سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
OmanVision
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات الأساسية

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات الأساسية

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

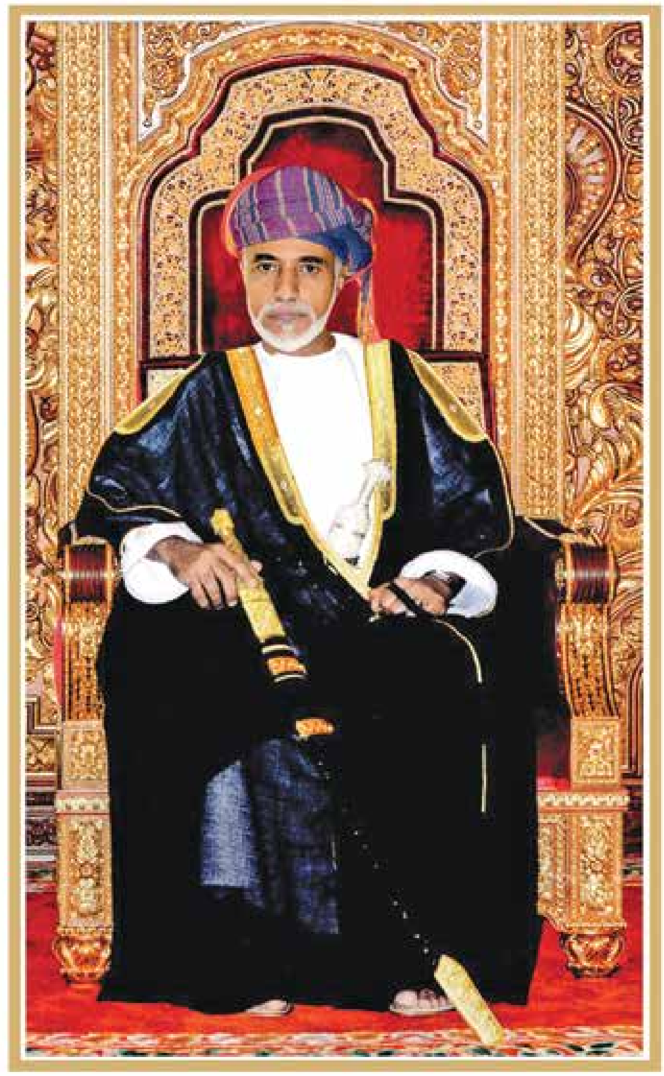
الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف الثاني عشر – من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Pure Mathematics 1 –
للمؤلف سو بمبرتن.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٦ / ٢٠٢٣ واللجان المنبثقة عنه



المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
–طيّب اللّه ثراه–

حضـرة صـاحـب الجـلالـة
السلطان هيثم بن طارق المعظم
–حفظه اللّه ورعاه–

سلطنـــــة عُمــــــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لَنا جَلالَةَ السُّلْطان

وَالشَّعْبَ في الأَوْطان بِالْعِزِّ والأَمان

وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ

فارْتَقي هامَ السَّماء وَامْلَئي الْكَوْنَ ضِياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والتي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.

بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءٌ عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس، وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة ' ★ ، ★ ، ★ ، ★ ' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' ولا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

٤-١ تستخدم الصيغة ل(ر) = $\binom{ن}{ر}$ ب^{ر}(١ − ب)$^{ن-ر}$ لحساب احتمالات توزيع ذي الحدَّين، وتميز الحالات العملية التي تكون فيها هذه التوزيعات نماذج مناسبة.

٤-٢ تحسب القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذي الحدَّين.

٤-٣ تستخدم الصيغة ل(ر) = ب(١ − ب)$^{ر-١}$ أو ل(ر) = ب ف$^{ر-١}$ لحساب احتمالات التوزيعات الهندسية، وتميز الحالات العملية حيث تكون هذه التوزيعات نماذج مناسبة.

الأهداف التعليمية تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر (الوحدة الثالثة)، الصف الحادي عشر (الوحدة السادسة)	تتعامل مع الصيغ الجبرية؛ تستخدم قوانين القوى.	١) أ اكتب $\frac{٤س^{٤} + ٦س^{٣} + ١٠}{٢س^{٢}}$ على شكل مجموع ثلاثة حدود، كلًا منها في الصيغة أس^{ن}. ب بسّط: ١) $\frac{س^{٢} \times س^{٣}}{\sqrt{س}}$

المفردات

التكامل
Integration

ثابت التكامل
Constant of integration

تكامل غير محدود
Indefinite integral

تكامل محدود
Definite integral

معرفة قبلية تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

نتيجة ١

إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ = س^{ن}، فإن ص = $\frac{١}{ن + ١}$ س$^{ن+١}$ + جـ، حيث جـ **ثابت التكامل (ثابت اختياري)** **Constant of integration (Arbitrary constant)**، ن ≠ −١

نتيجة: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

مثــال ٨

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي س ~ ث (ن ، ب).

إذا علمت أن: ت(س) = ١٢، ع^{٢}(س) = ٧,٥ ، فأوجد:

أ قيمة ن ، ب

ب ل(١١)، مقرّبًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

الحــلّ:

أ ف = $\frac{٧,٥}{١٢}$ = ٠,٦٢٥ .... باستخدام ف = $\frac{ع^{٢}(س)}{ت(س)}$

ب = ١ − ف = ٠,٣٧٥ .... باستخدام ب = ١ − ف

ن = $\frac{١٢}{٠,٣٧٥}$ = ٣٢ .... ت(س) = ن × ب، إذًا ن = $\frac{ت(س)}{ب}$

ب ل(١١) = $\binom{٣٢}{١١}$ × (٠,٣٧٥)^{١١} × (٠,٦٢٥)^{٢١} .... س ~ ث (٣٢، ٠,٣٧٥)

= ٠,١٣٨

أمثلة تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

التكامل

Integration

المفردات الأساسية هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

استكشف ٢

يبيّن الجدول الآتي الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيعات ثلاثة متغيرات عشوائية متصلة (أ)، (ب)، (ج).

	أ	ب	ج
الوسط (و)	٤٠	٧٢	١٢٣
التباين (ع^{٢})	٦٤	١٤٤	١٢١
الانحراف المعياري (ع)	٨	١٢	١١

استكشف تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

مُساعَدة

يقع المنوال عند قمة المنحنى (أعلى نقطة فيه)، ويقع الوسيط عند القيمة حيث تكون المساحة تحت المنحنى منقسمة إلى جزأين متساويَين.

مساعدة: تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- يمكن استخدام توزيع ذي الحدَّين لتمثيل عدد النجاحات في سلسلة محاولات مكررة ومستقلة عددها ن، حيث احتمال النجاح في كل محاولة ثابت ويرمز إليه بالرمز (ب).
  - إذا كان س ~ ث (ن، ب) فإن ل (ر) = $\binom{ن}{ر}$ ب^{ر}ف$^{ن - ر}$، حيث ف = ١ − ب
  - ت(س) = ن × ب
  - ع^{٢}(س) = ن × ب (١ − ب) = ن × ب × ف، حيث ف = ١ − ب
- يمكن استخدام التوزيع الهندسي لتمثيل عدد المحاولات حتى حدوث أول نجاح في سلسلة محاولات مكررة ومستقلة، حيث احتمال النجاح في كل محاولة ثابت ويرمز إليه بالرمز (ب).
  - إذا كان س ~ هندسي (ب)، فإن ل (ر) = ب ف$^{ر - ١}$ حيث ف = ١ − ب، ر = ١، ٢، ٣، ...
  - ت (س) = $\frac{١}{ب}$
  - ل(س ⩾ ر) = ١ − ف^{ر}، ل(س > ر) = ف^{ر} حيث ف = ١ − ب
  - منوال جميع التوزيعات الهندسية هو ١

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- ★ (أحمر) تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ (بنفسجي) تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ (أخضر) تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- ★ (أصفر) تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس.
- ★ (أزرق) هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.
- يجب ألّا تستخدم الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) يتبع المتغير العشوائي المتصل توزيعًا طبيعيًا وسطه ٨ وانحرافه المعياري ع
لديك ل(س > ٥) = ٠,٩٧٧٢ أوجد

أ قيمة ع

ب ل(س > ٩,٥)

٢) لديك متغيران عشوائيان متصلان (س)، (ص)، حيث أن س ~ ط(١,٥، ٠,٢)، ص ~ ط(٢، ٠,٤)؛ ارسم في التمثيل البياني نفسه تمثيلين يبيّنان المنحنيَين الطبيعيَّين اللذَين يمثلان (س)، (ص). ارسم خط التناظر لكل منحنى بشكل واضح.

٣) تجد محطة وقود أن مبيعاتها اليومية (باللترات) تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه ٤٥٢٠ وانحرافه المعياري ٥٦٠

أ أوجد عدد الأيام المتوقعة خلال العام (٣٦٥ أيام) حيث سيتخطى المبيع ٣٩٠٠ لترًا.

ب يمثل (س) المبيعات اليومية (باللترات) في محطة وقود أخرى حيث يتبع (س) توزيعًا طبيعيًا وسطه (م) وانحرافه المعياري ٥٦٠ حيث ل(س > ٨٠٠٠) = ٠,١٢٩٢ أوجد قيمة م

الوحدة الرابعة

توزيع ذي الحدّين والتوزيعات الهندسية

Binomial and geometric distributions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٤-١ تستخدم الصيغة $ل(ر) = \binom{ن}{ر} ب^{ر}(١ - ب)^{ن - ر}$ لحساب احتمالات توزيع ذي الحدَّين، وتميز الحالات العملية التي تكون فيها هذه التوزيعات نماذج مناسبة.

٤-٢ تحسب القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذي الحدَّين.

٤-٣ تستخدم الصيغة $ل(ر) = ب(١ - ب)^{ر - ١}$ أو $ل(ر) = ب\,ف^{ر - ١}$ لحساب احتمالات التوزيعات الهندسية، وتميز الحالات العملية حيث تكون هذه التوزيعات نماذج مناسبة.

٤-٤ تتعرف على المنوال وتحسب القيمة المتوقعة للتوزيعات الهندسية.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الثاني عشر (الوحدة الثالثة)	تحسب القيمة المتوقعة والتباين لمتغير عشوائي متقطع.	١) يمثل المتغير (س) العدد الظاهر عند رمي نرد منتظم. أوجد أ ت(س) ب ع^٢(س)، مقرّبًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.
الصف الحادي عشر (الوحدة التاسعة)	تستخدم مفكوك (أ + ب)^ن، حيث ن عدد صحيح موجب.	٢) إذا علمت أن (أ + ب)^٣ = أ^٣ + ٣ أ^{٢}ب + ٣ أب^٢ + ب^٣ فأوجد الكسور الأربعة في مفكوك $\left(\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}\right)^٣$ وتأكد من أن مجموعها يساوي ١

المفردات

نموذج رياضيّ **Mathematical model**

توزيع ذي الحدَّين **Binomial distribution**

التوزيع الهندسي **Geometric distribution**

المنوال **Mode**

لماذا ندرس توزيع ذي الحدّين والتوزيع الهندسي؟

يمكن استخدام التوزيعات الاحتمالية المنفصلة لإيجاد احتمالات التجارب العشوائية ذات المتغيرات المنفصلة (المتقطعة)، والتي يكون لها ناتجان مستقلان فقط إما النجاح أو الفشل، ويكون احتمال النجاح فيها ثابتًا، ففي الحياة اليومية نجد الكثير من المواقف التي تؤدّي إلى النجاح أو إلى الفشل فمثلًا: قد تحقق الاستثمارات في الأعمال ربحًا أو خسارة، كذلك رمي الكرة في مباراة كرة السلة إما أن تدخل في السلة أو لا تدخل، ولذلك فإن اعتماد النواتج على النتيجتين 'نعم/ لا' يسمح لنا أن نصف بعض المواقف باستخدام نموذج رياضيّ **Mathematical model**.

ومن تلك النماذج الرياضية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية المنفصلة، والتي تظهر نتيجة تكرار التجارب المستقلة حين يكون احتمال النجاح فيها ثابتًا، النموذجان:

- توزيع ذي الحدَّين **Binomial distribution**، ويستخدم لتمثيل عدد النجاحات لعدد ثابت من التجارب المستقلة.
- التوزيع الهندسي **Geometric distribution**، ويستخدم لتمثيل عدد من التجارب حتى (ومتضمنًا) حدوث أول نجاح لعدد غير منتهٍ من التجارب المستقلة.

٤-١ توزيع ذي الحدّين

في تجربة رمي حجر نرد أربع مرات،
ليكن المتغير العشوائي المتقطع (ر) عدد المرات التي يظهر فيها الرقم ٦،
∴ ر ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}.

لإيجاد التوزيع الاحتمالي للمتغير (ر)، يجب أن نحسب ل(ر) لكل قيمه الممكنة.
باستخدام (٦) لتمثيل النجاح، (ف) لتمثيل الفشل في كل تجربة، فإن:
ل(نجاح) = ل(٦) = $\frac{١}{٦}$
ل(فشل) = ل(ف) = $\frac{٥}{٦}$

مُساعَدة
في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة يكون احتمال الحصول على أي رقم هو $\frac{١}{٦}$

يبيّن الجدول الآتي الحسابات اللازمة لإيجاد ل(ر).

ر	الطرق الممكنة للحصول على (ر) نجاح	عدد الطرق للحصول على (ر) نجاح	احتمال كل طريقة	ل(ر)
٠	(ف، ف، ف، ف)	$\binom{٤}{٠} = ١$	$\frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦}$	$\binom{٤}{٠}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٠}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$
١	(٦، ف، ف، ف) ، (ف، ٦، ف، ف) ، (ف، ف، ٦، ف) ، (ف، ف، ف، ٦)	$\binom{٤}{١} = ٤$	$\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦}$	$\binom{٤}{١}\left(\frac{١}{٦}\right)^{١}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣}$
٢	(٦، ٦، ف، ف) ، (٦، ف، ٦، ف) ، (٦، ف، ف، ٦) ، (ف، ٦، ٦، ف) ، (ف، ٦، ف، ٦) ، (ف، ف ، ٦، ٦)	$\binom{٤}{٢} = ٦$	$\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦}$	$\binom{٤}{٢}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٢}$
٣	(٦، ٦، ٦، ف) ، (٦، ٦، ف، ٦) ، (٦، ف، ٦، ٦) ، (ف، ٦، ٦، ٦)	$\binom{٤}{٣} = ٤$	$\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}$	$\binom{٤}{٣}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٣}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{١}$
٤	(٦، ٦، ٦، ٦)	$\binom{٤}{٤} = ١$	$\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦}$	$\binom{٤}{٤}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٤}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٠}$

يبيّن لنا الجدول مثلًا أنه توجد أربع طرق للحصول على الرقم ٦ مرة واحدة، ولكل من هذه الطرق احتمال يساوي $\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦}$
وعليه فإن احتمال الحصول على الرقم ٦ مرة واحدة هو

$$ل(١) = ٤ \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} = \binom{٤}{١}\left(\frac{١}{٦}\right)^{١}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣} = \frac{٥٠٠}{١٢٩٦}$$

فيما يلي جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع (ر)، وهو عدد مرات ظهور الرقم ٦ عند رمي حجر نرد منتظم وبشكل اعتيادي أربع مرات.

ر	٠	١	٢	٣	٤	
ل(ر)	$\frac{٦٢٥}{١٢٩٦}$	$\frac{٥٠٠}{١٢٩٦}$	$\frac{١٥٠}{١٢٩٦}$	$\frac{٢٠}{١٢٩٦}$	$\frac{١}{١٢٩٦}$	$\sum$ ل(ر) = ١

في الجدول نمط للاحتمالات هو:

$$ل(ر) = \binom{٤}{ر}\left(\frac{١}{٦}\right)^{ر}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤-ر}$$

تشكل هذه الاحتمالات التي مجموعها ١، الحدود في مفكوك ذي الحدَّين لـ $\left(\frac{١}{٦}+\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$

$$\left(\frac{١}{٦}+\frac{٥}{٦}\right)^{٤}=\binom{٤}{٠}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٠}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}+\binom{٤}{١}\left(\frac{١}{٦}\right)^{١}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣}+\binom{٤}{٢}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٢}+\binom{٤}{٣}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٣}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{١}+\binom{٤}{٤}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٤}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٠}$$

$$=\frac{٦٢٥}{١٢٩٦}+\frac{٥٠٠}{١٢٩٦}+\frac{١٥٠}{١٢٩٦}+\frac{٢٠}{١٢٩٦}+\frac{١}{١٢٩٦}=١$$

يكون لمتغير عشوائي متقطع توزيع ذي الحدَّين إذا حقق الشروط الآتية:

- يوجد ن تجربة مكررة مستقلة.
- قيمة ن محدودة.
- لكل تجربة نتيجتان ممكنتان فقط (نجاح أو فشل).
- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت وهو ب

مُساعَدة

لا يعني مصطلح 'النجاح' حصول إنجازات عظيمة كما في الحياة الواقعية، بل يعني ظهور ناتج محدد وبالتالي فإن 'الفشل' يعني عدم ظهور ذلك الناتج.
تتحدد قيمة ب من خلال التجربة وسياق السؤال.

المتغير العشوائي المتقطع هو عدد المرات التي نحصل فيها على نجاح من أصل ن تجربة.

يشار إلى المتغيّر العشوائي المتقطع (س) الذي يتبع توزيع ذي الحدَّين بـ س ~ ث(ن، ب).

نتيجة ١

إذا كان س ~ ث (ن ، ب)، فإن احتمال ر من النجاحات هو ل(ر) = $\binom{ن}{ر}$ ب^{ر}(١ − ب)$^{ن-ر}$

حيث إن:

ن عدد مرات تكرار التجربة.

ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، .... ، ن

ب احتمال النجاح، ٠ < ب < ١

غالبًا ما يُستخدم الحرف (ف) لتمثيل احتمال الفشل في كل تجربة، فتصبح الصيغة في النتيجة ١ على الشكل ل(ر) = $\binom{ن}{ر}$ ب^{ر}ف$^{ن-ر}$، حيث ب + ف = ١، ومنها ف = ١ − ب

مُساعَدة

تمثل قيم $\binom{ن}{ر}$ معاملات الحدود في توزيع ذي الحدَّين، وتعطي عدد الطرق للحصول على (ر) نجاحًا في تجربة مكررة (ن) مرة.
تمثّل ب^{ر}ف$^{ن-ر}$ أو ب^{ر}(١ − ب)$^{ن-ر}$ احتمال كل طريقة للحصول على (ر) نجاحًا، (ن − ر) فشل.

فمثلًا: إذا كان المتغيّر س ~ ث (٣، ب)، فإن س ∈ {٠، ١، ٢، ٣}، وتكون لدينا الاحتمالات الآتية:

ل(٠) = $\binom{٣}{٠}$ × ب^{٠} × ف^{٣} = ١ف^{٣}

ل(١) = $\binom{٣}{١}$ × ب^{١} × ف^{٢} = ٣ب^{١} ف^{٢}

ل(٢) = $\binom{٣}{٢}$ × ب^{٢} × ف^{١} = ٣ب^{٢}ف^{١}

ل(٣) = $\binom{٣}{٣}$ × ب^{٣} × ف^{٠} = ١ب^{٣}

مثــال ١

لدينا المتغيّر العشوائي المتقطع (س) حيث س ~ ث (٦ ، ٠,٧).

أ اكتب أصغر وأكبر قيمة ممكنة للمتغير (س).

ب أوجد ل(٤) مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

ج أوجد ل(س < ٤) مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

الحــلّ:

أ من ن = ٦ تجارب يمكن أن تنتج ٠ أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ نجاحات.

أصغر قيمة ممكنة للمتغير (س) هي ٠

وأكبر قيمة ممكنة للمتغير (س) هي ٦

ب س ~ ث(٦ ، ٠,٧) ، ن = ٦ ، ب = ٠,٧ ، ١ − ب = ٠,٣

وعليه س $\in$ {٠، ١، .....، ٦}

استخدم الصيغة

$ل(ر) = \binom{ن}{ر} ب^{ر} ف^{ن-ر}$

$ل(٤) = \binom{٦}{٤} \times (٠,٧)^{٤} \times (٠,٣)^{٦-٤}$

$= ١٥ \times (٠,٧)^{٤} \times (٠,٣)^{٢}$

$= ٠,٣٢٤$

ج $ل(س > ٤) = ل(٥) + ل(٦)$

س > ٤ تعني أن (س) يمكن أن يساوي ٥ أو ٦، هذان الحدثان متنافيان، لذا نجمع احتماليهما.

$= \binom{٦}{٥} \times (٠,٧)^{٥} \times (٠,٣)^{٦-٥} + \binom{٦}{٦} \times (٠,٧)^{٦} \times (٠,٣)^{٦-٦}$

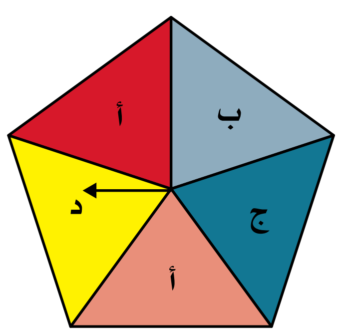
$= ٦ \times (٠,٧)^{٥} \times (٠,٣)^{١} + ١ \times (٠,٧)^{٦} \times (٠,٣)^{٠}$

$= ٠,٣٠٢٥٢٦ + ٠,١١٧٦٤٩$

$= ٠,٤٢٠$

مثــال ٢

يبيّن الشكل المجاور قرصًا دوّارًا خماسيًا منتظمًا.
إذا دُوِّر القرص ١٠ مرات، فأوجد احتمال أن يتوقف المؤشر عند الحرف أ ثلاث مرات.



مُساعَدة

تذكّر أن (س) يمثل عدد النجاحات، لذا فهو يتخذ قيمًا صحيحة من ٠ إلى ن

الحــلّ:

ن = ١٠ (عدد مرات إدارة القرص)

النجاح هو وقوف المؤشر على أ

احتمال النجاح هو ب = $\frac{٢}{٥}$ = ٠,٤

احتمال الفشل هو ١ − ب = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

أي أن س ~ ث (١٠ ، ٠,٤)

$ل(٣) = \binom{١٠}{٣} \times (٠,٤)^{٣} \times (٠,٦)^{٧}$

$= ١٢٠ \times (٠,٤)^{٣} \times (٠,٦)^{٧}$

= ٠,٢١٥ مقرّبًا إلى أقرب ثلاثة أرقام معنوية.

مثـــال ٣

لدينا س ~ ث (٨ ، ٠,٧)، أوجد مقرّبًا الناتج إلى أقرب ثلاثة أرقام معنوية:

أ ل(س < ٦) ب ل(س ≠ ٥) ج ل(٢ < س < ٥)

الحـــلّ:

س ~ ث (٨ ، ٠,٧): ن = ٨ ، ب = ٠,٧ ، ١ − ب = ٠,٣

وعليه يكون س ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

أ ل(س < ٦) = ل(٧) + ل(٨)

$= \binom{٨}{٧} \times (٠,٧)^{٧} \times (٠,٣)^{١} + \binom{٨}{٨} \times (٠,٧)^{٨} \times (٠,٣)^{٠}$

= ٠,١٩٧٦٥ ... + ٠,٠٥٧٦٤٨ ...

= ٠,٢٥٥

ب ل(س ≠ ٥) = ١ − ل(٥)

$= ١ - \binom{٨}{٥} \times (٠,٧)^{٥} \times (٠,٣)^{٣}$

= ١− ٠,٢٥٤

= ٠,٧٤٦

ج ل(٢ < س < ٥) = ل(٣) + ل(٤)

$= \binom{٨}{٣} \times (٠,٧)^{٣} \times (٠,٣)^{٥} + \binom{٨}{٤} \times (٠,٧)^{٤} \times (٠,٣)^{٤}$

= ٠,٠٤٦٦٨ + ٠,١٣٦١٤

= ٠,١٨٣

مُساعَدة

قد يؤدي التقريب المبكر لقيم الاحتمالات إلى إجابة نهائية غير صحيحة. الإجابة ٠,١٩٨ + ٠,٠٥٧٦ = ٠,٢٥٦ في هذا المثال غير صحيحة.

مُساعَدة

نقوم بكتابة ثلاث نقاط بعد العدد للإشارة إلى تواجد المزيد من الأرقام وأن العدد لم يتم تقريبه بعد.

مثـــال ٤

في بلد ما ٨٥٪ من السكان يحملون العامل الرايزيسي الموجب (Rh^+).
أوجد احتمال أن يكون أقل من ٣٩ شخصًا من عيّنة عشوائية مكوّنة من ٤٠ شخصًا يحملون العامل الرايزيسي الموجب.

الحـــلّ:

ليكن المتغير العشوائي المتقطع (س) هو عدد الذين يحملون العامل الرايزيسي الموجب (Rh^+)، إذًا س ~ ث (٤٠، ٠,٨٥)

ل(س < ٣٩) = ١− [ل(٣٩) + ل(٤٠)]

$= ١ - \left[\binom{٤٠}{٣٩} \times (٠,٨٥)^{٣٩} \times (٠,١٥)^{١} + \binom{٤٠}{٤٠} \times (٠,٨٥)^{٤٠} \times (٠,١٥)^{٠}\right]$

= ١ − [٠,٠١٠٦٠٤... + ٠,٠٠١٥٠٢...]

= ٠,٩٨٨

مُساعَدة

أقل من ٣٩ يعني 'لا يساوي ٣٩ أو ٤٠'

مُساعَدة

العامل الرايزيسي هو بروتين وراثي قد يوجد في كريات الدم الحمراء، عندما يحتوي الدم على هذا البروتين نقول إن العامل موجب (Rh^+) وعند عدم وجود هذا البروتين نقول إن العامل سالب (Rh^-).

استكشف ١

يمكن استكشاف توزيع ذي الحدَّين باستخدام مصدر Binomial Distribution image generator على موقع جيوجبرا GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/hMuamz5w)

يمكن مثلًا التحقق من إجابة المثال ٤ كما يلي:

اختر ن = ٤٠، ب = ٠,٨٥، فينتج مخطط أعمدة يمثل التوزيع الاحتمالي.

لإيجاد ل(س < ٣٩)، حرك المتغيرَين على المحور الأفقي الأول إلى الصفر والثاني إلى ٣٨، عندها سيظهر على الشاشة فوق مخطط الأعمدة، الاحتمال $P(\boxed{0} \leqslant X \leqslant \boxed{38})$، مع قيمة هذا الاحتمال.

مثــال ٥

في إحدى الجامعات الكبيرة، يدرس ٤٨٪ من الطلبة للحصول على شهادة في مجال العلوم.

أوجد، مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية، احتمال أن يكون ١٨ طالبًا من أصل ٤٠ طالبًا تم اختيارهم عشوائيًا:

أ يدرسون للحصول على شهادة في مجال العلوم.

ب يدرسون للحصول على شهادة في غير مجال العلوم.

الحــلّ:

أ ليكن (س) عدد الطلبة الذين يدرسون للحصول على شهادة في مجال العلوم.

ن = ٤٠، ب = ٠,٤٨، ف = ٠,٥٢، ر = ١٨

$$ل(١٨) = \binom{٤٠}{١٨} \times (٠,٤٨)^{١٨} \times (٠,٥٢)^{٢٢}$$

$$= ٠,١١٧$$

ب ليكن (ص) عدد الطلبة الذين يدرسون للحصول على شهادة في غير مجال العلوم.

النجاح في الجزئية ب هو نفسه الفشل في الجزئية أ

الفشل في الجزئية ب هو نفسه النجاح في الجزئية أ

ن = ٤٠، ب = ٠,٥٢، ف = ٠,٤٨، ر = ١٨

$$ل(١٨) = \binom{٤٠}{١٨} \times (٠,٥٢)^{١٨} \times (٠,٤٨)^{٢٢}$$

$$= ٠,٠٨٥$$

مثــال ٦

لدينا س ~ ث (ن ، ٠,٤) ، حيث ل(٠) = ٠,١٢٩٦

أوجد:

أ قيمة ن

ب ل(٢).

الحــلّ:

أ نعلم أن: ب = ٠,٤ ، ف = ١ − ب = ٠,٦ ، ر = ٠ ، ل(٠) = ٠,١٢٩٦

$\binom{ن}{٠} \times (٠,٤)^{٠} \times (٠,٦)^{ن-٠} = ٠,١٢٩٦$

$١ \times ١ \times (٠,٦)^{ن} = ٠,١٢٩٦$

تنتج من هذا المعادلة الأسّية التي نستطيع حلها باستخدام اللوغاريتمات.

$(٠,٦)^{ن} = ٠,١٢٩٦$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفَين.

$لط(٠,٦)^{ن} = لط\ ٠,١٢٩٦$

استخدم قانون القوة للوغاريتمات: $لط\ أ^{س} = س\ لط\ أ$

$ن\ لط(٠,٦) = لط\ ٠,١٢٩٦$

اقسم الطرفَين على لط ٠,٦

$ن = \frac{لط\ ٠,١٢٩٦}{لط\ ٠,٦}$

$ن = ٤$

ب $ل(٢) = \binom{٤}{٢} \times (٠,٤)^{٢} \times (٠,٦)^{٤-٢}$

استخدم ن = ٤ ، ب = ٠,٤ ، ف = ٠,٦ ، ر = ٢

$= ٦ \times (٠,٤)^{٢} \times (٠,٦)^{٢}$

$= ٠,٣٤٥٦$

مُساعَدة

يمكن استخدام التجريب لقيم ن صحيحة أكبر من الصفر في الخطوة $٠,٦^{ن} = ٠,١٢٩٦$

مُساعَدة

يمكن استخدام اللوغاريتم الاعتيادي أو لوغاريتم لأي أساس لإيجاد قيمة ن

تمارين ٤-١

١) إذا كان المتغير (س) يتبع توزيعًا ذا حدَّين، حيث ن = ٤ ، ب = ٠,٢ ، فأوجد:

أ ل(٤) **ب** ل(٠) **ج** ل(٣) **د** ل(٣ أو ٤)

٢) إذا علمت أن ص ~ ث (٧ ، ٠,٦)، فأوجد:

أ ل(٧) **ب** ل(٥) **ج** ل(ص ≠ ٤) **د** ل(٣ < ص < ٦)

٣) إذا علمت أن ح ~ ث (٩ ، ٠,٣٢)، فأوجد:

أ ل(٥)
ب ل(ح ≠ ٥)
ج ل(ح > ٢)
د ل(٠ > ح > ٩)

٤) إذا علمت أن و ~ ث $\left(٨ ، \frac{٢}{٧}\right)$، فأوجد:

أ ل(٤)
ب ل(و ≤ ٧)
ج ل(و ≥ ٢)
د ل(٣ ≥ و > ٦)
هـ ل(و عدد فردي)

٥) أوجد احتمال كل حدث من الأحداث الآتية:

أ ظهور ٥ صور تحديدًا عند رمي قطعة نقد منتظمة ٩ مرات.

ب ظهور العدد ٦ مرتَين تحديدًا عند رمي حجر نرد منتظم ١١ مرة.

٦) ينجح في اختبار القيادة ٧٠٪ من الأشخاص من المحاولة الأولى. أوجد احتمال أن ينجح ٥ أشخاص تم اختيارهم عشوائيًا من بين ٨ أشخاص تقدموا للاختبار لأول مرة.

٧) تبيّن الأبحاث أن ٦٣٪ من مالكي دور العرض ذكور. أوجد احتمال أن يكون مالكو ٢٠ من أصل عيّنة من ٣٠ دار عرض تم اختيارها عشوائيًا:

أ من الذكور.

ب من الإناث.

٨) في بلد ما ٥٨٪ من السكان البالغين متزوجون. أوجد احتمال أن يكون ١٢ من أصل ٢٠ بالغًا تم اختيارهم عشوائيًا متزوجين.

٩) فرصة لاعب كرة قدم للتسجيل في كل ضربة جزاء هي ٩٥٪ أوجد احتمال أن:

أ يُسجل جميع ضربات الجزاء الـ ١٠ التالية.

ب يفشل في تسجيل واحدة من ضربات الجزاء السبع التالية.

★ **١٠)** ينتج مصنع ألواح دوائر إلكترونية، معدل وجود خطأ فيها ٠,٣٪. أوجد احتمال أن يحصل في عيّنة عشوائية من ٢٠٠ لوح:

أ خطأ في لوح واحد فقط.

ب خطأ في أقل من لوحَين.

١١) أعطِ سببًا لعدم كون التوزيع ذي الحدَّين مناسبًا للمتغير (س) في كل من الحالات الآتية:

أ (س) هو طول أطول شخص عند اختيار ثلاثة أشخاص عشوائيًا من مجموعة مكوّنة من ١٠ أشخاص.

ب (س) هو عدد البنات اللاتي تمّ اختيارهن عندما نختار طفلَين عشوائيًا من مجموعة مكوّنة من بنت وثلاثة أولاد.

١٢) إذا علمت أن س ~ ث (ن ، ٠,٦)، فأوجد قيمة ن، عندما ل(ن) = ٠,٢١٦

٤-٢ القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذي الحدّين

القيمة المتوقعة (الوسط) هي مقياس للنزعة المركزية، والانحراف المعياري هو مقياس التشتت لتوزيع ذي الحدَّين. يمكننا حساب هذه القيم، بالإضافة إلى التباين، باستخدام عدد مرات تكرار التجربة (ن)، احتمال النجاح (ب).

افترض أن س ~ ث (٢ ، ٠,٦)، التوزيع الاحتمالي للمتغير (س) مبيّن في الجدول الآتي:

س	٠	١	٢
ل (س)	٠,١٦	٠,٤٨	٠,٣٦

بتطبيق صيغ ت(س)، ع^{٢}(س) يعطي النتائج الآتية:

ت(س) = $\sum$ س ل (س) = (٠ × ٠,١٦) + (١ × ٠,٤٨) + (٢ × ٠,٣٦) = ١,٢

ع^{٢}(س) = $\sum$ س^{٢} ل (س) − (ت (س))^{٢}

= (٠^{٢} × ٠,١٦) + (١^{٢} × ٠,٤٨) + (٢^{٢} × ٠,٣٦) − (١,٢)^{٢}

= ٠,٤٨

وبطريقة أخرى يمكننا أن نجد القيمة المتوقعة ت(س) والتباين ع^{٢}(س) في تجربة تتألف من ن = ٢ محاولة مع احتمال نجاح هو ب = ٠,٦ في كل محاولة:

ت(س) = ن × ب = ٢ × ٠,٦ = ١,٢

ع^{٢}(س) = ن × ب (١ − ب) = ن × ب × ف = ٢ × ٠,٦ × ٠,٤ = ٠,٤٨

تذكير

درست في درس القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المتقطع بالوحدة ٣ أن القيمة المتوقعة هي الوسط الحسابي لعدد كبير من التجارب.

تذكير

في المتغير العشوائي المتقطع (س):

القيمة المتوقعة

ت(س) = $\sum$س ل(س)

التباين ع^{٢}(س) =

$\sum$س^{٢} ل(س) − (ت(س))^{٢}

نتيجة ٢

في التوزيع س ~ ث (ن ، ب):

القيمة المتوقعة ت(س) = ن × ب

التباين ع^{٢}(س) = ن × ب (١ − ب) = ن × ب × ف

الانحراف المعياري ع(س) = $\sqrt{\text{ع}^{٢}\text{(س)}}$

يمكن إيجاد احتمال الفشل (ف) من خلال قسمة التباين على القيمة المتوقعة:

$$\frac{\text{ع}^{٢}\text{(س)}}{\text{ت(س)}} = \frac{\text{ن × ب × ف}}{\text{ن × ب}} = \text{ف}$$

مثـــال ٧

إذا علمت أن س ~ ث (١٢، ٠,٣)، فأوجد:

أ التوقع ت (س) ب التباين $ع^٢$(س) ج الانحراف المعياري ع(س)

الحــلّ:

أ ت(س) = ن ب

= ١٢ × ٠,٣

= ٣,٦

ب $ع^٢$(س) = ن ب (١ − ب)

= ١٢ × ٠,٣ × ٠,٧

= ٢,٥٢

ج الانحراف المعياري ع(س) = $\sqrt{ع^٢(س)}$

= $\sqrt{٢,٥٢}$

= ١,٥٩ مقرّبًا إلى أقرب ثلاثة أرقام معنوية

مثـــال ٨

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي س ~ ث (ن ، ب).

إذا علمت أن: ت(س) = ١٢، $ع^٢$(س) = ٧,٥ ، فأوجد:

أ قيمة ن ، ب

ب ل(١١)، مقرّبًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

الحــلّ:

أ ف = $\frac{٧,٥}{١٢}$ = ٠,٦٢٥ .... باستخدام ف = $\frac{ع^٢(س)}{ت(س)}$

ب = ١ − ف = ٠,٣٧٥ .... باستخدام ب = ١ − ف

ن = $\frac{١٢}{٠,٣٧٥}$ = ٣٢ .... ت(س) = ن × ب، إذًا ن = $\frac{ت(س)}{ب}$

ب ل(١١) = $\binom{٣٢}{١١}$ × $(٠,٣٧٥)^{١١}$ × $(٠,٦٢٥)^{٢١}$ .... س ~ ث (٣٢، ٠,٣٧٥)

= ٠,١٣٨

تمارين ٤-٢

١) احسب القيمة المتوقعة، والتباين، والانحراف المعياري للمتغيرات العشوائية المتقطعة التالية مقرّبًا الناتج إلى أقرب ثلاثة أرقام معنوية:

أ و ~ ث (٥ ، ٠,٢)

ب ح ~ ث (٢٤ ، ٠,٥٥)

ج س ~ ث (٣٦٥ ، ٠,١٨)

د ص ~ ث (٢٠ ، $\sqrt{٠,٥}$)

٢) إذا علمت أن: س ~ ث (٨ ، ٠,٢٥)، فاحسب:

أ ت(س)

ب ل(ت(س))

ج ل(س < ت(س))

د ع^{٢}(س)

٣) إذا علمت أن: ص ~ ث (١١، ٠.٢٣)، فاحسب:

أ ت (ص)

ب ل(ص < ت(ص))

٤) إذا علمت أن: س ~ ث (ن ، ب)، ت(س) = ٢٠، ع^{٢}(س) = ١٢، فاحسب:

أ قيمة ن ، ب

ب ل(٢١)

٥) إذا علمت أن: ك ~ ث(ن ، ب)، ت(ك) = ٢٤$\frac{١}{٢}$، ع^{٢}(ك) = ١٠ $\frac{٥}{٢٤}$، فاحسب:

أ قيمة ن، ب

ب ل(٢٠)

٦) إذا علمت أن: المتغير (ح) يتبع توزيعًا ذا حدَّين حيث ت(ح) = ٢,٧، ع^{٢}(ح) = ٠,٢٧
فأوجد قيمة ن، ب

٤-٣ التوزيع الهندسي

عندما نرمي حجر نرد للحصول على الرقم ٦:

ما إمكانية الحصول على الرقم ٦ من أول مرة نرمي فيها حجر النرد؟

وما إمكانية الحصول على الرقم نفسه من ثاني مرة نرمي فيها حجر النرد؟

وما إمكانية الحصول عليه من ثالث مرة نرمي فيها حجر النرد؟ وهكذا...

يمكننا الإجابة عن هذه الأسئلة باستخدام احتمال النجاح والفشل: ب ، ف = ١ − ب

ل(الحصول على الرقم ٦ في الرمية الأولى) = ب ← نجاح.

ل(الحصول على الرقم ٦ في الرمية الثانية) = (١ − ب)ب ← فشل يتبعه نجاح.

ل(الحصول على الرقم ٦ في الرمية الثالثة) = $(١ - ب)^{٢}$ب ← فشل مرتَين يتبعهما نجاح.

يمكن استخدام التوزيع الهندسي لتمثيل عدد المحاولات حتى حدوث أول نجاح في سلسلة محاولات مكررة ومستقلة، حيث احتمال النجاح في كل محاولة ثابت ويرمز إليه بالرمز (ب).

يبيّن الجدول الآتي احتمال حدوث أول نجاح عند المحاولة (ر):

ر	١	٢	٣	٤	....	ن	....
ل(ر)	ب	ب(١ − ب)	ب$(١ - ب)^{٢}$	ب$(١ - ب)^{٣}$	....	ب$(١ - ب)^{ن-١}$	....

تمثّل قيم ل (ر) في الجدول السابق حدود متتالية هندسية أول حدّ فيها ب وأساسها (١ − ب)، مجموع الاحتمالات يساوي مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية.

$$\sum ل(ر) = جـ_{\infty} = \frac{\text{الحد الأول}}{١ - \text{الأساس}} = \frac{ب}{١ - (١ - ب)} = ١$$

مجموع احتمالات التوزيع الاحتمالي الهندسي يساوي ١

تذكير

مجموع متتالية هندسية غير منتهية حدّها الأول أ وأساسها ر هو

جـ$_{\infty}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$، حيث

$-١ < ر < ١$ ، ر $\neq$ ٠

يكون للمتغير العشوائي المتقطع توزيعٌ هندسيٌّ إذا حقق الشروط الآتية:

- المحاولات المكررة مستقلة.
- يمكن أن يكون عدد المحاولات المكررة لانهائيًا.
- هناك نتيجتان ممكنتان لكل محاولة (نجاح أو فشل).
- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت وهو ب

نتيجة ٣

يرمز إلى المتغير العشوائي (س) ذي التوزيع الهندسي بالرمز س ~ هندسي (ب)، واحتمال حدوث أول نجاح في المحاولة رقم ر هو:

ل (ر) = ب ف$^{ر-١}$ أو ل (ر) = ب × $(١ - ب)^{ر-١}$ حيث ر = ١، ٢، ٣، ...

مُساعَدة

صورة بديلة لهذه الصيغة:

ل(ر) = ب × $(١ - ب)^{ر-١}$

حيث (ر − ١) يمثل عدد مرات الفشل قبل أول نجاح.

نلاحظ أن الفرق الجوهري بين التوزيعَين ذي الحدَّين والهندسي هو أن عدد التجارب (المحاولات) في التوزيع ذي الحدَّين ثابت من البداية، ويمكن عدّ مرات النجاح، بينما في التوزيع الهندسي تتكرر المحاولات حتى يتم حدوث أول نجاح.

في التوزيع س ~ ث (ن ، ب) توجد $\binom{ن}{ر}$ طريقة للحصول على ر نجاحًا.

في التوزيع س ~ هندسي (ب) توجد طريقة واحدة للحصول على أول نجاح بعد ر محاولة، أي عند حدوث (ر − ١) فشل أُتبعت بنجاح واحد.

مثـــال ٩

لدينا التوزيع ص ~ هندسي (٠,٣٨)، أوجد:

أ ل(١)

ب ل(٤)

ج احتمال أن يحدث أول نجاح قبل المحاولة الثالثة.

الحــلّ:

ب = ٠,٣٨ ، ف = ٠,٦٢

أ ل(١) = ٠,٣٨ × $(٠,٦٢)^{١ - ١}$
= ٠,٣٨ × $(٠,٦٢)^{٠}$
= ٠,٣٨

إذا حصلنا على النجاح في أول محاولة، فلا يوجد فشل أي أن ل(١) = ب

ب ل(٤) = ٠,٣٨ × $(٠,٦٢)^{٤ - ١}$
= ٠,٣٨ × $(٠,٦٢)^{٣}$
= ٠,٠٩٠٦

إذا حصلنا على النجاح في رابع محاولة، توجد ٣ محاولات فشل.

ج ل(ص < ٣) = ل(١) + ل(٢)
= ٠,٣٨ × $(٠,٦٢)^{١ - ١}$ + ٠,٣٨ × $(٠,٦٢)^{٢ - ١}$
= ٠,٣٨ × $(٠,٦٢)^{٠}$ + ٠,٣٨ × $(٠,٦٢)^{١}$
= ٠,٣٨ + ٠,٢٣٥٦
= ٠,٦١٥٦

يجب أن نجد ل(ص < ٣).
قد نحصل على النجاح في أول محاولة أو في ثاني محاولة، إذًا ر = ١ أو ر = ٢
هذان الحدثان متنافيان، إذًا نجمع احتماليهما.

مثـال ١٠

وجد في محاولات مستقلة مكررة أن احتمال النجاح في كل محاولة ٠,٦٦

أوجد احتمال حدوث أول نجاح مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاثة أرقام معنوية:

أ في المحاولة الثالثة.

ب قبل المحاولة الثالثة.

ج بعد المحاولة الثالثة.

الحـلّ:

أ ل(٣) = ب(١ − ب)^{٢}

= ٠,٦٦ × (٠,٣٤)^{٢}

= ٠,٠٧٦٣

ليكن (س) عدد المحاولات حتى (ومتضمنًا) حدوث أول نجاح فيكون التوزيع هندسيًّا س ~ هندسي (٠,٦٦). حيث ب = ٠,٦٦ ، ١ − ب = ٠,٣٤

ب ل(س < ٣) = ل(س ⩽ ٢) = ل(١) + ل(٢)

= ب + ب(١ − ب)

= ٠,٦٦ + ٠,٦٦ × ٠,٣٤

= ٠,٨٨٤

ج ل(س > ٣) = ١ − ل(س ⩽ ٣)

=١ − [ل(١) + ل(٢) + ل(٣)]

= ١ − [ب + ب(١ − ب) + ب(١ − ب)^{٢}]

= ١ − [٠,٦٦ + ٠,٦٦ × ٠,٣٤ + ٠,٦٦ × (٠,٣٤)^{٢}]

= ٠,٠٣٩٣

إذا كانت قيم س أكبر من ٣، فإن س لا يمكن أن يساوي ١، ٢، ٣

يمكن أن تحسب الاحتمالات التي تتضمن متباينات بأن تجد المجموع لقيم صغيرة لعدد المحاولات (ر)، كما في الجزئيّتَين ب ، ج من المثال ٩، إلّا أنه لقيم (ر) الكبيرة فإننا نستخدم النتائج الآتية:

ل(س ⩽ ر) = ل(نجاح في واحدة من أول ر محاولة) = ١ − ل(فشل في أول ر محاولة).

ل(س > ر) = ل(أول نجاح بعد المحاولة رقم ر) = ل(فشل في أول ر محاولة).

يمكن أن نكتب هاتين النتيجتين بدلالة ف (احتمال الفشل في كل محاولة) في النتيجة ٤

نتيجة ٤

إذا كان س ~ هندسي (ب)، ف = ١ − ب، فإن:

- ل(س ⩽ ر) = ١ − ف^{ر}
- ل(س > ر) = ف^{ر}

مُساعَدة

ل(س < ر) = ل(س ⩽ ر − ١)

ل(س ⩾ ر) = ل(س > ر − ١)

مثـــال ١١

إذا كان س ~ هندسي (٠,٤٦)، فأوجد لأقرب ثلاث منازل عشرية:

أ ل(س > ٥).

ب ل(س ⩽ ٦).

الحـــلّ:

أ ل(س > ٥) = ف^{٥}

= (٠,٥٤)^{٥}

= ٠,٠٤٦

ب = ٠,٤٦، ف = ١ − ٠,٤٦ = ٠,٥٤

استخدم ل(س > ر) = ف^{ر} حيث ر = ٥

ب ل(س ⩽ ٦) = ١ − ف^{٦}

= ١ − (٠,٥٤)^{٦}

= ٠,٩٧٥

استخدم ل(س ⩽ ر) = ١ − ف^{ر} حيث ر = ٦

مثـــال ١٢

إذا علمت أن س ~ هندسي (ب)، ل(س ⩽ ٣) = $\frac{٨١٩}{١٣٣١}$، فأوجد القيمة الدقيقة لـ ل(س > ٣)

الحـــلّ:

ل(س > ٣) = ١ − ل(س ⩽ ٣)

= ١ − $\frac{٨١٩}{١٣٣١}$

= $\frac{٥١٢}{١٣٣١}$

مثـــال ١٣

في بلد ما ١٨٪ من البالغين يضعون عدسات طبية. تم اختيار عدد من الأشخاص عشوائيًا، وتمّت مقابلتهم واحدًا تلو الآخر. أوجد احتمال أن أول شخص يضع عدسة طبية:

أ واحد من أول ١٥ شخصًا تمّت مقابلتهم.

ب لم يكن من أول تسعة أشخاص تمّت مقابلتهم.

الحـــلّ:

أ ل(س ⩽ ١٥) = ١ − ف^{١٥}

= ١ − (٠,٨٢)^{١٥}

= ٠,٩٤٩ مقربًا إلى أقرب ٣ منازل عشرية

ليكن (س) عدد المحاولات حتى (ومتضمنًا) أول شخص بالغ يضع عدسة طبية، إذًا س ~ هندسي (٠,١٨)،

ف = ١ − ب = ١ − ٠,١٨ = ٠,٨٢

ب ل(س > ٩) = $ف^٩$

= $(٠,٨٢)^٩$

= ٠,١٦٨ مقربًا إلى أقرب ٣ منازل عشرية

مثــال ١٤

رُميت عملة معدنية غير منتظمة، وكان احتمال ظهور الصورة في كل رمية يساوي $\frac{٥}{١١}$، فإذا رُميت العملة المعدنية حتى ظهرت الصورة لأول مرة، فأوجد احتمال أن تكون العملة قد رُميت:

أ على الأقل ست مرات.

ب أقل من ثماني مرات.

الحــلّ:

أ ل(س ⩾ ٦) = ل(س > ٥)

= $ف^٥$

= $\left(\frac{٦}{١١}\right)^٥$

= ٠,٠٤٨٣ مقربًا لأقرب ٤ منازل عشرية

ليكن (س) عدد المحاولات حتى (ومتضمنًا) أول ظهور للصورة، إذًا س ~ هندسي $\left(\frac{٥}{١١}\right)$، ف = $\frac{٦}{١١}$

ب ل(س > ٨) = ل(س ⩽ ٧)

= ١ − $ف^٧$

= ١ − $\left(\frac{٦}{١١}\right)^٧$

= ٠,٩٨٦ مقربًا لأقرب ٣ منازل عشرية

مُساعَدة

عبارة 'ست مرات على الأقل' تعني 'أكثر من خمس مرات'

مُساعَدة

عبارة 'أقل من ثماني مرات' تعني 'سبع مرات وأقل'

تمارين ٤-٣

١) إذا علمت أن س ~ هندسي (٠,٢)، فاحسب:

أ ل(٧) **ب** ل(س ≠ ٥) **ج** ل(س > ٤) **د** ل(١ أو ٢)

٢) إذا علمت أن ت ~ هندسي (٠.٣٢)، فاحسب:

أ ل(٣) **ب** ل(ت ⩽ ٦) **ج** ل(ت > ٧) **د** ل(٣ أو ٤)

٣) احتمال أن يأخذ ناصر بطاقة صفراء في أي مباراة كرة قدم يشارك فيها هو $\frac{١}{٢}$، أوجد احتمال أن تكون المرة التالية التي يأخذ فيها بطاقة صفراء:

أ في المباراة الثالثة التي يشارك فيها.

ب قبل المباراة الرابعة التي يشارك فيها.

٤) يُخطئ لاعب كرة قدم، ويعطي الفريق الخصم ضربة جزاء في كل ست مباريات يشارك فيها. أوجد احتمال أن تكون ضربة الجزاء التالية التي يتسبب بها اللاعب:

أ في المباراة الثامنة التي يشارك فيها.

ب بعد المباراة الرابعة التي يشارك فيها.

٥) رُقّمت القطاعات الخمسة لقرص دوّار منتظم بالأرقام ١، ١، ٢، ٣، ٤
دُوّر القرص عددًا من المرات حتى ظهر الرقم ١، أوجد احتمال أن يكون قد دُوّر:

أ مرتَين فقط.

ب خمس مرات على الأكثر.

ج على الأقل ثماني مرات.

٦) احتمال أن تكون وحدة تالفة من إنتاج مصنع ما ٠,٠٧، واختير عدد من وحدات الإنتاج عشوائيًا، واختُبرت صلاحيتها.

أ أوجد احتمال أن تكون أول وحدة تالفة من الوحدات المختارة:

١) هي الوحدة رقم ١٢

٢) ليست من أول ١٠ وحدات.

٣) واحدة من أول ٨ وحدات.

ب ما الفرضية التي كوّنتها حول ظهور وحدات تالفة والتي تمكنك من أن تحسب الاحتمالات في الجزئية (أ)؟

٧) في أحد الشوارع الممتدة ١٤٪ من المركبات هي شاحنات نقل بضائع. تقف فتاة على جسر للمشاة مطل على هذا الشارع، وتبدأ بِعَدّ المركبات حتى تعبر أول شاحنة نقل. أوجد احتمال أن تكون قد عدّت:

أ على الأكثر ثلاث مركبات.

ب على الأقل خمس مركبات.

★ ٨) احتمال أن تتصل امرأة بشبكة الإنترنت في منزلها في كل مرة تحاول فيها ذلك يساوي ٠,٤٤، أوجد احتمال أن يستمر الفشل في الاتصال بالشبكة حتى تنجح في المحاولة الخامسة.

٩) أي من الحالات الآتية يمثّل توزيعًا هندسيًا؟ وأيّها لا يمثّل؟ وضّح إجابتك.

أ يحتوي صندوق على حبّتَي حلوى حمراوَين، وعلى عدد كبير من حبّات الحلوى الخضراء. اختار طفل حبّة حلوى عشوائيًا وأكلها، واختار الحبّة الثانية وأكلها، وهكذا... يمثل المتغير (س) عدد حبّات الحلوى التي اختارها الطفل وأكلها حتى اختار حبّة حلوى حمراء اللون لأول مرة.

ب يمثل المتغير (س) عدد مرات إسقاط حبّة أرزّ من ارتفاع مترَين على لوحة شطرنج، إلى أن تستقر هذه الحبّة أول مرة على مربع أبيض في اللوحة.

ج يمثل المتغير (س) عدد المرات التي يشارك فيها رياضي في سباق جري حتى يربح أول سباق.

٤-٤ المنوال والقيمة المتوقعة للتوزيع الهندسي

لجميع التوزيعات الهندسية خاصيتان مشتركتان. وتتضح رؤية ذلك عند استخدام مخططات الأعمدة لتمثيل قيم ل(ر) بالنسبة إلى قيم مختلفة للقيمة (ب)، يمكننا القيام بهذا يدويًا أو باستخدام برنامج حاسوبي مثل جيوجبرا GeoGebra.

الخاصية الأولى المشتركة هي أن ل(١) هي القيمة الأعلى في كل التوزيعات الهندسية. وهذا يعني أن س = ١ هو **المنوال** **Mode** لأن من المتوقع أن يحدث بشكل أكثر تكرارًا من كل القيم الباقية، من الأغلب أن يحدث أول نجاح في أول محاولة.

نتيجة ٥

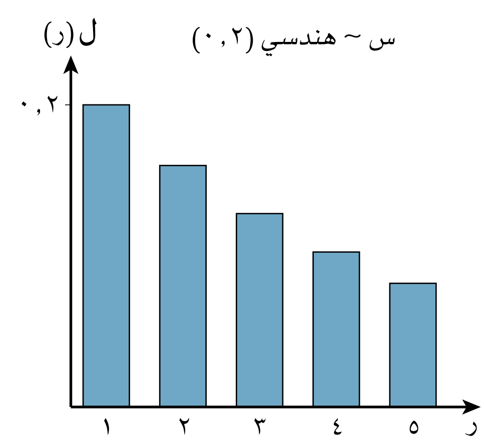
منوال جميع التوزيعات الهندسية هو ١

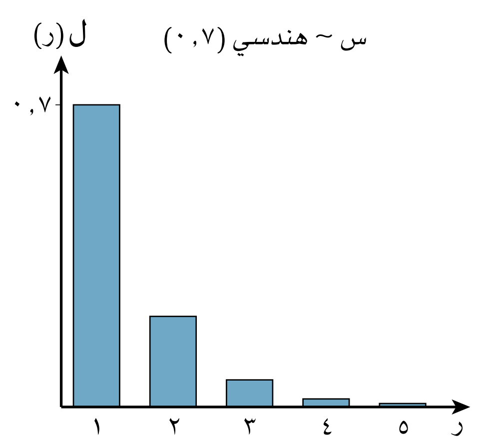
الخاصية الثانية هي أن قيمة ل(ر) تتناقص كلما تزايدت قيمة ر، وهذا لأن الأساس بين الاحتمالات (ف = ١ − ب) هو أصغر من ١:

ب > ب (١ − ب) > ب (١ − ب)^{٢} > ب (١ − ب)^{٣} > ب (١ − ب)^{٤} > ....

يبيّن الجدول ومخططات الأعمدة الآتية بعض احتمالات التوزيعَين س ~ هندسي (٠,٢)، س ~ هندسي (٠,٧). نرى في التوزيعَين أن المنوال هو ١، وأن الاحتمالات تتناقص مع تزايد ر

ل(ر)	ل(١)	ل(٢)	ل(٣)	ل(٤)	ل(٥)
هندسي (٠,٢)	٠,٢	٠,١٦	٠,١٢٨	٠,١٠٢٤	٠,٠٨١٩٢
هندسي (٠,٧)	٠,٧	٠,٢١	٠,٠٦٣	٠,٠١٨٩	٠,٠٠٥٦٧





القيمة المتوقعة

تذكّر أن الوسط الحسابي لمتغير عشوائي منفصل على المدى الطويل للتجربة هو القيمة المتوقعة، ويرمز إليه ت(س) حيث ت(س) = ∑س ل(س).

عند تطبيق ذلك على التوزيع الهندسي، نجد أن القيمة المتوقعة لتوزيع هندسي (ب) هي $\frac{١}{ب}$

نتيجة ٦

إذا كان س ~ هندسيًا (ب)، فإن:

ت(س) = $\frac{١}{ب}$ ، حيث ٠ < ب < ١

مثــال ١٥

يوجد في واحد من كل أربعة صناديق لرقائق الذرة لعبة مجانية. ليكن المتغير العشوائي (س) هو عدد الصناديق التي يفتحها طفل حتى يفتح الصندوق الذي يحتوي أول لعبة.

أ أوجد القيمة المتوقعة للمتغير (س).

ب فسّر ما تعنيه القيمة التي وجدتها في الجزئية (أ) في سياق هذا السؤال.

الحــلّ:

أ ت(س) = $\frac{١}{ب}$ = $\left(\frac{١}{٤}\right)^{-١}$ = ٤ .... المتغير هو س ~ هندسي $\left(\frac{١}{٤}\right)$.

ب من المرجح أن يجد الطفل أول لعبة في أول صندوق يفتحه، ولكن بناءً على القيمة المتوقعة، سيجد الطفل لعبته الأولى في الصندوق الرابع الذي يفتحه.

استكشف ٢

استخدم الجبر لتبرهن أن التوقع للتوزيع الهندسي يساوي $\frac{١}{ب}$

للتوزيع س ~ هندسي (ب)، يكون س ∈ {١، ٢، ٣، ٤، ...}،

ل(س) = {ب، ب ف، ب ف^{٢}، ب ف^{٣}، ...}، ∑ ل(س) = ١

الخطوة ١: تكوين معادلة تعبّر عن ت(س) بدلالة ب، ف، باستخدام ت(س) = ∑س ل(س).

الخطوة ٢: اضرب طرفَي المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة ١ في ف لتحصل على معادلة ثانية.

الخطوة ٣: اطرح إحدى المعادلتَين من الأخرى.

الخطوة ٤: حلل إلى عوامل طرف المعادلة الناتجة الذي يحوي حدَّين يتضمنان ت(س)، ثم أعد الترتيب بحيث يصبح الطرف الآخر من المعادلة رقمًا. يبقى عليك القيام بخطوة أخيرة.

مثــال ١٦

لدينا التوزيع ع ~ هندسي (٠,١٢٥).

أ اكتب منوال (ع).

ب أوجد ت(ع).

ج احسب ل(ت(ع))، مقرّبًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

الحــلّ:

أ منوال (ع) هو ١ .... منوال جميع التوزيعات الهندسية هو ١

ب ت(ع) = $\frac{١}{٠,١٢٥}$ = ٨ .... ت(ع) = $\frac{١}{ب}$

ج ل(ت(ع)) = ل(٨) .... استخدم ب = ٠,١٢٥، ف = ٠,٨٧٥، ر = ٨

= ب ف$^{٨-١}$

= ٠,١٢٥ × (٠.٨٧٥)^{٧}

= ٠,٠٤٩

مثــال ١٧

إذا كان المتغير (س) يتبع توزيعًا هندسيًا، وكانت ت(س) = ٣$\frac{١}{٢}$، فأوجد ل(س > ٦) مقرّبًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

الحــلّ:

ت(س) = $\frac{١}{ب}$ = $\frac{٧}{٢}$ .... أوجد قيمة ب أولًا، ثم أوجد ف

∴ ب = $\frac{٢}{٧}$

ف = ١ − $\frac{٢}{٧}$ = $\frac{٥}{٧}$

ل(س > ٦) = ف^{٦} .... نستخدم ل(س > ر) = ف^{ر} من النتيجة ٤

= $\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٦}$

= ٠,١٣٣

تمارين ٤-٤

١) اكتب المنوال ثم أوجد القيمة المتوقعة لكل من التوزيعات الهندسية الآتية:

أ س ~ هندسي (٠,٥)

ب س ~ هندسي (٠,١)

ج س ~ هندسي (٠,٠٤)

د س ~ هندسي (٠,٨)

هـ س ~ هندسي (٠,٧)

٢) يتبع المتغير العشوائي ص توزيعًا هندسيًا. إذا كان ل(١) = ٠,٢، فأوجد ت(ص).

٣) إذا علمت أن ز ~ هندسي (ب)، ت(ز) = $٤\frac{١}{٢}$، فاحسب ل(٢).

٤) ليكن (ط) عدد مرات رمي قطعة نقود منتظمة، حتى ظهرت أول كتابة. أوجد القيمة المتوقعة للمتغير (ط).

٥) ليكن (س) عدد مرات رمي حجر نرد منتظم حتى ظهور العدد ٦ لأول مرة. أوجد:

أ ت(س).

ب ل(س < ت(س)).

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- يمكن استخدام توزيع ذي الحدَّين لتمثيل عدد النجاحات في سلسلة محاولات مكررة ومستقلة عددها ن، حيث احتمال النجاح في كل محاولة ثابت ويرمز إليه بالرمز (ب).
  - إذا كان س ~ ث (ن، ب) فإن ل(ر) = $\binom{ن}{ر}$ ب^{ر}ف$^{ن - ر}$، حيث ف = ١ − ب
    - ت(س) = ن × ب
    - ع^{٢}(س) = ن × ب(١ − ب) = ن × ب × ف، حيث ف = ١ − ب
- يمكن استخدام التوزيع الهندسي لتمثيل عدد المحاولات حتى حدوث أول نجاح في سلسلة محاولات مكررة ومستقلة، حيث احتمال النجاح في كل محاولة ثابت ويرمز إليه بالرمز (ب).
  - إذا كان س ~ هندسي (ب)، فإن ل(ر) = ب ف$^{ر - ١}$ حيث ف = ١ − ب، ر = ١، ٢، ٣، ...
    - ت (س) = $\frac{١}{ب}$
    - ل(س ⩽ ر) = ١ − ف^{ر}، ل(س > ر) = ف^{ر} حيث ف = ١ − ب
    - منوال جميع التوزيعات الهندسية هو ١

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) إذا كان س ~ ث$\left(ن \text{ ، } \frac{1}{ن}\right)$، فأوجد صيغة ل(١) بدلالة ن

٢) حجزت عائلة لقضاء إجازة طويلة في مدينة ما حيث احتمال أن يتساقط المطر في أيّ يوم ٠,٣
أوجد احتمال أن:

أ تمطر أول مرة في اليوم الثالث من الإجازة. ب لا تمطر في أول أسبوعَين من الإجازة.

٣) إذا علمت أن س ~ ث(ن ، ٠,٢) ، فأوجد قيمة ن عندما ل(ن) = ٣,٢ × ١٠$^{-٤}$

٤) إذا علمت أن س ~ ث(١٢ ، ٠,٦٥) فأوجد الانحراف المعياري، مقرّبًا الناتج إلى أقرب ثلاثة أرقام معنوية.

٥) متوسط فشل نوع معيّن من بذور الطماطم في الإنبات خلال أسبوع من زراعتها هو ١٥٪

أوجد احتمال فشل ٥ أو ٦ من أصل ٤٠ بذرة تم اختيارها عشوائيًا في الإنبات خلال أسبوع من الزراعة.

٦) أظهرت دراسة أن ٠,٤٪ من أعواد الثقاب المنتجة في أحد المصانع تالفة.

تحتوي كل علبة من أعواد الثقاب المنتجة في هذا المصنع على ٥٠٠ عود ثقاب.

أ احسب العدد المتوقع لأعواد الثقاب التالفة في علبة واحدة.

ب أوجد التباين لعدد أعواد الثقاب التالفة في علبة واحدة.

ج احسب احتمال أن تحتوي علبة من أعواد الثقاب على أقل من عودَي ثقاب تالفَين.

٧) أ إذا علمت أن التوزيع س ~ ث (٥ ، ٠,٤٤)، فاحسب ل (٢).

ب لدينا التوزيع ص ~ هندسي (٠,٤٤)، احسب ل (٢).

٨) يقوم ولد بملاحظة لون كل سيارة تمر بالقرب من منزله. في المنطقة التي يعيش فيها الصبي، ٥٪ من جميع السيارات حمراء.

أ أوجد العدد المتوقع من السيارات التي لاحظها الصبي حتى مرّت السيارة الحمراء الأولى.

ب احسب احتمال أن تكون السيارة الرابعة التي تمر بالمنزل هي السيارة الحمراء الأولى التي يلاحظها الصبي.

ج احسب احتمال أن يلاحظ الصبي السيارة الحمراء الأولى بعد أن لاحظ أكثر من ٣٥ سيارة غير حمراء.

الوحدة الخامسة
التكامل

Integration

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٥-١ تفهم التكامل على أنه العملية العكسية للتفاضل (الاشتقاق)، وتجد تكامل دوال في الصيغة أس^{ن} (لأي عدد نسبي ن، ما عدا -١) بالإضافة إلى تكامل جمع وطرح هذه الدوال.

٥-٢ تحسب ثابت التكامل.

٥-٣ تحسب التكامل المحدود.

المفردات

التكامل
Integration

ثابت التكامل
Constant of integration

تكامل غير محدود
Indefinite integral

تكامل محدود
Definite integral

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر (الوحدة الثالثة)، الصف الحادي عشر (الوحدة السادسة)	تتعامل مع الصيغ الجبرية؛ تستخدم قوانين القوى.	١) أ اكتب $\frac{٤س^{٤} + ٦س^{٣} + ١٠}{٢س^{٢}}$ على شكل مجموع ثلاثة حدود، كلًا منها في الصيغة أس^{ن}. ب بسّط: ١) $\frac{س^{٢} \times س^{٣}}{\sqrt{س}}$ ٢) $\frac{\sqrt{س}}{س^{٢}}$
الصف العاشر (الوحدة الثامنة)، الصف الحادي عشر (الوحدة الثانية)	تعوّض قيم س، ص في معادلات في الصيغة ص = د(س) + جـ، وتحلها لإيجاد جـ.	٢) أ إذا علمت أن المستقيم ص = ٥ س + جـ يمر بالنقطة (٣، −٤)، فأوجد قيمة جـ. ب إذا علمت أن النقطة (−١، ٢) تقع على المنحنى ص = س^{٢} − ٢س + جـ، فأوجد قيمة جـ.
الصف الثاني عشر (الوحدة الثانية)	تجد مشتقة صيغ تتضمن ضربًا بالثوابت وجمع حدود وطرحها في الصيغة أس^{ن}.	٣) أوجد: أ $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان ص = ٣س^{٢} − ٨س + ٥ ب د$'$(س) إذا كان د(س) = س − $\frac{٨}{س^{٢}}$

لماذا ندرس التكامل؟

تعلمت سابقًا عمليات متعاكسة كالجمع والطرح، والضرب والقسمة، كما تعلمت في الوحدة الثانية عن التفاضل، وهو أول عملية أساسية في علم التفاضل والتكامل؛ وستتعلم في هذه الوحدة عن التكامل، وهو ثاني عملية أساسية في علم التفاضل والتكامل، ونشير إليه عادة بأنه العملية العكسية للتفاضل.

في القرن السابع عشر، قام إسحق نيوتن Isaac Newton وغوتفريد لايبنيز Gottfried Wilhelm Leibniz بصياغة مبادئ التكامل كل على حدة. وقد قاما بذلك من خلال التفكير في التكامل على أنه المجموع غير المنتهي لمستطيلات عرضها متناهي الصغر.

للتكامل عدة تطبيقات، مثل: إيجاد المساحات والأحجام لأشكال ومجسمات غير منتظمة، أو تخطيط مسارات التحليق لمركبات فضائية، أو نمذجة السلوك الواقعي لألعاب الحاسوب.

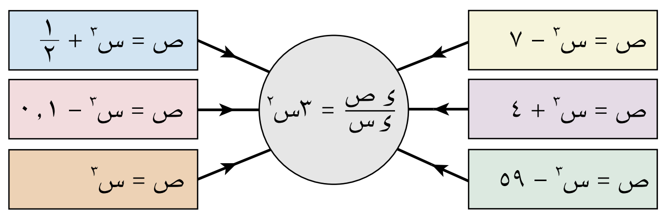
٥-١ التكامل: العملية العكسيّة للتفاضل

تعلّمت في الوحدة الثانية إيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما يكون المنحنى ص معلومًا، وإيجاد د$'$(س) عندما تكون د(س) معطاة، نسمي هذا عملية الاشتقاق:

إذا كان ص = س$^{\text{ن}}$، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن س$^{\text{ن}-١}$

إذا كان د(س) = س$^{\text{ن}}$، فإن د$'$(س) = ن س$^{\text{ن}-١}$

عند تطبيق هذا القانون على الدوال في الصيغة ص = س^{٣} + جـ، نحصل على:



يبيّن هذا الشكل وجود عدد غير قابل للعد من الدوال التي تعطي الإجابة ٣س^{٢} عند إيجاد مشتقتها. كل هذه الدوال في الصيغة ص = س^{٣} + جـ أو د(س) = س^{٣} + جـ، حيث جـ عدد ثابت.

ستتعلم في هذه الوحدة عن العملية العكسية للتفاضل التي تعطيك ص عندما تكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ معطاة، وتعطيك د(س) عندما تكون د$'$(س) معطاة.

تسمى العملية العكسية للتفاضل **التكامل Integration**.

استكشف ١

١) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ أو د$'$(س) لكل من الآتي:

أ ص = $\frac{١}{٣}$س^{٣} − ٢

ب ص = $\frac{١}{٦}$س^{٦} + ٨

ج ص = $\frac{١}{١٥}$س^{١٥} + ١

د د(س) = − $\frac{١}{٢}$س$^{-٢}$ + ٣

هـ د(س) = − $\frac{١}{٧}$س$^{-٧}$ + ٠,٢

و د(س) = $\frac{٢}{٣}$س$^{\frac{٣}{٢}}$ − $\frac{٥}{٨}$

٢) ناقش نتائجك مع نتائج زملائك، وحاول إيجاد قانون لإيجاد ص عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س$^{\text{ن}}$، أو لإيجاد د(س) عندما د$'$(س) = س$^{\text{ن}}$

٣) صف القانون الذي توصلت إليه بالكلمات.

٤) ناقش مع زملائك ما إذا كان القانون يصح لإيجاد ص عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س$^{-١}$ أو لإيجاد د(س) عندما د$'$(س) = س$^{-١}$

نستنتج أن:

نتيجة ١

إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = س^{ن}$ ، فإن $ص = \frac{١}{ن + ١} س^{ن+١} + جـ$، حيث جـ **ثابت التكامل (ثابت اختياري)** **Constant of integration (Arbitrary constant)**، $ن \neq -١$

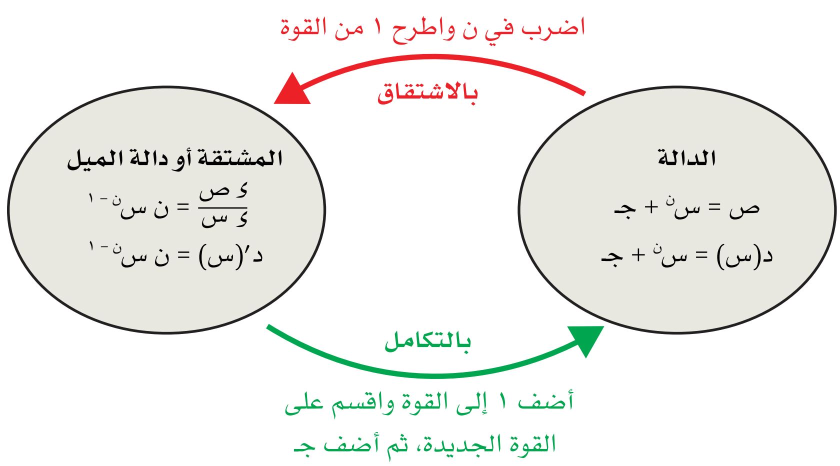
إذا كان $د'(س) = س^{ن}$ ، فإن $د(س) = \frac{١}{ن + ١} س^{ن+١} + جـ$، حيث جـ ثابت التكامل، $ن \neq -١$

مُساعَدة

يسمى الثابت جـ 'اختياري' لأن قيمته غير محددة؛ يمكن أن يكون أيّ عدد.

أضف واحدًا إلى القوة ن، ثم اقسم على القوة الجديدة وأضف ثابت التكامل جـ

يبيّن المخطط الآتي عملية التفاضل وعمليتها العكسية (التكامل).



مثــال ١

أوجد ص بدلالة س لكل من الآتي:

أ $\frac{ءص}{ءس} = س^{٢٠}$ ب $\frac{ءص}{ءس} = س$

جـ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س^{٤}}$ د $\frac{ءص}{ءس} = س^{-\frac{١}{٢}}$

الحــلّ:

أ $\frac{ءص}{ءس} = س^{٢٠}$ أضف واحدًا إلى القوة س لتصبح ٢١ واقسم على ٢١، ثم أضف جـ

$ص = \frac{١}{٢٠ + ١} س^{٢٠+١} + جـ$

$= \frac{١}{٢١} س^{٢١} + جـ$

ب $\frac{ءص}{ءس} = س^{١}$ أضف واحدًا إلى القوة س لتصبح ٢ واقسم على ٢، ثم أضف جـ

$ص = \frac{١}{١ + ١} س^{١+١} + جـ$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} + جـ$

ج $\frac{ء ص}{ء س} = س^{-٤}$ .... أضف واحدًا إلى القوة س لتصبح -٣ واقسم على -٣، ثم أضف جـ

$ص = \frac{١}{-٤ + ١} س^{-٤ + ١} + جـ$

$= -\frac{١}{٣} س^{-٣} + جـ$

د $\frac{ء ص}{ء س} = س^{-\frac{١}{٢}}$ .... أضف واحدًا إلى القوة س لتصبح $\frac{١}{٢}$ واقسم على $\frac{١}{٢}$، ثم أضف جـ

$ص = \frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١} س^{-\frac{١}{٢} + ١} + جـ$

$= \frac{١}{\frac{١}{٢}} س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$= ٢س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

مثــال ٢

أوجد د (س) بدلالة س لكل من الآتي:

أ $د'(س) = س^{٩}$

ب $د'(س) = س^{-٠,٨}$

ج $د'(س) = س^{-\frac{٥}{٢}}$

د $د'(س) = ٥$

الحــلّ:

أ $د'(س) = س^{٩}$ .... أضف واحدًا إلى القوة س لتصبح ١٠ واقسم على ١٠، ثم أضف جـ

$د(س) = \frac{س^{٩ + ١}}{٩ + ١} + جـ$

$= \frac{س^{١٠}}{١٠} + جـ$

$= \frac{١}{١٠} س^{١٠} + جـ$

ب $د'(س) = س^{-٠,٨}$ .... أضف واحدًا إلى القوة س لتصبح ٠,٢ واقسم على ٠,٢، ثم أضف جـ

$د(س) = \frac{س^{-٠,٨ + ١}}{-٠,٨ + ١} + جـ$

$= \frac{س^{٠,٢}}{٠,٢} + جـ$ .... $\frac{١}{٠,٢} = ٥$

$= ٥س^{٠,٢} + جـ$

ج $د'(س) = س^{-\frac{٥}{٢}}$

أضف واحدًا إلى القوة س لتصبح $-\frac{٣}{٢}$ واقسم على $-\frac{٣}{٢}$، ثم أضف جـ

$د(س) = س^{-\frac{٥}{٢}+١} \div \left(-\frac{٥}{٢} + ١\right) + جـ$

$= س^{-\frac{٣}{٢}} \div \left(-\frac{٣}{٢}\right) + جـ$

$= س^{-\frac{٣}{٢}} \times \left(-\frac{٢}{٣}\right) + جـ$

$= -\frac{٢}{٣}س^{-\frac{٣}{٢}} + جـ$

د $د'(س) = ٥ = ٥س^{٠}$

$د(س) = \frac{١}{٠ + ١}٥س^{٠+١} + جـ$

$= ٥س + جـ$

تمارين ٥-١

١) أوجد ص عندما $\frac{ءص}{ءس}$ تساوي:

أ $س^{٦}$ **ب** $س^{٢٤}$ **ج** $س^{٩٩}$ **د** $س^{٤١}$

هـ $س^{١١٫٥}$ **و** $س^{-٥}$ **ز** $س^{-٢}$ **ح** $س^{-٠٫٦}$

٢) أوجد د(س) عندما $د'(س)$ تساوي:

أ $س^{١}$ **ب** $س^{٠}$ **ج** $س^{١٫٥}$ **د** $س^{-٠٫١}$

هـ $س^{\frac{٣}{٨}}$ **و** $\sqrt{٧}$ **ز** $س^{-\frac{٧}{٦}}$ **ح** $س^{-\frac{٣}{٤}}$

٣) قيل لثمانية طلبة، أن مشتقة الدالة ك(س) هي $ك'(س) = ٣س^{٢}$

طُلب إلى كل واحد منهم أن يكتب ما يمكن أن تساويه الدالة ك(س). يبيّن الجدول الآتي إجاباتهم:

رمز الطالب	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح
ك(س) يمكن أن تساوي	$س^{٣}$	$\frac{٣}{٢}س^{٢} + ١$	$س^{٣} + ١$	$\frac{٢}{٣}س^{٣} + ٣$	$٩س^{٣} - ٤$	$س^{٣} - ٢$	$\frac{١}{٦}(٦س^{٣} + ٥)$	$س^{٣} + س$

أ اكتب رموز الطلبة الذين أعطوا إجابات صحيحة.

ب لكل طالب أعطى إجابة خاطئة، أعطِ سببًا للخطأ في إجابته.

٥-٢ التكامل غير المحدود

ستتعلّم في هذا الدرس التكامل غير المحدود الذي ينتج من إيجاد تكامل دوال القوى، وصيغٍ تتضمن جمع دوال القوى وطرحها وضربها.

٥-٢أ تكامل دوال القوة

يستخدم الرمز $\int$ للإشارة إلى التكامل.

عندما نريد إيجاد تكامل $س^٣$ مثلًا، نكتب $\int س^٣ \, ءس$

يسمى $\int س^٣ \, ءس$ **التكامل غير المحدود Indefinite integral** لـ $س^٣$

نكتب ءس بعد $س^٣$ لنشير إلى أننا نجد التكامل بالنسبة إلى المتغير س

عندما نجد تكامل دالة قوة، يجب أن تكتب في الصيغة $س^ن$

يبيّن الجدول أدناه بعض الأمثلة عن كيفية القيام بذلك:

دالة القوة	$\frac{١}{س^٢}$	$\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$	$\frac{١}{\sqrt{س}}$	١	$\sqrt{س}$	س	$\sqrt[٣]{س^٢}$	$س^٢\sqrt{س}$
كيف تُكتب لإيجاد التكامل	$س^{-٢}$	$س^{-\frac{١}{٣}}$	$س^{-\frac{١}{٢}}$	$س^٠$	$س^{\frac{١}{٢}}$	$س^١$	$س^{\frac{٢}{٣}}$	$س^٢ \times س^{\frac{١}{٢}} = س^{\frac{٥}{٢}}$

مُساعَدة

$س^أ \times س^ب = س^{أ+ب}$

$س^أ \div س^ب = س^{أ-ب}$

$س^{-أ} = \frac{١}{س^أ}$

$\sqrt[ب]{س^أ} = س^{\frac{أ}{ب}}$

نتيجة ٢

$$\int س^ن \, ءس = \frac{١}{ن + ١} س^{ن+١} + جـ، \text{ حيث جـ ثابت، } ن \neq -١$$

تعني النتيجة ٢ أنه عندما نجد تكامل دالة الميل $\frac{ءص}{ءس}$، نحصل على الدالة بالإضافة إلى ثابت هو جـ، أي أن:

$$\int \frac{ءص}{ءس} \, ءس = ص + جـ$$

$$\int د'(س) \, ءس = د(س) + جـ$$

مثال ٣

مُساعَدة

خلال عملية إيجاد التكامل، نستخدم الرمزين $\int$، ءس وفي الناتج نضيف الثابت جـ

أ إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس} = س^{١٣}$، فأوجد ص بدلالة س

ب إذا علمت أن $د'(س) = س\sqrt{س}$ ، فأوجد ص بدلالة س

الحــلّ:

أ $ص = \int \frac{ءص}{ءس} \, ءس$ .... لإيجاد ص، جد تكامل $\frac{ءص}{ءس}$ بالنسبة إلى المتغير س

$= \int س^{١٣} \, ءس$

$= \frac{١}{١٣ + ١} س^{١٣+١} + جـ$

$= \frac{١}{١٤} س^{١٤} + جـ$

ب د(س) = $\int$ د′(س) ى س .... لإيجاد د(س)، جد تكامل د′(س) بالنسبة إلى المتغير س

= $\int$ س^{١} × س$^{\frac{١}{٢}}$ ى س .... اكتب دالة الميل د′(س) في الصيغة س^{ن}، حتى تستطيع إيجاد تكاملها.

= $\int$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ ى س

= $\frac{١}{\frac{٣}{٢} + ١}$ س$^{\frac{٣}{٢}+١}$ + جـ

= $\frac{١}{\frac{٥}{٢}}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ .... للقسمة على كسر، نعكس الكسر ونغير القسمة إلى الضرب، لذلك: $١ \div \frac{٥}{٢} = ١ \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$

= $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

مثــال ٤

أوجد تكامل الدالة س$^{-٣}$ بالنسبة إلى المتغير س

الحــلّ:

$\int$ س$^{-٣}$ ى س = $\frac{١}{-٣ + ١}$ س$^{-٣+١}$ + جـ

= $-\frac{١}{٢}$ س$^{-٢}$ + جـ

= $-\frac{١}{٢ س^{٢}}$ + جـ

مثــال ٥

أوجد:

أ $\int \frac{١}{\sqrt{س}}$ ى س   **ب** $\int$ ٥ ى س

الحــلّ:

أ $\int \frac{١}{\sqrt{س}}$ ى س = $\int$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ ى س .... اكتب دالة القوة في الصيغة س^{ن}، حتى تستطيع إيجاد تكاملها.

= $\frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١}$ س$^{-\frac{١}{٢}+١}$ + جـ

= $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

= ٢س$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

= ٢$\sqrt{س}$ + جـ

ب $\int ٥ \, ٮ س = \int ٥ س^{٠} \, ٮ س$

$= \frac{١}{٠ + ١} \times ٥ س^{٠ + ١} + جـ$

$= ٥ س + جـ$ .... إذا كان ك ثابتًا فإن

$\int ك \, ٮ س = ك س + جـ$

مثــال ٦

أوجد تكامل د (س) = س^{٧} × $\sqrt{س^{٣}}$ بالنسبة إلى المتغير س

الحــلّ:

$\int د(س) \, ٮ س = \int س^{٧} \times \sqrt{س^{٣}} \, ٮ س$

$= \int س^{٧} \times س^{\frac{٣}{٢}} \, ٮ س$ .... استخدم س^{أ} × س^{ب} = س$^{أ+ب}$

$= \int س^{\frac{١٧}{٢}} \, ٮ س$

$= \frac{١}{\frac{١٧}{٢} + ١} س^{\frac{١٧}{٢} + ١} + جـ$

$= \frac{٢}{١٩} س^{\frac{١٩}{٢}} + جـ$

تمارين ٥-٢أ

١) أوجد د (س) باستخدام التكامل لكل من الآتي:

أ $د'(س) = س^{٤}$ ب $د'(س) = س^{٦}$ ج $د'(س) = س^{-٧}$ د $د'(س) = \frac{١}{س^{٨}}$

٢) أوجد ص بدلالة س لكل من الآتي:

أ $\frac{ٮ ص}{ٮ س} = س^{١٩}$ ب $\frac{ٮ ص}{ٮ س} = س^{-١٢}$ ج $\frac{ٮ ص}{ٮ س} = \frac{١}{س^{٢١}}$ د $\frac{ٮ ص}{ٮ س} = \frac{س^{٢}}{\sqrt{س}}$

٣) أوجد كلًا من الآتي:

أ $\int س^{١,٥} \, ٮ س$ ب $\int (س^{١٠} \div س) \, ٮ س$ ج $\int \frac{س}{س^{٥}} \, ٮ س$ د $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٢}}} \, ٮ س$

٥-٢ب تكامل دوال القوة المضروبة في ثابت وجمع وطرح دوال القوة

عندما تكون الدالة التي نريد إيجاد تكاملها عبارة عن ثابت مضروب في دالة قوة، نجد تكامل دالة القوة ونضرب النتيجة في الثابت.

نتيجة ٣

$\int$ ك د (س) ى س = ك $\int$ د (س) ى س، حيث ك عدد ثابت.

مثــال ٧

أوجد $\int$ ١٨س^{٢} ى س

الحــلّ:

$\int$ ١٨س^{٢} ى س = ١٨ $\int$ س^{٢} ى س .... بإيجاد تكامل دالة القوة ثم ضرب الناتج في ١٨

$= ١٨\left(\frac{١}{٢ + ١}س^{٢ + ١}\right) +$ جـ

$= ١٨ \times \frac{١}{٣}س^{٣} +$ جـ

$=$ ٦س^{٣} + جـ

مثــال ٨

أوجد تكامل د(س) = $-\frac{٢}{٥س^{٥}}$ بالنسبة إلى المتغير س

الحــلّ:

$\int$ د (س) ى س = $\int -\frac{٢}{٥س^{٥}}$ ى س .... اكتب الدالة التي تريد إيجاد تكاملها في صيغة ك س^{ن}

$= \int -\frac{٢}{٥}س^{-٥}$ ى س

$= -\frac{٢}{٥}\int$ س$^{-٥}$ ى س

$= -\frac{٢}{٥}\left(\frac{١}{-٥ + ١}س^{-٥ + ١}\right) +$ جـ

$= -\frac{٢}{٥}\left(-\frac{١}{٤}س^{-٤}\right) +$ جـ .... بسّط حاصل ضرب الكسرين السالبين على النحو التالي: $\frac{-٢}{٥} \times \frac{-١}{٤} = \frac{-٢ \times -١}{٥ \times ٤} = \frac{٢}{٢٠} = \frac{١}{١٠}$

$= \frac{١}{١٠}س^{-٤} +$ جـ

$= \frac{١}{١٠س^{٤}} +$ جـ

مثـال ٩

أوجد تكامل ص = $\frac{١}{٤\sqrt{\text{س}}}$ بالنسبة إلى المتغير س

الحـلّ:

$$\int \text{ص}\ \text{ءس} = \int \frac{١}{٤\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٤} \int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$$

اكتب الدالة التي تريد إيجاد تكاملها في صيغة ك $\text{س}^{\text{ن}}$

$$= \frac{١}{٤} \int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٤} \left(\frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١}\ \text{س}^{-\frac{١}{٢} + ١} \right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤} \times \frac{١}{\frac{١}{٢}}\ \text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤} \times ٢\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢} \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$

إذا أردنا إيجاد تكامل مجموع أو طرح دوال القوى، يمكننا إيجاد تكامل الدوال بشكل منفصل، ثم نجمع النتائج أو نطرح بحسب المطلوب.

نتيجة ٤

$$\int [\text{د(س)} \pm \text{هـ(س)}]\ \text{ءس} = \int \text{د(س)}\ \text{ءس} \pm \int \text{هـ(س)}\ \text{ءس}$$

استكشف ٢

لديك دالتا قوة هما د (س) = ٤س ، هـ (س) = ٩$\text{س}^{٢}$

مجموع هاتَين الدالتَين هو:

$$\text{د(س)} + \text{هـ(س)} = ٤\text{س} + ٩\text{س}^{٢}$$

١) أوجد:

أ $\int \text{د(س)}\ \text{ءس}$

ب $\int \text{هـ(س)}\ \text{ءس}$

ج باستخدام النتيجة ٤:

$\int (\text{د(س)} + \text{هـ(س)})\ \text{ءس}$

٢) قارن بين ناتج مجموع تكامل كل من الدالتَين

$\int$ د (س) ء س + $\int$ هـ (س) ء س، مع ناتج تكامل مجموع الدالتَين

$\int$ (د (س) + هـ (س)) ء س

٣) ماذا تلاحظ؟ هل بإمكانك القيام بأية استنتاجات؟

مثــال ١٠

أوجد $\int$ (س^{٦} + س^{٣}) ء س

الحــلّ:

$\int$ (س^{٦} + س^{٣}) ء س = $\int$ س^{٦} ء س + $\int$ س^{٣} ء س

قم بإيجاد تكامل دالتَي القوة بشكل منفصل، ثم اجمع النتيجتَين.

= $\frac{١}{٦ + ١}$ س$^{٦ + ١}$ + $\frac{١}{٣ + ١}$ س$^{٣ + ١}$ + جـ

أضف الثابت جـ مرة واحدة فقط حيث إن (ثابت + ثابت = ثابت).

= $\frac{١}{٧}$ س^{٧} + $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + جـ

مثــال ١١

أوجد تكامل ص = س $\left(٣س + ٢ - \frac{١}{س}\right)$ بالنسبة إلى المتغير س

الحــلّ:

$\int$ س $\left(٣س + ٢ - \frac{١}{س}\right)$ ء س = $\int$ (٣س^{٢} + ٢س − ١) ء س

بكتابتها في صيغة جمع وطرح دوال قوة.

= $\int$ ٣س^{٢} ء س + $\int$ ٢س^{١} ء س − $\int$ ١س^{٠} ء س

ثم كتابة س على الشكل س^{١}، وكتابة ١ على الشكل س^{٠}

= ٣ $\int$ س^{٢} ء س + ٢ $\int$ س^{١} ء س − ١ $\int$ س^{٠} ء س

= ٣ $\left(\frac{١}{٢ + ١}\text{س}^{٢ + ١}\right)$ + ٢ $\left(\frac{١}{١ + ١}\text{س}^{١ + ١}\right)$ − ١ $\left(\frac{١}{٠ + ١}\text{س}^{٠ + ١}\right)$ + جـ

= ٣ $\left(\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right)$ + ٢ $\left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right)$ − س^{١} + جـ

= س^{٣} + س^{٢} − س + جـ

مثـــال ١٢

لديك الدالتان $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \frac{٤}{\text{س}^{٣}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \frac{٢}{\text{س}^{٣}}$

أوجد تكامل مجموع الدالتَين د(س) ، هـ(س).

الحـــلّ:

$$\text{د}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) = (\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{-٣}) + (\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{-٣})$$

ضمّ دالتَي القوة من خلال جمعهما معًا لأن كليهما تتضمنان الحدَّين $\text{س}^{٣}$، $\text{س}^{-٣}$

$$= ٢\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{-٣}$$

$$\int \left(\text{د}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right) \text{ء س} = \int \left(٢\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{-٣}\right) \text{ء س} = ٢\int \text{س}^{٣} \text{ء س} - ٦\int \text{س}^{-٣} \text{ء س}$$

$$= ٢\left(\frac{١}{٣+١}\text{س}^{٣+١}\right) - ٦\left(\frac{١}{-٣+١}\text{س}^{-٣+١}\right) + \text{جـ}$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٦ \times \frac{١}{-٢}\text{س}^{-٢} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٤} + \frac{٣}{\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$$

تمارين ٥-٢ب

١) أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int ٧\text{س}^{٦} \text{ء س}$ ب $\int ١٢\text{س}^{٢} \text{ء س}$ ج $\int ٢٠\text{س}^{٤} \text{ء س}$ د $\int ١٥\text{س}^{٥} \text{ء س}$

هـ $\int ١٠\text{س}^{-٣} \text{ء س}$ و $\int ٤\text{س}^{-٩} \text{ء س}$ ز $\int -\frac{٣٦}{\text{س}^{٧}} \text{ء س}$ ح $\int \frac{٣\sqrt{\text{س}}}{\text{س}} \text{ء س}$

٢) أوجد التكاملات غير المحدودة للدوال الآتية بالنسبة إلى المتغير س:

أ $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{٤}$ ب $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{١٥}{٧}\text{س}^{٩}$ ج $\text{ح}(\text{س}) = \frac{٨}{٥}\text{س}^{-٥}$ د $\text{ك}(\text{س}) = -\frac{٢}{٣}\text{س}^{-٣}$

هـ $\text{م}(\text{س}) = \frac{٦}{١١\text{س}^{٤}}$ و $\text{ن}(\text{س}) = -\frac{٣}{\text{س}^{٢}}$ ز $\text{ل}(\text{س}) = \frac{٢١\text{س}^{٣}}{\sqrt{\text{س}}}$ ح $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{س}}}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$

٣) أوجد:

أ $\int (\text{س}^{٥} + \text{س}^{٢}) \text{ء س}$ ب $\int (\text{س} - \text{س}^{٤}) \text{ء س}$ ج $\int (٣\text{س}^{٢} + \text{س}^{٨}) \text{ء س}$

د $\int (٣\text{س}^{٥} - ٤\text{س}^{٣}) \text{ء س}$ هـ $\int \left(٦\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ء س}$ و $\int \left(\frac{٤}{\text{س}^{٣}} + ٢\right) \text{ء س}$

ز $\int \left(\text{س}(٣\text{س} + ٥)\right) \text{ء س}$ ح $\int (\text{س} + ١)(\text{س} - ١) \text{ء س}$

٤) أوجد تكامل الدوال الآتية بالنسبة إلى المتغير س:

أ $د(س) = ٤س^{٣} + \frac{٦}{س^{٢}}$　**ب** $هـ(س) = -\frac{٨}{س^{٣}} + ٢س$　**ج** $ح(س) = (٣ - س)(٤ - س)$

د $ك(س) = \frac{س^{٢} + ٢س^{٣}}{س}$　**هـ** $م(س) = \frac{٢ - س}{س^{٣}}$　**و** $ن(س) = ١ + ٤س - ٩س^{٢} + ١٦س^{٣}$

٥) أوجد تكامل ص بالنسبة إلى المتغير س لكل من الآتي:

أ $ص = س\left(٤ - \frac{١}{س}\right)$　**ب** $ص = س\left(\frac{٢}{س^{٤}} - \frac{٧}{س^{٣}}\right)$　**ج** $ص = س^{٣}\left(\frac{٢}{س^{٣}} - ١٥س\right)$

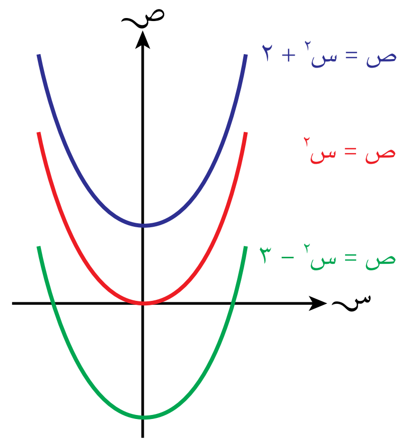
٦) لديك الدالتان $د(س) = ٨ - \frac{٣}{س^{٤}}$ ، $هـ(س) = ٣ + \frac{٩}{س^{٤}}$

إذا كان $ح(س) = د(س) - هـ(س)$، فأوجد التكامل غير المحدود للدالة $ح(س)$.

٣-٥ حساب ثابت التكامل

عند إيجاد تكامل دالة ما، يجب أن نضمَن نتيجة ثابت التكامل لأنه يوجد عدد غير قابل للعد من الدوال التي يمكن أن يكون لها دالة الميل نفسها، مهما كانت دالة الميل.

يبيّن التمثيل البياني أدناه ثلاثة منحنيات، لكل منها دالة ميل هي $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س}$ أو $\text{د}'(\text{س}) = \text{٢س}$



لكل منها دالة الميل نفسها.
$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س}$ أو $\text{د}'(\text{س}) = \text{٢س}$

ومع أن للمنحنيات دالة الميل نفسها، إلا أن معادلاتها مختلفة.

يوجد عدد غير قابل للعد من المنحنيات التي يكون لها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س}$، مثل $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٩٩٩$، $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١٠٠١$، وهكذا.

لهذه المنحنيات الشكل نفسه، ولكن ليس لها الموقع نفسه. إذا مر أحد المنحنيات بالنقطة $(\text{س}_{١}، \text{ص}_{١})$، فإن باقي المنحنيات لن تمر بهذه النقطة.

تميز قيمة ثابت التكامل جـ كل منحنى منها من باقي هذه المنحنيات، ويمكن إيجاد جـ إذا عرفنا دالة الميل وإحداثيات نقطة على المنحنى.

أما إذا عرفنا دالة الميل وقيمة جـ، فبإمكاننا إيجاد معادلة منحنى معيّن.

مثــال ١٣

دالة الميل لمنحنى هي $\text{د}'(\text{س}) = \text{٣س} + ٤$

إذا علمت أن المنحنى $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ يمر بالنقطة $(-٢، ٩)$، فأوجد معادلته.

الحــلّ:

$$\text{د}(\text{س}) = \int \text{د}'(\text{س})\, \text{ءس}$$

$$= \int (\text{٣س} + ٤)\, \text{ءس}$$

$$= ٣\int \text{س}^{١}\, \text{ءس} + ٤\int \text{س}^{٠}\, \text{ءس}$$

$$= ٣ \times \frac{١}{١ + ١}\text{س}^{١+١} + ٤ \times \frac{١}{٠ + ١}\text{س}^{٠+١} + \text{جـ}$$

$$= ٣ \times \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٤ \times ١\text{س}^{١} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + \text{٤س} + \text{جـ}$$

د (س) = $\frac{٣}{٢}$س^{٢} + ٤س + جـ

لإيجاد جـ نستخدم النقطة (−٢، ٩) حيث يكون د (−٢) = ٩

٩ = $\frac{٣}{٢}$(−٢)^{٢} + ٤ (−٢) + جـ

جـ = ٩ − ٦ + ٨

= ١١

معادلة المنحنى هي د (س) = $\frac{٣}{٢}$س^{٢} + ٤ س + ١١

مثــال ١٤

لديك منحنى بحيث $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٦س^{٢} + ٢س − ٥

إذا علمت أن النقطة (١، ٤) تقع على المنحنى، فأوجد معادلته.

الحــلّ:

ص = $\int \frac{ء ص}{ء س}$ ء س

= $\int$(٦س^{٢} + ٢س − ٥) ء س

= ٦$\int$س^{٢} ء س + ٢$\int$س^{١} ء س − ٥$\int$١ ء س

= ٦ × $\frac{١}{٣}$س^{٣} + ٢ × $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ٥س + جـ

= ٢س^{٣} + س^{٢} − ٥س + جـ

ص = ٢س^{٣} + س^{٢} − ٥س + جـ .... عوض س = ١، ص = ٤ في معادلة المنحنى لإيجاد قيمة جـ

٤ = ٢(١)^{٣} + ١^{٢} − ٥ × ١ + جـ

جـ = ٤ − ٢ − ١ + ٥

= ٦

معادلة المنحنى هي ص = ٢س^{٣} + س^{٢} − ٥س + ٦

مثال ١٥

لديك د′(س) = ١٥س^{٤} − ٦س، د (−١) = ١، أوجد د (س).

الحل:

د (س) = ∫ د′(س) ۶ س

= ∫ (١٥س^{٤} − ٦س) ۶ س

= ١٥ ($\frac{١}{٥}$ س^{٥}) − ٦ ($\frac{١}{٢}$ س^{٢}) + جـ

= ٣س^{٥} − ٣س^{٢} + جـ

د (س) = ٣س^{٥} − ٣س^{٢} + جـ

د(−١) = ١ تعني أن المنحنى يمر بالنقطة (−١، ١)

١ = ٣(−١)^{٥} − ٣(−١)^{٢} + جـ

١ = −٣ − ٣ + جـ

جـ = ٧

∴ د (س) = ٣س^{٥} − ٣س^{٢} + ٧

تمارين ٥-٣

١) بمعلومية $\frac{۶ ص}{۶ س}$ وإحداثيات النقطة ل على المنحنى، أوجد معادلة المنحنى لكل مما يلي:

أ $\frac{۶ ص}{۶ س}$ = ٤س ؛ ل (١، ٥)

ب $\frac{۶ ص}{۶ س}$ = ٣س^{٢} ؛ ل (٢، ٩)

ج $\frac{۶ ص}{۶ س}$ = ٦س^{٢} − ٢س ؛ ل (−١، ٤)

د $\frac{۶ ص}{۶ س}$ = ٦س^{٢} + ٨س − ١ ؛ ل (٣، ١٠٠)

هـ $\frac{۶ ص}{۶ س}$ = $\frac{٤}{س^{٢}}$ ؛ ل (٢، ٨)

و $\frac{۶ ص}{۶ س}$ = $\frac{٢س^{٣} − ٤}{س^{٢}}$ ؛ ل (−٤، ١٢)

٢) لديك الدالة د (س) بحيث د′(س) = ١٠س^{٤} + ١٢س^{٣} ، د (−٢) = ١١٢، أوجد د (س).

٣) للدالة ص = ك (س) دالة ميل هي ك′(س) = ٣ − ٨س − ١٢س^{٢}

أوجد الدالة ك (س)، بحيث يمر منحنى ص = ك (س) بالنقطة (−٣، ٥٠).

٤) منحنى الدالة هـ معطى بحيث هـ′(س) = ٨ − ٣س

إذا مر منحنى ص = هـ(س) بالنقطة (٦، −٢)، فأوجد:

أ الدالة هـ(س).

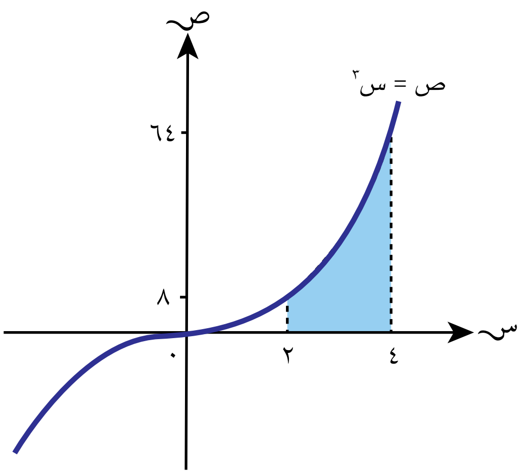
ب قيمة ب بحيث تقع النقطة (٢، ب) على منحنى ص = هـ(س).

٥-٤ التكامل المحدود

تذكّر أن $\int$ س^{٣} ى س = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + جـ، حيث جـ عدد ثابت، يسمى التكامل غير المحدود لـ س^{٣} بالنسبة إلى المتغير س

التكامل المحدود definite integral هو القيمة التي تنتج من إيجاد تكامل دالة بين قيمتَين محددتَين للمتغير س، وتسمى الحدَّين الأدنى والأعلى للتكامل.

يكتب التكامل المحدود للدالة س^{٣} بالنسبة إلى المتغير س بين الحد الأدنى س = ٢، والحد الأعلى س = ٤، في الصيغة $\int_{٢}^{٤}$ س^{٣} ى س



تعطي قيمة التكامل المحدود $\int_{٢}^{٤}$ س^{٣} ى س فعليًا المساحة المحصورة بين المنحنى ص = س^{٣} ومحور السينات من س = ٢ إلى س = ٤، كما يبيّن التمثيل البياني المجاور.

تبيّن الخطوات الآتية طريقة إيجاد قيمة التكامل المحدود $\int_{٢}^{٤}$ س^{٣} ى س:

الخطوة ١	أوجد تكامل س^{٣}
الخطوة ٢	عوّض الحد الأعلى س = ٤ في نتيجة الخطوة ١
الخطوة ٣	عوّض الحد الأدنى س = ٢ في نتيجة الخطوة ١
الخطوة ٤	اطرح نتيجة الخطوة ٣ من نتيجة الخطوة ٢

يبيّن الحل الآتي الخطوات الأربع أعلاه:

$$\int_{٢}^{٤} س^{٣} ى س = \left[\frac{١}{٤} س^{٤} + جـ\right]_{٢}^{٤}$$

$$= \left(\frac{١}{٤} \times ٤^{٤} + جـ\right) - \left(\frac{١}{٤} \times ٢^{٤} + جـ\right)$$

$$= ٦٤ + جـ - (٤ + جـ)$$

$$= ٦٤ + جـ - ٤ - جـ$$

$$= ٦٠$$

لاحظ أن جـ المضافة مرتَين تلغي نفسها، لذا فمن غير الضروري ضمهما إلى الحل.

يمكن استخدام الخطوات من الجدول السابق لإيجاد التكامل المحدود لأية دالة.

يمكن كتابة طريقة إيجاد التكامل المحدود كالآتي:

نتيجة ٥

$\int_{أ}^{ب}$ د$'$(س) ى س = $\left[د(س)\right]_{أ}^{ب}$ = د(ب) − د(أ)، حيث د(س) تكامل د$'$(س).

يمكن أيضًا استخدام القوانين التي أعطيت في النتيجتَين ٣، ٤ في خطوات إيجاد التكامل المحدود:

نتيجة ٦

$\int_{أ}^{ب}$ ك د (س) ؤ س = ك $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ؤ س، حيث ك عدد ثابت.

$\int_{أ}^{ب}$ [د (س) ± هـ (س)] ؤ س = $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ؤ س ± $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) ؤ س

مثال ١٦

أوجد قيمة $\int_{٣}^{٦}$ (س^{٢} + ٢س − ٥) ؤ س

الحلّ:

$\int_{٣}^{٦}$ (س^{٢} + ٢س − ٥) ؤ س = $\left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٥\text{س}\right]_{٣}^{٦}$

= $\left(\frac{١}{٣} \times ٦^{٣} + ٦^{٢} - ٥ \times ٦\right) - \left(\frac{١}{٣} \times ٣^{٣} + ٣^{٢} - ٥ \times ٣\right)$

= (٧٢ + ٣٦ − ٣٠) − (٩ + ٩ − ١٥)

= ٧٨ − ٣

= ٧٥

بعد إيجاد تكامل س^{٢} + ٢س − ٥ عوّض س = ٦، س = ٣، ثم اطرح القيمة الثانية من الأولى.

مثال ١٧

أوجد قيمة $\int_{-٢}^{٢} \left(\frac{١٣ - ٣\text{س}^{٢}}{٢}\right)$ ؤ س

الحلّ:

$\int_{-٢}^{٢} \left(\frac{١٣ - ٣\text{س}^{٢}}{٢}\right)$ ؤ س = $\frac{١}{٢} \int_{-٢}^{٢}$ (١٣ − ٣س^{٢}) ؤ س

= $\frac{١}{٢} \left[١٣\text{س} - \text{س}^{٣}\right]_{-٢}^{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ (١٣ × ٢ − ٢^{٣}) − $\frac{١}{٢}$ (١٣ × (−٢) − (−٢)^{٣})

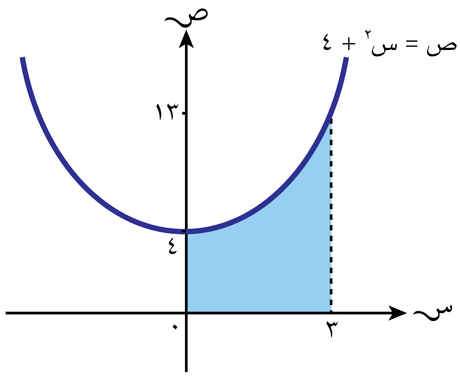
= $\frac{١}{٢}$ (٢٦ − ٨) − $\frac{١}{٢}$ (−٢٦ + ٨)

= ٩ + ٩

= ١٨

استخدم $\int$ ك د(س) ؤ س = ك $\int$ د (س) ؤ س عوّض س = ٢، س = −٢، واضرب الاثنَين في $\frac{١}{٢}$

مثال ١٨



في التمثيل البياني، ظُلّلت بالأزرق المساحة تحت المنحنى ص = $\text{س}^{٢}$ + ٤ بين محور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣

يقدّر طالب بأن هذه المساحة المظللة تساوي ٢٠ وحدة مربعة.
يمكن إيجاد المساحة الدقيقة المظللة من خلال إيجاد قيمة

$$\int_{٠}^{٣} (\text{س}^{٢} + ٤)\, \text{ء س}$$

حدد ما إذا كان تقدير الطالب صحيحًا.

الحــلّ:

$$\int_{٠}^{٣} (\text{س}^{٢} + ٤)\,\text{ء س} = \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٤\text{س}\right]_{٠}^{٣}$$

$$= \left(\frac{١}{٣} \times ٣^{٣} + ٤ \times ٣\right) - \left(\frac{١}{٣} \times ٠ + ٤ \times ٠\right)$$

$$= (٩ + ١٢) - (٠ + ٠)$$

$$= ٢١$$ .... المساحة المظللة ٢١ وحدة مربعة.

تقدير الطالب لـ ٢٠ وحدة مربعة كان صحيحًا.

تمارين ٥-٤

١) أوجد قيمة كل من الآتي:

أ) $\int_{١}^{٢} ٦\text{س}^{٢}\,\text{ء س}$

ب) $\int_{٢}^{٥} (٤\text{س}^{٣} + ٢\text{س})\,\text{ء س}$

ج) $\int_{٠}^{٢} ٣\text{س}(٢ - \text{س})\,\text{ء س}$

د) $\int_{١}^{٤} ٢(٥\text{س} - \text{س}^{٢})\,\text{ء س}$

هـ) $\int_{-٤}^{٠} \frac{١٠\text{س}^{٤} - ٢١\text{س}^{٣}}{\text{س}}\,\text{ء س}$

و) $\int_{-١}^{١} (٤\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ٣)\,\text{ء س}$

ز) $\int_{٢}^{٨} \frac{٢٠}{\text{س}^{٢}}\,\text{ء س}$

ح) $\int_{٢}^{٤} \left(١٠ - \frac{١٦}{\text{س}^{٣}}\right)\text{ء س}$

٢) لديك الدالة د(س) = $\frac{١٠}{\text{س}^{٣}}$ + ٤س، أوجد قيمة $\int_{١}^{٢} \frac{١}{٣}\,\text{د(س)}\,\text{ء س}$

٣) لديك $\int_{-١}^{٤} (\text{ك} - ٢\text{س})\,\text{ء س} = ٢٥$، أوجد قيمة العدد الصحيح ك

٤) لديك الدالتان د (س) = ١٢س + $\text{س}^{٢}$، هـ (س) = ٤س − ٣$\text{س}^{٢}$

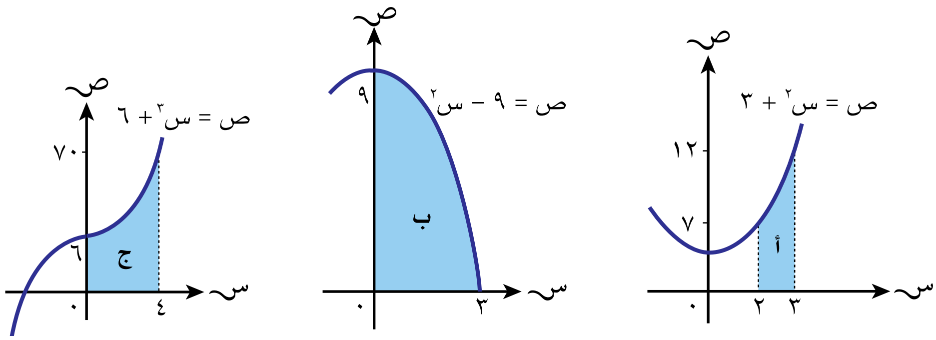
أوجد قيمة $\int_{-٢}^{٠} (\text{د (س)} - \text{هـ (س)})\,\text{ء س}$

٥) تبيّن التمثيلات البيانية أدناه، منحنيات ثلاث دوال.

ظللت مساحة تحت كل منحنى وعُلِّمت بالأحرف أ، **ب**، **ج**

مُساعَدة

لم يتم رسم التمثيلات البيانية في السؤال ٥ حسب المقياس



احسب القيمة الدقيقة للمساحة المظللة في كل تمثيل بياني من خلال إيجاد قيمة كل تكامل محدود من الآتي:

أ للمساحة أ، احسب $\int_{٢}^{٣} (س^{٢} + ٣)\, ء س$

ب للمساحة **ب**، احسب $\int_{٠}^{٣} (٩ - س^{٢})\, ء س$

ج للمساحة ج، احسب $\int_{٠}^{٤} (س^{٣} + ٦)\, ء س$

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

التفاضل

إذا كان ص = س^{ن}، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن س$^{ن - ١}$

إذا كان د(س) = س^{ن}، فإن د$'$(س) = ن س$^{ن - ١}$

التكامل كعملية عكسية للتفاضل

إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س^{ن}، فإن ص = $\frac{١}{ن + ١}$ س$^{ن + ١}$ + جـ، حيث جـ ثابت، ن $\neq$ −١

إذا كان د$'$(س) = س^{ن}، فإن د(س) = $\frac{١}{ن + ١}$ س$^{ن + ١}$ + جـ، حيث جـ ثابت، ن $\neq$ −١

التكامل غير المحدود

$\int$ س^{ن} ءس = $\frac{١}{ن + ١}$ س$^{ن + ١}$ + جـ، حيث جـ ثابت، ن $\neq$ −١

$\int$ ك د (س) ءس = ك $\int$ د (س) ءس، حيث ك عدد ثابت.

$\int$ [د(س) $\pm$ هـ(س)] ءس = $\int$ د(س) ءس $\pm$ $\int$ هـ (س) ءس

التكامل المحدود

$\int_{أ}^{ب}$ د$'$(س) ءس = $\left[\text{د (س)}\right]_{أ}^{ب}$ = د (ب) − د (أ)، حيث د(س) تكامل د$'$(س).

$\int_{أ}^{ب}$ ك د (س) ءس = ك $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ءس، حيث ك عدد ثابت.

$\int_{أ}^{ب}$ [د (س) $\pm$ هـ(س)] ءس = $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ءس $\pm$ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ءس

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) أوجد ص بدلالة س، إذا كان:

أ $\frac{ءص}{ءس} = ١٥س^{٤} - ٢س$

ب $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٨}{س^{٥}} + ٦س$

٢) أوجد د (س) بدلالة س، إذا كان:

أ $د'(س) = س^{-٢}$

ب $د'(س) = ٨س^{-٠,٦}$

ج $د'(س) = س^{٢} \times \sqrt[٣]{س}$

٣) أوجد $\int (١٢س^{٢} - ٣س^{٥})\, ءس$

٤) أوجد $\int س(٤ - ٢س)\, ءس$

٥) لديك الدالتان $د(س) = ١٠س^{٣} - ٣$ ، $هـ(س) = ٧ - ٨س^{٣}$

أوجد:

أ $\int (د(س) + هـ(س))\, ءس$

ب $\int (د(س) - هـ(س))\, ءس$

٦) لديك $د'(س) = ٦س - ٢س^{٣}$ ، $د(٣) = ٠,٥$ ، أوجد د (س).

٧) لديك منحنى بحيث $\frac{ءص}{ءس} = ٧ - ٣\sqrt{س}$، وأن المنحنى يمر بالنقطة (٤، ٥٠)، فأوجد معادلة المنحنى.

٨) أحسب قيمة كل من الآتي:

أ $\int_{١}^{٣} (٩س^{٢} - ٦س)\, ءس$

ب $\int_{-١}^{١} ٢س(٣ + س)\, ءس$

الوحدة السادسة
التوزيع الطبيعي
The normal distribution

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٦-١ تعرف خصائص المتغير العشوائي المتصل، وتستخدم التوزيع الطبيعي لتمثيل المتغير العشوائي المتصل حيث يكون ذلك مناسبًا.

٦-٢ تتذكر وتستخدم خصائص التوزيع الطبيعي.

٦-٣ تستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري عندما ز ~ ط (٠، ١) لإيجاد:

- قيمة ل(ز > $ز_{١}$) أو قيمة احتمال متعلقة بها.
- قيمة $ز_{١}$ إذا كانت قيمة ل(ز > $ز_{١}$) معطاة أو قيمة احتمال متعلقة بها.

٦-٤ تحوّل إلى الصيغة المعيارية وتستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري عندما س ~ ط (و، $ع^{٢}$) لإيجاد:

قيمة ل(س > $س_{١}$) أو قيمة احتمال متعلق بذلك إذا كانت القيم $س_{١}$، و، ع معطاة بما في ذلك المتعلق بمسائل واقعية.

٦-٥ تحوّل إلى الصيغة المعيارية وتستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري عندما س ~ ط (و، $ع^{٢}$) لإيجاد:

قيم $س_{١}$، و، ع إذا كانت قيمة ل(س > $س_{١}$) أو قيمة احتمال متعلق بذلك معطاة بما في ذلك المسائل الواقعية.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر (الوحدة الثانية)	تميز البيانات المتصلة.	١) أي مما يلي يصف مجموعة من البيانات المتصلة: أ عدد الطلبة في الصفوف في مدرسة كبيرة. ب درجة الحرارة عند الظهيرة، وتقاس على مدى عشرة أيام متتالية. ج عدد الإجابات الصحيحة التي حصل عليها عمر في اختبار الرياضيات أمس. د أطوال الطلبة في صفك، لأقرب سنتيمتر. هـ عمر الأشجار في الغابة. و عدد الأشخاص الذين يمرون اليوم أمام بوابة مدرستك كل ساعة بين الساعة ٩ صباحًا و٤ مساءً.
الصف الحادي عشر (الوحدة الرابعة)	تجد الفئة المنوالية لبيانات مجمعة في جداول تكرارية.	٢) تجد في الجدول الآتي الكتل (م) كغم لـ ٢٤٠ بطيخة، موزعة على أربع فئات غير متساوية الطول: (الجدول أدناه) أوجد الفئة المنوالية.

الكتلة (م) كغم	عدد البطيخ
٢,٤٥ ≤ س < ٢,٤٩	٧٢
٢,٤٩ ≤ س < ٢,٥١	٤٠
٢,٥١ ≤ س < ٢,٥٦	٨٠
٢,٥٦ ≤ س < ٢,٥٩	٤٨

المفردات

التوزيع الطبيعي
Normal distribution

المتغير العشوائي المتصل
Continuous random variable

دالة كثافة الاحتمال
Probability density function or PDF

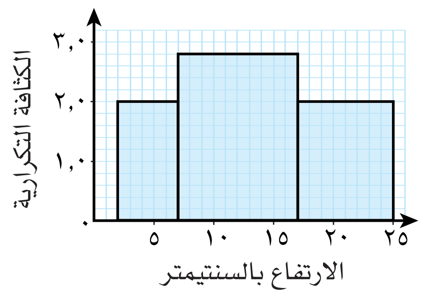
المنحنى الطبيعي
Normal curve

متغير طبيعي معياري
Standard normal variable

الصيغة المعيارية
Standardising

قيمة معيارية
Z-score

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر (الوحدة السابعة)	تصف مجموعة بيانات معطاة في مدرج تكراري.	٣) ارتفاعات بعض الشتلات بالسنتيمتر موضحة في المدرج التكراري الآتي:  يمثل العمود الأول من المدرج التكراري ارتفاعات أقصر ١٠ شتلات، والتي يتراوح ارتفاعها من ٢ سم إلى أقل من ٧ سم. أوجد العدد الكلي لارتفاع الشتلات الممثلة في المدرج التكراري.

لماذا ندرس التوزيع الطبيعي؟

تشكل هذه الوحدة مدخلًا إلى فكرة المتغير العشوائي المتصل والطريقة المستخدمة لعرض توزيعه الاحتمالي. سيتركز الاهتمام على نوع محدد من المتغيرات العشوائية المتصلة وهو المتغير العشوائي ذو التوزيع الطبيعي.

اكتُشف التوزيع الطبيعي **normal distribution** في أواخر القرن الثامن عشر من قبل الرياضي الألماني كارل فريدريك غاس Carl Friedrich Gauss خلال البحث في أخطاء القياس التي تحصل في المشاهدات الفلكية.

يوجد الكثير من الأمثلة الواقعية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية المتصلة التي يمكن نمذجة توزيعاتها من خلال التوزيع الطبيعي، والكثير منها تحدث طبيعيًا: الطول، والوزن عند الولادة، ومدة الحمل، وضغط الدم، والقدرة على القراءة، والأوقات اللازمة لتعلم مهارة جديدة، والرضى الوظيفي، ومعدلات اختبارات Standard Assessment Tests (SATs) ونسبة الذكاء Intelligence Quotient (IQ)، وهكذا.

ستتعلم في هذه الوحدة عن المنحنى الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري وكيفية استخدامها لحساب احتمالات متعلقة بذلك.

٦-١ المتغيرات العشوائية المتصلة والمنحنى الطبيعي

المتغير العشوائي المتصل

نقول عن متغير أنه متغير عشوائي متصل **continuous random variable** إذا أمكن أن يتخذ عددًا غير قابل للعد من القيم في فترة ما (أي قيمة في مجال محدد)، وإن كانت هذه القيم نواتج عددية لحوادث أو ظواهر عشوائية.

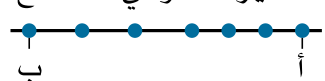
طول ولد عمره ١٧ عامًا مثال على متغير عشوائي متصل، فمن غير الممكن قياس طول أي ولد بعمر ١٧ عامًا بشكل دقيق، ولكن يمكن إعطاء الأطوال مقربةً إلى أقرب سنتيمتر مثلًا. في هذه الحالة، الطول ١٦٣ سم يعني أن الطول الفعلي هو في الفترة ١٦٢,٥ ⩽ الطول < ١٦٣,٥ سم.

بشكل مماثل، كتلة طفل حديث الولادة هي متغير عشوائي متصل؛ فإذا كانت الكتلة المعطاة ٣,٢ كغم فهذا يعني أن الكتلة الفعلية هي في الفترة ٣,١٥ ⩽ الكتلة < ٣,٢٥ كغم.

لا يمكن إعطاء قيم المتغير العشوائي المتقطع، مثل العدد المحتمل للركاب في الحافلة، إلا لأقرب عدد صحيح. إذا كان هناك ١٢ راكبًا، فلا يمكن إعطاء ذلك بدقة أكبر.

يوضح المخطط الآتي القيم المحتملة للمتغير العشوائي المتقطع في الفترة من أ إلى ب:

المتغير العشوائي المتقطع



لإظهار التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع، نقوم بإدراج جميع قيمه المحتملة والاحتمالات المقابلة لها في جدول أو في مخطط مثل مخطط الأعمدة.

- إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا، فيمكننا تمثيل ل(س)

يمكن دائمًا إعطاء قيم المتغير العشوائي المتصل بدرجة أكبر من الدقة. الارتفاع المعطى بمقدار ١,٣٨ متر دقيق لمنزلتين عشريتين فقط. وسوف تصبح هذه القيمة أكثر دقة إذا تم إعطاؤها إلى ٣، ٤، ٥، أو ٦ منازل عشرية، وهكذا.

ويوضح المخطط الآتي القيم المحتملة للمتغير العشوائي المتصل في الفترة من أ إلى ب:

المتغير العشوائي المتصل

لتوضيح التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل، لا يمكننا إدراج جميع قيمه المحتملة، ولكن يمكننا إظهار المجال الكامل لقيمه واحتمالات الفترات ضمن هذا المجال في جدول أو مدرج تكراري.

- إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا، فيمكننا تمثيل ل (أ < س ⩽ ب) أو ل(أ ⩽ س < ب) وهكذا.

المنحنى الطبيعي

يمكن تمثيل بيانات المتغيرات العشوائية المتصلة في مدرج تكراري، حيث تساوي أطوال الأعمدة الكثافات التكرارية وتتناسب مساحات الأعمدة مع التكرارات.

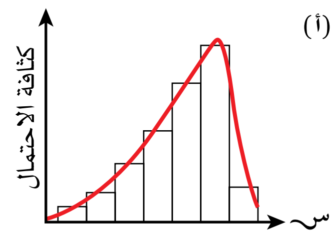
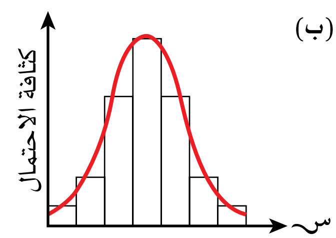
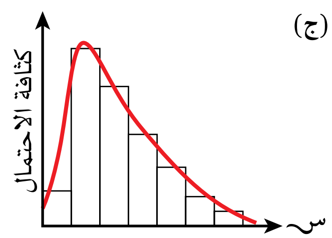
في المدرج التكراري، المساحة الكلية للأعمدة تساوي التكرار الكلي للبيانات.

لتمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل، يرسم التمثيل البياني لمنحنى مبني على شكل المدرج التكراري.

يسمى المنحنى **دالة كثافة الاحتمال** **probability density function (PDF)**.

عندما يرسم منحنى دالة كثافة الاحتمال على المدرج التكراري، تتحوّل كثافة التكرار إلى كثافة الاحتمال، بحيث تصبح المساحة الكلية تحت المنحنى مساوية لمجموع الاحتمالات وهو ١

رسمت منحنيات دوال كثافة الاحتمال أعلى كل من المدرجات التكرارية في المخططات أدناه:

المساحة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال = ١	
(أ)  التواء سالب (الامتداد الأطول إلى اليسار)	يُعدّ التوزيع في (أ) التواء سالبًا لأن وسط المتغير (س) يقع إلى يسار قمة المنحنى.
(ب)  معتدل	التوزيع في (ب) معتدل (متناظر). يتساوى ويقع كل من الوسط والمنوال والوسيط عند قمة المنحنى.
(ج)  التواء موجب (الامتداد الأطول إلى اليمين)	يُعدّ التوزيع في (ج) التواء موجبًا لأن وسط المتغير (س) يقع إلى يمين قمة المنحنى.

مُساعَدة

يقع المنوال عند قمة المنحنى (أعلى نقطة فيه)، ويقع الوسيط عند القيمة حيث تكون المساحة تحت المنحنى منقسمة إلى جزأين متساويين.

المنحنى الذي يمثل التوزيع الاحتمالي في (ب) **منحنى طبيعي** **normal curve**، وهو متناظر وله شكل الجرس. يتفق هذا مع الوصف السابق وهو أن القيم القريبة من الوسط هي أعلى احتمالًا (وتشير إلى ذلك القيم العالية لكثافة الاحتمال)، فكلما ابتعدت القيم عن الوسط، كان احتمال وقوعها أقل (وتشير إلى ذلك القيم المتدنية لكثافة الاحتمال).

استكشف ١

تبيّن الجداول الآتية التوزيع التكراري لثلاثة متغيرات عشوائية متصلة هي (و)، (س)، (ص).

للمتغير (و) ١٢٦ قيمة في الفترة من ٣ إلى ١٨

و	٣ ≤ و < ٦	٦ ≤ و < ٩	٩ ≤ و < ١٢	١٢ ≤ و < ١٥	١٥ ≤ و < ١٨
ك	٢٤	٢٧	٢٤	٢٧	٢٤
الكثافة التكرارية	$\frac{٢٤}{٦ - ٣} = ٨$				

للمتغير (س) ٢١٦ قيمة في الفترة من ٢ إلى ٢٢

س	٢ ≤ س < ٦	٦ ≤ س < ١٠	١٠ ≤ س < ١٤	١٤ ≤ س < ١٨	١٨ ≤ س < ٢٢
ك	١٢	٥٦	٨٠	٥٦	١٢
الكثافة التكرارية	$\frac{١٢}{٦ - ٢} = ٣$				

للمتغير (ص) ٨٥ قيمة في الفترة من ١ إلى ٢٦

ص	١ ≤ ص < ٦	٦ ≤ ص < ١١	١١ ≤ ص < ١٦	١٦ ≤ ص < ٢١	٢١ ≤ ص < ٢٦
ك	٢٥	١٥	٥	١٥	٢٥
الكثافة التكرارية	$\frac{٢٥}{٦ - ١} = ٥$				

١) أكمل الجداول من خلال إيجاد قيم الكثافة التكرارية الناقصة.

٢) ارسم مدرجًا تكراريًا لكل من الجداول الثلاثة.

٣) ارسم منحنى منتظمًا على أعمدة كل مدرج تكراري.

٤) ما هو المشترك بين المنحنيات الثلاثة التي رسمتها؟

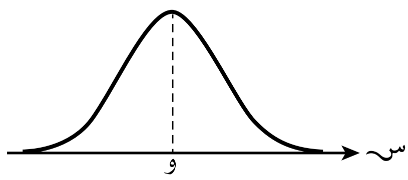
٥) أي المنحنيات التي رسمتها يمكن وصفها بالمنحنى الطبيعي؟

في استكشف ١، ينتج التوزيع التكراري للمتغير العشوائي المتصل (س) منحنًى طبيعيًا متناظرًا على شكل جرس.

إذا تم تمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل له عدد ثابت من القيم بمنحنى طبيعي في فترة محددة، فإن:

- قمة المنحنى الذي على شكل جرس تقع عند الوسط حيث نجد كذلك خط التناظر للمنحنى.

- الوسط = المنوال = الوسيط.
- تتناقص الاحتمالات كلما ابتعدنا عن الوسط من الطرفَين – كلما ابتعدت قيمة عن الوسط الحساب كان احتمال وقوعها أقل.



المنوال = الوسيط = الوسط (و)

- التناقص في قيمة الوسط ينتج منه إزاحة للمنحنى إلى اليسار.
- التزايد في قيمة الوسط ينتج منه إزاحة للمنحنى إلى اليمين.
- التناقص في قيمة الانحراف المعياري والتباين (ع (س)، $ع^2$(س)) يعني أن القيم تصبح أقل انتشارًا عن الوسط وأكثر قربًا منه. ينتج من ذلك تزايد في ارتفاع المنحنى وتناقص في عرضه، ما يضمن ثبات قيمة المساحة تحت المنحنى.
- التزايد في قيمة الانحراف المعياري والتباين (ع(س)، $ع^2$(س)) يعني أن القيم تصبح أكثر انتشارًا عن الوسط وأكثر بعدًا عنه. ينتج من ذلك تناقص في ارتفاع المنحنى وتزايد في عرضه، ما يضمن ثبات قيمة المساحة تحت المنحنى.

مُساعَدة

للإشارة إلى توزيع متغير عشوائي متصل (س)، يستخدم الترميز الآتي:

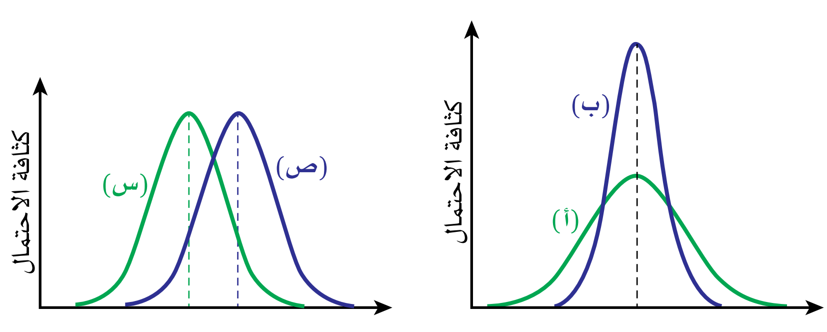
- الوسط = و
- التباين = $ع^2$(س)
- الانحراف المعياري = ع(س)

يمكن رسم أكثر من منحنى لتمثيل التوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشوائية متصلة ذات توزيعات طبيعية في تمثيل بياني واحد وذلك للتمكن من مقارنة بياناتها، مثل مقارنة أطوال الأولاد وأطوال البنات في حضانة للأطفال.

- إذا كان لمنحنيَين طبيعيَّين خط التناظر نفسه فإن للمتغيرَين الوسط نفسه.
- إذا كان لمنحنيَين الارتفاع والشكل نفسَيهما فإن للمتغيرَين الانحراف المعياري والتباين نفسَيهما.

مثـــال ١

تبيّن التمثيلات الآتية منحنيات طبيعية تمثل التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات (أ)، (ب)، (س)، (ص).



لكل من المتغيرات وسط هو على الترتيب $و_أ$، $و_ب$، $و_س$، $و_ص$، وانحراف معياري هو على الترتيب ع(أ)، ع(ب)، ع(س)، ع(ص).

حدد مبررًا إجاباتك ما إذا كانت كل من العبارت الآتية صحيحة أم خاطئة.

أ $و_أ = و_ب$

ب $و_س > و_ص$

ج ع(أ) = ع(ب)

د $ع^2$(س) = $ع^2$(ص)

الحــلّ:

أ $و_أ = و_ب$ صحيحة. وسط المتغير (أ) يساوي وسط المتغير (ب) لأن للمنحنيَين خط التناظر نفسه؛ وهما متمركزان حول قيمة الوسط نفسها.

ب $و_س > و_ص$ خاطئة. وسط المتغير (س) ليس أكبر من وسط المتغير (ص) لأن وسط المتغير (س) يقع يسار وسط المتغير (ص) لذا فهو أقل قيمة منه (العبارة الصحيحة هي $و_س < و_ص$)

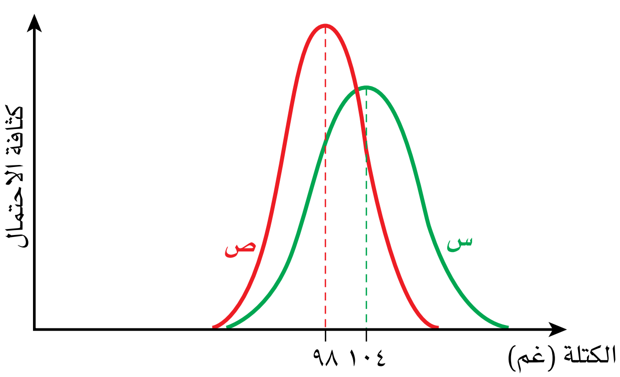
ج ع(أ) = ع(ب) خاطئة. للمنحنيَين شكلان مختلفان: منحنى (أ) أقصر وأعرض من منحنى (ب)، القيم في منحنى (أ) أكثر انتشارًا من القيم في منحنى (ب). أي أن الانحراف المعياري للمتغير (أ) أكبر من الانحراف المعياري للمتغير (ب). (العبارة الصحيحة هي ع(أ) > ع(ب))

د $ع^٢(س) = ع^٢(ص)$ صحيحة. للمنحنيَين الشكل نفسه، وانتشار القيم فيهما هو ذاته، مما يعني أن للمتغيرَين (س)، (ص) الانحراف المعياري نفسه، ولهما أيضًا التباين نفسه.

مثــال ٢

يتم بيع نوعَين من الشاي (س)، (ص) في علب كتلتها المكتوبة ١٠٠ غرام من الشاي.
كتلة الشاي في كل من العلبتَين لكلا النوعَين ذات توزيع طبيعي.
تم التحقق من عدد كبير من العلب لكلا النوعَين.
يبيّن الجدول الآتي والشكل المجاور النتائج:

	النوع (س)	النوع (ص)
وسط كتلة الشاي (غرام)	١٠٤	٩٨
الانحراف المعياري (غرام)	٣	٢



اكتب عبارة رياضية تقارن فيها:

أ وسط كتلة كل من النوعَين.

ب تباين كتلة كل من النوعَين.

الحــلّ:

أ $و_س > و_ص$ .... وسط النوع (س) أكبر من وسط النوع (ص).

ب $ع^٢(س) > ع^٢(ص)$ .... الانحراف المعياري للنوع س (٣) أكبر من الانحراف المعياري للنوع ص (٢)، إذًا التباين للنوع (س) أكبر من التباين للنوع (ص).

تمارين ٦-١

١) حدد أيًا من الخيارات الآتية يصف متغيرًا عشوائيًا متصلًا.

بالنسبة إلى الخيارات التي لا تصف متغيرًا عشوائيًا متصلًا، حدد السبب:

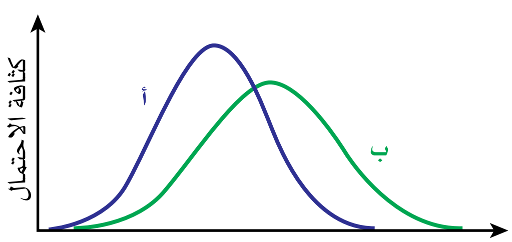
أ عدد مرات ظهور 'صورة' عند رمي قطعة نقدية منتظمة ١٠٠ مرة.

ب عدد تأشيرات الدخول الصادرة خلال آب/أغسطس من العام الماضي للسياح القادمين إلى سلطنة عمان.

ج الأحجام الممكنة لحبيبات الرمل.

د عدد المرات التي يجب أن يرمى فيها حجر نرد منتظم حتى ظهور العدد ٦ لأول مرة.

٢) يبيّن التمثيل البياني الآتي التوزيع الاحتمالي لكل من المتغيرَين العشوائيَّين المتصلَين (أ)، (ب).



حدد ما إذا كانت كل من العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة:

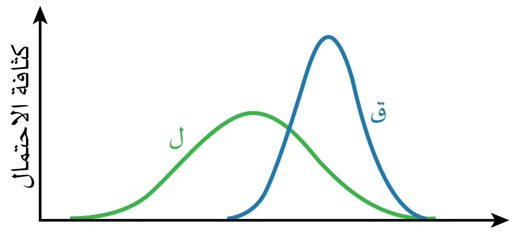
أ $و_أ > و_ب$

ب $ع(أ) > ع(ب)$

ج أكثر من نصف القيم في المنحنى (ب) أكبر من $و_أ$

د أقل من نصف القيم في المنحنى (أ) أقل من $و_ب$

٣) يبيّن التمثيل البياني الآتي منحنيَين طبيعيَّين يمثلان التوزيع الاحتمالي لكل من المتغيرَين العشوائيَّين المتصلَين (ل)، (ق).



أ استخدم رموزًا رياضية لتكتب عبارة تقارن فيها:

١) تباين (ل) مع تباين (ق).

٢) وسط المتغير (ل) مع وسط المتغير (ق).

ب تبيّن أن حسابات (ل) ، (ق) تتضمن بعض الأخطاء.

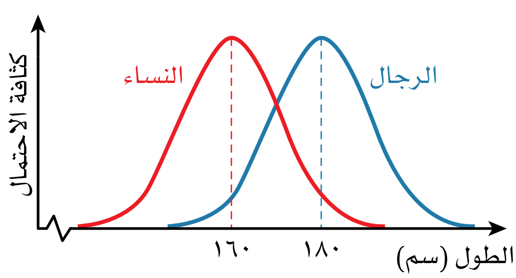
الوسط الصحيح للمتغير (ل) أكبر مما يظهر في التمثيل البياني، والانحراف المعياري الصحيح للمتغير (ق) أقل مما يظهر في التمثيل البياني.

لتصحيح التمثيل البياني، اشرح التغييرات التي يجب أن تحصل للمنحنى الطبيعي للمتغير:

١) (ل)   ٢) (ق)

ج بعد تصحيح التمثيل البياني، ما هي الخاصية التي لا تتغير بالنسبة إلى المنحنيَين؟

٤) ينتج من توزيعَين لأطوال ١٠٠٠ امرأة و ١٠٠٠ رجل منحنيان طبيعيان كما هو مبيّن في التمثيل البياني الآتي. وسط أطوال النساء هو ١٦٠ سم، ووسط أطوال الرجال هو ١٨٠ سم.



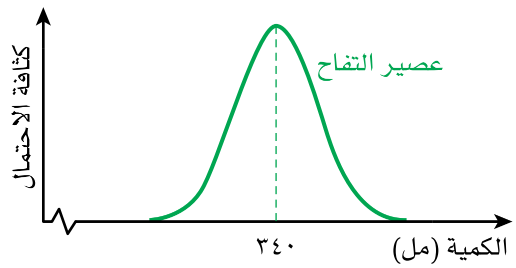
مُساعَدة

إشارة ⁓ في بداية المحور الأفقي تشير إلى أن التدرج لم يبدأ من الصفر.

تم دمج بيانات أطوال هؤلاء النساء والرجال لتشكيل مجموعة بيانات جديدة.

على افتراض أن بيانات الأطوال الجديدة تنتج أيضًا منحنًى طبيعيًا، انسخ التمثيل البياني أعلاه وأضف إليه منحنى البيانات المدمجة لأطوال ٢٠٠٠ رجل وامرأة.

٥) ينتج من التوزيع الاحتمالي لكمية العصير في ٥٠٠ عبوة من عصير التفاح منحنًى طبيعيٌّ وسطه ٣٤٠ مل وتباينه ٤ مل^{٢}، كما هو مبيّن في التمثيل البياني.



ينتج أيضًا من التوزيع الاحتمالي لكمية العصير في ١٠٠٠ عبوة من عصير الخوخ منحنًى طبيعيٌّ وسطه ٣٤٠ مل وانحرافه المعياري ٤ مل.

أ انسخ التمثيل البياني أعلاه وأضف إليه المنحنى الطبيعي لكمية عصير الخوخ في ١٠٠٠ عبوة عصير.

ب صف التشابهات والفروقات بين المنحنيَين.

٦-٢ التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع الطبيعي

تعلمت في الدرس السابق كيف يُستخدم منحنى متناظر شكله يشبه الجرس لنمذجة التوزيعات الاحتمالية لبعض المتغيرات العشوائية المتصلة.

تتم نمذجة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل له توزيع طبيعي من خلال دالة رياضية تشكل طريقة لإيجاد احتمالات حصول نواتج أو مشاهدات مختلفة.

منحنى هذه الدالة معرف لكل قيم (س) والمساحة تحت كل المنحنى تساوي مجموع الاحتمالات وهو ١

يعرف المتغير العشوائي المتصل ذو التوزيع الطبيعي من خلال وسطه (و) وتباينه ($ع^٢$).

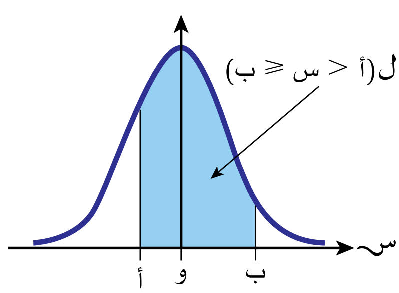
لوصف المتغير العشوائي المتصل ذي التوزيع الطبيعي (س) نكتب س ~ ط (و، $ع^٢$).

نتيجة ١

يعرّف س ~ ط (و، $ع^٢$) بالمتغير العشوائي المتصل ذي التوزيع الطبيعي (س).

نقرأ هذا على الشكل: للمتغير (س) توزيع طبيعي وسطه (و) وتباينه ($ع^٢$)

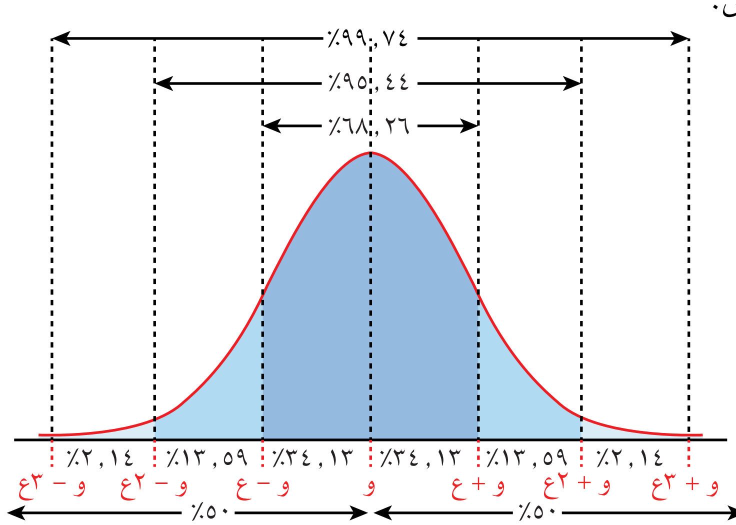
لكل متغير عشوائي متصل ذي توزيع طبيعي (س)، احتمال أن تكون للمتغير (س) قيمة بين أ، ب تساوي المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين المحور السيني والمستقيمين س = أ، س = ب



مُساعَدة

المساحة تحت أي جزء من المنحنى لا تتغير بتضمين حدود الفترة أو عدمه. وهذا يعني أنه لا يوجد فرق بين قيم
ل(أ < س ≤ ب)،
ل(أ ≤ س < ب)،
ل(أ ≤ س ≤ ب)،
ل(أ < س < ب).

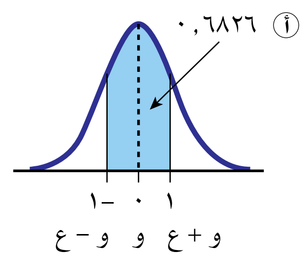
للتوزيعات الطبيعية الكثير من الخصائص المميزة. يبيّن التمثيل البياني والجدول الآتيان بعض هذه الخصائص.

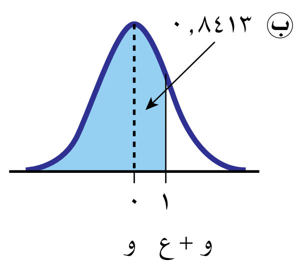


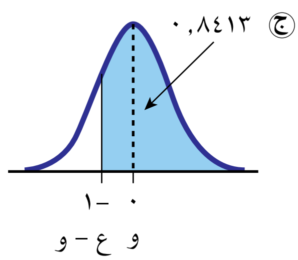
الخصائص	الاحتمالات
نصف القيم أصغر من الوسط. نصف القيم أكبر من الوسط.	ل(س < و) = ل(س ≤ و) = ٠,٥ ل(س > و) = ل(س ≥ و) = ٠,٥
تبعد ٦٨,٢٦٪ من القيم تقريبًا عن الوسط بأقل من انحراف معياري واحد.	ل(و − ع < س < و + ع) = ٠,٦٨٢٦
تبعد ٩٥,٤٤٪ من القيم تقريبًا عن الوسط بأقل من انحرافين معياريين.	ل(و − ٢ع < س < و + ٢ع) = ٠,٩٥٤٤
تبعد ٩٩,٧٤٪ من القيم تقريبًا عن الوسط بأقل من ثلاثة انحرافات معيارية.	ل(و − ٣ع < س < و + ٣ع) = ٠,٩٩٧٤

كما ترى في التمثيل البياني والجدول، فإن احتمالات أن تقع قيم توزيع طبيعي ضمن انحراف معياري معيّن عن الوسط هي احتمالات ثابتة.

في التمثيلات الآتية، تمثل القيم ٠، ±١، ±٢ عدد الانحرافات المعيارية عن الوسط، فهي تبيّن المعلومات المعطاة في الجدول أعلاه، كما تبيّن كيفية حساب احتمالات أخرى باستخدام تناظر المنحنى وحقيقة أن المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي ١



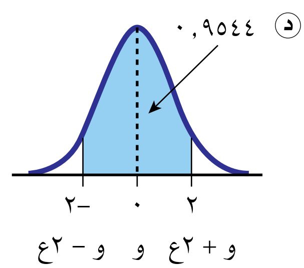


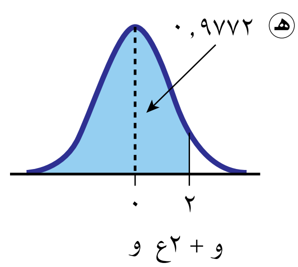


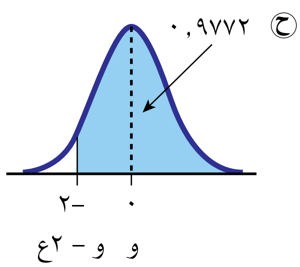
مساحة كل من الجزأين غير المظللَين من التمثيل أ هي $\frac{١ - ٠,٦٨٢٦}{٢}$ = ٠,١٥٨٧

إذًا، فالمساحتان المظللتان في التمثيلَين ب، ج هما ١ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٨٤١٣

نستنتج أن ل(س < ١) = ل(س > −١) = ٠,٨٤١٣







مساحة كل من الجزأين غير المظللَين من التمثيل د هي $\frac{١ - ٠,٩٥٤٤}{٢}$ = ٠,٠٢٢٨

إذًا، فالمساحتان المظللتان في التمثيلَين هـ، ح هما ١ − ٠,٠٢٢٨ = ٠,٩٧٧٢

نستنتج أن ل(س < ٢) = ل(س > −٢) = ٠,٩٧٧٢

استكشف ٢

يبيّن الجدول الآتي الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيعات ثلاثة متغيرات عشوائية متصلة (أ)، (ب)، (ج).

	أ	ب	ج
الوسط (و)	٤٠	٧٢	١٢٣
التباين ($ع^٢$)	٦٤	١٤٤	١٢١
الانحراف المعياري (ع)	٨	١٢	١١

نتجت من مشاهدات عشوائية لكل توزيع النتائج الآتية:

- للمتغير (أ): ٧٨٧٢ من ١٣١٢٠ مشاهدة تقع في الفترة من ٣٢ إلى ٤٨
- للمتغير (ب): ٨٣٦٢ من ١٢٢٥٠ مشاهدة تقع في الفترة من ٦٠ إلى ٨٤
- للمتغير (ج): ٧٦٣٠ من ١٠٩٠٠ مشاهدة تقع في الفترة من ١١٢ إلى ١٣٤

كل الفترات التي تقع فيها المشاهدات هي ضمن انحراف معياري يساوي ١ عن الوسط، أي بين (و − ع)، (و + ع).

١) باستخدام الجدول السابق الذي يبيّن خصائص واحتمالات التوزيع الطبيعي، تحقق من المعلومات المعطاة عن المتغيرات (أ)، (ب)، (ج).

٢) هل يمكن أن يكون لأي من هذه المتغيرات توزيع طبيعي؟

اكتب أسماء المتغيرات بالترتيب بحيث تبدأ باسم المتغير الذي تظن أنه الأكثر ترجيحًا لأن يكون له توزيع طبيعي.

٣) بالإشارة إلى المتغير الذي من المرجح أن يكون له توزيع طبيعي: إذا تم القيام بـ ٢٥٠٠ مشاهدة، كم مشاهدة منها تتوقع أن يكون بين (و − ٢ع) ، (و + ٢ع)؟

المنحنى الطبيعي المعياري

تمثل التمثيلات البيانية الستة أ إلى ح التي ظهرت قبل نشاط استكشف ٢ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ذا توزيع طبيعي وسطه و = ٠ وانحرافه المعياري ع = ١ وتباينه $ع^٢$ = ١

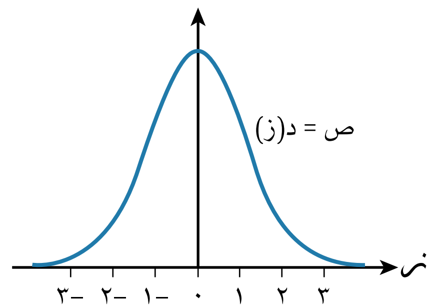
يطلق على هذا المتغير اسم **متغير طبيعي معياري** **standard normal variable** ويرمز إليه بالحرف (ز).

نتيجة ٢

للمتغير الطبيعي المعياري (ز) وسط يساوي ٠ وتباين يساوي ١

يرمز إلى هذا المتغير بالرمز ز ~ ط (٠، ١).

يبيّن التمثيل أدناه التوزيع الاحتمالي للمتغير الطبيعي المعياري (ز) لمنحناه المتناظر الذي يشبه الجرس دالة هي ص = د (ز).



- وسط (ز) هو ز = ٠
- خط التناظر مستقيم رأسي يمر في الوسط (كما في كل التوزيعات الطبيعية).
- للمتغير (ز) تباين يساوي ١ وانحراف معياري يساوي ١
- تمثل ز = ±١، ±٢، ±٣ قيمًا أقل أو أكبر من الوسط بـ ١، ٢، ٣ انحرافات معيارية.
- كل ز < ٠ تمثل قيمة أقل من الوسط.
- كل ز > ٠ تمثل قيمة أكبر من الوسط.
- لكل ز > ٣,٥، ز < −٣,٥، تكون قيمة د(ز) قريبة جدًا من الصفر،
  إذًا ل(ز > ٣,٥) = ل(ز ⩽ −٣,٥) ≈ ٠
- المساحة تحت منحنى ص = د (ز) تساوي ١

يقسم المستقيم الرأسي عند ز = ز$_{١}$ المساحة تحت المنحنى إلى جزأَين. تمثل مساحة أحد الجزأَين ل(ز ⩽ ز$_{١}$) وتمثل مساحة الجزء الآخر ل(ز > ز$_{١}$).

نرمز إلى قيمة ل(ز ⩽ ز$_{١}$) بالدالة د (ز$_{١}$).

وضع الرياضيون الجدول الذي يضم قيم د (ز) وهو موجود في نهاية هذه الوحدة تحت عنوان 'جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري'.

ومع أن جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لا يظهر إلا القيم الموجبة أو الصفرية للمتغير (ز)، يسمح لنا تناظر المنحنى باستخدام الجدول للقيم السالبة للمتغير (ز).

يمكن إيجاد قيمة د (ز) لأية قيمة للمتغير (ز)، كما يمكن إيجاد قيمة المتغير (ز) لأية قيمة للدالة د (ز) باستخدام الجدول بطريقة معكوسة.

مُساعَدة

تحتوي بعض الحاسبات الحديثة على الدالة د (ز). لمعرفة كيفية استخدامها، راجع دليل الحاسبة الخاصة بك.

مثـــال ٣

استخدم جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد د (٠.٢٧).

الحـــلّ:

الرقمان الأول والثاني

الرقم الثالث

ز	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٣٢	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٩	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦٤٦١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩

خطوات إيجاد د (ز) هي:

- حدد موقع الرقمَين الأول والثاني من ز (تحديدًا ٠,٢) في العمود الأول إلى اليمين.
- حدد موقع الرقم الثالث من ز (تحديدًا ٧) من الصف الأول.
- عند تقاطع الصف ٠,٢ مع العمود ٧ تجد القيمة ٠,٦٠٦٤

هذا يعني أن د (٠,٢٧) = ٠,٦٠٦٤

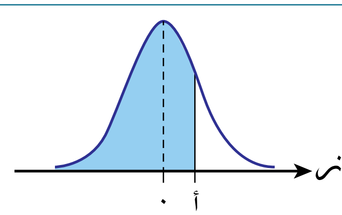
مُساعَدة

من المستحسن أن ترسم تمثيلًا بيانيًا توضيحيًا لمساعدتك في حل أمثلة وتمارين هذه الوحدة.

يبيّن التمثيلان الآتيان ما يلي:

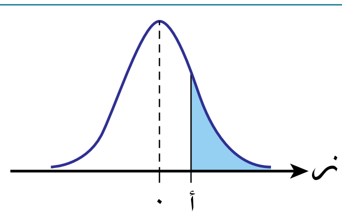
ل(ز $>$ أ) = المساحة تحت المنحنى إلى يسار ز = أ

ل(ز $<$ أ) = المساحة تحت المنحنى إلى يمين ز = أ



عندما أ $<$ ٠

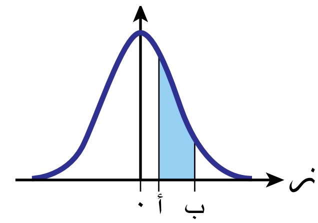
ل(ز $>$ أ) = د (أ)



عندما أ $<$ ٠

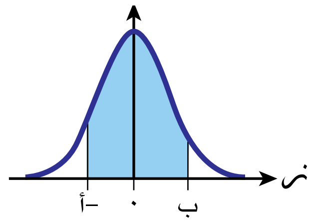
ل(ز $<$ أ) = ١ – د (أ)

في التمثيلات الآتية بعض النتائج الأخرى المفيدة:



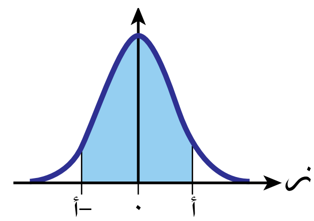
عندما ٠ < أ < ب

ل(أ < ز < ب) = د(ب) − د(أ)



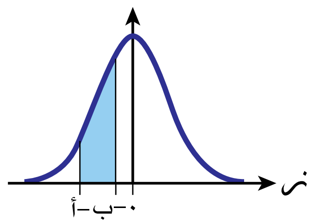
عندما −أ < ٠ < ب

ل(−أ < ز < ب) = د(ب) + د(أ) − ١



عندما −أ < ٠ < أ

ل(−أ < ز < أ) = ٢د(أ) − ١



عندما −أ < −ب < ٠

ل(−أ < ز < −ب) = د(أ) − د(ب)

نتيجة ٣

إذا كان أ > ٠ ، ب > ٠ فإن:

- ل(ز < أ) = د(أ)
- ل(ز > أ) = ١ − د(أ)
- ل(أ < ز < ب) = د(ب) − د(أ)
- ل(−أ < ز < ب) = د(ب) + د(أ) − ١
- ل(−أ < ز < أ) = ٢ د(أ) − ١

مثــال ٤

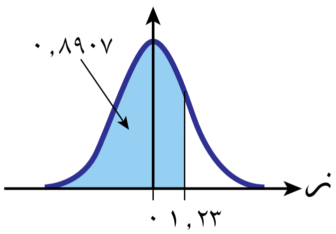
لديك ز ~ ط (٠، ١) أوجد:

أ ل(ز ⩽ ١,٢٣)

ب ل(ز > ١,٢٣)

الحــلّ:

أ

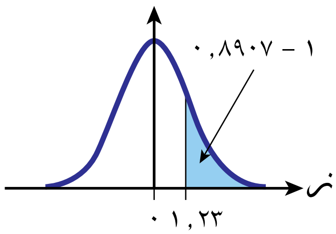


استخدم الجدول لإيجاد د (١,٢٣) = ٠,٨٩٠٧

ل(ز ⩽ ١,٢٣) = د (١,٢٣)

= ٠,٨٩٠٧

ب



ل(ز > ١,٢٣) = ١ − ل(ز ⩽ ١,٢٣)

= ١ − د (١,٢٣)

= ١ − ٠,٨٩٠٧

= ٠,١٠٩٣

مثــال ٥

لديك ز ~ ط (٠، ١) أوجد:

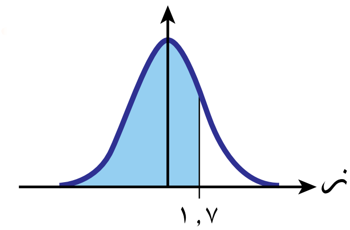
أ ل(ز ⩽ ١,٧)

ب ل(ز < ٠,٤)

ج ل(٠,٤ < ز ⩽ ١,٧)

الحــلّ:

أ

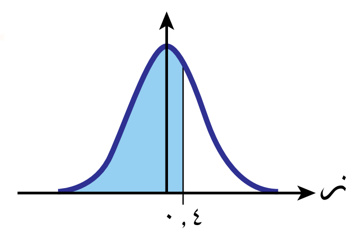


استخدم الجدول لإيجاد د (١,٧)

ل(ز ≤ ١,٧) = د (١,٧)

= ٠,٩٥٥٤

ب

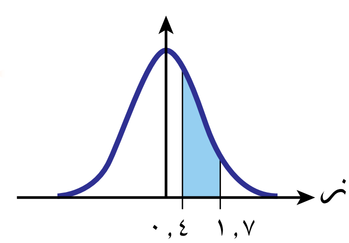


استخدم الجدول لإيجاد د (٠,٤)

ل(ز < ٠,٤) = د (٠,٤)

= ٠,٦٥٥٤

ج



يعطى الاحتمال المطلوب من خلال الفرق بين المساحة إلى يسار ز = ١,٧ والمساحة إلى يسار ز = ٠,٤

ل(٠,٤ < ز ≤ ١,٧) = د (١,٧) − د (٠,٤)

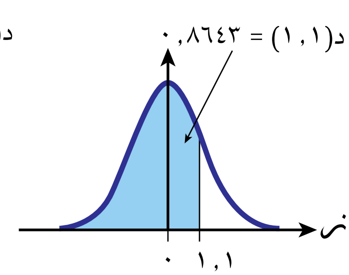
= ٠,٩٥٥٤ − ٠,٦٥٥٤

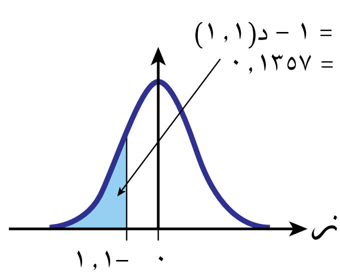
= ٠,٣

لا يبيّن جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري قيم ز < ٠ إلا أنه يمكن استخدام خصائص التناظر للمنحنى الطبيعي، وحقيقة أن المساحة تحت المنحنى تساوي ١، وذلك لإيجاد قيم د (ز) عندما تكون قيمة ز سالبة.

يبيّن التمثيل البياني أدناه الحالتَين حين ز = ١,١ ، ز = −١,١

تعطي قيمة د (ز) في الجدول المساحة الأكبر بين المساحتَين تحت المنحنيَين.





يبيّن التمثيلان أن:

ل(ز ≤ ١,١) = ٠,٨٦٤٣

ل(ز ≤ −١,١) = ١ − ٠,٨٦٤٣ = ٠,١٣٥٧

نستخدم هذه المعلومة وتناظر المنحنى لإيجاد:

ل(ز > ١,١) = ١ − ٠,٨٦٤٣ = ٠,١٣٥٧

ل(ز > −١,١) = ١ − ٠,١٣٥٧ = ٠,٨٦٤٣

نتيجة ٤

إذا كان (ز) توزيعًا طبيعيًا وسطه (٠) وتباينه (١)، يعطي الجدول قيمة د (ز) لكل قيم ز حيث د (ز) = ل (ز)

للقيم السالبة للمتغير (ز)، استخدم د (−ز) = ١ − د (ز)

مُساعَدة

ل(ز > −أ) = ل(ز < أ)،

ل(ز < −أ) = ل(ز > أ).

مثــال ٦

لديك ز ~ ط (٠، ١) أوجد:

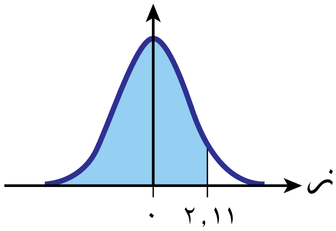
أ ل(ز ≤ ٢,١١)

ب ل(ز > −١)

ج ل(−١ < ز ≤ ٢,١١)

الحــلّ:

أ

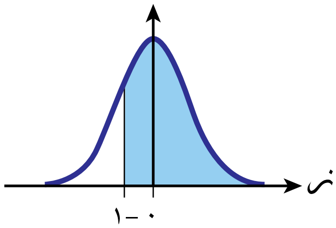


استخدم الجدول لإيجاد د (٢,١١)

ل(ز ≤ ٢,١١) = د (٢,١١)

= ٠,٩٨٢٦

ب



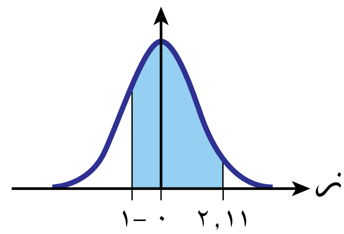
باستخدام التناظر للمنحنى الطبيعي،
ل(ز > −١) = ل(ز < ١)

ل(ز > −١) = ل(ز < ١)

= د (١)

= ٠,٨٤١٣

ج



يعطى الاحتمال المطلوب من خلال الفرق بين المساحة إلى يسار ز = ٢,١١ والمساحة إلى يسار ز = -١

ل(-١ < ز ≤ ٢,١١) = ل(ز ≤ ٢,١١) - ل(ز < -١)

= ٠,٩٨٢٦ - (١ - ٠,٨٤١٣)

= ٠,٩٨٢٦ + ٠,٨٤١٣ - ١

= ٠,٨٢٣٩

تم حتى الآن استخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد احتمالات قيم (ز).
يمكن استخدام الجدول بطريقة معكوسة لإيجاد قيمة (ز) عندما يكون الاحتمال معطى.

مثـــال ٧

أوجد قيمة $ز_{١}$، إذا كان ل(ز ≤ $ز_{١}$) = ٠,٩١٦٢

الحـــلّ:

الاحتمال المعطى > ٠,٥، إذن $ز_{١}$ > ٠

فيما يلي الجزء من الجدول حيث يمكن إيجاد الاحتمال المناسب:

الرقمان الأول والثاني

الرقم الثالث

ز	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩

- نحدد القيمة ٠,٩١٦٢ في القسم الرئيسي من الجدول.
- القيمة ٠,٩١٦٢ تمثّل التقاطع بين صف القيمة ١,٣ وعمود القيمة ٨
- يعني هذا أن الرقمين الأوّلَين من $ز_{١}$ هما ١,٣ وأن الرقم الثالث منه هو ٨

إذًا، د(١,٣٨) = ٠,٩١٦٢ وعليه يكون $ز_{١}$ = ١,٣٨

مثـــال ٨

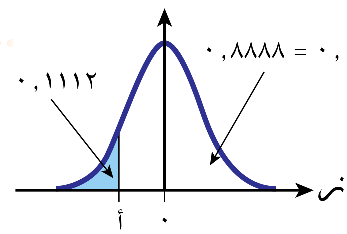
لديك ز ~ ط (٠، ١)، أوجد قيمة أ، إذا كان

أ ل(ز ≥ أ) = ٠,١١١٢

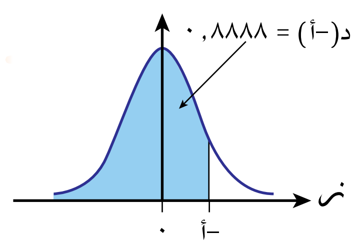
ب ل(ز > أ) = ٠,٠٦٤٣

الحـــلّ:

أ



الاحتمال المعطى أقل من ٠,٥، إذاً أ < ٠ (قيمة أ سالبة).



يمكننا عكس المنحنى الطبيعي بحيث تظهر −أ إلى يمين الصفر.

ل(ز < −أ) = ٠,٨٨٨٨ .... استخدم الجدول لإيجاد قيمة −أ.

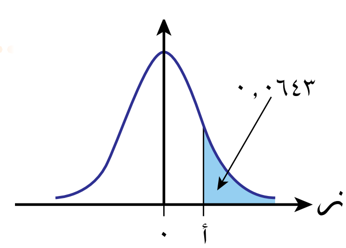
د(−أ) = ٠,٨٨٨٨

−أ = د$^{-1}$(٠,٨٨٨٨)

−أ = ١,٢٢

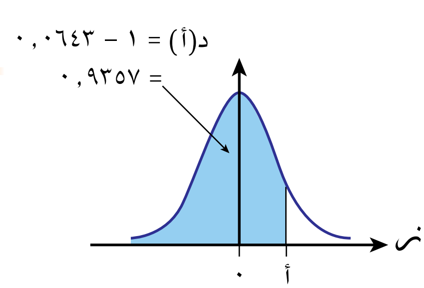
أ = −١,٢٢

ب



الاحتمال المعطى أقل من ٠,٥، إذاً أ > ٠

إذا كان ل(ز > أ) = ٠,٠٦٤٣، يكون ل(ز ≥ أ) = ١ − ٠,٠٦٤٣ = ٠,٩٣٥٧



استخدم الجدول لايجاد قيمة أ

د(أ) = ٠,٩٣٥٧

أ = د$^{-1}$(٠,٩٣٥٧)

= ١,٥٢

مُساعَدة

في المثال ٧، وجدنا أن د(١,٣٨) = ٠,٩١٦٢ باستخدام رمز معكوس الدالة، يمكننا كتابة د$^{-1}$(٠,٩١٦٢) = ١,٣٨

مثــال ٩

أطوال الأشجار (بالأمتار) التي تنمو على ضفة نهر معيّن ذات توزيع طبيعي وسطه (و) وانحرافه المعياري (ع)

أ أوجد احتمال أن يكون طول شجرة:

١) أقل من (و + ع) متر

٢) أكبر من (و + ٠,٨ ع) متر

ب ما نسبة الأشجار التي أطوالها بين (و + ٠,٥ع) ، (و + ١,٥ع) متر؟

الحــلّ:

أ ١) ل(الطول < و + ع) = ل(ز < ١)

= د (١)

= ٠,٨٤١٣

يشير هذا إلى الأطوال التي هي أقل من ١ انحراف معياري عن الوسط.

٢) ل(الطول > و + ٠,٨ ع) = ل(ز > ٠,٨)

= ١ − د (٠,٨)

= ١ − ٠,٧٨٨١

= ٠,٢١١٩

يشير هذا إلى الأطوال التي هي أكبر من ٠,٨ انحراف معياري فوق الوسط.

ب ل(و + ٠,٥ع < الطول < و + ١,٥ع)

= ل(٠,٥ < ز < ١,٥)

= د(١,٥) − د(٠,٥)

= ٠,٩٣٣٢ − ٠,٦٩١٥

= ٠,٢٤١٧

يشير هذا إلى الأطوال التي بين ٠,٥ و ١,٥ انحراف معياري فوق الوسط.

نسبة الاشجار التي تقع أطوالها في المجال المعطى هي:

٠,٢٤١٧ × ١٠٠٪ = ٢٤,١٧٪

بضرب الاحتمال بـ ١٠٠٪ لتحويل الإجابة إلى نسبة مئوية.

تمارين ٦-٢

١) استخدم جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد:

أ د(٠,٣٥)　　ب د(١,٤٧)　　ج د(٢,٠٣)

د د(٠,٨٢)　　هـ ١ − د(٢,٨٦)

٢) استخدم جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد ز، عندما:

أ د(ز) = ٠,٧٠٨٨　　ب د(ز) = ٠,٩٠١٥　　ج د(ز) = ٠,٩٦٢٥

د د(ز) = ٠,٥١٩٩　　هـ ١ − د(ز) = ٠,٠٧٦٤

٣) لديك ز ~ ط (٠، ١)؛ أوجد الاحتمالات الآتية:

أ ل(ز ≤ ١,٥٣)　　ب ل(ز ≤ ٠,٠٧)　　ج ل(ز ≤ ٢,٤٦)

د ل(ز > ٢,٠٠)　　هـ ل(ز > ١,٧٥)　　و ل(ز > −٠,٠١)

٤) المتغير العشوائي (ز) ذو توزيع طبيعي وسطه (٠) وتباينه (١) أوجد الاحتمالات الآتية:

أ ل(٠ < ز ≤ ٢,٥٠)　　ب ل(١,٠٠ < ز ≤ ١,٢٧)

ج ل(١,٦٤ < ز ≤ ٢,٣٢)　　د ل(١,٤٢ < ز ≤ ١,٦٤)

هـ ل(−١,٧٧ < ز ≤ ٠,٧٤)　　و ل(−١,٠٠ < ز ≤ −٠,٣١)

ز ل(−١ < ز ≤ ١)　　ح ل(−١,٥٦ < ز ≤ ١,٥٦)

٥) لديك المتغير ز ~ ط (٠، ١)؛ أوجد قيمة $ز_{١}$:

أ ل(ز ≤ $ز_{١}$) = ٠,٩٣٠٦　　ب ل(ز ≤ $ز_{١}$) = ٠,٦١٠٣

ج ل(ز ≤ $ز_{١}$) = ٠,٨٣٤٠　　د ل(ز > $ز_{١}$) = ٠,٠٢٩٤

هـ ل(ز > $ز_{١}$) = ٠,٧٥١٧　　و ل(ز > $ز_{١}$) = ٠,٩٠١٥

٦) أوجد قيمة $ز_{١}$ في كل من الآتي، حيث (ز) توزيع طبيعي وسطه و = ٠ وتباينه $ع^{٢}$(ز) = ١

أ ل($ز_{١}$ < ز ≤ ١,٧٣) = ٠,٤٥٨٢　　ب ل(١,٨٢ < ز ≤ $ز_{١}$) = ٠,٠١٠٥

٧) الأوقات اللازمة لرحلة جوية مباشرة من مسقط إلى مومباي (بالدقائق) ذات توزيع طبيعي وسطه (و) وانحرافه المعياري (ع).

أ أوجد احتمال أن تستغرق رحلة أقل من (و + ٠,٢٣ع) دقيقة.

ب ما نسبة الرحلات التي تستغرق أكثر من (و + ٠,٣٢ع) دقيقة؟

٨) يتبع عدد اللترات المنتجة من الحليب في مزرعة ما توزيعًا طبيعيًا وسطه (و) وانحرافه المعياري (ع).

أ أوجد احتمال أن تنتج المزرعة أقل من (و + ١,٩٦ع) لتر حليب في يوم معيّن.

ب ما نسبة الأيام التي تنتج فيها المزرعة أكثر من (و + ٠,٨٨ع) لتر حليب؟

٦-٣ تحويل التوزيع الطبيعي إلى الصيغة المعيارية لإيجاد الاحتمالات

يمكن استخدام المنحنى الطبيعي لتمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل ذي توزيع طبيعي. يتمركز هذا المنحنى حول الوسط (و)؛ والمساحة تحت المنحنى تساوي ١، وارتفاع قمة المنحنى يحدده الانحراف المعياري (ع).

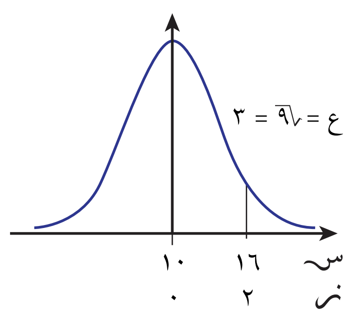
مُساعَدة

دالة التوزيع الطبيعي معرّفة لكل قيم (س) من $-\infty$ إلى $+\infty$، لذا فإن كل المنحنيات التي تنتج من الدالة لها فعليًا العرض نفسه.

تعلمت بالفعل طريقة لإيجاد الاحتمالات التي تتعلق بالمتغير الطبيعي المعياري ز ~ ط (٠، ١) باستخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي. ويمكن استخدام الجدول نفسه لإيجاد احتمالات قيم أي متغير عشوائي متصل ذي توزيع طبيعي، مهما كانت قيم و، $ع^٢$

عند استخدام الجدول لإيجاد احتمالات س ~ ط (و، $ع^٢$) مثل ل (س $\leqslant$ $س_١$) أو ل (س $<$ $س_١$) أو ل ($س_١$ $<$ س $\leqslant$ $س_٢$) نحتاج فقط إلى معرفة عدد الانحرافات المعيارية فوق أو تحت الوسط لقيم $س_١$ و/أو $س_٢$

وللقيام بهذا الأمر، توجد طريقة مباشرة، تسمى **التحويل إلى الصيغة المعيارية** **standardising** أو **coding**.

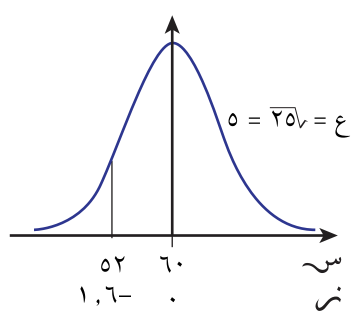


ليكن س = ١٦ حيث س ~ ط (١٠، ٩): $\frac{١٦ - ١٠}{\sqrt{٩}} = \frac{٦}{٣} = +٢$،

إذًا س = ١٦ هي فوق الوسط بمقدار ٢ انحراف معياري.

القيمة المعيارية للمتغير س = ١٦ هي ز = ٢

الاحتمالات المتعلقة بالقيمة س = ١٦ متطابقة مع احتمالات ز = ٢



ليكن ص = ٥٢ حيث ص ~ ط (٦٠، ٢٥):

$\frac{٥٢ - ٦٠}{\sqrt{٢٥}} = \frac{-٨}{٥} = -١,٦$، إذًا ص = ٥٢ هي تحت الوسط بمقدار ١,٦ انحراف معياري.

القيمة المعيارية للمتغير ص = ٥٢ هي ز = -١,٦

الاحتمالات المتعلقة بالقيمة ص = ٥٢ متطابقة مع احتمالات ز = -١,٦

مُساعَدة

رأينا في الجدول الذي يظهر خصائص واحتمالات التوزيع الطبيعي (قبل استكشف ٢) أن الاحتمالات يحددها عدد الانحرافات المعيارية عن الوسط. تنطبق الخصائص في الجدول على كل المتغيرات العشوائية المتصلة ذات التوزيع الطبيعي.

القيمة المحولة إلى الصيغة المعيارية تسمى **قيمة معيارية** **z-score**.

نتيجة ٥

إذا كان س ~ ط (و، $ع^٢$) ، فإن للمتغير ز = $\frac{س - و}{ع}$ توزيعًا طبيعيًا معياريًا (و = ٠، $ع^٢$ = ١)

تعطي القيمة المعيارية $ز_١$ = $\frac{س_١ - و}{ع}$ عدد الانحرافات المعيارية لقيمة $س_١$ عن الوسط.

$$ل\,(س = س_١) = ل\left(ز = \frac{س_١ - و}{ع}\right)$$

مثــال ١٠

لديك س ~ ط (١١، ٢٥) أوجد ل(س ⩽ ١٨).

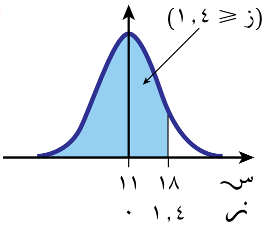
الحــلّ:

و = ١١ ، ع^{٢} = ٢٥ ، س$_{١}$ = ١٨

ز = $\frac{١٨ - ١١}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{٧}{٥}$ = ١,٤

القيمة المعيارية للقيمة س = ١٨ هي ز = ١,٤ أي أن س = ١٨ فوق الوسط ١١ بمقدار ١,٤ انحرافات معيارية.

ل(س ⩽ ١٨) = ل(ز ⩽ ١,٤)



ارسم منحنى طبيعيًا وحدد المساحة المناسبة والاحتمال وقيم (س) ، (ز).
هنا: س = ١١ تتعلق بقيمة ز = ٠،
س = ١٨ تتعلق بقيمة ز = ١,٤

ل(س ⩽ ١٨) = ل(ز ⩽ ١,٤)

= د(١,٤)

= ٠,٩١٩٢

مُساعَدة

تحقق من أن
و+١,٤ع=١١+١,٤ × $\sqrt{٢٥}$
= ١٨

مثــال ١١

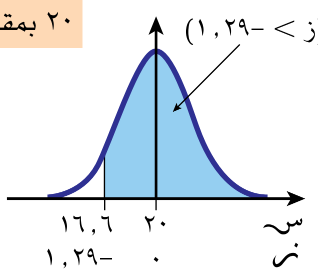
لديك س ~ ط (٢٠، ٧) أوجد ل(س > ١٦,٦).

الحــلّ:

ز = $\frac{١٦,٦ - ٢٠}{\sqrt{٧}}$ = −١,٢٩

القيمة المعيارية للقيمة س = ١٦,٦ هي ز = −١,٢٩ إذًا س = ١٦,٦ هي تحت الوسط ٢٠ بمقدار ١,٢٩ انحرافات معيارية.

ل(س > ١٦,٦) = ل(ز > −١,٢٩)



ل(س > ١٦,٦) = ل(ز > −١,٢٩)

المنحنى متناظر حول المستقيم ز = ٠، إذًا ل(ز > −١,٢٩) = ل(ز ⩽ ١,٢٩)

= ل(ز ⩽ ١,٢٩)

= د(١,٢٩)

= ٠,٩٠١٥

مُساعَدة

احسب دائمًا قيمة ز لثلاثة أرقام معنوية وفقًا للقيم الواردة في الجدول.

مثـــال ١٢

لديك س ~ ط (٥، ٥) أوجد ل(٢ < س ≥ ٩).

الحــلّ:

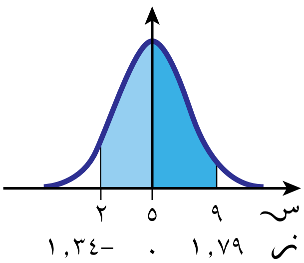
عند س = ٢، ز = $\frac{٢ - ٥}{\sqrt{٥}}$ = −١,٣٤

س = ٢ هي تحت الوسط بمقدار ١,٣٤ انحرافات معيارية.

عند س = ٩، ز = $\frac{٩ - ٥}{\sqrt{٥}}$ = ١,٧٩

س = ٩ هي فوق الوسط بمقدار ١,٧٩ انحرافات معيارية.

الطريقة الأولى



المساحة المطلوبة مبيّنة في جزأَين: جزء إلى كل جهة من ز = ٠

إلى يمين ز = ٠:

المساحة المظللة = د(١,٧٩) − د(٠)

= ٠,٩٦٣٣ − ٠,٥

= ٠,٤٦٣٣

استخدم ل(ز < ٠) = ل(ز ≥ ٠) = د(٠) = ٠,٥

إلى يسار ز = ٠:

المساحة المظللة = د(١,٣٤) − د(٠)

= ٠,٩٠٩٩ − ٠,٥

= ٠,٤٠٩٩

ل(٢ < س ≥ ٩) = ٠,٤٦٣٣ + ٠,٤٠٩٩

= ٠,٨٧٣٢

اجمع المساحتَين معًا للحصول على الإجابة.

الطريقة الثانية

ل(٢ < س ≥ ٩) = د(١,٧٩) − [١ − د(١,٣٤)]

= ٠,٩٦٣٣ − [١ − ٠,٩٠٩٩]

= ٠,٩٦٣٣ + ٠,٩٠٩٩ − ١

= ٠,٨٧٣٢

بطريقة بديلة يمكننا إيجاد الفرق بين المساحة إلى يسار ز = ١,٧٩ والمساحة إلى يسار ز = −١,٣٤

مثال ١٣

لديك س ~ ط(٥٠، ١٠٠).

أوجد:

أ $ل(٤٥,٦ < س \leqslant ٥٤,٤)$ من خلال: $٢د(٠,٤٤) - ١$

ب $ل(٤٤ < س \leqslant ٥٦)$.

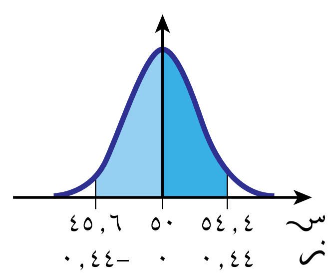
الحـلّ:

أ نوجد القيمة المعيارية للقيمتَين س = ٤٥,٦، س = ٥٤,٤

بالنسبة إلى قيمة س = ٤٥,٦، $ز = \frac{٤٥,٦ - ٥٠}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{-٤,٤}{١٠} = -٠,٤٤$

بالنسبة إلى قيمة س = ٥٤,٤، $ز = \frac{٥٤,٤ - ٥٠}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٤,٤}{١٠} = ٠,٤٤$

س = ٤٥,٦، س = ٥٤,٤ على مسافة واحدة من الوسط (±٠,٤٤ انحرافات معيارية).



المساحة المطلوبة متناظرة حول ز = ٠، إذًا يمكننا الحل من خلال ضرب المساحة إلى يمين ز = ٠ × ٢

$ل(٤٥,٦ < س \leqslant ٥٤,٤)$ = المساحة المظللة الكلية

$= ل(-٠,٤٤ < ز \leqslant ٠,٤٤)$

$= ٢د(٠,٤٤) - ١$

$= ٢ \times ٠,٦٧ - ١$

$= ٠,٣٤$

ب $ل(٤٤ < س \leqslant ٥٦)$ = المساحة المظللة الكلية

القيمتان المعياريتان لـ ٤٤ ، ٥٦ هما $\frac{٤٤ - ٥٠}{\sqrt{١٠٠}} = -٠,٦$، $\frac{٥٦ - ٥٠}{\sqrt{١٠٠}} = ٠,٦$

س = ٤٤ ، س = ٥٦ على مسافة واحدة من الوسط (±٠,٦ انحرافات معيارية).

$= ل(-٠,٦ < ز \leqslant ٠,٦)$

$= ٢د(٠,٦) - ١$

$= ٢ \times ٠,٧٢٥٧ - ١$

$= ٠,٤٥١٤$

تمارين ٦-٣

١) احسب القيمة المعيارية لكل من الآتي:

أ س = ١٧ عندما س ~ ط (١٥، ٤)

ب س = ٣٨ عندما س ~ ط (٣٠، ١٦)

ج س = ٤٨ عندما س ~ ط (٤٢، ١٢)

د س = ٣٦,٨ عندما س ~ ط (٣٢,٤، ٢٠)

هـ س = ٧٢,٥ عندما س ~ ط (٨٣، ٤٩)

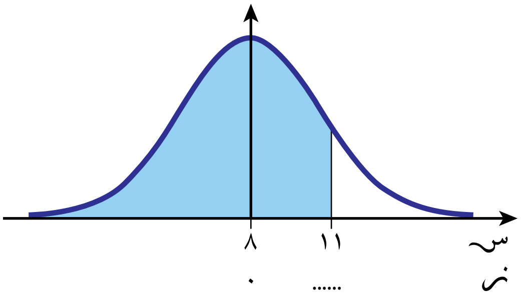
و س = ٢٢ عندما س ~ ط (٢٨، ١١)

ز س = ١٣٢ عندما س ~ ط (١٤٦، ١٠٩)

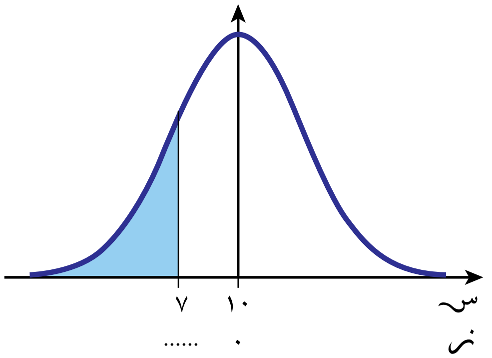
ح س = ٠ عندما س ~ ط (١٥، ٣٠)

٢) استخدم التمثيلات المعطاة لإيجاد الاحتمالات في كل من الآتي:

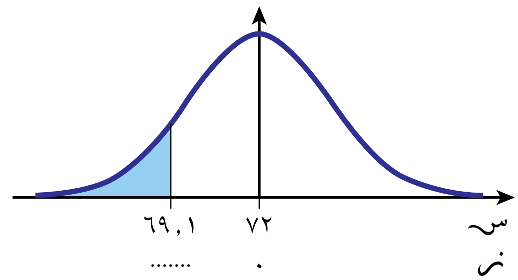
أ أوجد ل(س ⩽ ١١) حيث س ~ ط(٨، ٢٥)



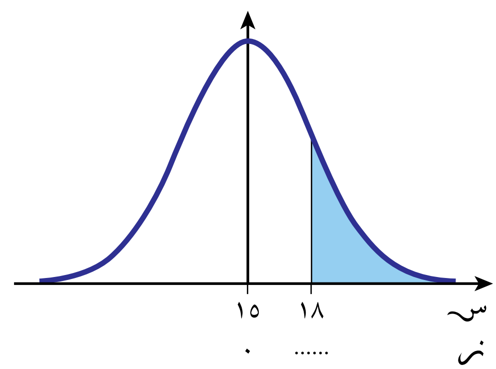
ب أوجد ل(س < ٧) حيث س ~ ط(١٠، ٢)



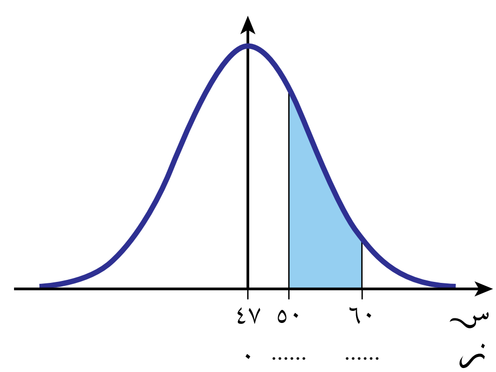
ج أوجد ل(س ⩽ ٦٩,١) حيث س ~ ط(٧٢، ١١)



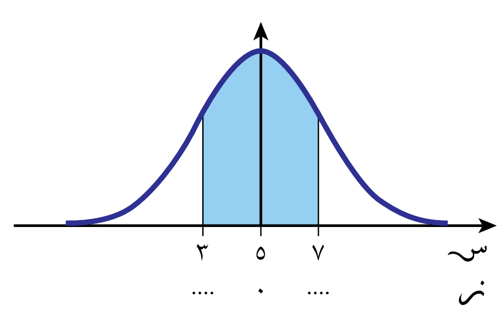
د أوجد ل(س > ١٨) حيث س ~ ط(١٥، ٦)



هـ أوجد ل(٥٠ < س < ٦٠) حيث س ~ ط(٤٧، ٩٠)



و أوجد ل(٣ < س ⩽ ٧) حيث س ~ ط (٥، ٥)



٣) احسب الاحتمالات الآتية.

أ لديك س ~ ط (٦,٢، ٦,٢٥)؛ أوجد:

١) ل(س ⩽ ٩,٧) ٢) ل(س > ٩,٧)

ب لديك س ~ ط (٣، ٤٩)؛ أوجد:

١) ل(س ⩽ ٥) ٢) ل(س > ٥)

ج لديك س ~ ط (٣٧، ٤)؛ أوجد:

١) ل(س > ٣٣,٤) ٢) ل(س ⩽ ٣٣,٤)

د لديك س ~ ط (١١، ٢٥)؛ أوجد ل(١١ < س ⩽ ٢١)

هـ لديك س ~ ط (٣، ٧)؛ أوجد ل(٢ < س ⩽ ٧)

و لديك س ~ ط (١٠، ٤)؛ أوجد ل(٦ < س ⩽ ٩)

مُساعَدة

من المستحسن أن ترسم تمثيلًا بيانيًا توضيحيًا لمساعدتك في حل جزئيات السؤال ٣

٤) (س) متغير ذو توزيع طبيعي وسطه ٤ وتباينه ٦؛ أوجد احتمال س < ٠

٥) تتبع أوقات الانتظار في صيدلية لتسلّم الأدوية توزيعًا طبيعيًا وسطه ١٥ دقيقة وانحرافه المعياري ٢,٨ دقائق؛ أوجد احتمال أن يكون وقت الانتظار:

أ أقل من ٢٠ دقيقة.

ب أكثر من ١٧ دقيقة.

ج بين ١٠ دقائق و ١٨ دقيقة.

٦-٤ تحويل التوزيع الطبيعي إلى الصيغة المعيارية لإيجاد و، ع، س

في الدرس السابق، تم تحويل قيم متغير عشوائي متصل ذي توزيع طبيعي إلى الصيغة المعيارية، واستخدمت القيم المعيارية الناتجة لإيجاد الاحتمالات في الجدول.

كان بالإمكان القيام بهذا الأمر لأن المعطى كان و، ع، بالإضافة إلى قيمة س لإيجاد الاحتمال.

بطريقة مماثلة، بالإمكان استخدام الجدول لإيجاد قيم و، ع، س، عندما يكون المعطى قيمة احتمال ومعلومات أخرى كافية.

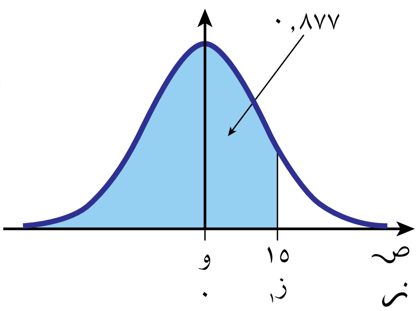
سيكون من الضروري في القسم الأكبر من الأمثلة في هذا الدرس استخدام الجزء الأساسي من الجدول بطريقة معكوسة لإيجاد قيم (ز).

إذا كان د (ز$_1$) = ك، يستخدم عند إيجاد قيمة ز$_1$ الرمز ز$_1$ = د$^{-1}$(ك).

مثال ١٤

لديك ص ~ ط(و، ١,٥)، ل(ص > ١٥) = ٠,٨٧٧ أوجد قيمة و

الحلّ:



القيمة المعيارية لـ ص = ١٥ هي
ز$_1$ = $\frac{١٥ - و}{\sqrt{١,٥}}$، د(ز$_1$) = ٠,٨٧٧

ز$_1$ = $\frac{١٥ - و}{\sqrt{١,٥}}$، ز$_1$ = د$^{-1}$(٠,٨٧٧)

$\frac{١٥ - و}{\sqrt{١,٥}}$ = د$^{-1}$(٠,٨٧٧)

توجد صيغتان لقيمة ز$_1$ يجب أن تكونا متساويتَين.

$\frac{١٥ - و}{\sqrt{١,٥}}$ = ١,١٦

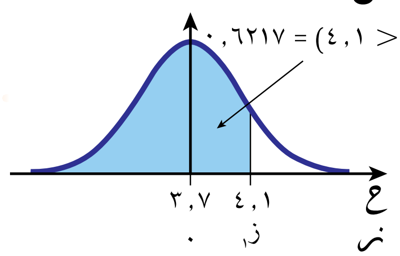
١٥ − و = ١,١٦ × $\sqrt{١,٥}$

و = ١٥ − ١,١٦ × $\sqrt{١,٥}$ = ١٣,٥٨

مثـــال ١٥

يمكن نمذجة أطوال الأشجار (بالأمتار) في منطقة معيّنة باستخدام المتغير العشوائي المتصل ح ~ ط (٣,٧، $ع^٢$). احتمال أن يكون طول شجرة اختيرت عشوائيًا أقل من ٤,١ متر يساوي ٠,٦٢١٧ أوجد الانحراف المعياري للأطوال.

الحـــلّ:



يبيّن التمثيل البياني
ل(ح < ٤,١) = ل(ز < $ز_١$) = ٠,٦٢١٧

القيمة المعيارية لـ ح = ٤,١ هي

$$ز_١ = \frac{٤,١ - ٣,٧}{ع} = \frac{٠,٤}{ع}$$

$$د\left(\frac{٠,٤}{ع}\right) = ٠,٦٢١٧$$

إذا كان د($ز_١$) = ٠,٦٢١٧، فإن $ز_١$ = $د^{-١}$(٠,٦٢١٧)

$$\frac{٠,٤}{ع} = د^{-١}(٠,٦٢١٧)$$

$$\frac{٠,٤}{ع} = ٠,٣١$$

$$ع = \frac{٠,٤}{٠,٣١}$$

$$= ١,٢٩$$

الانحراف المعياري هو ١,٢٩ متر.

مثـــال ١٦

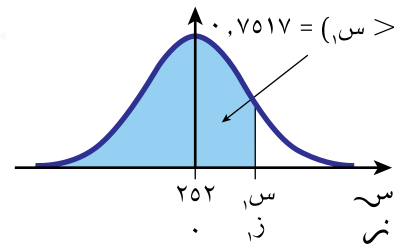
يمثل س ~ ط (٢٥٢، ٤) كمية الحليب (بالملليلتر) الموجودة في عبوات سعة كل منها ٢٥٠ مل.

احتمال أن يكون في عبوة حليب اختيرت عشوائيًا أقل من $س_١$ مل من الحليب يساوي ٠,٧٥١٧

أوجد قيمة $س_١$

الحــلّ:

ل(س < $س_1$) = ٠,٧٥١٧



يبيّن التمثيل البياني
ل(س < $س_1$) = ل(ز < $ز_1$) = ٠,٧٥١٧

القيمة المعيارية لـ $س_1$ هي

$$ز_1 = \frac{س_1 - ٢٥٢}{\sqrt{٤}} = \frac{س_1 - ٢٥٢}{٢}$$

أوجد صيغة لـ $ز_1$ بدلالة $س_1$

$$د\left(\frac{س_1 - ٢٥٢}{٢}\right) = ٠,٧٥١٧$$

$$\frac{س_1 - ٢٥٢}{٢} = د^{-1}(٠,٧٥١٧)$$

$$\frac{س_1 - ٢٥٢}{٢} = ٠,٦٨$$

$$س_1 = ٢ \times ٠,٦٨ + ٢٥٢ = ٢٥٣,٣٦$$

باستخدام الجدول بطريقة معكوسة، إذا كان د($ز_1$) = ٠,٧٥١٧
فإن $ز_1$ = $د^{-1}$(٠,٧٥١٧)

١٠١

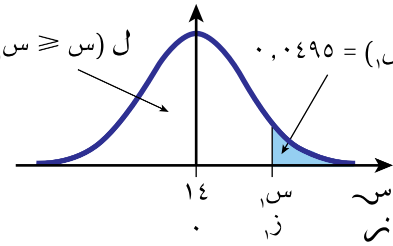
مثــال ١٧

لديك س ~ ط (١٤، ١٣)، ل(س > $س_1$) = ٠,٠٤٩٥ أوجد قيمة $س_1$ مقربة إلى أقرب منزلة عشرية.

الحــلّ:

ل(س > $س_1$) = ٠,٠٤٩٥

ل (س ≤ $س_1$) = ١ − ٠,٠٤٩٥



ل(س > $س_1$) = ل(ز > $ز_1$) = ٠,٠٤٩٥
∴ ل (س ≤ $س_1$) = ل(ز ≤ $ز_1$)
= ١ − ٠,٠٤٩٥
= ٠,٩٥٠٥

القيمة المعيارية لـ $س_1$ هي $ز_1 = \frac{س_1 - ١٤}{\sqrt{١٣}}$

$$د\left(\frac{س_1 - ١٤}{\sqrt{١٣}}\right) = ٠,٩٥٠٥$$

$$\frac{س_1 - ١٤}{\sqrt{١٣}} = د^{-1}(٠,٩٥٠٥)$$

$$= ١,٦٥$$

$$س_1 - ١٤ = ١,٦٥ \times \sqrt{١٣}$$

$$س_1 = ١٤ + ١,٦٥ \times \sqrt{١٣}$$

$$= ١٩,٩$$

تمارين ٦-٤

١) أوجد قيمة كل من الآتي مقربًا الإجابة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

أ أ، س ~ ط (٣٠، ١٦)، ل(س $\leqslant$ أ) = ٠,٨٩٤٤

ب ب، س ~ ط (١٢، ٤)، ل(س $\geqslant$ ب) = ٠,٩٥٩٩

ج ج، س ~ ط (١٧، ٢٥)، ل(س > ج) = ٠,٠٩٥١

د ي، س ~ ط (١٥، ٨)، ل(س < ي) = ٠,٣٥٢

هـ هـ، س ~ ط (١، ٢)، ل(س < هـ) = ٠,١٣٣٥

٢) لديك س ~ ط (١٠، ع^{٢})، ل (س < ١٤,٧) = ٠,٩٦٠٨؛ أوجد قيمة ع، مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٣) لديك ص ~ ط (و، ١٣)، ل (ص $\geqslant$ ١٥) = ٠,٧٤٥٤؛ أوجد قيمة و، مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- نقول عن متغير إنه متغير عشوائي متصل إذا أمكن أن يتخذ عددًا غير قابل للعد من القيم في فترة ما، وإذا كانت هذه القيم نواتج عددية لحوادث أو ظواهر عشوائية.
- للمتغير الطبيعي المعياري (ز) وسط يساوي (٠) وتباين يساوي (١)
  يرمز إلى هذا المتغير بالرمز ز ~ ط(٠، ١).
- إذا كان (ز) توزيعًا طبيعيًا وسطه (٠) وتباينه (١)، يعطي الجدول قيمة د (ز) لكل قيم ز حيث د (ز) = ل(ز)
  بالنسبة إلى القيم السالبة للمتغير (ز)، استخدم د (−ز) = ١ − د (ز)
- يعرّف س ~ ط(و، $ع^٢$) بالمتغير العشوائي المتصل ذي التوزيع الطبيعي (س).
  نقرأ هذا على الشكل 'للمتغير (س) توزيع طبيعي وسطه و وتباينه $ع^٢$'.
- إذا كان س ~ ط(و، $ع^٢$)، فإن للمتغير ز = $\frac{س - و}{ع}$ توزيعًا طبيعيًا معياريًا حيث و = ٠، $ع^٢$ = ١
  تعطي القيمة المعيارية $ز_١$ = $\frac{س_١ - و}{ع}$ عدد الانحرافات المعيارية لقيمة $س_١$ عن الوسط.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) يتبع المتغير العشوائي المتصل توزيعًا طبيعيًا وسطه ٨ وانحرافه المعياري ع
لديك ل(س < ٥) = ٠,٩٧٧٢ أوجد

أ قيمة ع

ب ل(س < ٩,٥)

٢) لديك متغيران عشوائيان متصلان (س)، (ص)، حيث أن س ~ ط(١,٥ ، ٠,٢)، ص ~ ط(٢، ٠,٤)؛ ارسم في التمثيل البياني نفسه تمثيَلين يبيّنان المنحنيَين الطبيعيَّين اللذَين يمثلان (س)، (ص). ارسم خط التناظر لكل منحنى بشكل واضح.

٣) تجد محطة وقود أن مبيعاتها اليومية (باللترات) تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه ٤٥٢٠ وانحرافه المعياري ٥٦٠

أ أوجد عدد الأيام المتوقعة خلال العام (٣٦٥ أيام) حيث سيتخطى المبيع ٣٩٠٠ لترًا.

ب يمثل (س) المبيعات اليومية (بالليترات) في محطة وقود أخرى حيث يتبع (س) توزيعًا طبيعيًا وسطه (م) وانحرافه المعياري ٥٦٠ حيث ل(س < ٨٠٠٠) = ٠,١٢٩٢ أوجد قيمة م

٤) تتبع كتل نوع من أنواع البطيخ (بالكيلوغرامات) توزيعًا طبيعيًا وسطه (و)، وانحرافه المعياري ٠,٧٥ حيث إن ٣٥,٢٪ من حبّات البطيخ كتلتها أقل من ٣ كغم. أوجد:

أ القيمة الدقيقة لـ و

ب نسبة حبّات البطيخ التي تقل كتلتها عن ٣,٥ كغم.

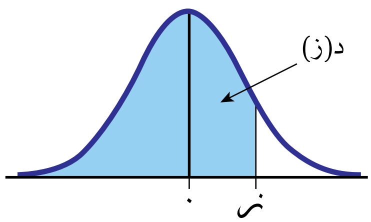
٥) تتبع كتل قطع من الصابون (س) غرام توزيعًا طبيعيًا وسطه ١٢٥ غرام وانحرافه المعياري ٤,٢ غرام.
أوجد احتمال أن تكون كتلة قطعة صابون اختيرت عشوائيًا أكثر من ١٢٨ غرام.

جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري

إذا كان للمتغير (ز) توزيع طبيعي وسطه ٠ وتباينه ١ يعطي الجدول قيمة د (ز) لكل قيم ز، حيث

$$د(ز_1) = ل(ز \leq ز_1)$$

استخدم د (−ز) = ١ − د (ز) لقيم ز السالبة.



ز	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٩	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨

مصطلحات علمية

ت

التحويل إلى الصيغة المعيارية Standardising: هو تحويل القيم في توزيع ما بشكل يصبح فيه الوسط ٠ والتباين ١ (ص ٩٢)

تكامل محدود Definite integral: هو تكامل نستطيع إيجاد قيمته بين قيمتَين للمتغير س (حد أدنى وحد أعلى). (ص ٦١)

تكامل غير محدود Indefinite integral: هو العملية العكسية للتفاضل ويتضمن ثابت تكامل اختياري. (ص ٥٠)

التكامل Integration: العملية العكسية للتفاضل. (ص ٤٥)

توزيع ذي الحدَّين Binomial distribution: توزيع احتمالي متقطع لتجربة عشوائية لها ناتجان فقط أحدهما نجاح التجربة والآخر فشلها، ويكون الشرط الأساسي أن احتمال النجاح لا يتأثر بتكرار التجربة. (ص ١٨)

التوزيع الطبيعي Normal distribution: هو دالة تمثل التوزيع الاحتمالي لمتغيرات عشوائية متصلة محددة على شكل منحنى متناظر له شكل الجرس. (ص ٦٩)

التوزيع الهندسي Geometric distribution: هو توزيع احتمالي متقطع لعدد تجارب لازمة للحصول على أول نجاح في عدد غير منتهٍ من التجارب المستقلة، حيث احتمال النجاح في كل التجارب هو ذاته. (ص ١٨)

ث

ثابت التكامل Constant of integration: حد غير متغير يضاف إلى الدالة الناتجة من التكامل. (ص ٤٦)

د

دالة كثافة الاحتمال Probability density function or PDF: هي منحنى يمثل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل. (ص ٧١)

ق

قيمة معيارية Z-score: عدد الانحرافات المعيارية لقيمة ما عن الوسط. (ص ٩٢)

القيمة المتوقعة: هي قيمة الوسط الحسابي للقيم في التوزيع الاحتمالي على المدى الطويل للمتغير العشوائي المتقطع. (ص ٣٨)

م

متغير طبيعي معياري Standard normal variable: هو المتغير (ز) ذو التوزيع الطبيعي، وسطه ٠ وتباينه ١ (ص ٨٠)

المتغير العشوائي المتصل Continuous random variable: هو متغير يمكن أن يتخذ عددًا غير قابل للعد من القيم في فترة ما، حيث تكون هذه القيم نواتج عددية لحوادث أو ظواهر عشوائية. (ص ٧٠)

المنحنى الطبيعي Normal curve: هو منحنى متناظر له شكل الجرس. (ص ٧١)

المنوال Mode: هو القيمة التي لها الاحتمال الأكبر في توزيع احتمالي؛ وهو القيمة التي لها التكرار الأعلى في توزيع تكراري، ويساوي ١ في التوزيع الهندسي. (ص ٣٧)

ن

نموذج رياضيّ Mathematical model: هو وصف لنظام باستخدام اللغة والمفاهيم الرياضية. (ص ١٨)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعـراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Getty Images, Dimitrios Pikros/EyeEm/Getty Images, Sir Francis Canker Photography/GettyImages

تم بحمد الله

رقم الإيداع : ٧١٤٢ / ٢٠٢٣ م

طبع بالمطابع العالمية - سلطنة عُمان - ت : ٢٤٨١٥٧٧١

الرياضيات الأساسية

الصف الثاني عشر

كتاب الطالب

يتضمن هذا الكتاب:

- جداول معرفة قبلية للتذكر والتحقق من التعلم السابق.
- مهارات رياضية جديدة مع أمثلة محلولة تتضمن تفسيرات واضحة.
- أسئلة تطبيقية لمساعدة الطلبة على تعزيز معرفتهم والتقدم من خلال المنهج الدراسي.
- أنشطة تشجع على مناقشة المفاهيم الرياضية.
- فرص لإجراء استقصاءات أعمق في كيفية تطبيق الرياضيات لحل مجموعة متنوعة من المسائل.
- قائمة تقييم ذاتي للتحقق من التعلم والفهم.
- أسئلة مراجعة نهاية الوحدة ليتحقق الطالب من إتقانه للمهارات التي درسها في الوحدة.

يشمل منهج الرياضيات الأساسية للصف الثاني عشر أيضًا:

- كتاب النشاط.
- دليل المعلّم.

ISBN 978-99992-1-033-1

9 789999 210331 >

www.moe.gov.om

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS