من مخرجة واحدة. (ص ٥٣)

**الدالة واحد إلى واحد one-one**: لكل مدخلة مخرجة واحدة فقط، وبالمثل لكل مخرجة مدخلة واحدة فقط. (ص ٥١)

## ر

**رتبة المصفوفة order of a matrix**: تدل رتبة المصفوفة على قياس وشكل المصفوفة؛ فالمصفوفة برتبة (م × ن) لها م صفوف و ن أعمدة؛ على سبيل المثال، المصفوفة $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ رتبتها ٢ × ٣ (ص ١٦٦)

## ص

**الصف row**: خط أفقي من مجموعة العناصر في المصفوفة. (ص ١٦٦)

**الصورة العامة للدائرة general form of a circle**:

س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ل س + ن ص + جـ = ٠، حيث مركز الدائرة م$\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ن}{٢}\right)$، ونصف قطرها

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ن^{٢} - ٤جـ}$ (ص ١٥٤)

**الصورة القياسية للدائرة standard form of the circle**:

(س − أ)$^{٢}$ + (س − ب)$^{٢}$ = نق$^{٢}$ حيث (أ، ب) مركز الدائرة، ونق نصف قطر الدائرة. (ص ١٥١)

**الصيغة التربيعية quadratic formula**: الصيغة $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$، والتي تُستخدم لحل المعادلة أس$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ (ص ٣٢)

## ع

**العلاقة mapping**: ارتباط بين عناصر مجموعة ما بعناصر مجموعة أخرى. (ص ٥١)

**العمود column**: خط رأسي من مجموعة العناصر في المصفوفة. (ص ١٦٦)

**العنصر element**: كل جزء موجود في المصفوفة هو عنصر، في وحدة المصفوفات ستكون هذه العناصر عادة أعدادًا. (ص ١٦٦)

## ف

**الفرق المشترك (الأساس) common difference**: الفرق بين حدَّين متتالِيَين في المتتالية الحسابية. (ص ٩٣)

## ق

**القطعة المستقيمة line segment**: قطعة من مستقيم واقعة بين نقطتَين. (ص ١٣٩)

## م

**المتتالية الحسابية arithmetic sequence**: متتالية يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مقدار ثابت. (ص ٩٣)

**المتتالية الهندسية geometric**: متتالية تكون فيها النسبة المشتركة بين كل حد والحد السابق له مقدار ثابت. (ص ٩٩)

**المتسلسلة المتقاربة convergent series**: متسلسلة تقترب من عدد ما. (ص ١٠٥)

**المتسلسلة series**: مجموع حدود المتتالية. (ص ٩٤)

**مجال الدالّة domain**: مجموعة قيم المدخلات في الدالة. (ص ٥٣)

**محدد المصفوفة determinant of a matrix**: قيمة مرتبطة بالمصفوفة المربعة، يتم العمل بها بشكل مختلف اعتمادًا على رتبة المصفوفة. (ص ١٧٤)

**مدى الدالّة range**: مجموعة قيم المخرجات في الدالة. (ص ٥٣)

**مركز الدائرة center of a circle**: نقطة ثابتة تبعد عنها نقاط الدائرة مسافة واحدة. (ص ١٥١)

**المستقيمات المتعامدة perpendicular lines**: مستقيمات متقاطعة تشكل زاوية قائمة فيما بينها. (ص ١٤٣)

**المستقيمات المتوازية parallel lines**: مستقيمات لا تتقاطع أبدًا. (ص ١٤٣)

**المصفوفة matrix**: ترتيب لقيم عددية أو جبرية أو غير ذلك على شكل صفوف وأعمدة داخل قوسَين. (ص ١٦٦)

**مصفوفة الصف row matrix**: مصفوفة تتكون من صف واحد فقط، مثل المصفوفة ذات الرتبة (١ × ٢). (ص ١٦٦)

**المصفوفة الصفرية zero matrix**: هي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفارًا. (ص ١٦٦)

**مصفوفة العمود column matrix**: مصفوفة تتكون من عمود واحد فقط، مثل المصفوفة ذات الرتبة (٢ × ١). (ص ١٦٦)

**المصفوفة المحايدة identity matrix**: هي مصفوفة يكون فيها كل عنصر على القطر ممتدّ من أعلى اليمين إلى أسفل اليسار يساوي ١، مع كون جميع العناصر الأخرى تساوي صفرًا. المصفوفتان المحايدتان المستخدمتان في هذا الكتاب هما المصفوفة المحايدة ٢ × ٢ $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ والمصفوفة المحايدة ٣ × ٣ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$؛ يستخدم الحرف مـ للدلالة على المصفوفة المحايدة. (ص ١٧١)

**المصفوفة المربعة square matrix**: هي مصفوفة فيها العدد نفسه من الصفوف والأعمدة. (ص ١٦٦)

**المصفوفة المعززة augmented matrix**: عندما نضع مصفوفتَين (لهما نفس العدد من الصفوف والأعمدة) إحداهما بجانب الأخرى، وننفذ العمليات على صفوف كل منهما في الوقت نفسه. (ص ١٧٨)

**المصفوفة المنفردة singular matrix**: مصفوفة تكون قيمة المحدد لها صفرًا. (ص ١٧٤)

**المصفوفة غير المنفردة non-singular matrix**: مصفوفة تكون قيمة المحدد لها غير الصفر. (ص ١٧٤)

**المعادلة التربيعية quadratic equation**: معادلة في صورة أس$^2$ + ب س + جـ = ٠، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠ (ص ٣٠)

**معكوس المصفوفة inverse matrix**: يرمز إلى معكوس المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ بـ $\underline{\text{أ}}^{-1}$. إذا ضربنا هذه المصفوفات معًا بالترتيبَين، نحصل على المصفوفة المحايدة: $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-1} = \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$ (ص ١٧٨)



**المماس tangent**: المستقيم الذي يلامس المنحنى في نقطة واحدة. (ص ١٥٥)

**مماس الدائرة tangent to a circle**: مستقيم يلامس الدائرة في نقطة واحدة فقط. (ص ١٥٥)

**المميّز discriminant**: الجزء الموجود تحت الجذر التربيعي في الصيغة التربيعية. (ص ٣٠)

**ميل المستقيم gradient of a straight line**: انحدار المستقيم، وهو النسبة بين التغير في الإحداثي الصادي والتغير في الإحداثي السيني لمستقيم ما. (ص ١٤٣)

## ن

**النزعة المركزية central tendency**: مقاييس تلخص القيم في مجموعة البيانات؛ الوسط الحسابي والوسيط والمنوال. (ص ١١٧)

**النسبة المشتركة (الأساس) common ratio**: النسبة الثابتة للحدود المتتابعة في المتتالية الهندسية. (ص ٩٩)

**نصف قطر الدائرة Radius of a circle**: قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة ونقطة على الدائرة. (ص ١٥١)

**نقطة التحوّل turning point**: نقطة على المنحنى حيث يكون الميل عندها صفرًا، وتسمى أيضًا نقطة الثبات. (ص ٢٥)

**نقطة الثبات stationary point**: نقطة على المنحنى حيث يكون الميل عندها صفرًا، وتسمى أيضًا نقطة التحوّل. (ص ٢٥)

**نقطة القيمة الصغرى minimum point**: نقطة ك على المنحنى حيث تكون قيمة ص عند هذه النقطة أصغر من قيمة ص لأية نقطة قريبة من ك. إن نقطة القيمة الصغرى للدالة التربيعية حيث معامل س$^2$ موجب هي نقطة الرأس. (ص ٢٥)

**نقطة القيمة العظمى maximum point**: نقطة ل على المنحنى حيث تكون قيمة ص عند هذه النقطة أكبر من قيمة ص لأية نقطة قريبة من ل. إن نقطة القيمة العظمى للدالة التربيعية حيث معامل س$^2$ سالب هي نقطة الرأس. (ص ٢٥)

**نقطة المنتصف midpoint**: نقطة تقع على القطعة المستقيمة، وتبعد المسافة نفسها من طرفَيها. (ص ١٣٩)

## و

**الوسط الحسابي mean**: ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد القيم. (ص ١١٧)

**شكر وتقدير**

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعـراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Juergen Hasenkopf/Alamy Stock Photo; Gopinath Duraisamy/EyeEm/ Getty Images

تم بحمد الله

رقم الإيداع: ٢٠٢٣/٦٣٧٩م

طبع بمطبعة الزاوية الزرقاء ش.م.م - هاتف: ٢٤٨١٨٣٥٦-٩٦٨+

# الرياضيات المتقدمة

## الصف الحادي عشر

# كتاب الطالب

**يتضمن هذا الكتاب:**

- جداول معرفة قبلية للتذكر والتحقق من التعلم السابق.
- مهارات رياضية جديدة مع أمثلة محلولة تتضمن تفسيرات واضحة.
- أسئلة تطبيقية لمساعدة الطلبة على تعزيز معرفتهم والتقدم من خلال المنهج الدراسي.
- أنشطة تشجع على مناقشة المفاهيم الرياضية.
- فرص لإجراء استقصاءات أعمق في كيفية تطبيق الرياضيات لحل مجموعة متنوعة من المسائل.
- قائمة تقييم ذاتي للتحقق من التعلم والفهم.
- أسئلة مراجعة نهاية الوحدة ليتحقق الطالب من إتقانه للمهارات التي درسها في الوحدة.

**يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الحادي عشر أيضًا:**

- كتاب النشاط.
- دليل المعلّم.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om