سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات الأساسية

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات الأساسية

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445هـ - 2023م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب - الرياضيات للصف الثاني عشر - من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Pure Mathematics 1 -
للمؤلف سو بمبرتن.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٦ / ٢٠٢٣ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه

السلطان قابوس بن سعيد

–طيّب اللّه ثراه–

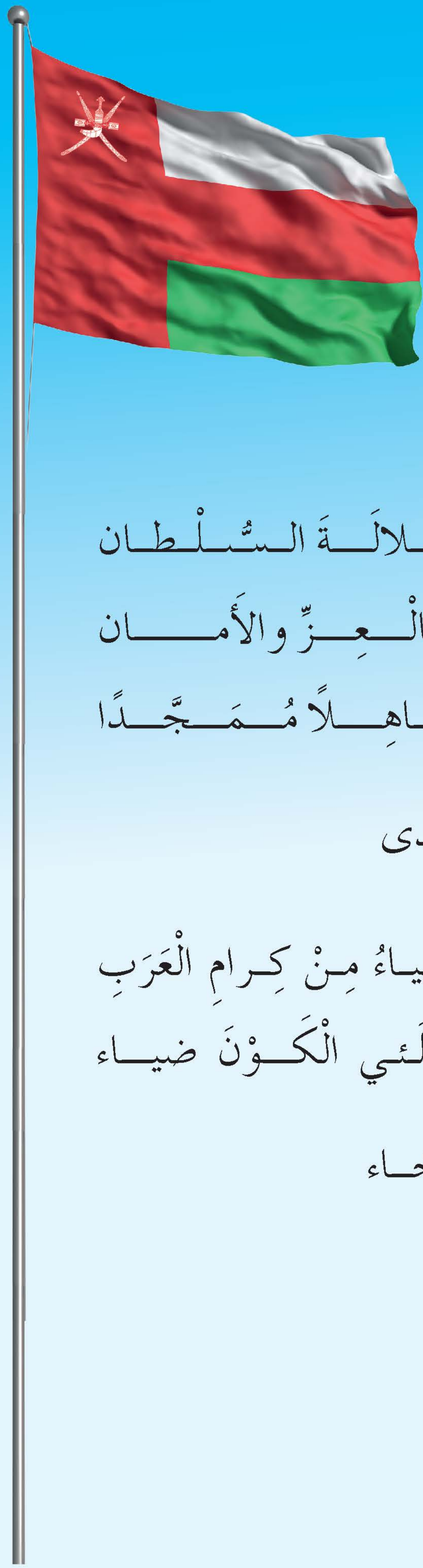
حضـرة صـاحـب الجـلالـة

السلطان هيثم بن طارق المعظم

–حفظه اللّه ورعاه–

سلطنة عُمان

(المحافظات والولايات)



النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لَنا جَلالَةَ السُّلْطان

وَالشَّعْبَ في الأَوْطان بِالْعِزِّ والأَمان

وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ

فارْتَقي هامَ السَّماء وَامْلَئي الْكَوْنَ ضِياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد :

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المقدمة

يُعدّ فهم علم الرياضيات والقدرة على العمل به مهارة حياتية مهمة، إضافة إلى أن كثيرًا من الوظائف تتطلب فهمًا رياضيًّا جيدًا. فكلنا نستخدم علم الرياضيات في أساسيات حياتنا اليومية، حيث إننا نستخدم معرفتنا الرياضية في تحديد الميزانية عندما نخطط لعطلة، وفي تصميم غرفتنا لمعرفة حاجتها إلى الطلاء لطلائها، أو حتى عند تعديل وصفة طبخ لتكفي عددًا أكبر من الأشخاص.

إضافة إلى هذه المهارات الحياتية، يساعد علم الرياضيات الفرد على تطوير منهجية خاصة للتفكير، بما في ذلك تطوير مهاراته في حل المسألة ومهاراته في أي عمل آخر يقوم به.

من المحتمل ألّا يكون لديك فهم واضح لماهية 'المسألة الرياضية'. إنها إشكالية جديرة بالاهتمام، وكثير من الناس حاروا في شأنها. وقد ترغب في أن يكون لك رأي خاص حول هذه الإشكالية، التي ستشهد على تطورها مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي عبارة عن سؤال رياضي لا تعرف إجابته مباشرة، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا لحلها، وقد تضطر إلى تجريب أساليب وأفكار متعددة، بمفردك أو بالتشارك مع الآخرين، حتى تتوصل إلى طريقة حلها.

سيساعدك هذا الكتاب في تعلم مبادئ الرياضيات اللازمة لإجراء الاختبارات وتطوير مهاراتك في حلّ المسألة وفي حل مسائل تتعلق بمواقف من الحياة اليومية.

وحيث إنك تعوّدت على التواصل مع الآخرين سواء مشافهة أو كتابة أو رسمًا، فإنك من خلال دراسة هذا الكتاب ستتمكن من التواصل باستخدام الرياضيات. وهذا يعني عرض الحلول بخطوات واضحة بحيث يتمكن أيّ شخص آخر من متابعة هذه الحلول، أو مناقشة هذه الأفكار الرياضية مع زملائه. إن استكشاف المسائل ومناقشتها بالشراكة مع الآخرين سيساعدك على تطوير إدراكك، كما أن مناقشة تسلسل أفكارك وتوضيحها سيساعدك ويساعد زملاءك على تطوير مهارة الإقناع بالحجة والبرهان.

التمثيل الرياضي يعبر عن التقاء الرياضيات بالعالم الحقيقي، حيث تسمح لنا هذه التمثيلات الرياضية بالتوقع وفهم أفضل للواقع. إن تمثيل ظواهر الحياة اليومية باستخدام الجبر يساعدنا على القيام بتوقعات وعلى مقارنتها بالنتائج الواقعية، ومن ثم تحسين هذه التمثيلات. فقد تتوقع مثلًا أنك ستنفق ٢٥ ريالًا عُمانيًا في يوم عطلتك، هذا يَعني أنه في زمن مقداره ن يومًا، ستنفق ٢٥ن ريالًا عُمانيًا. بعد أيام قليلة يمكنك أن تقارن ما أنفقته فعلًا بهذا العدد، وتعدّل تمثيلك بناء عليه. إن الأمثلة الشائعة الشائعة في التمثيل الرياضي تتضمن التوقعات الجوية، والتغير المناخي، والتغير الديموغرافي (السكاني)، والأسواق المالية وغيرها.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- نشاطات استكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بتوسيع أفكار زميله وإثرائها، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، ثم مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.

- الأسئلة المصنفة برمز النجمة '★'، '★' أو '★' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'التمثيل' أو 'حل المسائل'، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمارين، وقد تتضمن هذه التمارين العديد من التطبيقات الحياتية اليومية مثل التي يمكن أن تواجهها في حياتك الواقعية، وهنا تكمن ضرورة الرياضيات، حيث تحتاج إلى حل تمارين تتعلق بالأمور المالية والتجارية والهندسية وغيرها.
- التمارين المتنوعة الكثيرة التي تساعد الطلبة على تكرار الأهداف المعروضة في الدرس، وقد جاءت هذه التمارين في معظم الأحيان متدرجة من السهل إلى الصعب حيث يستطيع الطالب امتلاك المفهوم في بدايتها، ثم يقوم بالتحليلات الرياضية المطلوبة عند الانتهاء منها.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). فهي الطريقة التي يكتب بها علماء الرياضيات معلوماتهم. ستواجه تحديات (أسئلة غير مألوفة) فإذا كنت متعوّدًا على أن تكون نشطًا في الرياضيات، فستكون لديك فرصة أفضل لتصبح قادرًا على التعامل مع هذه التحديات بنجاح.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن تصفّحها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون بداية في هذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٢ ١ تفهم أن ميل المنحنى عند نقطة محددة هو ميل خط المماس عند تلك النقطة، وتستخدم الرموز د′(س)، د″(س)، $\frac{ء}{ءس}$(ص)، $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$، $\frac{ءص}{ءس}$، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ للمشتقتَين الأولى والثانية.

٢ ٢ تجد المشتقة الأولى لدوال في الصيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن) بالإضافة إلى مفاهيم الضرب بالثابت، وجمع الدوال وطرحها.

الأهداف التعليمية: تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر، الوحدة العاشرة والوحدة الثانية عشرة	تحسب احتمال حدث واحد وتكتبه على شكل كسر أو عدد عشري أو نسبة مئوية.	١) ما عدد المرات المتوقعة لظهور الرقم ٦ عند رمي حجر نرد منتظم ١٨٠ مرة؟
	تفهم وتستخدم حقيقة أن احتمال أي حدث محصور بين ٠ و ١ أي (٠ ≤ ل (س) ≤ ١).	٢) عند رمي حجرَي نرد منتظمين، ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين يساوي ١٢؟
	تفهم أن التكرار النسبي هو تقدير للاحتمال.	٣) يحتوي كيس على كرة واحدة حمراء وكرتَين زرقاوَين. يختار ولد بشكل عشوائي كرة من الكيس، ثم يقوم من غير أن يرجعها باختيار كرة أخرى من الكيس.
	تحسب احتمال أحداث	

المفردات

المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) Discrete random variable

التوزيع الاحتمالي probability distribution

القيمة المتوقعة expectation

التباين Variance

معرفة قبلية: تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

نتيجة ١

$\frac{ء}{ءس}$(س^{ن}) = ن س$^{ن-١}$

وهذا صحيح لأي قوة حقيقية ن

نتيجة: مربعات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

التفاضل (الاشتقاق)

المفردات الأساسية: هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

مثــال ١

تمّ رمي حجرَي نرد منتظمَين.

يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (و) عدد مرات ظهور الرقم ٥

يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (ت) مجموع العددَين الناتجَين.

أ اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (و).

ب استخدم مخطط احتمال ثم:

١) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (ت). ٢) أوجد قيمة (ت) الأكثر احتمالًا.

الحــلّ:

أ و ∈ {٠، ١، ٢} ريما لا نحصل على الرقم ٥ أو نحصل عليه مرة أو مرتين

أمثلة: تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن حلًّا تم تنفيذه بالكامل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

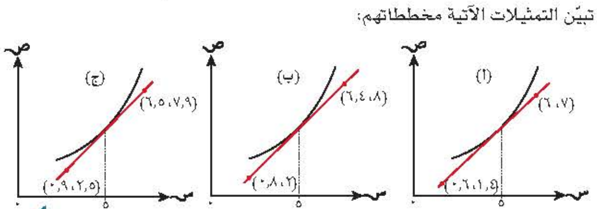
استكشف ١

تمّ إعطاء ثلاثة طلبة أ ، ب ، ج، مخططات للمنحنى نفسه.

طلب إليهم رسم خط مماس عند نقطة على المنحنى حيث س = ٥، ومن ثم حساب ميل المماس عند تلك النقطة.

للقيام بذلك، حدّد الطلبة إحداثيات نقطتَين على المماس الذي رسموه.

تبيّن التمثيلات الآتية مخططاتهم:



استكشف: تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم).

مُساعَدة

عند كتابة المعادلة
ص = س^2 في صيغة دالة،
نكتب د(س) = س^2

مساعدة: مربعات تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

ميل المنحنى

- تمثل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ميل المنحنى ص = د(س)

قوانين الاشتقاق

- قانون القوة: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{\text{ن}}) = \text{ن س}^{\text{ن}-1}$
- قانون الضرب في ثابت: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{ك د(س)}] = \text{ك}\,\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{د(س)}]$
- قانون الجمع: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{د(س)} + \text{ف(س)}] = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{د(س)}] + \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{ف(س)}]$
- قانون الطرح: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{د(س)} - \text{ف(س)}] = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{د(س)}] - \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{ف(س)}]$

لإيجاد الميل عند النقطة س = أ على منحنى ص = د(س) نوجد قيمة د′(أ)
أو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = أ

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

يوجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم تشفير هذه الأسئلة كالآتي:

- ★ تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ تركز هذه الأسئلة على التمثيل.
- يجب ألّا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- ★ هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (س).

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	١-ك	٢-٣ك	٣-٤ك	٤-٦ك

أ أوجد قيمة ك

ب أوجد القيمة الدقيقة لـ ت(س).

مُساعدة

في هذه الحالة، تعني كلمة "الدقيقة" إيجاد الناتج بدون تقريب في صورة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

٢) ستخضع سميرة لاختبارات في أربع مواد هذه السنة.
يبيّن الجدول الآتي توقعات معلماتها عن عدد الدرجات العليا (أ) التي ستحصل عليها.

أ	٠	١	٢	٣	٤
الاحتمال	٠٫٠٤	٠٫٠٨	٠٫٤	٠٫٣٦	٠٫١٢

أ أوجد القيمة المتوقعة لعدد الدرجات العليا (أ) التي ستحصل عليها سميرة.

ب أوجد قيمة ع^2(أ).

الوحدة الأولى
الأسس واللوغاريتمات الطبيعية
Exponentials and natural logarithms

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تفهم وتستخدم تعريف وقوانين وخصائص $هـ^{س}$، لط س وتحوّل بين الصيغتَين الأسّية واللوغاريتمية للأساس الطبيعي هـ

١-٢ تستخدم الحاسبة في إيجاد $هـ^{س}$، لط س

١-٣ تحل معادلات أسّية ولوغاريتمية باستخدام الأساس الطبيعي (فقط تلك التي يمكن تبسيطها إلى الصيغة الخطية).

١-٤ تفهم أن الدوال الأسّية والدوال اللوغاريتمية (لأي أساس) هي عكسية، وتفهم تمثيلهما البياني.

١-٥ تستخدم اللوغاريتم الطبيعي لتحويل دالة معطاة $ص = ك\, س^{ن}$، $ص = ك \times أ^{(ب\,س + جـ)}$ إلى الصيغة الخطية، وبالتالي إيجاد أعداد ثابتة مجهولة من خلال استخدام الميل و/أو المقطع الصادي.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع (الوحدة الخامسة عشرة).	تفهم وتحسب النمو الأسّي والاضمحلال الأسّي.	١) أ منزل قيمته الحالية ٤٠٠٠٠ ريال عماني. ومن المتوقع أن تزداد قيمته بنسبة ٥٪ سنويًا على مدى السنوات الأربع القادمة. ما هي قيمة هذا المنزل، لأقرب ١٠ ريالات عمانية، بعد ٤ سنوات؟ ب ارسم رسمًا بيانيًا يمثل قيمة المنزل خلال فترة ٤ سنوات.
الصف العاشر (الوحدة الثامنة)، الصف الحادي عشر (الوحدة الثانية)	تجد معكوس دالة بسيطة. تجد الدوال العكسية.	٢) إذا كان د (س) = ٢س − ٣، فأوجد د$^{-1}$(س)
الصف الحادي عشر (الوحدة السادسة)	تحوّل بين الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية.	٣) اكتب أ $٤^{٣}$ = ٦٤ في الصيغة اللوغاريتمية. ب لـو$_{٢}$ $\frac{١}{٣٢}$ = −٥ في الصيغة الأسّية.
الصف الحادي عشر (الوحدة السادسة)	تستخدم قوانين الأسس واللوغاريتمات.	٤) حل المعادلة $٣^{س-١}$ = ٥٤

المفردات

اللوغاريتمات الطبيعية
natural logarithms

الأساس الطبيعي هـ
natural exponentiale

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية
natural logarithmic function

الدالة الأسّية الطبيعية
natural exponential function

الصيغة الأسّية للأساس هـ
exponential form of base e

الصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ
logarithmic form of base e

المعادلة الأسّية الطبيعية
natural exponential equation

المعادلة اللوغاريتمية الطبيعية
natural logarithmic equation

الصيغة الخطية
linear form

لماذا ندرس الأسس واللوغاريتمات الطبيعية؟

تعلّمت في الصف الحادي عشر الأسس واللوغاريتمات التي استخدمت أساسات عددية مختلفة، والتي كانت بغالبها أعدادًا صحيحة مثل ٢، ٣، ١٠، وكان للوغاريتم ذي الأساس ١٠ أهمية خاصة (يكتب لـو) لأنه يمكن إيجاد لـو س و $١٠^{س}$ لأي قيمة لـ س على الحاسبة مباشرة باستخدام مفتاحَي $\boxed{\log}$ أو $\boxed{10^x}$.

تجد في الحاسبة أيضًا مفاتيح أخرى للوغاريتمات والقوى، مثل مفتاحَي $\boxed{\ln}$ و $\boxed{e^x}$، حيث يمثل الحرف e عددًا غير نسبي يعرفه بعضهم بعدد أويلر Euler's number نسبة إلى العالم ليونارد أويلر؛ ويعرفه آخرون بالعدد النيبيري Napierian number، نسبة إلى العالم جون نابيير John Napier. يرمز إلى عدد أويلر بالرمز هـ وقيمته التقريبية هي ٢٫٧١٨٢٨، وسيكون هذا محل اهتمام دراستنا في هذه الوحدة.

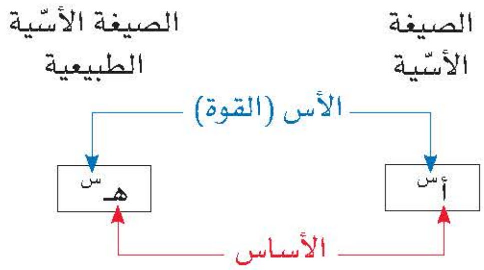
لعدد أويلر أهمية في الكثير من سياقات الحياة الواقعية، فهو يستخدم كثيرًا في نمذجة النمو والاضمحلال الطبيعيين، كما يبرز في دراسة الفائدة المركبة، وفي حل المعادلات التفاضلية الخطية والمثلثية، ويستخدم أيضًا بشكل واسع في الهندسة الكهربائية.

١-١ الدالة الأسّية الطبيعية

الأساس الطبيعي (هـ)

تعلمت سابقًا الصيغة الأسّية $أ^{س}$ ، حيث يسمى أ بالأساس، وتسمى س بالأس (القوة).

بالتعويض في الصيغة الأسّية $أ^{س}$ عن قيمة أ بعدد أويلر (هـ) والذي يمثل القيمة التقريبية ٢,٧١٨٢٨، ينتج ما يسمى بالصيغة الأسّية الطبيعية وهي $هـ^{س}$ ، ويسمى العدد هـ بالأساس الطبيعي.



لإيجاد قيمة $هـ^{٢}$، يمكن استخدام الحاسبة بالضغط على المفاتيح e^x 2 = على التوالي فنحصل على الناتج ٧,٤ مقربًا إلى أقرب منزلة عشرية.

استكشف ١

يمكن إيجاد تقريب لقيمة عدد أويلر باستخدام العبارة $\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن}$

كلما كبرت قيمة ن، اقترب الناتج أكثر من القيمة التقريبية لـ هـ

تجد في الجدول أدناه قيم $\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن}$ ، مقرّبة إلى أقرب خمس منازل عشرية، لبعض قيم ن أصغر من أو تساوي ١٠٠

ن	٠,١	١	١٠	١٠٠
$\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن}$	$\left(١ + \frac{١}{٠,١}\right)^{٠,١} = ١١^{٠,١}$	$\left(١ + \frac{١}{١}\right)^{١} = ٢^{١}$	$\left(١ + \frac{١}{١٠}\right)^{١٠} = ١,١^{١٠}$	$\left(١ + \frac{١}{١٠٠}\right)^{١٠٠} = ١,٠١^{١٠٠}$
تقريب هـ	١,٢٧٠٩٨	٢	٢,٥٩٣٧٤	٢,٧٠٤٨١
	يقترب الناتج من القيمة التقريبية لـ هـ ←			

تلاحظ أن قيمة $\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن}$ تتزايد كلما تزايدت قيم ن

أ) أكمل الجدول مستخدمًا قيم ن تساوي (١٠٠٠، ١٠٠٠٠، ١٠٠٠٠٠، ...) إلى أن يتّضح أن قيمة المنزلة العشرية الخامسة لقيمة $\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن}$ لم تعد تتزايد.

ب) ما هي القيمة النهائية التي وجدتها لـ $\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن}$ ، مقرّبة إلى أقرب ٥ منازل عشرية؟

القيمة النهائية التي وجدتها هي تقريب لقيمة عدد أويلر هـ، مقرّبة إلى أقرب ٥ منازل عشرية.

يمكن تطبيق قوانين القوى التي تعلمتها سابقًا على الأساس الطبيعي هـ

نتيجة ١

$هـ^{م} \times هـ^{ن} = هـ^{م+ن}$

$هـ^{م} \div هـ^{ن} = هـ^{م-ن}$

مثـــال ١

أكتب كلًا من العبارات الآتية في أبسط صيغة أسية:

أ $هـ^{٧} \times هـ^{٤}$

ب $هـ^{٧} \div هـ^{٤}$

ج $هـ^{١٩} \times هـ^{-٦}$

د $هـ^{١٣} \div هـ^{-٢}$

الحـــلّ:

أ $هـ^{٧} \times هـ^{٤} = هـ^{٧+٤} = هـ^{١١}$ .... استخدم $هـ^{م} \times هـ^{ن} = هـ^{م+ن}$

ب $هـ^{٧} \div هـ^{٤} = هـ^{٧-٤} = هـ^{٣}$ .... استخدم $هـ^{م} \div هـ^{ن} = هـ^{م-ن}$

ج $هـ^{١٩} \times هـ^{-٦} = هـ^{١٩+(-٦)} = هـ^{١٩-٦} = هـ^{١٣}$ .... استخدم $هـ^{م} \times هـ^{ن} = هـ^{م+ن}$

د $هـ^{١٣} \div هـ^{-٢} = هـ^{١٣-(-٢)} = هـ^{١٣+٢} = هـ^{١٥}$ .... استخدم $هـ^{م} \div هـ^{ن} = هـ^{م-ن}$

مثـــال ٢

$هـ^{٣} = ٢٠$، $هـ^{٦} = ٤٠٣$، $هـ^{٨} = ٢٩٨١$ (مقربة إلى أقرب عدد صحيح)

استخدم هذه القيم لإيجاد قيمة المقادير الآتية، مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح:

أ $هـ^{١١}$

ب $هـ^{٥}$

ج $هـ^{٩}$

الحـــلّ:

أ $هـ^{١١} = هـ^{٨+٣}$ .... استخدم $هـ^{م} \times هـ^{ن} = هـ^{م+ن}$

$= هـ^{٨} \times هـ^{٣}$

$= ٢٩٨١ \times ٢٠$

$= ٥٩٦٢٠$

ب $هـ^{٥} = هـ^{٨ - ٣}$ ············ استخدم $هـ^{م} ÷ هـ^{ن} = هـ^{م - ن}$

$= هـ^{٨} ÷ هـ^{٣}$

$= ٢٩٨١ ÷ ٢٠$

$= ١٤٩$

ج $هـ^{٩} = هـ^{٦ + ٣}$ ············ استخدم $هـ^{م} × هـ^{ن} = هـ^{م + ن}$

$= هـ^{٦} × هـ^{٣}$

$= ٤٠٣ × ٢٠$

$= ٨٠٦٠$

مثـــال ٣

استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية، مقربة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

أ $هـ^{٣,٧}$

ب $هـ^{-١}$

ج $هـ^{-٢,٥}$

د $\frac{١٢}{\sqrt{هـ}}$

هـ $\sqrt[٣]{هـ}$

الحـــلّ:

أ $هـ^{٣,٧} = ٤٠,٤٤٧$ ··· استخدم المفاتيح $\boxed{e^x}$ $\boxed{3.7}$ $\boxed{=}$

ب $هـ^{-١} = ٠,٣٦٨$ ··· استخدم المفاتيح $\boxed{e^x}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

ج $هـ^{-٢,٥} = ٠,٠٨٢$ ··· استخدم المفاتيح $\boxed{e^x}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{2.5}$ $\boxed{=}$

د $\frac{١٢}{\sqrt{هـ}} = ٧,٢٧٨$ ··· استخدم المفاتيح $\boxed{12}$ $\boxed{÷}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

هـ $\sqrt[٣]{هـ} = ١,٣٩٦$ ··· $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$

أو $\sqrt[٣]{هـ} = هـ^{\frac{١}{٣}}$، إذًا استخدم المفاتيح $\boxed{e^x}$ $\boxed{1}$ $\boxed{a^b/_c}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ أو المفاتيح $\boxed{e^x}$ $\boxed{(}$ $\boxed{1}$ $\boxed{÷}$ $\boxed{3}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

مُساعَدة

يعتمد ترتيب استخدام المفاتيح على نوع الحاسبة.
يمكن جعل العدد سالبًا بالضغط على مفتاح $\boxed{+/-}$ قبل أو بعد العدد.
تستخدم بعض الحاسبات المفتاح $\boxed{-}$ أو $\boxed{(-)}$ عوضًا عن المفتاح $\boxed{+/-}$ لجعل العدد سالبًا.
بعض الحاسبات تتضمن مفتاح الجذر التكعيبي والذي يمكن استخدامه لحل الجزئية هـ.

الدالة الأسّية للأساس الطبيعي هـ

صيغة الدالة الأسّية هي د (س) = أ × ب^س ، حيث أ، ب ثابتان،

مثل د (س) = ٢^س ، د (س) = ٣ × ١٠^س

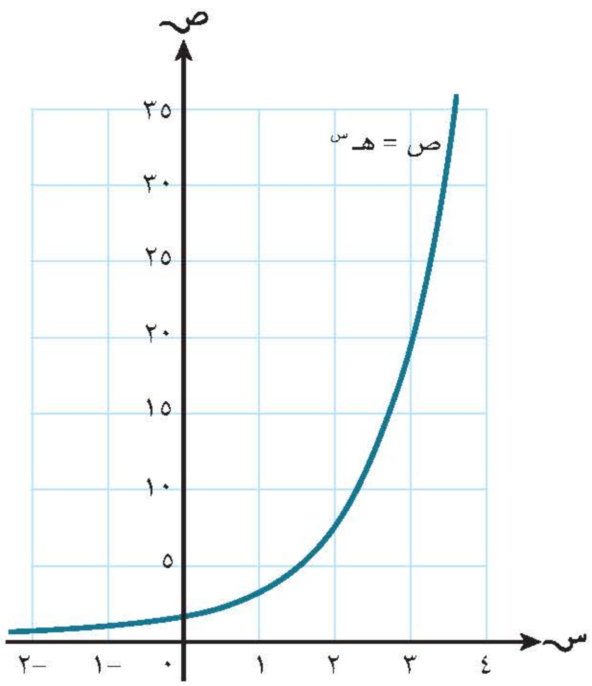
تسمى الدالة الأسّية التي أساسها هـ (عدد أويلر) بالدالة الأسّية الطبيعية د (س) = هـ^س

يوجد العديد من الدوال الأسّية الطبيعية، مثل د (س) = ٢هـ^س ، د (س) = $\frac{١}{٣}$ هـ^س ،
د (س) = ٧ − ٥ هـ^س

يبيّن التمثيل البياني الآتي الدالة الأسّية الطبيعية د(س) = هـ^س

مُساعَدة

لاحظ أن الدالة هي د (س) = هـ^س ومعادلة المنحنى ص = د (س) هي ص = هـ^س



لاحظ أن المنحنى لا يلامس ولا يقطع المحور السيني أبدًا. يبيّن هذا الأمر إحدى أهم خصائص الدالة الأسّية الطبيعية، وهي أن د (س) > ٠ لكل قيم س

مثال ٤

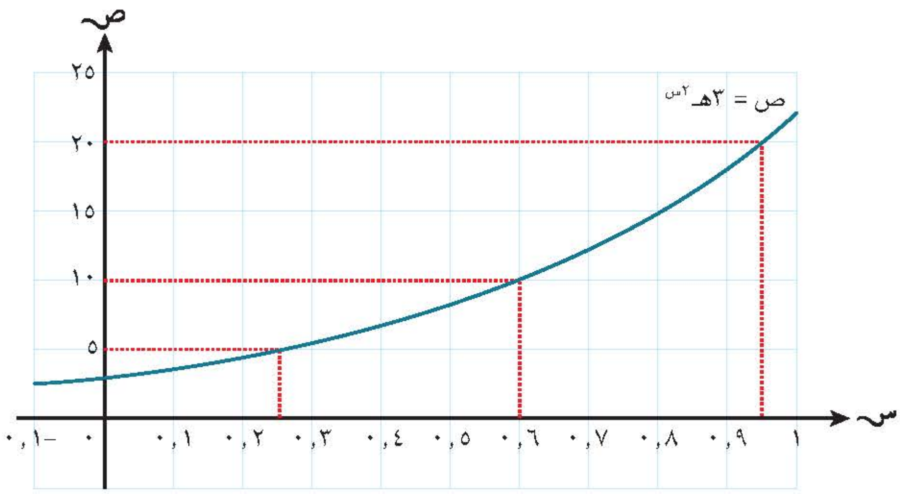
استخدم منحنى ص = د(س) حيث ص = ٣هـ^{٢س} لتقدير قيمة:

أ ٣هـ^{٢س} عندما س = ٠,٢٥

ب س عندما تكون ٣هـ^{٢س} = ٢٠

ج د(٠,٦)

الحل:



أ ٣هـ^{٢س} = ٥ .... ارسم خطًا رأسيًا من س = ٠,٢٥ إلى الأعلى باتجاه المنحنى، واقرأ قيمة ٣هـ^{٢س} على المحور الصادي

ب س = ٠,٩٥ .... ارسم خطًا أفقيًا من ص = ٢٠ باتجاه المنحنى، واقرأ قيمة س على المحور السيني

ج د(٠,٦) = ١٠ .... ارسم خطًا رأسيًا من س = ٠,٦ إلى الأعلى باتجاه المنحنى، واقرأ قيمة د(٠,٦) على المحور الصادي

تمارين ١-١

١) استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

أ هـ^{٣}

ب هـ^{٢,٧}

ج هـ^{٠,٨}

د هـ^{١,٢٥}

هـ هـ$^{\frac{٢}{٣}}$

٢) استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

أ هـ $^{-٢}$

ب هـ $^{-٠,٣}$

ج هـ $^{-١,٦}$

د هـ $^{-٠,٠٩}$

هـ هـ $^{-\frac{٤}{٣}}$

٣) استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

أ $\sqrt{هـ}$

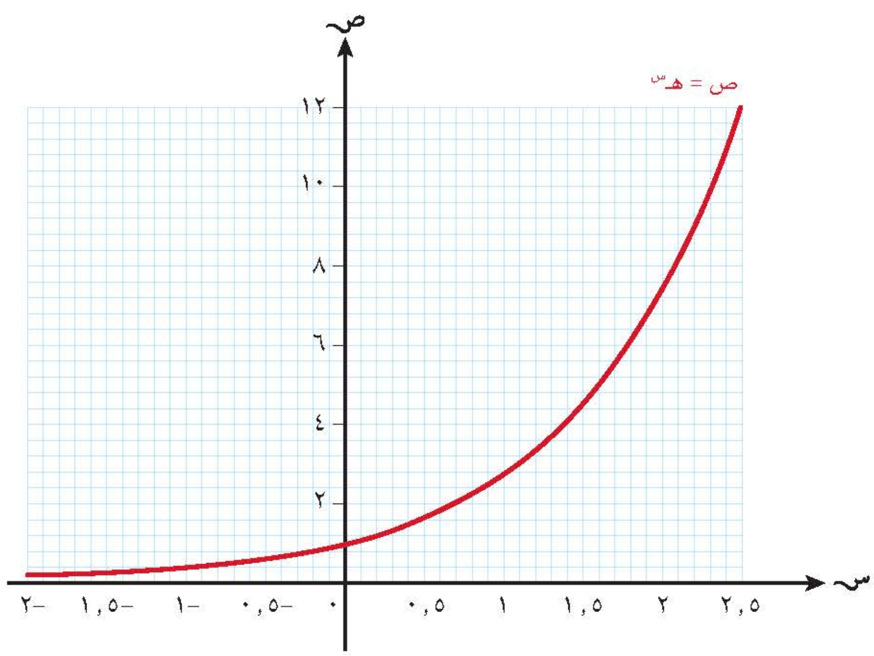
ب $\sqrt{هـ^{٣}}$

ج $\frac{١}{\sqrt[٣]{هـ^{٢}}}$

د هـ ^{٣} + هـ ^{٢}

هـ هـ $^{-٢}$ − هـ $^{-٣}$

٤) يبيّن التمثيل البياني أدناه منحنى الدالة د (س) = هـ ^{س} في الفترة −٢ ⩽ س ⩽ ٢,٥



أ استخدم التمثيل البياني لتقدير القيم الآتية مقربة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

١) د (٢,٢) ٢) د (١,٧) ٣) د (−٠,٢) ٤) د (−٠,٧)

ب استخدم التمثيل البياني لتقدير قيمة س ، مقربة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، حيث:

١) هـ ^{س} = ٤ ٢) د (س) = ٥,٦ ٣) د (س) = ٠,٦

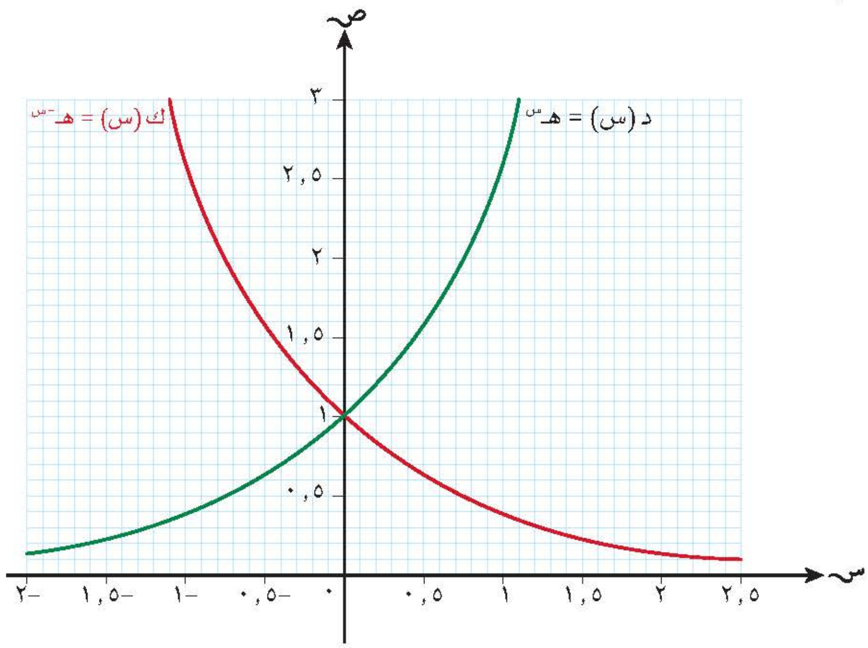
٥) استخدم القيم التقريبية $هـ^{١,٢} = ٣,٣٢$ ، $هـ^{٢,٤} = ١١$، $هـ^{٧,٢} = ١٣٣٩$، لتقدير القيم الآتية مقربة إلى أقرب عدد صحيح:

أ $هـ^{٩,٦}$

ب $هـ^{٦}$

★ ج $\sqrt{١٣٣٩}$

٦) يبيّن التمثيل البياني أدناه منحنى كل من الدالة د (س) = $هـ^{س}$ والدالة ك (س) = $هـ^{-س}$ في الفترة $-٢ \leqslant س \leqslant ٢,٥$



استخدم منحنيَي الدالتين د (س) = $هـ^{س}$ ، ك(س) = $هـ^{-س}$ للإجابة عن الآتي:

أ أوجد قيمة س بحيث تكون القيمتان $هـ^{س}$ ، $هـ^{-س}$ متساويتين.

ب استخدم متباينة للتعبير عن قيم س التي تحقق:

١) د (س) > ك(س)

٢) د (س) < ك(س)

ج صف باختصار التحويل الوحيد الذي يحوّل ص = $هـ^{س}$ إلى ص = $هـ^{-س}$

١-٢ الدالة اللوغاريتمية الطبيعية ومعكوسها

صيغة الدالة اللوغاريتمية هي د (س) = لـو$_{أ}$ س، حيث أ هو أساس اللوغاريتم، فمثلًا:

د (س) = لـو$_{٢}$ س حيث ٢ هو أساس اللوغاريتم، د (س) = لـو س حيث ١٠ هو أساس اللوغاريتم.

وعند استخدام عدد أويلر (هـ) كأساس للوغاريتم في الدالة اللوغاريتمية بحيث تكون د (س) = لـو$_{هـ}$ س ، فتسمى بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية وتختصر إلى الصورة د (س) = لط س

توجد العديد من دوال اللوغاريتم الطبيعي المبنية على دالة اللوغاريتم الطبيعي د (س) = لط س ، والتي لها خصائص مماثلة، مثل د (س) = ٣ لط س ، د (س) = $\frac{١}{٤}$ لط س ، د (س) = ١ + ٦ لط س

لإيجاد قيمة اللوغاريتم الطبيعي لط٢ باستخدام الحاسبة يتم الضغط على المفاتيح [ln] [2] [=] فتحصل على الناتج ٠,٧ لأقرب منزلة عشرية.

مثــال ٥

استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية، مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية إن أمكن:

أ) لط ١٣

ب) لط ٠,٥ + لط هـ

ج) هـ$^{لط ١١}$ + هـ$^{لط ٨}$

د) لط هـ^{٥} − لط هـ^{٢}

هـ) هـ^{٢} − لط ٥٠

الحــلّ:

أ) لط ١٣ = ٢,٥٦٥ باستخدام المفاتيح [ln] [13] [=]

ب) لط ٠,٥ + لط هـ = −٠,٦٩٣١ + ١
= ٠,٣٠٧ باستخدام المفاتيح [ln] [0.5] [+] [e^{x}] [1] [=]

ج) هـ$^{لط ١١}$ + هـ$^{لط ٨}$ = ١١ + ٨
= ١٩ باستخدام المفاتيح
[e^{x}] [ln] [11] [+] [e^{x}] [ln] [8] [=]

د) لط هـ^{٥} − لط هـ^{٢} = ٥ − ٢
= ٣ باستخدام المفاتيح
[ln] [e^{x}] [5] [+] [ln] [e^{x}] [2] [=]

هـ) هـ^{٢} − لط ٥٠ = ٧,٣٨٩ − ٣,٩١٢
= ٣,٤٧٧ باستخدام المفاتيح [e^{x}] [2] [-] [ln] [50] [=]

مُساعَدة

ترتيب المفاتيح قد يختلف من حاسبة إلى أخرى.

يمكن تطبيق قوانين اللوغاريتم التي تعلمتها سابقًا على اللوغاريتمات الطبيعية.

نتيجة ٢

لكل أ $>$ ٠ ، س $>$ ٠ ، ص $>$ ٠:

قانون الضرب: لط س ص = لط س + لط ص

قانون القسمة: لط $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لط س − لط ص

قانون القوة: لط أ$^{\text{س}}$ = س لط أ

بالإضافة إلى:

لط ١ = ٠ ، لط هـ = ١ ، لط هـ$^{\text{س}}$ = س ، هـ$^{\text{لط س}}$ = س ، لط $\frac{١}{\text{س}}$ = −لط س

مثال ٦

بدون استخدام الحاسبة أوجد ناتج:

أ) لط هـ^{٥,٢} − لط هـ^{٣,٣}

ب) ٤لط هـ^{٧} + هـ$^{٢\text{لط} ٣}$

ج) لط $\frac{٣}{٧}$ + لط $\frac{٧}{٣}$

الحلّ:

أ) لط هـ^{٥,٢} − لط هـ^{٣,٣} = ٥,٢ − ٣,٣ .... باستخدام لط هـ$^{\text{أ}}$ = أ

= ١,٩

ب) ٤لط هـ^{٧} + هـ$^{٢\text{لط} ٣}$ = ٤ × ٧ لط هـ + هـ$^{\text{لط} ٣^{٢}}$ .... باستخدام لط هـ$^{\text{أ}}$ = أ وقانون القوة

= ٢٨ لط هـ + هـ$^{\text{لط} ٩}$

= ٢٨ + ٩

= ٣٧

ج) لط $\frac{٣}{٧}$ + لط $\frac{٧}{٣}$ = لط $\left(\frac{٣}{٧} \times \frac{٧}{٣}\right)$ .... باستخدام قانون الضرب:
لط س ص = لط س + لط ص

= لط ١

= ٠

استكشف ٢

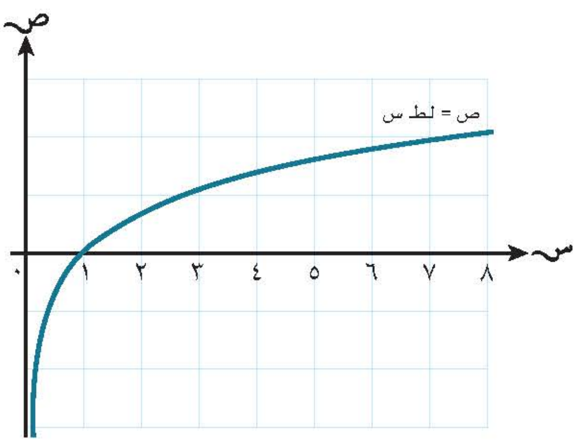
١) انسخ الجدول المعطى واستخدم الحاسبة لتجد القيم الناقصة مقرّبة إلى منزلتَين عشريتَين. استخدم العلامة (−) لتشير إلى القيم غير الموجودة.

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥
لط س					٠				
هـ^{س}				١					

٢) ناقش مع زميل لك مقدار تزايد قيمتَي لط س ، هـ^{س} كلما كبرت قيمة س بمقدار ١

٣) اكتب جملة قصيرة لوصف التزايدات في قيمتَي كل من لط س ، هـ^{س}

يبيّن التمثيل البياني أدناه دالة اللوغاريتم الطبيعي د (س) = لط س



مُساعَدة

لاحظ أن الدالة د (س) = لط س ومعادلة المنحنى ص = د (س) هي ص = لط س

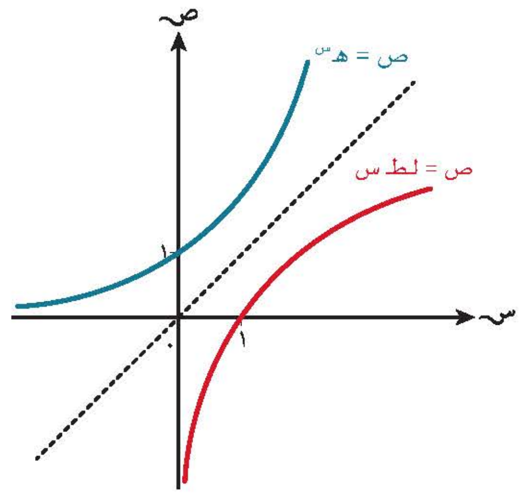
لاحظ أن المنحنى لا يلامس ولا يقطع المحور الصادي أبدًا. يبيّن هذا الأمر إحدى أهم خصائص دالة اللوغاريتم الطبيعي، وهي أن الدالة معرفة لقيم س > ٠ فقط.

يلخص الجدول أدناه هذه الخاصية وخصائص أخرى لدالة اللوغاريتم الطبيعي.

قيمة س	قيمة لط س	ماذا يعني هذا؟
س < ٠	ليس لها وجود	لط س غير معرفة لقيم س السالبة
س = ٠	ليس لها وجود	لط س غير معرفة عند س = ٠
٠ < س < ١	لط س < ٠	كلما اقتربت قيمة س من الواحد اقتربت قيمة لط س من ٠
س = ١	لط س = ٠	لط ١ = ٠
س > ١	لط س > ٠	كلما زادت قيمة س تزيد قيمة لط س

استكشف ٣

التمثيل أدناه لمنحنيَي ص = هـ^{س} ، ص = لط س



ناقش واكتب مع زميل لك ما تلاحظه عن هذَين المنحنيَين (يمكنك البدء بالمستقيم المنقّط في التمثيل البياني).

ضمّن كتابتك ما تلاحظه من تشابهات أو اختلافات.

استنتج العلاقة بين الدالتين الممثلتين في هذا التمثيل البياني.

قد تكون لاحظت في استكشف ٣ أنه يمكن استخدام المستقيم المنقّط في المخطط (والذي يمثّل ص = س) كخط تناظر.

نعكس منحنى ص = هـ^{س} حول المستقيم المنقط، فيقع بشكل تام على منحنى ص = لط س، والعكس صحيح.

المنحنيان (منحنيا الدالة الأسّية الطبيعية والدالة اللوغاريتمية الطبيعية) هما انعكاس أحدهما للآخر حول المستقيم ص = س

يعني هذا أن معكوس الدالة الأسّية الطبيعية هو دالة لوغاريتمية طبيعية، ومعكوس الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هو دالة أسية طبيعية.

نتيجة ٣

بالنسبة إلى الأساس هـ:

- إذا كان د (س) = هـ^{س} ، فإن د$^{-1}$ (س) = لط س
- إذا كان ف(س) = لط س ، فإن ف$^{-1}$ (س) = هـ^{س}

مثــال ٧

أوجد معكوس كل من هاتين الدالتين:

أ) $ع(س) = هـ^{٢س}$

ب) $د(س) = لطـ ٥س$

الحــلّ:

أ) $ع(س) = هـ^{٢س}$ ← اكتب ص مكان ع(س)

$ص = هـ^{٢س}$ ← بدّل ما بين س ، ص

$س = هـ^{٢ص}$ ← استخدم: إذا كان أ = ب ، فإن لطـ أ = لطـ ب

$لطـ س = لطـ هـ^{٢ص}$ ← استخدم لطـ $هـ^{س}$ = س

$لطـ س = ٢ ص$

$ص = \frac{١}{٢} لطـ س$ ← اكتب $ع^{-١}(س)$ مكان ص

$ع^{-١}(س) = \frac{١}{٢} لطـ س$

ب) $د(س) = لطـ ٥س$ ← اكتب ص مكان د(س)

$ص = لطـ ٥س$ ← بدّل ما بين س ، ص

$س = لطـ ٥ص$ ← استخدم: إذا كان أ = ب ، فإن $هـ^{أ} = هـ^{ب}$

$هـ^{س} = هـ^{لطـ ٥ص}$ ← استخدم $هـ^{لطـ س} = س$

$٥ص = هـ^{س}$

$ص = \frac{١}{٥} هـ^{س}$ ← اكتب $د^{-١}(س)$ مكان ص

$د^{-١}(س) = \frac{١}{٥} هـ^{س}$

تمارين ١-٢

١) استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

أ لط ٣   ب لط ١,٤   ج لط ٠,٩

د لط ٠,١٥   هـ $\text{لط } \frac{٩}{٧}$

٢) دون استخدام الحاسبة، أوجد:

أ $\text{هـ}^{\text{لط } ٢}$ ب $٥\text{هـ}^{\text{لط } ٦}$ ج $\text{هـ}^{٢\text{لط } ٣}$

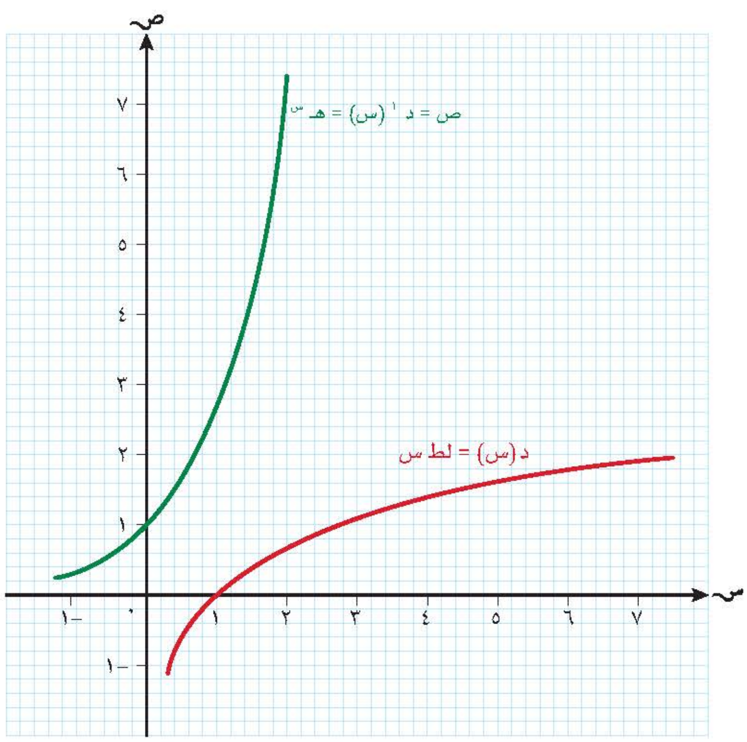
د $\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{لط } ٤٩}$ هـ $\text{هـ}^{\text{لط } ٣ + \text{لط } ٧}$

٣) دون استخدام الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل ممّا يأتي:

أ $\text{هـ}^{\text{لط } ١١١}$ ب $\text{هـ}^{\text{لط } ٤} - \text{هـ}^{\text{لط } ٣}$ ج $٣\text{هـ}^{\text{لط } ٥} + \text{لط هـ}^{١١}$

د $٣\text{لط هـ}^{٩} - ٤\text{لط هـ}^{٦}$ هـ $\text{لط } \sqrt{\text{هـ}} - \text{لط } \sqrt[٣]{\text{هـ}}$

٤) يمثل التمثيل البياني الآتي منحنيي د (س) = لط س ومعكوسها $\text{د}^{-١}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$



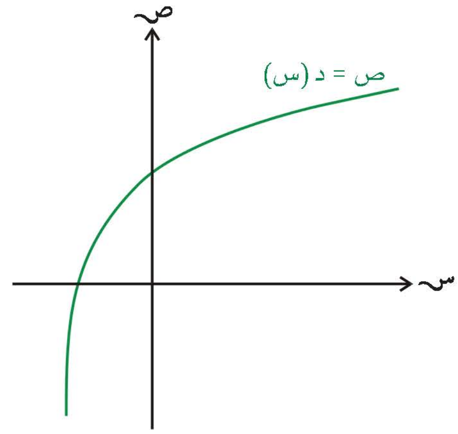
أ استخدم المنحنيَين لتقدير قيمة كل من الآتي مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

١) لط ٤,٥   ٢) $\text{لط } \frac{١}{٢}$ ٣) لط ١٢٥   ٤) $\text{هـ}^{-\text{لط } ١}$

ب أُضيف مستقيم إلى التمثيل البياني أعلاه بحيث يمكن استخدامه لعكس منحنى ص = لط س حتى يقع على منحنى $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

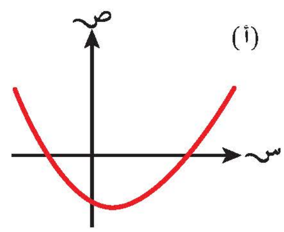
ما هي معادلة هذا المستقيم؟

٥) التمثيل البياني الآتي لمنحنى الدالة ص = د (س)

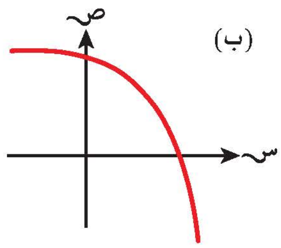


أ أي التمثيلات الآتية: أ ، ب ، ج ، د ، هـ، يمكن أن يكون منحنى الدالة ص = د$^{-١}$ (س)؟

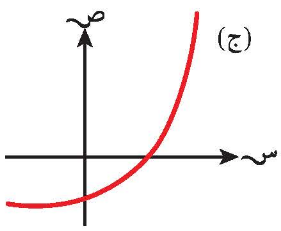
(أ)



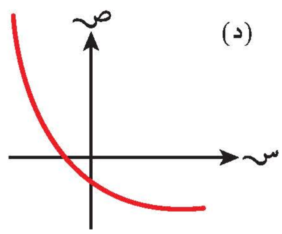
(ب)



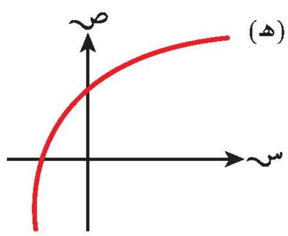
(ج)



(د)



(هـ)



ب الدالة المبيّنة في التمثيل الأول هي د (س) = ٥ لط (س + ١٠)

يرغب أحد الطلبة في إيجاد معكوس الدالة د

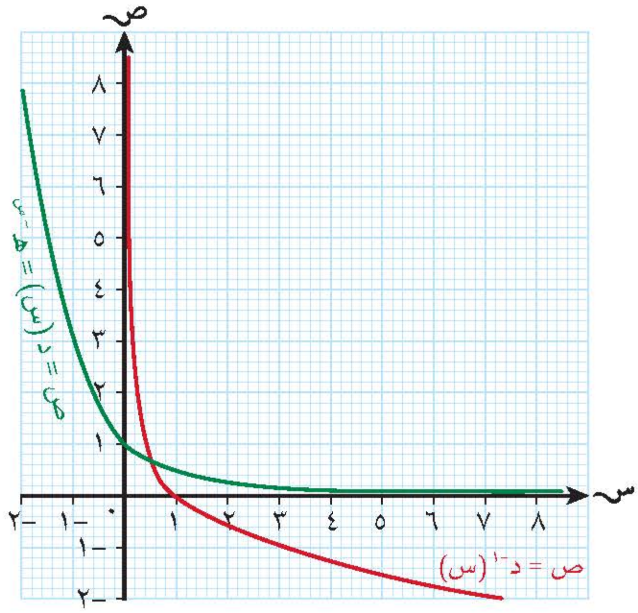
تشكل الأسطر الأربعة الآتية الخطوات الأولى من الحل الذي كتبه، وهي خطوات صحيحة:

د(س) = ٥ لط (س + ١٠)	اكتب ص مكان د (س)
ص = ٥ لط (س + ١٠)	بدّل ما بين س ، ص
س = ٥ لط (ص + ١٠)	اقسم الطرفَين على ٥
٠,٢س = لط (ص + ١٠)	إذا كان أ = ب، فإن هـ$^{\text{أ}}$ = هـ$^{\text{ب}}$
هـ$^{\text{٠,٢س}}$ = هـ$^{\text{لط (ص + ١٠)}}$	استخدم هـ$^{\text{لط س}}$ = س

١) أكمل عمل الطالب لإيجاد د$^{-١}$ (س)

٢) أوجد قيمة د$^{-١}$ (٠)

٦) التمثيل البياني الآتي رسم دقيق لجزء من منحنى الدالة ص = د (س) = هـ$^{-س}$ ، وجزء من منحنى معكوسها ص = د$^{-١}$ (س)



يرغب أحد الطلبة في إيجاد معكوس الدالة فكتب:

د(س) = هـ$^{-س}$	اكتب ص مكان د (س)
ص = هـ$^{-س}$	بدّل ما بين س ، ص
س = هـ$^{-ص}$	إذا كان أ = ب، فإن لطـ أ = لطـ ب
لطـ س = لطـ هـ$^{-ص}$	

أ) أكمل خطوات عمل الطالب وحدد من الخيارات الآتية الخيار الذي يشكل الطريقة الصحيحة لكتابة معادلة معكوس الدالة:

١) د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{لطـ س}$ ٢) د$^{-١}$(س) = – لطـ س

٣) د$^{-١}$(س) = لطـ (– س)   ٤) د$^{-١}$(س) = لطـ $\frac{١}{س}$

ب) استخدم المنحنيَين في التمثيل البياني لتقدير القيم الآتية، مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

١) د(–٠,٥)   ٢) هـ$^{-٠,٢}$

٣) – لطـ ٨   ٤) د$^{-١}$$\left(\frac{١}{٥}\right)$

٧) أوجد معكوس كل من الدوال الآتية:

أ) د (س) = $\frac{١}{٣}$ لطـ س   ب) ف(س) = لطـ س^{٢}

ج) ح(س) = ٥ هـ^{س} د) ك(س) = هـ$^{س - ٢}$

هـ) م: س ← $\frac{١}{٢}$ هـ^{٥س} و) د (س) = لطـ س + لطـ ٤

ز) ع(س) = لطـ س^{٢} + لطـ س – لطـ $\frac{١}{٨}$

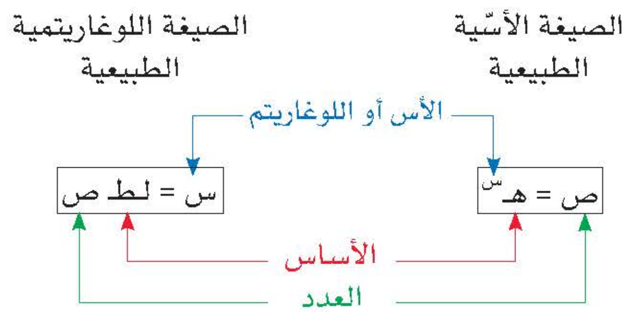
١-٣ الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ

تعلمت سابقًا أنه توجد صيغتان لكتابة العلاقات التي تتضمن الأسس، وهما الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية.

وتعلمت سابقًا أيضًا أن كلًا من الصيغتين هي معكوس للأخرى:

- إذا كانت $د(س) = هـ^{س}$ ، فإن معكوسها هي $د^{-1}(س) = لط\ س$
- إذا كانت $د(س) = لط\ س$ ، فإن معكوسها هي $د^{-1}(س) = هـ^{س}$

ويبيّن المخطط الآتي العلاقة بين الصيغة الأسّية الطبيعية والصيغة اللوغاريتمية الطبيعية:



مُساعَدة

تذكر أن $لط\ س = لو_{هـ}\ س$

نتيجة ٤

تبيّن العبارة $ص = هـ^{س} \Longleftrightarrow س = لط\ ص$ كيفية التحويل من الصيغة الأسّية الطبيعية إلى الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية، وبالعكس كذلك.

مثال ٨

أ اكتب $ص = هـ^{٠,٢}$ في الصيغة اللوغاريتمية.

ب اكتب س بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، حيث $٤هـ^{\frac{س}{٢}} + ١ = ٢٥$

الحــلّ:

أ $لط\ ص = ٠,٢$ الأساس هو هـ ، الأس ٠,٢ ، والقيمة هي ص

ب $٤هـ^{\frac{س}{٢}} + ١ = ٢٥$

$٤هـ^{\frac{س}{٢}} = ٢٥ - ١$

$هـ^{\frac{س}{٢}} = \frac{٢٤}{٤}$

$هـ^{\frac{س}{٢}} = ٦$ حول إلى الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية

$\frac{س}{٢} = لط\ ٦$ الأساس هو هـ ، الأس $\frac{س}{٢}$ ، والقيمة هي ٦

$س = ٢لط\ ٦ = لط\ ٦^{٢}$

$س = لط\ ٣٦$

مثـــال ٩

اكتب الآتي في أبسط صيغة أسّية:

١) لـطـ ل = ٢ ق

٢) لـطـ $ق^{٢}$ = ١٢

الحـــلّ:

١) ل = $هـ^{٢ق}$ — الأساس هو هـ ، الأس ٢ق ، والقيمة هي ل

٢) $ق^{٢}$ = $هـ^{١٢}$ — الأساس هو هـ ، الأس ١٢، والقيمة هي $ق^{٢}$

ق = $هـ^{٦}$ أو −ق = $هـ^{٦}$ — نأخذ الجذر التربيعي للطرفين.

∴ ق = $هـ^{٦}$ أو ق = −$هـ^{٦}$

تمارين ١-٣

١) اكتب في الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية:

أ س = $هـ^{١٠}$ ب ص = $\frac{١}{هـ}$ ج ع = $\frac{١}{٢}$ $هـ^{٤}$

٢) اكتب في الصيغة الأسّية الطبيعية:

أ لـطـ ل = ٧ ب ٢ لـطـ ق = −٦ ج لـطـ $ر^{٣}$ = ٢٧

٣) أ اكتب س بدلالة هـ، حيث:

١) لـطـ س = ٧

٢) لـطـ ٢ س = ١٠

ب اكتب س بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، حيث:

١) $هـ^{س}$ = ٣

٢) $\frac{١}{٣}$ $هـ^{٢س}$ = ٥

٤-١ حل المعادلات الأسّية واللوغاريتمية الطبيعية

يمكن أن نستخدم أسلوب التحويل بين الصيغتين الأسّية واللوغاريتمية، بالإضافة إلى قوانين القوى وقوانين اللوغاريتمات لحل المعادلات اللوغاريتمية والأسّية. إلا أنه يجب الانتباه لبعض الملاحظات الخاصة بكتابة اللوغاريتمات، خصوصًا عندما تتضمن العبارة أكثر من حد:

- لط (س + ٢) تعني اللوغاريتم الطبيعي لمجموع س و ٢

لط س + ٢ تعني لط س مجموعًا إلى ٢، ومن الأوضح كتابته على الشكل ٢ + لط س

- لط (س − ٢) تعني اللوغاريتم الطبيعي للفرق بين س و ٢

لط س − ٢ تعني ٢ مطروحًا من لط س، ومن الأوضح كتابته على الشكل −٢ + لط س

مثـــال ١٠

حلّ المعادلات الآتية، مقربًا الناتج إلى منزلة عشرية واحدة.

أ لط (س − ٥) = ٣

ب −٥ + لط س = ٣

ج $\frac{هـ^{٢س}}{٣} = ١٠$

الحـــلّ:

أ لط (س − ٥) = ٣ .... حوّل إلى الصيغة الأسّية

$هـ^{٣}$ = س − ٥

س = $هـ^{٣}$ + ٥

= ٢٥,١

ب −٥ + لط س = ٣

لط س = ٨ .... حوّل إلى الصيغة الأسّية

$هـ^{٨}$ = س

∴ س = ٢٩٨١

ج $\frac{هـ^{٢س}}{٣} = ١٠$ .... اضرب الطرفَين في ٣

$هـ^{٢س}$ = ٣٠ .... حوّل إلى الصيغة اللوغاريتمية

لط ٣٠ = ٢س

∴ س = $\frac{١}{٢}$ لط ٣٠

= ١,٧

مثال ١١

أ حل المعادلة $-١ + \text{لطـ}\left(٥٠ + \frac{\text{س}}{٦}\right) = ٢$، بدلالة هـ

ب قرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

الحلّ:

أ

$-١ + \text{لطـ}\left(٥٠ + \frac{\text{س}}{٦}\right) = ٢$ .... أضف ١ إلى الطرفَين

$\text{لطـ}\left(٥٠ + \frac{\text{س}}{٦}\right) = ٣$ .... حوّل إلى الصيغة الأسّية

$٥٠ + \frac{\text{س}}{٦} = \text{هـ}^{٣}$ .... أضف -٥٠ إلى الطرفَين

$\frac{\text{س}}{٦} = \text{هـ}^{٣} - ٥٠$ .... اضرب الطرفَين في ٦

$\text{س} = ٦\left(\text{هـ}^{٣} - ٥٠\right)$

ب

$\text{س} = ٦\left(\text{هـ}^{٣} - ٥٠\right)$

$= ٦\left(٢٠,٠٩ - ٥٠\right)$

$= ٦ \times (-٢٩,٩١)$

$= -١٧٩$ .... أو استخدم المفاتيح

| e^x | 3 | − | 50 | = | × | 6 | = |

مثال ١٢

حل المعادلة $\text{هـ}^{\text{س}+١} = (٢\,\text{هـ}^{\text{س}})^{٢}$، مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

الحلّ:

$\text{هـ}^{\text{س}+١} = (٢\text{هـ}^{\text{س}})^{٢}$ .... فكّ القوس

$\text{هـ}^{\text{س}+١} = ٤\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$ .... اقسم الطرفَين على $\text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\frac{\text{هـ}^{\text{س}+١}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}} = ٤$ .... استخدم $\text{هـ}^{\text{م}} \div \text{هـ}^{\text{ن}} = \text{هـ}^{\text{م}-\text{ن}}$

$\text{هـ}^{\text{س}+١-٢\text{س}} = ٤$

$\text{هـ}^{١-\text{س}} = ٤$ .... خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$\text{لطـ}\left(\text{هـ}^{١-\text{س}}\right) = \text{لطـ}\ ٤$ .... استخدم قانون القوة

$(١ - \text{س})\ \text{لطـ هـ} = \text{لطـ}\ ٤$ .... استخدم لطـ هـ = ١

$١ - \text{س} = \text{لطـ}\ ٤$

$\text{س} = ١ - \text{لطـ}\ ٤$

$\text{س} = -٠,٣٩$

مثـــال ١٣

حل المعادلة $\text{هـ}^{\text{٢س} - ٣} = ٤\text{هـ}^{\text{س} + ٧}$، بدلالة اللوغاريتم الطبيعي.

الحـــلّ:

$\text{هـ}^{\text{٢س} - ٣} = ٤\text{هـ}^{\text{س} + ٧}$ ……… بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفَين

$\text{لطـ هـ}^{\text{٢س} - ٣} = \text{لطـ ٤هـ}^{\text{س} + ٧}$ ……… باستخدام لطـ س ص = لطـ س + لطـ ص

$\text{لطـ هـ}^{\text{٢س} - ٣} = \text{لطـ ٤} + \text{لطـ هـ}^{\text{س} + ٧}$ ……… باستخدام $\text{لطـ هـ}^{\text{أ}} = \text{أ}$

$\text{٢س} - ٣ = \text{لطـ ٤} + \text{س} + ٧$

$\text{س} = ٣ + ٧ + \text{لطـ ٤}$

$= ١٠ + \text{لطـ ٤}$ ……… **لا نكتبها** على الشكل $\text{س} = \text{لطـ ٤} + ١٠$

تمارين ١-٤

١) دون استخدام الحاسبة، حلّ كلًا من المعادلات الآتية:

أ $\text{هـ}^{\text{لطـ ٤س}} = ٢٠$ ب $\text{هـ}^{\text{لطـ}\sqrt{\text{س}}} = ٦$ ج $٤\text{هـ}^{\text{لطـ ٩س}} + ١٨ = ٠$

٢) دون استخدام الحاسبة، حلّ كلًا من المعادلات الآتية:

أ $\text{لطـ هـ}^{١٫٦} = \text{٢س}$ ب $\text{هـ}^{\text{لطـ س}} - ٤ = ١$ ج $\text{لطـ هـ}^{\text{٢س}} - ٤ = \text{٥س} + ٢$

د $\text{لطـ هـ}^{\text{س}} - ١٣ - \text{لطـ هـ}^{٢} = ٠$ هـ $\text{هـ}^{\text{لطـ س}} - ٢^{\text{لطـ هـ}^{٦}} = ١٠٠$

٣) حلّ المعادلات مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ $\text{هـ}^{\text{س}} = ١٨$ ب $\text{هـ}^{\text{٢س}} = ٢٥$ ج $\text{هـ}^{\text{س} + ١} = ٨$

٤) حلّ المعادلات الأسّية الآتية بدلالة اللوغاريتم الطبيعي:

أ $\text{هـ}^{\text{س}} = ١٣$ ب $\text{هـ}^{\text{٣س}} = ٧$ ج $\text{هـ}^{\text{٢س} + ١} = ٦$

٥) حلّ المعادلات الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاثة أرقام معنوية:

أ $\text{لطـ س} = ٥$ ب $\text{لطـ س} = -٤$ ج $\text{لطـ (س} - ٢) = -٣$

٦) حلّ المعادلتين الآتيتين:

أ $\text{٢لطـ (٥} - \text{س)} = \text{لطـ س}^{٢}$ ب $\text{لطـ}\sqrt{\text{س}} = \frac{٣}{٢}$

٧) حلّ المعادلات الأسّية الآتية بدلالة اللوغاريتم الطبيعي:

أ) $\frac{هـ^{س}}{٢} = هـ^{٤}$

ب) $هـ^{٢س} = \frac{هـ^{٣س - ١}}{٦}$

ج) $هـ^{٤ - س} = \frac{٧}{هـ^{١ - ٣س}}$

د) $هـ^{٣س + ١} = ١٢ \, هـ^{س + ٢}$

٨) ينتشر مرض بحيث يمكن حساب عدد الأشخاص المصابين ل من خلال الصيغة ل = ٥٠ × $هـ^{٠٫١ن}$، حيث ن عدد الأيام منذ ظهور أول حالة إصابة:

أ) أوجد، مقربًا إلى أقرب عدد صحيح، عدد الأشخاص المصابين بعد:

١) ١٠ أيام

٢) ٢٠ يومًا

ب) بعد كم يوم يصل عدد المصابين إلى ٥٠٠٠ شخص؟

ج) من إجابتك للجزئية أ قارن عدد الإصابات الجديدة خلال فترة الـ ١٠ أيام الأولى مع عدد الإصابات الجديدة خلال فترة الـ ١٠ أيام الثانية.

١-٥ تحويل علاقة إلى صيغة خطية باستخدام اللوغاريتم الطبيعي

عندما نجمع بيانات تجربة من متغيّرَين، غالبًا ما نريد إيجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيّرَين. عندما تقع البيانات الممثلة بنقاط في تمثيل بياني على خط مستقيم، تكون العلاقة عندئذ علاقة خطية، ويمكن بسهولة إيجادها باستخدام الصيغة العامة للمستقيم، ص = م س + جـ ، حيث م هو الميل، جـ هو المقطع الصادي.

إلا أنه من المعتاد أن تقع نقاط البيانات على منحنى، عوضًا من خط مستقيم.

يمكن استخدام اللوغاريتمات لتحويل بعض المنحنيات إلى مستقيمات.

وهذه هي حال العلاقات مثل ص = ك $س^{ن}$ ، ص = ك × $أ^{ب س + جـ}$ ، حيث أ ، ب ، ك ، ن، جـ ثوابت.
بعض الأمثلة على هذه العلاقات هي ص = ٧$س^{٤}$، ص = ٣ × $١٠^{س}$ ، ص = $هـ^{٢س}$

يمكن استخدام اللوغاريتمات من أي أساس للقيام بهذه التحويلات، ولكن من المعتاد استخدام اللوغاريتمات ذات الأساسات الموجودة فعلًا في الحاسبات، وهي اللوغاريتم الطبيعي واللوغاريتم ذو الأساس ١٠ وسنقتصر على اللوغاريتم الطبيعي في هذا الدرس.

مثـــال ١٤

حوّل العلاقة ص = $س^{٢}$ إلى الصيغة الخطية **ص~** = م **س~** + جـ ،
واكتب الميل والمقطع الرأسي للمستقيم الذي وجدته.

الحـــلّ:

ص = $س^{٢}$ .... خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفَين

لط ص = لط $س^{٢}$ .... استخدم قانون القوة

لط ص = ٢لط س

لط ص = ٢ لط س + ٠

↑ ↑ ↑ ↑ .... قارن لط ص = ٢لط س مع **ص~** = م **س~** + جـ

ص~ = م **س~** + جـ

تتحوّل المعادلة غير الخطية ص = $س^{٢}$ إلى معادلة خطية بحيث **ص~** = لط ص ،

س~ = لط س

ونحصل على خط مستقيم ميله م = ٢ والمقطع الصادي جـ = ٠

مثـــال ١٥

حوّل العلاقة ص = $\frac{٤}{س^{٥}}$ إلى الصيغة الخطية **ص̃** = م **س̃** + جـ
ثم أوجد الميل والمقطع الصادي.

الحــلّ:

ص = $\frac{٤}{س^{٥}}$	خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفَين
لطـ ص = لطـ $\frac{٤}{س^{٥}}$	استخدم قانون القسمة
لطـ ص = لطـ ٤ − لطـ س^{٥}	استخدم قانون القوة
لطـ ص = لطـ ٤ − ٥ لطـ س	قم بإعادة الترتيب

لطـ ص = −٥ لطـ س + لطـ ٤

لطـ ص = −٥ لطـ س + لطـ ٤

ص̃ = م س̃ + جـ	قارن لطـ ص = −٥ لطـ س + لطـ ٤ مع **ص̃** = م **س̃** + جـ

تتحوّل المعادلة غير الخطية ص = $\frac{٤}{س^{٥}}$ إلى معادلة خطية في الصيغة
ص̃ = م س̃ + جـ باستخدام ص̃ = لطـ ص ، س̃ = لطـ س
نحصل على خط مستقيم ميله م = −٥ والمقطع الصادي = لطـ ٤

مثـــال ١٦

أوجد الميل (م) والمقطع الرأسي (جـ) لمنحنى المستقيم الذي ينتج من تحويل
ص = ٣ هـ^{٢س} إلى الصيغة الخطية **ص̃** = م **س̃** + جـ

الحــلّ:

ص = ٣ هـ^{٢س}	خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفَين
لطـ ص = لطـ ٣ هـ^{٢س}	استخدم قانون الضرب
لطـ ص = لطـ ٣ + لطـ هـ^{٢س}	استخدم قانون القوة
لطـ ص = لطـ ٣ + ٢س لطـ هـ	استخدم لطـ هـ = ١ وقم بإعادة الترتيب

لطـ ص = ٢س + لطـ ٣

لطـ ص = ٢س + لطـ ٣

ص̃ = م س̃ + جـ	قارن لطـ ص = ٢س + لطـ ٣ مع **ص̃** = م **س̃** + جـ

تتحوّل المعادلة غير الخطية ص = ٣ هـ^{٢س} إلى معادلة خطية بحيث
ص̃ = لطـ ص ، س̃ = س
نحصل على خط مستقيم ميله م = ٢ والمقطع الصادي جـ = لطـ ٣

نتيجة ٤

بالنسبة إلى الثوابت أ، ب، ك، ن:

- يمكن تحويل العلاقة غير الخطية ص = ك أ^ب س^ إلى الصيغة الخطية **ص** = م **س** + جـ باستخدام **ص** = لـط ص ، **س** = س
- يمكن تحويل العلاقة غير الخطية ص = ك س^ن^ إلى الصيغة الخطية **ص** = م **س** + جـ باستخدام **ص** = لـط ص ، **س** = لـط س

في جميع الأحوال، عند تحويل علاقة غير خطية إلى علاقة خطية في الصيغة **ص** = م **س** + جـ:

- يجب أن يتضمن المتغيّران **س** ، **ص** المتغيّرَين الأصليَّين س ، ص فقط، ويجب أن لا يتضمنا أيًا من الثوابت أ ، ب ، ك ، ن
- يجب أن يتضمن الثابتان م ، جـ الثوابت الأصلية أ ، ب ، ك ، ن فقط، ويجب أن لا يتضمنا أيًا من المتغيّرَين الأصليَّين س ، ص

تمارين ١-٥

١) بيّن أنه يمكن تحويل منحنى العلاقة ص = ٣ س^٤^ إلى مستقيم ميله ٤ ومقطعه لـط ٣

٢) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لتغيير كل من الصيغ غير الخطية الآتية إلى الصيغة **ص** = م **س** + جـ

حدد في كل حالة ما يمثله كل من المتغيّرَين ص ، س ، واكتب القيمة الدقيقة للثابتَين م ، جـ

أ ص = هـ^٥س + ٣^ ب ص = ٢س^٣^

جـ ص = ٧ × ٢^س^

٣) أ ، ب ثابتان. استخدم اللوغاريتم الطبيعي لتحويل كل من المعادلات غير الخطية الآتية إلى الصيغة **ص** = م **س** + جـ

حدّد في كل حالة ما يمثله كل من المتغيّرَين **ص** ، **س** ، وأيضًا ما يمثله الثابتان م ، جـ بدلالة أ و/أو ب:

أ ص = هـ^أس + ب^ ب ص = أس^ب^

جـ ص = $\frac{أ}{س^{ب}}$

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

الصيغتان الأسّية واللوغاريتمية:

إذا كان ص = هـ$^{\text{س}}$ ، فإن س = لط ص

- ص = هـ$^{\text{س}}$ هي الصيغة الأسّية الطبيعية.
- س = لط ص هي الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية.

قوانين القوى:

- هـ$^{\text{م}}$ × هـ$^{\text{ن}}$ = هـ$^{\text{م} - \text{ن}}$
- هـ$^{\text{م}}$ ÷ هـ$^{\text{ن}}$ = هـ$^{\text{م} - \text{ن}}$

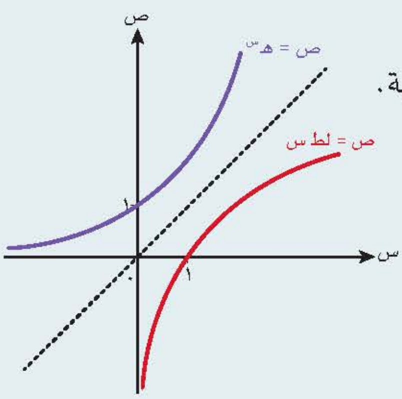
قوانين اللوغاريتم الطبيعي

- قانون الضرب: لط س ص = لط س + لط ص
- قانون القسمة: لط $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لط س − لط ص
- قانون القوة: لط أ$^{\text{س}}$ = س لط أ

بالإضافة إلى:

- لط ١ = ٠
- لط هـ = ١
- لط هـ$^{\text{س}}$ = س
- هـ$^{\text{لط س}}$ = س
- − لط س = لط $\frac{١}{\text{س}}$

الدوال ومعكوسات الدوال



معكوس دالة أسّية هو دالة لوغاريتمية، ومعكوس دالة لوغاريتمية هو دالة أسّية.

- إذا كان د (س) = هـ$^{\text{س}}$ ، فإن د$^{-١}$ (س) = لط س
- إذا كان ف(س) = لط س ، فإن ف$^{-١}$ (س) = هـ$^{\text{س}}$

منحنيا دالة ومعكوسها هما انعكاس أحدهما للآخر حول المستقيم ص = س

التحويل إلى الصيغة الخطية:

بالنسبة إلى الثوابت أ ، ب ، ك ، ن:

- يمكن تحويل العلاقة غير الخطية ص = ك أ$^{\text{ب س}}$ إلى الصيغة الخطية **ص~** = م **س~** + جـ باستخدام **ص~** = لط ص ، **س~** = س
- يمكن تحويل العلاقة غير الخطية ص = ك س$^{\text{ن}}$ إلى الصيغة الخطية **ص~** = م **س~** + جـ باستخدام **ص~** = لط ص ، **س~** = لط س

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) حلّ المعادلة لط (٥س + ٤) = لط س + لط ٧

٢) حلّ المعادلات الآتية، مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ ٢هـ^{س} − ١٧ = ٠

ب هـ$^{س + ١}$ − ٦ = ٠

ج لط س + لط ٥ = ٣

د لط (س − ٣) = لط س − ٢

٣) لط ل + لط $\frac{١}{٢}$ = ٢ لط ق − لط (٣ + ق)، ق > ٠ اكتب ل بدلالة ق وخالية من اللوغاريتم.

٤) أ بيّن أنه يمكن تبسيط المعادلة ٢ لط (س + ٣) = لط (س^{٢} + ١٥) إلى ٦س + ٩ = ١٥

ب أوجد حلّ المعادلة ٢ لط(س + ٣) = لط (س^{٢} + ١٥)

٥) الدالة د (س) = ٢ هـ$^{س − ٥}$

ومعكوس هذه الدالة هو د$^{-١}$ (س) = لط س + جـ ، حيث جـ عدد ثابت.

أوجد قيمة جـ مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

٦) استخدم اللوغاريتمات الطبيعية لتغيير كل من العلاقات غير الخطية الآتية إلى الصيغة **ص** = م **س** + جـ

حدد في كل حالة ما يمثله كل من المتغيّرَين **ص** ، **س** ، واكتب القيمة الدقيقة للثابتَين م ، جـ

أ ص = هـ$^{٢س − ١}$

ب ٢ ص = ٣^{س}

٧) تحسب أعداد نوع من البكتيريا (ل) من خلال المعادلة ل = أ × هـ$^{ن + ٢}$، حيث ن هو عدد الأيام بعد تسجيل عدد البكتيريا لأول مرة.

أ إذا كان العدد الابتدائي للبكتيريا ١٢٤٠، فبيّن أن أ = ١٦٨، مقرّبًا إلى أقرب عدد صحيح.

ب مستعينًا بقيمة أ = ١٦٨، أوجد عدد الأيام الذي تستغرقه أعداد البكتيريا لتصل لأول مرة إلى ١٠ ملايين.

ج استخدم اللوغاريتم الطبيعي لتحويل المعادلة ل = ١٦٨ × هـ$^{ن + ٢}$ إلى صيغة خطية.

الوحدة الثانية
التفاضل

Differentiation

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٢-١ تفهم أن ميل المنحنى عند نقطة محددة هو ميل خط المماس عند تلك النقطة، وتستخدم الرموز $د'(س)$، $د''(س)$، $\frac{ء}{ءس}(ص)$، $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$، $\frac{ءص}{ءس}$، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ للمشتقتَين الأولى والثانية.

٢-٢ تجد المشتقة الأولى لدوال في الصيغة $د(س) = س^{ن}$ (لأي عدد نسبي ن) بالإضافة إلى مفاهيم الضرب بالثابت، وجمع الدوال وطرحها.

٢-٣ تجد الميل ومعادلة خط المماس عند النقاط حيث تكون الدوال قابلة للاشتقاق لدوال في الصيغة $د(س) = س^{ن}$ (لأي عدد نسبي ن) بالإضافة إلى مفاهيم الضرب بالثابت، وجمع الدوال وطرحها.

٢-٤ تجد المشتقة الثانية لدوال في الصيغة $د(س) = س^{ن}$ (لأي عدد نسبي ن) بالإضافة إلى مفاهيم الضرب بالثابت، وجمع الدوال وطرحها.

٢-٥ تستخدم المشتقة لدراسة التزايد أو التناقص للدالة د(س) ضمن فترة معطاة بحيث لا تضم نقاطًا حرجة، وحيث تكون د(س) دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (دالة تربيعية) على الأكثر.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع، الوحدة الثالثة	تستخدم قوانين القوى لتبسيط عبارات إلى الصيغة أ $س^{ن}$	١) اكتب في الصيغة أ$س^{ن}$ أ $٣س\sqrt{س}$ ب $٥\sqrt[٣]{س^{٢}}$ ج $\frac{س}{٢\sqrt{س}}$ د $\frac{١}{٢س}$ هـ $\frac{٣}{س^{٢}}$ و $\frac{٢س^{٢}}{٥\sqrt[٣]{س^{٢}}}$
الصف التاسع، الوحدة الثالثة	تجد قيمة عبارة جبرية.	٢) أوجد قيمة ما يلي: أ $٢س^{٢} - ٣س + ٤$ عندما $س = -٢$ ب $١ + ٣س + س^{٢} - ٢س^{٣}$ عندما $س = -\frac{١}{٢}$
الصف التاسع، الوحدة السابعة، الصف العاشر، الوحدة الأولى	تجد معادلة مستقيم باستخدام الميل ونقطة على هذا المستقيم.	٣) أوجد معادلة مستقيم ميله ٢ ويمر بالنقطة (٢، ٥)
الصف التاسع، الوحدة السابعة، الصف العاشر، الوحدة الأولى	تجد ميل المستقيم بمعرفة نقطتين عليه.	٤) احسب ميل المماس الذي يمر بالنقطتين (٣، ٤)، (٥، ٦)

المفردات

مماس tangent

التفاضل (الاشتقاق) differentiation

إيجاد المشتقة differentiate

المشتقة derivative

دالة الميل gradient function

المشتقة الأولى first derivative

المشتقة الثانية second derivative

دوال متزايدة increasing functions

دوال متناقصة decreasing functions

لماذا ندرس التفاضل؟

علم التفاضل والتكامل Calculus هو دراسة التغيير في سلوك الدوال، وينقسم إلى قسمين هما: التفاضل والتكامل. ولعلم التفاضل والتكامل استخدامات واسعة في العلوم، والطب، والهندسة، والاقتصاد.

على سبيل المثال، يستخدم علم التفاضل والتكامل في:

- تصميم أجنحة الطائرات.
- الاستشارات الاقتصادية للشركات في موضوع استراتيجيات التسعير.
- دراسة الاضمحلال الإشعاعي.
- دراسة تغيير أعداد السكان.
- التطبيقات الفيزيائية والهندسية.

في هذه الوحدة ستدرس التفاضل، وهي الأداة الأولى من أداتَي علم التفاضل والتكامل الأساسيتَين. ستتعلم قوانين التفاضل وكيفية تطبيقها لحل المسائل التي تتضمن الميل عند نقطة ما على المنحنى، ومعادلات خطوط المماس، ودراسة فترات تزايد وتناقص الدوال، وإذا كان لدينا عبارة أو صيغة تمثل المسافة التي قطعها جسم من نقطة البداية، يمكننا استخدام التفاضل لحساب سرعته وتسارعه عند أية نقطة خلال رحلته.

٢-١ المشتقة الأولى

تعلّمت سابقًا كيفية تقدير ميل منحنى عند نقطة من خلال رسم خط **مماس** **tangent** مناسب، ومن ثم حساب ميل هذا المماس.

ينتج من رسم خط المماس تقدير ميل المنحنى عند نقطة التماس. ومن المستبعد أن يرسم شخصان خطّين مماسَين بالميل نفسه تحديدًا، لذا يحصلان على نتيجتَين مختلفتَين. كما أنها عملية تستغرق وقتًا لأنه يجب رسم منحنى دقيق أولًا.

لهذا ستتعلم في هذه الوحدة طريقة لإيجاد الميل الدقيق للمنحنى عند أي نقطة عليه، ويمكن القيام بذلك دون رسم منحنى أو خط مماس، باستخدام طريقة تسمى **التفاضل (الاشتقاق)** **differentiation**، وللقيام بذلك، علينا **إيجاد المشتقة** **differentiate** للدالة أو لمعادلة المنحنى.

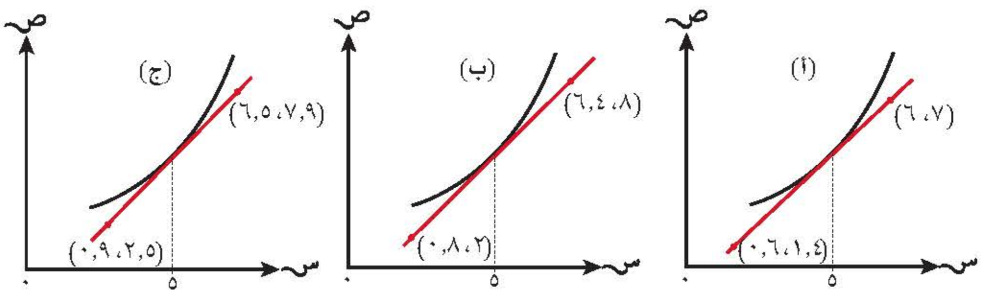
استكشف ١

تمّ إعطاء ثلاثة طلبة أ ، ب ، ج ، مخططات للمنحنى نفسه.

طلب إليهم رسم خط مماس عند نقطة على المنحنى حيث س = ٥، ومن ثم حساب ميل المماس عند تلك النقطة.

للقيام بذلك، حدّد الطلبة إحداثيات نقطتَين على المماس الذي رسموه.

تبيّن التمثيلات الآتية مخططاتهم:



١) استخدم النقطتَين المحدّدتَين لحساب ميل المماس الذي رسمه كل من الطلبة أدناه، مقرّبًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ الطالب أ　　ب الطالب ب　　ج الطالب ج

٢) إذا رُسم مماس بشكل دقيق عند س = ٥ على المنحنى، فسيمر خلال (٢,١ ، ٠,٩٥) و (٨,٢ ، ٧,٠٥)

أ ما هو الميل الصحيح للمماس عند س = ٥؟

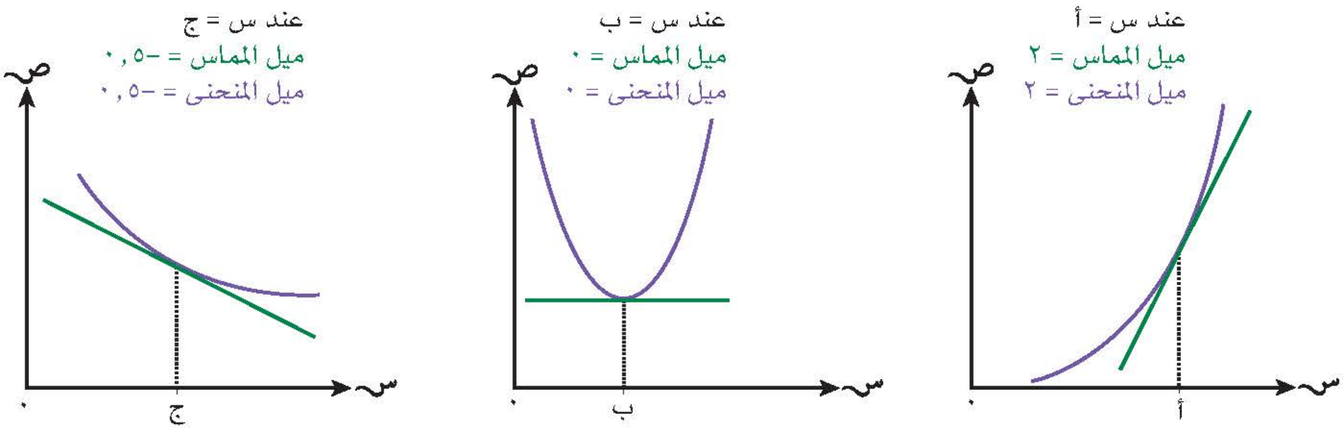
ب ناقش وأكمل العبارة الآتية:

ميل .... عند س = ٥ هو ذاته ميل .... عند س = ٥

الميل عند نقطة على المنحنى هو ذاته ميل المماس المرسوم بدقة عند تلك النقطة، وهما:

- موجبان عندما يميل المماس إلى الأعلى من اليسار إلى اليمين (يصنع المماس زاوية حادة مع محور السينات الموجب).
- صفر عندما يكون المماس أفقيًا (موازيًا لمحور السينات).
- سالبان عندما يميل المماس إلى الأسفل من اليسار إلى اليمين (يصنع المماس زاوية منفرجة مع محور السينات الموجب).

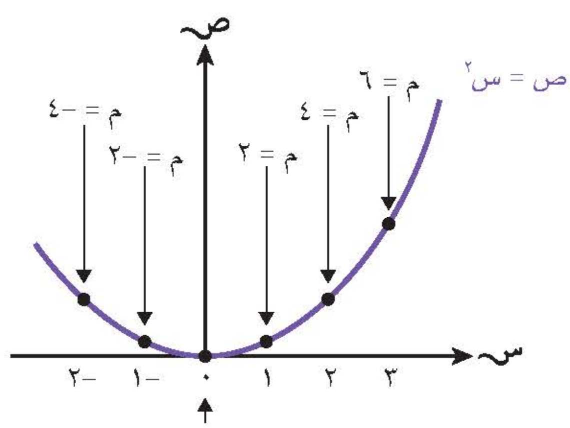
يبيّن المخطط الآتي أمثلةً على هذه الحالات الثلاث:



يعرض الجدول الآتي الميل (م) عند ست نقاط على منحنى معادلته ص = س^{٢}

الإحداثي السيني للنقطة	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	−٤	−٢	٠	٢	٤	٦

يبيّن المخطط أدناه الميل (م) عند كل نقطة من هذه النقاط:



يمكنك أن تلاحظ العلاقة بين الإحداثي السيني وقيمة الميل في كل حالة، يساوي الميل الإحداثي السيني مضروبًا في ٢

هذا يعني أن الميل عند أي نقطة على المنحنى $ص = د(س) = س^{٢}$ يساوي $٢س$

توجد ثلاث صيغ لكتابة الميل:

١) إذا كان $ص = س^{٢}$ فإن الميل هو $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

٢) إذا كان $د(س) = س^{٢}$ فإن الميل هو $د'(س) = ٢س$

٣) إذا كان $د(س) = س^{٢}$ فإن الميل هو $\frac{ء}{ءس}(س^{٢}) = ٢س$

تسمى $\frac{ءص}{ءس}$ المشتقة الأولى لـ ص بالنسبة إلى س

كذلك تسمى $د'(س)$ المشتقة الأولى بالنسبة إلى س

إذا كان $ص = د(س)$ منحنى دالة، إذًا تعرف **المشتقة الأولى** **first derivative** على أنها **دالة الميل** **gradient function** للمنحنى.

مُساعَدة

يرمز أحيانًا إلى مشتقة معادلة المنحنى بـ $ص'$

اشتقاق دوال القوة

لقد اكتشفت أن مشتقة $د(س) = س^{٢}$ هي $د'(س) = ٢س$

يمكنك، من خلال رسم مماسات دقيقة على منحنى $د(س) = س^{٣}$، أن تكتشف أن مشتقتها هي $د'(س) = ٣س^{٢}$

بطريقة مماثلة، مشتقة $د(س) = س^{٤}$ هي $د'(س) = ٤س^{٣}$ وأن مشتقة $د(س) = س^{٥}$ هي $د'(س) = ٥س^{٤}$

يمكنك ملاحظة وجود علاقة جبرية بين دالة القوة $د(س)$ ومشتقتها $د'(س)$

تقود هذه النتائج إلى قاعدة القوة (القاعدة العامة لاشتقاق دوال القوة).

نتيجة ١

$\frac{ء}{ءس}(س^{ن}) = ن\,س^{ن-١}$

وهذا صحيح لأي قوة حقيقية ن

من الأمثلة على ذلك:

- إذا كان $ص = س^{١٠}$، فإن $\frac{ءص}{ءس} = ١٠ \times س^{١٠-١} = ١٠س^{٩}$
- إذا كان $د(س) = س^{\frac{٣}{٢}}$، فإن $د'(س) = \frac{٣}{٢} \times س^{\frac{٣}{٢}-١} = \frac{٣}{٢}س^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{س}$
- إذا كان $د(س) = س^{٣}$، فإن $\frac{ء}{ءس}(س^{٣}) = ٣س^{٢}$

مثـــال ١

أوجد مشتقة كل من الصيغ الآتية:

أ $س^{٧}$

ب $\frac{١}{س^{٢}}$

ج $د(س) = \sqrt{س}$

د $ص = ٢$

هـ $ص = س$

الحــلّ:

أ $\frac{ءَ}{ءَس}(س^{٧}) = ٧س^{٧-١}$ — اضرب في القوة ٧ ثم اطرح ١ من القوة

$= ٧س^{٦}$

ب $\frac{ءَ}{ءَس}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right) = \frac{ءَ}{ءَس}\left(س^{-٢}\right)$ — اكتب $\frac{١}{س^{٢}}$ على الشكل $س^{-٢}$

$= -٢س^{-٢-١}$ — اضرب في القوة −٢ ثم اطرح ١ من القوة

$= -٢س^{-٣}$ — اكتب الإجابة في صيغة السؤال نفسها

$= -\frac{٢}{س^{٣}}$

ج $د(س) = \sqrt{س}$ — اكتب $\sqrt{س}$ على الشكل $س^{\frac{١}{٢}}$

$د(س) = س^{\frac{١}{٢}}$ — اضرب في القوة $\frac{١}{٢}$ ثم اطرح ١ من القوة

$د'(س) = \frac{١}{٢}س^{\frac{١}{٢}-١}$

$= \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

د $ص = ٢$ — كتابة ٢ على الشكل $٢س^{٠}$

$ص = ٢س^{٠}$ — اضرب في القوة ٠ ثم اطرح ١ من القوة

$\frac{ءَص}{ءَس} = ٢ \times ٠ \times س^{٠-١}$

$= ٠$

هـ $ص = س$

$ص = ١س^{١}$ — اكتب س على الشكل $١س^{١}$

$\frac{ءَص}{ءَس} = ١ \times ١س^{١-١}$ — اضرب في القوة ١ ثم اطرح ١ من القوة

$= ١س^{٠}$ — استخدم $س^{٠} = ١$

$= ١$

مُساعَدة

مقام أي مقدار جبري نسبي لا يمكن أن يساوي الصفر.

نتيجة ٢

إذا كانت د (س) = أ، فإن د′ (س) = ٠

إذا كانت د (س) = س، فإن د′ (س) = ١

قانون الضرب في ثابت

نتيجة ٣

إذا كان ك عددًا ثابتًا، د (س) دالة، فإن: $\frac{ى}{ى\text{س}}$ [ك د(س)] = ك $\frac{ى}{ى\text{س}}$ [د(س)]

قانون الجمع والطرح

مُساعَدة

إذا كانت

د (س) = هـ (س) × ق (س)

فإن

د′ (س) $\neq$ هـ′ (س) × ق′ (س)

وإذا كانت

د(س) = هـ (س) ÷ ق (س)

فإن

د′ (س) $\neq$ هـ′ (س) ÷ ق′ (س)

نتيجة ٤

إذا كانت د (س) = هـ (س) + ق (س) فإن د′ (س) = هـ′ (س) + ق′ (س)

إذا كانت د (س) = هـ (س) − ق (س) فإن د′ (س) = هـ′ (س) − ق′ (س)

مثـــال ٢

أوجد المشتقة بالنسبة إلى س:

أ ٤س^{٣}

ب $\frac{٣}{\text{س}^{٢}}$

ج ٤س^{٣} − $\frac{٣}{\text{س}^{٢}}$ + $\frac{١}{٤}$ س^{٨}

الحـــلّ:

أ $\frac{ى}{ى\text{س}}$ (٤س^{٣}) = ٤ $\frac{ى}{ى\text{س}}$ (س^{٣}) ...... باستخدام قانون الضرب في ثابت

= ٤ × ٣س$^{٣ - ١}$

= ١٢س^{٢}

ب $\frac{ى}{ى\text{س}}$ $\left(\frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)$ = $\frac{ى}{ى\text{س}}$ (٣س$^{-٢}$) ...... بكتابة $\frac{٣}{\text{س}^{٢}}$ على الشكل ٣س$^{-٢}$

= ٣ $\frac{ى}{ى\text{س}}$ (س$^{-٢}$) ...... باستخدام قانون الضرب في ثابت

= ٣ × (−٢) س$^{-٢ - ١}$

= −٦س$^{-٣}$ = −$\frac{٦}{\text{س}^{٣}}$

ج $\frac{ى}{ىس}\left(٤س^{٣} - \frac{٣}{س^{٢}} + \frac{١}{٤}س^{٨}\right)$ استخدم الناتج من الجزئية أ والجزئية ب في مشتقة الحدَّين الأول والثاني

$= ١٢س^{٢} - \left(-\frac{٦}{س^{٣}}\right) + \frac{ى}{ىس}\left(\frac{١}{٤}س^{٨}\right)$

$= ١٢س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} + \frac{١}{٤}\frac{ى}{ىس}\left(س^{٨}\right)$

$= ١٢س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} + \frac{١}{٤} \times ٨س^{٧}$

$= ١٢س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} + ٢س^{٧}$

مثـــال ٣

إذا كان د(س) $= \frac{٤}{\sqrt{س}} + ٥$ ، فأوجد د$'$(س)

الحـــلّ:

د(س) $= \frac{٤}{\sqrt{س}} + ٥$ اكتب $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ على الشكل $٤س^{-\frac{١}{٢}}$

$= ٤س^{-\frac{١}{٢}} + ٥$

د$'$(س) $= ٤ \frac{ى}{ىس}\left(س^{-\frac{١}{٢}}\right) + \frac{ى}{ىس}(٥)$

$= ٤ \times \left(-\frac{١}{٢}\right) \times س^{-\frac{١}{٢} - ١} + ٠$

$= -٢س^{-\frac{٣}{٢}}$

$= -\frac{٢}{س^{\frac{٣}{٢}}} = -\frac{٢}{\sqrt{س^{٣}}}$

مثـــال ٤

أوجد د$'$(س) لكل ممّا يأتي:

أ د(س) = (س + ٥)(س − ٣)

ب د(س) $= \frac{س^{٢} + ٢س - ٤}{س}$

الحـــلّ:

أ د(س) = (س + ٥)(س − ٣) فكّ الأقواس

$= س^{٢} + ٥س - ٣س - ١٥$ اجمع الحدود المتشابهة

$= س^{٢} + ٢س - ١٥$

∴ د$'$(س) $= \frac{ى}{ىس}(س^{٢} + ٢س - ١٥)$

$= ٢س + ٢$

ب $د(س) = \frac{س^{٢} + ٢س - ٤}{س}$ ...... اقسم كل حد في البسط على المقام

$د(س) = \frac{س^{٢}}{س} + \frac{٢س}{س} - \frac{٤}{س}$

$= س + ٢ - ٤س^{-١}$

$\therefore د'(س) = \frac{د}{د س}\left(س + ٢ - ٤س^{-١}\right)$

$= ١ + ٠ - ٤ \times (-١)\, س^{-٢}$

$= ١ + ٤س^{-٢} = ١ + \frac{٤}{س^{٢}}$

تمارين ٢-١

١) أوجد المشتقة بالنسبة إلى س:

أ $س^{٥}$ ب $٥\,س$ ج $س^{-٤}$

د $\frac{١}{س}$ هـ ٨ و $\sqrt[٣]{س^{٢}}$

ز $٢س^{٢} \times ٣\,س^{٢}$ ح $\frac{١١س^{٥}}{٣س^{٢}}$

٢) أوجد $د'(س)$ لكل ممّا يأتي:

أ $د(س) = ٢س^{٤}$ ب $د(س) = ٣س^{٥}$ ج $د(س) = \frac{١}{٢}س^{٦}$

د $د(س) = \frac{٣}{س}$ هـ $د(س) = \frac{٥}{٣س^{٢}}$ و $د(س) = -٢$

ز $د(س) = \frac{٤س}{\sqrt{س}}$ ح $د(س) = \frac{٢\sqrt{س}}{٣س^{٢}}$

٣) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل ممّا يأتي:

أ $ص = ٥\,س^{٢} - س + ١$ ب $ص = ٢س^{٣} + ٨س - ٤$ ج $ص = ٧ - ٣س - ٥س^{٢}$

د $ص = (س + ٥)(س - ٤)$ هـ $ص = (٢س^{٢} - ٣)^{٢}$ و $ص = \frac{٢س - ٥}{س}$

ز $ص = ٧س^{٢} - \frac{٣}{س} + \frac{٢}{س^{٢}}$ ح $ص = ٣س + \frac{٥}{س} - \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ط $ص = \frac{٤س^{٢} + ٣س - ٢}{\sqrt{س}}$

٢-٢ الميل عند نقطة

تعلمت كيفية إيجاد مشتقة الدالة، وتُعرف مشتقة الدالة أيضًا بدالة الميل.

يمكنك إيجاد الميل عند نقطة على منحنى من خلال تعويض الإحداثي السيني للنقطة في دالة الميل.

نتيجة ٥

لإيجاد الميل عند النقطة س = أ على منحنى ص = د(س) نوجد قيمة د′(أ)
أو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = أ

استكشف ٢

تبيّن كل من الجداول أدناه الميل عند خمس نقاط في أربعة تمثيلات مختلفة. ادرس الجداول ثم زاوج معادلة كل منحنى بواحدة من دوال الميل الآتية:

أ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥$

ب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^٢$

ج $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{١}{\text{س}^٢}$

د $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^٣$

١) للمنحنى الذي معادلته ص = $\text{س}^٣$

الإحداثي السيني للنقطة	١−	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	٣	٠	٣	١٢	٢٧

٢) للمنحنى الذي معادلته ص = $\text{س}^٤$

الإحداثي السيني للنقطة	١−	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	٤−	٠	٤	٣٢	١٠٨

٣) للمنحنى الذي معادلته ص = ٥س

الإحداثي السيني للنقطة	١−	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	٥	٥	٥	٥	٥

٤) للمنحنى الذي معادلته ص = $\frac{١}{\text{س}}$

الإحداثي السيني للنقطة	٢−	١−	١	٢	٣
ميل المنحنى	$-\frac{١}{٤}$	١−	١−	$-\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٩}$

مثال ٥

إذا كان د(س) = ٨ + ١١س − س^{٢}، فأوجد:

أ) د$'$(س)

ب) ميل المنحنى ص = د(س) عند:

١) س = ٤   ٢) س = −٣

الحلّ:

أ) د$'$(س) = $\frac{ی}{ی س}$(٨ + ١١س − س^{٢}) ← أوجد مشتقة كل حدّ ثم اجمع أو اطرح

= ٠ + ١١ − ٢س

= ١١ − ٢س

ب) ١) د$'$(٤) = ١١ − ٢ × ٤ = ٣ ← بالتعويض عن س = ٤ في د$'$(س)

عند س = ٤، الميل يساوي ٣

٢) د$'$(−٣) = ١١ − ٢ × −٣ = ١٧ ← بالتعويض عن س = −٣ في د$'$(س)

عند س = −٣، الميل يساوي ١٧

مثال ٦

منحنى معادلته ص = د(س) = ٣س^{٢} + ١٢س − ٧

أوجد إحداثيات النقطة (س ، ص) على المنحنى حيث الميل يساوي الصفر.

الحلّ:

∵ د$'$(س) = ٠ ← د$'$(س) = ٠ عند النقطة (س ، ص) حيث الميل يساوي الصفر

$\frac{ی}{ی س}$(٣س^{٢} + ١٢س − ٧) = ٠

٣ × ٢س + ١٢ − ٠ = ٠

٦س + ١٢ = ٠

س = −٢ ← القيمة س = −٢ هي الإحداثي السيني للنقطة (س ، ص) حيث الميل يساوي الصفر

ص = ٣س^{٢} + ١٢ س − ٧ ← عوّض س = −٢ في معادلة المنحنى ص = د(س) لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة

= ٣(−٢)^{٢} + ١٢(−٢) − ٧

= ١٢ − ٢٤ − ٧

= −١٩

ميل المنحنى يساوي الصفر عند (−٢، −١٩)

تمارين ٢-٢

١) أوجد ميل المنحنيات ص = د (س) الآتية عند قيم س المعطاة:

أ) $د(س) = ٢س^{٢} - س + ٢$ عند س = ٢

ب) $د(س) = ١٠س - ٢س^{٢}$ عند س = ٣

ج) $د(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} - ٥س + ١$ عند س = ٣

د) $د(س) = ٣س^{٣} - ٤س^{٢} + س$ عند س = ٠

هـ) $د(س) = ١١س + ٢س^{٣} - ٥$ عند س = −٢

و) $د(س) = ٧س - \frac{١٢}{س}$ عند س = ٢

ز) $د(س) = ٥س^{٩} - ٤٠س - ٧$ عند س = ١

ح) $د(س) = \frac{١٦}{\sqrt{س}} + \frac{س}{٣}$ عند س = ٩

٢) أوجد الإحداثيات السينية والصادية للنقطة على منحنى:

أ) $ص = ٨س - س^{٢}$ حيث الميل يساوي −٢

ب) $ص = ٢س^{٢} + ٥س - ٣$ حيث الميل يساوي ٩

ج) $ص = ٦س^{٢} - ٤س + ٧$ حيث الميل يساوي ٢٠

د) $ص = ١٠ - ٣٢س - ٤س^{٢}$ حيث الميل يساوي ٠

هـ) $ص = ١٩ - ٣٦\sqrt{س}$ حيث الميل يساوي −٩

و) $ص = (٣س - ٢)(٢س - ٣)$ حيث الميل يساوي −٢

٣) لمنحنى $د(س) = أس^{٣} - ٣س^{٢} + ٤$ ميل يساوي ٠ عند النقطة حيث س = ٣ أوجد قيمة أ

٤) لمنحنى $ص = -٢س + ٤س^{٢} - بس^{٣}$ ميل يساوي ٢٠ عند النقطة حيث س = ٢، أوجد قيمة ب

٥) ميل منحنى معادلته $د(س) = \frac{٢}{٣}س^{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢} - ١٩س$ يساوي ١ عند نقطتَين:

أ) بيّن أن الإحداثي السيني لإحدى النقطتَين يساوي ٤

ب) أوجد الإحداثي السيني للنقطة الأخرى حيث الميل يساوي ١

٢-٣ معادلة المماس

الميل عند نقطة على المنحنى يساوي ميل المماس عند تلك النقطة.

إذًا، إذا كنا نعرف ميل المماس، فيمكننا أن نجد أيضًا معادلته في الصيغة ص = م س + جـ، حيث (م) الميل، جـ المقطع الصادي.

وبذلك تكون صيغة معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هي ص = م س + جـ، م = د/($س_١$)، جـ = $ص_١$ − م $س_١$، حيث ($س_١$، $ص_١$) تمثل إحداثيات نقطة التماس.

نتيجة ٦

للمنحنى ص = د (س)، إذا كانت قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ هي الميل (م) عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$)، فإن معادلة مماس المنحنى عند تلك النقطة تعطى من خلال إحدى الصيغ التالية:

- ص = م س + جـ، حيث م = د/ ($س_١$)، جـ = $ص_١$ − م $س_١$
- ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)

مثـــال ٧

د(س) = ٤$س^٣$ − ٩$س^٢$ + ٣ س معادلة منحنى، أوجد:

أ د/(س)

ب ميل المنحنى عند س = ١

ج معادلة مماس المنحنى د(س) = ٤$س^٣$ − ٩$س^٢$ + ٣س عند س = ١

الحــلّ:

أ د/(س) = $\frac{ء}{ءس}$(٤$س^٣$ − ٩$س^٢$ + ٣س) ······ أوجد المشتقة بالنسبة إلى س لإيجاد دالة الميل

= ٤ × ٣$س^٢$ − ٩ × ٢س + ٣

= ١٢$س^٢$ − ١٨س + ٣

ب د/(١) = ١٢ × $(١)^٢$ − ١٨ × ١ + ٣ = −٣ ······ بالتعويض عن س = ١ في دالة الميل

∴ عند س = ١، الميل يساوي −٣

ج ص = ٤ × $(١)^٣$ − ٩ × $(١)^٢$ + ٣ × ١ = −٢ ······ بالتعويض عن س = ١ في معادلة المنحنى لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة

ص = −٣س + جـ

جـ = ص + ٣س ······ ميل المماس يساوي −٣ ويمر بالنقطة (١، −٢)

جـ = −٢ + ٣ × ١

= ١

ص = −٣س + ١ أو ص = ١ − ٣س ······ معادلة المماس

مثـــال ٨

رُسم مماس على المنحنى د(س) = س^{٢} − ٤س − ٥ عند النقطة (٠، −٥)،
أوجد معادلة هذا المماس.

الحـــلّ:

د′(س) = $\frac{ى}{ى س}$ (س^{٢} − ٤ س − ٥) ········ أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س لإيجاد دالة الميل

= ٢س − ٤

د′(٠) = ٢ × ٠ − ٤ = −٤ ········ بالتعويض عن س = ٠ في دالة الميل

∴ عند س = ٠، الميل يساوي −٤

جـ = −٥ ········ المماس يمر بالنقطة (٠، −٥) إذًا جـ = −٥

ص = −٤س − ٥ ········ معادلة المماس

مُساعَدة

إذا كان المماس يمر بالنقطة (٠، ص) فإن الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) يساوي قيمة الإحداثي الصادي.

مثـــال ٩

د(س) = ٨ − $\frac{٨}{س}$ معادلة منحنى، أوجد:

أ قيمة ب، إذا كانت النقطة $\left(\frac{١}{٢}\text{، ب}\right)$ تقع على المنحنى.

ب دالة الميل للمنحنى.

ج معادلة مماس المنحنى عند النقطة حيث س = $\frac{١}{٢}$

الحـــلّ:

أ ص = ٨ − $\frac{٨}{س}$ ········ عوّض س = $\frac{١}{٢}$ في معادلة المنحنى

ب = ٨ − ٨ ÷ $\frac{١}{٢}$

= −٨

ب د′(س) = $\frac{ى}{ى س}$ $\left(٨ - \frac{٨}{س}\right)$ ········ أوجد مشتقة كل حدّ واستخدم قانونَي الجمع أو الطرح

= ٠ − ٨ × (−١) س$^{-٢}$

= $\frac{٨}{س^{٢}}$

ج $د'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 32$ ..... بالتعويض عن س = $\frac{1}{2}$ في صيغة د′(س)

ص = ٣٢س + جـ

جـ = ص − ٣٢س ..... ميل المماس يساوي ٣٢ ويمر بالنقطة $\left(\frac{1}{2}، -8\right)$

جـ = −٨ − ٣٢$\left(\frac{1}{2}\right)$

= −٢٤

ص = ٣٢س − ٢٤ ..... اكتب معادلة المماس

تمارين ٢-٣

١) رُسم مماس على منحنى معادلته ص = س^2 عند النقطة (٢، ٤)، أوجد:

أ د′(س)

ب ميل المماس.

ج معادلة هذا المماس في الصيغة ص = م س + جـ

٢) رُسم مماس على منحنى معادلته ص = ٦ + ٨س − ٢س^2 عند النقطة (٠، ٦)، أوجد:

أ د′(س)

ب ميل المماس.

ج معادلة هذا المماس في الصيغة ص = م س + جـ

٣) أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند النقاط المعطاة:

أ د(س) = س^3 + ٧ عند النقطة على المنحنى حيث س = ١

ب د(س) = $\frac{1}{2}$س^2 + س − ٢ عند النقطة على المنحنى حيث س = ٢

ج د(س) = ٢٠ − ٢س − س^2 عند النقطة على المنحنى حيث س = ٠

د د(س) = س^4 − ٣ س عند النقطة على المنحنى حيث س = ١

هـ د(س) = $\frac{1}{س}$ + س عند النقطة على المنحنى حيث س = −١

و د(س) = (٢س + ٣)(س − ٦) عند النقطة على المنحنى حيث س = ٥

٤) بيّن أن الميل على المنحنى ص = س^2 + ٩ يساوي الميل على المنحنى ص = س^2 − ٩ لكل قيم س

٥) رُسم مماس على المنحنى ص = س^{٢} − ١٢س + ٤٣ عند النقطة (٥ ، ٨).

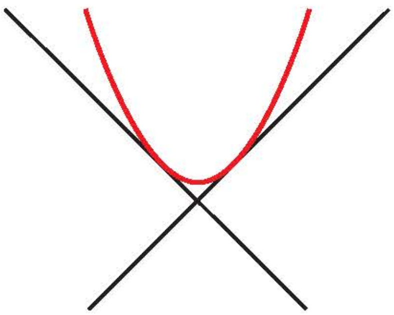
أ بيّن أن ميل المماس يساوي −٢

ب أوجد إحداثيات النقطة التي يقطع هذا المماس عندها المحور السيني.

٦) رُسم مماسان على المنحنى ص = س^{٢} − ٣س + ٨ عند النقطتَين حيث س = ١، س = ٢

يبيّن الرسم الآتي أجزاء من المنحنى والمماسَين.

أوجد معادلة كل من المماسَين.



٧) يمكن حساب المسافة التي قطعها جزيء انطلاقًا من نقطة البداية ص متر، من خلال الصيغة ص = ٣س − ٠٫٠٠١ س^{٢}، حيث س يمثل الزمن بالثواني.

أ كم يبعد الجزيء عن نقطة البداية بعد ١٠ ثوانٍ؟

ب تعبّر دالة الميل $\left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)$ عن سرعة الجزيء عند أية نقطة خلال رحلته، أوجد:

١) سرعة الجزيء.

٢) سرعة الجزيء بعد ٢٠ ثانية.

مُساعَدة

السرعة هي قياس التغير في المسافة (ص) لكل وحدة من الزمن (س)، لذا فإن السرعة تساوي مشتقة المسافة.

٢-٤ المشتقة الثانية

عند إيجاد مشتقة ص بالنسبة إلى س، نحصل على $\frac{ءص}{ءس}$

تسمى $\frac{ءص}{ءس}$ **المشتقة الأولى first derivative** لـ ص بالنسبة إلى س

وإذا أوجدنا مشتقة $\frac{ءص}{ءس}$ بالنسبة إلى س، نحصل على $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$، والتي نكتبها عادة على الشكل $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$

وباستخدام ترميز الدوال يكون رمز المشتقة الأولى هو د′(س) والمشتقة الثانية هو د″(س)

تسمى كل من $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$، د″(س) **المشتقة الثانية second derivative** لـ ص بالنسبة إلى س

فمثلًا ص = س^٣ + ٥ س^٢ − ٣س + ٢ أو د(س) = س^٣ + ٥ س^٢ − ٣س + ٢

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^٢ + ١٠س − ٣ أو د′(س) = ٣س^٢ + ١٠س − ٣

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٦س + ١٠ أو د″(س) = ٦س + ١٠

مثال ١٠

إذا كانت ص = د(س) = ٢س^٣ − $\frac{١}{٢}$ س^٢ + ٧س − ١١

أ أوجد د′(س)

ب أوجد د″(س)

ج عند س = −١ :

١) أوجد قيمة المشتقة الأولى.

٢) حدّد ما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة أو سالبة.

الحــلّ:

أ د′(س) = $\frac{ء}{ءس}$(٢س^٣ − $\frac{١}{٢}$ س^٢ + ٧س − ١١) أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س

= ٢ × ٣س^٢ − $\frac{١}{٢}$ × ٢س + ٧ − ٠

= ٦س^٢ − س + ٧

ب د″(س) = $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ أوجد مشتقة د′(س) بالنسبة إلى س

= $\frac{ء}{ءس}$(٦س^٢ − س + ٧)

= ٦ × ٢س − ١ + ٠

= ١٢س − ١

ج ١) $د'(س) = ٦س^٢ - س + ٧$ ← عوّض س = −١ في المشتقة الأولى

$د'(-١) = ٦ \times (-١)^٢ - (-١) + ٧$

$= ٦ + ١ + ٧$

$= ١٤$

٢) $د''(-١) = ١٢س - ١$ ← عوّض س = −١ في المشتقة الثانية

$= ١٢ \times (-١) - ١$

$= -١٣$

قيمة المشتقة الثانية سالبة عند س = −١

مثـــال ١١

أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة $د(س) = ٧س^٣ + ٢س^٢ - ٥س + ١$ تساوي ١١

الحــلّ:

$د(س) = ٧س^٣ + ٢س^٢ - ٥س + ١$ ← أوجد مشتقة د(س) لإيجاد المشتقة الأولى

$د'(س) = ٢١س^٢ + ٤س - ٥$ ← أوجد مشتقة د′(س) لإيجاد المشتقة الثانية

$د''(س) = ٤٢س + ٤$

$٤٢س + ٤ = ١١$ ← المشتقة الثانية تساوي ١١

$س = \frac{١١ - ٤}{٤٢}$

$= \frac{١}{٦}$

تمارين ٢-٤

١) أوجد المشتقة الثانية لكل ممّا يأتي:

أ) $ص = ٤س^٣ - ٣س^٢ - ٩س + ٦$

ب) $ص = \frac{٢}{٣}س^٣ + \frac{٥}{٢}س^٢ - ١٥$

ج) $ص = ٢٠ - ٧س + ٣س^٢ - ٨س^٣$

د) $ص = ٢س^٢ + ٧س - ٣$

هـ) $د(س) = \frac{٥}{٦}س^٣ + ١٧س$

و) $د(س) = ١ - \frac{٣}{٨}س^٤ + س^٥$

ز) $د(س) = \frac{١٠}{س}$

ح) $د(س) = (٣س^٢ - ٢س + ٦)(س + ٤)$

٢) إذا كان د(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س + ٤، فأوجد قيمة:

أ د(٢)

ب د$'$(٢)

ج د$''$(٢)

٣) أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة:

أ د(س) = ٨س^{٣} + ٥س^{٢} − ١٢س + ٢ تساوي ٢٦

ب د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} + ٨س^{٢} تساوي ١٠

ج د(س) = ٦ س^{٣} − ٣س^{٢} + س مساوية للمشتقة الثانية للدالة
ف(س) = ٢س + ٨س^{٢} − ٤س^{٣}

٤) قيمة المشتقة الثانية للدالة ص = ٧س^{٣} − أ س^{٢} + ٥ س تساوي ٤ عند س = ٢
أوجد قيمة الثابت أ

٥) قيمة المشتقة الثانية للدالة د(س) = ٣٠ − ٢س + ٣س^{٢} − س^{٣} تساوي ٨ عند س = أ، أوجد:

أ قيمة الثابت أ

ب ميل المنحنى د(س) = ٣٠ − ٢س + ٣س^{٢} − س^{٣} عند النقطة حيث س = ٣أ

٦) يمكن حساب المسافة التي قطعها جزيء انطلاقًا من نقطة البداية ص متر، من خلال الصيغة ص = ٢س + ١٥س^{٢} − $\frac{٢}{٣}$ س^{٣}، حيث س يمثل الزمن بالثواني.

أ كم يبعد الجزيء عن نقطة البداية بعد ٣ ثوانٍ؟

ب تعطي المشتقة الثانية $\left(\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}\right)$ صيغة لتسارع الجزيء عند أية نقطة خلال رحلته، أوجد:

١) تسارع الجزيء.

٢) تسارع الجزيء بعد ٥ ثوانٍ.

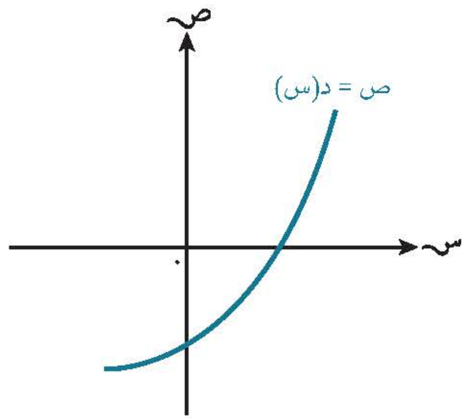
مُساعَدة

يقيس التسارع التغير في السرعة لكل وحدة زمنية، لذا فإن التسارع يساوي المشتقة الأولى للسرعة، أي أنه يساوي المشتقة الثانية للمسافة.

٢-٥ الدوال المتزايدة والمتناقصة

استكشف ٣

١) يبيّن التمثيل الآتي منحنى ص = د(س)



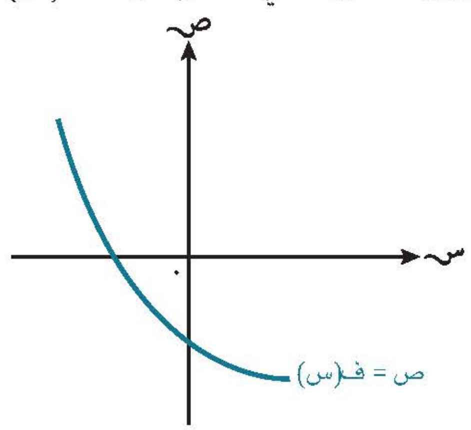
أكمل العبارات الآتية عن ص = د(س) في المجال المبيّن في المخطط.

كلما تزايدت قيمة س، ...... قيمة ص

إشارة الميل عند أي نقطة هي دائمًا ....

هل الدالة متزايدة أم متناقصة؟

٢) يبيّن التمثيل الآتي منحنى ص = ف(س)



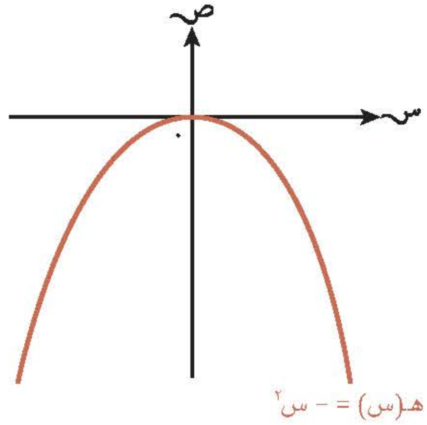
أكمل العبارات الآتية عن ص = ف(س) في المجال المبيّن في المخطط.

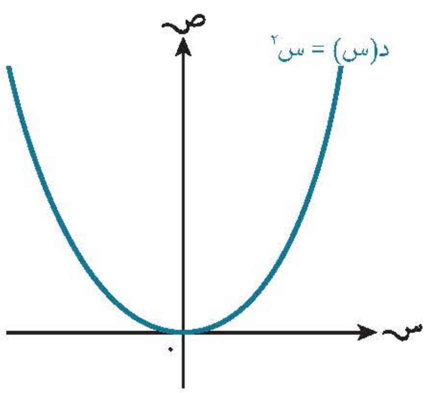
كلما تزايدت قيمة س، ...... قيمة ص

إشارة الميل عند أي نقطة هي دائمًا ....

هل هذا النوع من الدوال هو دوال متزايدة أم متناقصة؟

٣) خذ الآن منحنيَي الدالتَين د(س) = س^٢، هـ (س) = – س^٢، وهما مرسومان في المخطط أدناه.





أكمل العبارات الآتية:

أ د (س) = س^٢ متزايدة في الفترة ......

ب د (س) = س^٢ متناقصة في الفترة ......

ج هـ (س) = – س^٢ متزايدة في الفترة ......

د هـ (س) = – س^٢ متناقصة في الفترة ......

من خلال استكشف ٣ ، تكون الدالة د (س) متزايدة إذا تزايدت قيم د (س) كلما تزايدت قيم س، إذا كان د (س١) < د (س٢) لكل س١ < س٢

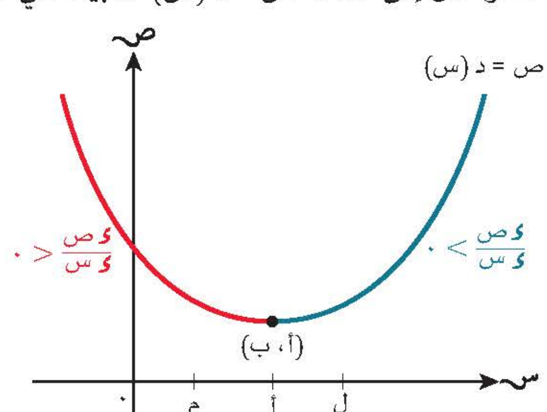
بطريقة مماثلة، تكون الدالة د (س) متناقصة إذا تناقصت قيم د (س) كلما تزايدت قيم س، إذا كان د (س١) > د (س٢) لكل س١ < س٢

كما يمكننا دراسة تزايد دالة عند نقطة، ونعني بذلك أن قيم الدالة متزايدة **حول** هذه النقطة.

إذا كان ميل الدالة موجبًا عند نقطة ما تكون الدالة متزايدة عند تلك النقطة.

بالطريقة نفسها تكون دالة متناقصة عند نقطة ما، **إذا كان ميل الدالة سالبًا عند تلك النقطة.**

انظر الآن إلى الدالة ص = د (س) المبيّنة في التمثيل البياني.



يمكننا تقسيم التمثيل البياني إلى قسمَين مختلفَين:

- تتزايد د (س) عندما س $>$ أ، أي أن د′ (س) $>$ ٠
- تتناقص د (س) عندما س $<$ أ، أي أن د′ (س) $<$ ٠

أي أن:

- تتزايد د (س) عند س = ل إذا كان د′ (ل) $>$ ٠
- تتناقص د (س) عند س = م إذا كان د′ (م) $<$ ٠

أما النقطة التي يلتقي عندها القسمان (س = أ) فيكون ميل المنحنى عندها صفرًا، أي

د′ (أ) = ٠

نتيجة ٧

تكون الدالة ص = د (س) في الفترة المعطاة لـ س:

- متزايدة إذا كان د′ (س) = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $>$ ٠ على كامل الفترة.
- متناقصة إذا كان د′ (س) = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $<$ ٠ على كامل الفترة.

مثــال ١٢

بيّن أن د (س) = س^{٢} − ٦ س + ١١:

أ متناقصة عند س = ١

ب متزايدة في الفترة ٤ $\leq$ س $\leq$ ١٠

الحــلّ:

د(س) = س^{٢} − ٦ س + ١١ .... أوجد المشتقة

د′(س) = ٢س − ٦

أ د′(س) = ٢س − ٦ .... عوّض س = ١ في المشتقة

د′(١) = ٢ × ١ − ٦ = −٤ .... اكتب ما تعني نتيجتك

∵ د′(١) $<$ ٠

∴ د (س) = س^{٢} − ٦س + ١١ متناقصة عند س = ١

ب د′(س) = ٢س − ٦ .... عوّض عن س = ٤، س = ١٠ في المشتقة

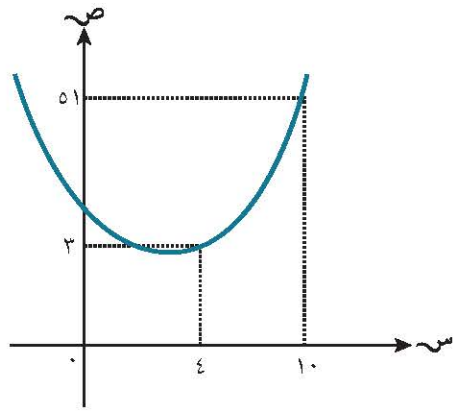
د′(٤) = ٢ × ٤ − ٦ = ٢

د′(١٠) = ٢ × ١٠ − ٦ = ١٤

∴ د′(٤) $>$ ٠ ، د′(١٠) $>$ ٠

∴ تكون الدالة د (س) في الفترة

$٤ \leq$ س ≤ ١٠ متزايدة



إيجاد الإحداثي الصادي لنقطتَي النهاية للفترة يؤكد كذلك أن الدالة متزايدة.

د (٤) = (٤)^٢ − ٦ × ٤ + ١١ = ٣

د(١٠) = (١٠)^٢ − ٦ × ١٠ + ١١ = ٥١

مثال ١٣

أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة د (س) = ٢١ + ٤س − س^٢

أ متناقصة.

ب متزايدة.

الحلّ:

أ د (س) = ٢١ + ٤س − س^٢ — أوجد المشتقة

د$'$(س) = ٤ − ٢س

٤ − ٢س $<$ ٠ — تتناقص د(س) عندما د$'$(س) $<$ ٠

−٢س $<$ −٤

س $>$ ٢

د (س) = ٢١ + ٤ س − س^٢ متناقصة عندما س $>$ ٢

ب ٤ − ٢ س $>$ ٠ — تتزايد د(س) عندما د$'$ (س) $>$ ٠

−٢س $>$ −٤

س $<$ ٢

د (س) = ٢١ + ٤ س − س^٢ متزايدة عندما س $<$ ٢

مُساعَدة

تذكّر أنه يجب عكس إشارة التباين عند ضرب أو قسمة طرفَي المتباينة بعدد سالب.

تمارين ٢-٥

١) حدد ما إذا كانت كل من الدوال الآتية متزايدة أو متناقصة عند النقطة أو الفترة المعطاة:

أ ص = س^{٢} − ٦ س عند س = ٤

ب ص = س^{٢} − ٨ س + ١٠ عند س = ٣

ج ص = ٦ − س − س^{٢} عند س = ١

د د(س) = ٢ س^{٢} + ٥ س + ١ عند س = −١

هـ د(س) = ١٧ + ٣ س − $\frac{١}{٢}$س^{٢} عند س = −$\frac{١}{٢}$

و د(س) = (٥ − ٢ س)(٨ + س) عند س = −$\frac{٥}{٢}$

ز د(س) = ٣س^{٢} − ١٤ س + ٩ في الفترة ٣ ≤ س ≤ ٩

ح د(س) = ٥ − ١٥س − ٣س^{٢} في الفترة −١ ≤ س ≤ ٢

٢) أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة:

أ د(س) = س^{٢} + ١٠ س − ١٢ متناقصة.

ب د(س) = ٥ س^{٢} − ١١ س + ٣ متزايدة.

ج د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س − ٥ متزايدة.

د د(س) = ٨ − ٢س − $\frac{٦}{٥}$س^{٢} متناقصة.

هـ د(س) = ١ − ١٤س − $\frac{٧}{٢}$س^{٢} متزايدة.

و د(س) = (٢س − ٥)(٣س + ٤) متناقصة.

٣) تنتج شركة تصنيع س سلعة في اليوم. يمكن كتابة دالة الربح ل(س) من خلال الصيغة ل(س) = ٠,٠٠٤ س^{٢} − ٠,٦ س ، أوجد قيم س التي تجعل الربح متزايدًا.

٤) بيّن أن الدالة د(س) = س − ٨ − س^{٢} متناقصة في الفترة ١ ≤ س ≤ ٦

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

ميل المنحنى

- تمثل $\frac{ى ص}{ى س}$ ميل المنحنى ص = د(س)

قوانين الاشتقاق

- قانون القوة: $\frac{ى}{ى س}$(سⁿ) = ن سⁿ⁻¹
- قانون الضرب في ثابت: $\frac{ى}{ى س}$[ك د(س)] = ك $\frac{ى}{ى س}$[د(س)]
- قانون الجمع: $\frac{ى}{ى س}$[د(س) + ف(س)] = $\frac{ى}{ى س}$[د(س)] + $\frac{ى}{ى س}$[ف(س)]
- قانون الطرح: $\frac{ى}{ى س}$[د(س) − ف(س)] = $\frac{ى}{ى س}$[د(س)] − $\frac{ى}{ى س}$[ف(س)]

لإيجاد الميل عند النقطة س = أ على منحنى ص = د(س) نوجد قيمة د′(أ)

أو $\frac{ى ص}{ى س}$ عند س = أ

المماس على منحنى

للمنحنى ص = د(س)، إذا كانت قيمة $\frac{ى ص}{ى س}$ هي الميل (م) عند النقطة (س$_1$، ص$_1$)، فإن معادلة مماس المنحنى عند تلك النقطة تعطى من خلال الصيغة:

- ص = م س + جـ، حيث م = د′(س$_1$)، جـ = ص$_1$ − م س$_1$
- ص − ص$_1$ = م(س − س$_1$)

المشتقة الثانية

نرمز إلى المشتقة الثانية للدالة ص = د(س) بالآتي:

- $\frac{ى}{ى س}\left(\frac{ى ص}{ى س}\right) = \frac{ى^2 ص}{ى س^2}$ = د″(س)

الدوال المتزايدة والمتناقصة

تكون الدالة ص = د(س) في فترة معطاة لـ س:

- متزايدة إذا كان د′(س) = $\frac{ى ص}{ى س}$ < ٠ على كامل الفترة.
- متناقصة إذا كان د′(س) = $\frac{ى ص}{ى س}$ > ٠ على كامل الفترة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

١) أوجد ميل المنحنى ص = د(س) = −٤س^{٢} − ١٨ − ١١ س عند النقطة حيث س = −٢

٢) أوجد الإحداثيات السينية والصادية للنقطة على منحنى ص = د(س) = ٩س − س^{٢} حيث الميل يساوي ١

٣) لمنحنى ص = د(س) = أس^{٣} + ٥س^{٢} + ٢س − ١ ميل يساوي ٧ عند النقطة حيث س = −١ أوجد قيمة الثابت أ

٤) أوجد معادلة المماس لمنحنى ص = د(س) = ٨ + ٢س − ٧س^{٢} عند النقطة (٢، −١٦)

٥) أوجد قيمة المشتقة الثانية للدالة د(س) = ١٢س − س^{٦} − ٥س^{٣} عند س = −١

٦) أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة د(س) = ٣س^{٣} − س^{٢} + ٩س + ٤ تساوي ٧

٧) حدد ما إذا كانت الدالة د(س) = ٧ − ٣س − ٢س^{٢} متزايدة أو متناقصة عند س = −١

٨) أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة د(س) = ١١ − $\frac{٩}{٢}$ س − $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} متناقصة.

الوحدة الثالثة
المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)
Discrete random variables

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٣-١ تحدد وتعرّف المتغيرات العشوائية المتقطعة.

٣-٢ تقرأ المعلومات من جدول توزيع احتمالي متعلق بحالة معطاة تتضمن متغيرًا عشوائيًا متقطعًا (س).

٣-٣ تحسب التوقع ت(س) والتباين ع^2(س) لمتغير عشوائي متقطع باستخدام:

التوقع = ت(س) = $\sum$ س ل(س)

التباين = ع^2(س) = $\sum$ س^2 ل(س) − (ت(س))^2

٣-٤ تستخدم وتفسر جداول التوزيع الاحتمالي المتعلقة بحالة معطاة تتضمن متغيرًا عشوائيًا متقطعًا (س)، وذلك في أمثلة من الحياة الواقعية.

المفردات

المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) Discrete random variable

التوزيع الاحتمالي probability distribution

القيمة المتوقعة expectation

التباين Variance

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر، الوحدة العاشرة والوحدة الثانية عشرة	تحسب احتمال حدث واحد وتكتبه على شكل كسر أو عدد عشري أو نسبة مئوية.	١) ما عدد المرات المتوقعة لظهور الرقم ٦ عند رمي حجر نرد منتظم ١٨٠ مرة؟ ٢) عند رمي حجرَي نرد منتظمين، ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين يساوي ١٢؟ ٣) يحتوي كيس على كرة واحدة حمراء وكرتَين زرقاوَين. يختار ولد بشكل عشوائي كرة من الكيس، ثم يقوم من غير أن يرجعها باختيار كرة أخرى من الكيس. أ أنشئ مخطط احتمال ظهور كل النواتج الممكنة. ب استخدم مخطط الاحتمال الذي انشأته لإيجاد احتمال أن يتم اختيار كرة زرقاء واحدة تحديدًا.
	تفهم وتستخدم حقيقة أن احتمال أي حدث محصور بين ٠ و ١ أي (٠ ⩽ ل (س) ⩽ ١).	
	تفهم أن التكرار النسبي هو تقدير للاحتمال.	
	تحسب احتمال أحداث بسيطة باستخدام مخططات الفضاء الاحتمالي ومخطط الشجرة.	

لماذا ندرس التوزيعات الاحتمالية؟

تطلق بعض الشركات حملة إعلانات ترويجية إذا كان الناتج الأكثر ترجيحًا من هذه الحملة هو أن المبيعات ستتزايد. وإذا كانت الشركة على علم بناتجَي 'في أسوأ الأحوال' و 'في أحسن الأحوال'، فستكون قادرة على أخذ القرارات بناء على تقديرات لاحتمالات هذَين الناتجَين. تبنى احتمالات هذَين الناتجَين على تحليل للتوزيع الاحتمالي للمبيعات. يمكن أن يساعد التوزيع الاحتمالي على توقع المبيعات المستقبلية وأن يقدم تقييمًا لمخاطر الأعمال المتضمنة.

لنفرض أن شركة تفكر في الدخول في خط أعمال جديد، ولكنها تحتاج إلى تحصيل دخل سنوي ٥٠٠٠٠ ريال عُماني على الأقل قبل أن تبدأ بتحقيق الأرباح. إذا اقترح التوزيع الاحتمالي أن الدخل السنوي الأكثر ترجيحًا هو أقل من ٥٠٠٠٠ ريال عُماني، فستعرف الشركة عندئذ تقريبًا مستوى المخاطر التي ستواجهها شرط دخولها الخط الجديد من الأعمال.

٣-١ المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

يكون متغير ما عشوائيًا متقطعًا إذا أمكن أن يأخذ مجموعة قيم قابلة للعد ضمن مجال معيّن، وتحدث هذه القيم بشكل عشوائي.

مثلًا، عدد الإجابات الصحيحة الممكنة في اختبار قصير مكوّن من ستة أسئلة هو متغيّر عشوائي متقطع يمكن أن يتخذ أيًا من القيم ٠ أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦

نلاحظ أنه يمكننا عد القيم (وهي سبع)، ويمكن أن نرمز إليها باستخدام الرمز (س)، حيث س ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

يحدث **المتغير العشوائي المتقطع المنفصل Discrete random variable** في الكثير من الحالات التي نقوم فيها باختيارات مستقلة (حيث نختار العناصر مع إرجاع) وكذلك حالات نقوم فيها باختيارات غير مستقلة (حيث نختار العناصر دون إرجاع).

مثـــال ١

تمّ رمي حجرَي نرد منتظمَين.

يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (و) عدد مرات ظهور الرقم ٥

يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (ت) مجموع العددَين الناتجَين.

أ اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (و).

ب استخدم مخطط احتمال ثم:

١) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (ت).

٢) أوجد قيمة (ت) الأكثر احتمالًا.

الحـــلّ:

أ و ∈ {٠، ١، ٢}

ربما لا نحصل على الرقم ٥ أو نحصل عليه مرة أو مرتين

ب ١)

النرد الأول

النرد الثاني

+	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

ت ∈ {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢}

المجموع الأصغر الممكن هو ٢ (عندما نحصل على ١، ١).
المجموع الأكبر الممكن هو ١٢ (عندما نحصل على ٦، ٦).

٢) قيمة (ت) الأكثر احتمالًا لمجموع العددين الناتجين هي ٧

يبيّن مخطط الاحتمال أنه يوجد ٣٦ ناتجًا.

الناتج الأكثر احتمالًا هو الناتج الذي يظهر أكبر عدد من المرات مقارنة مع النواتج الأخرى، وهو ٧

مثــال ٢

يحتوي كيس على خمس بطاقات مرقمة ١، ٢، ٢، ٣، ٥

تم سحب بطاقتَين من الكيس دون إرجاع.

أ يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (ت) مجموع الأرقام على البطاقتَين المختارتَين.

١) أنشئ مخطط احتمال يبيّن وجود ٢٠ ناتجًا ممكنًا.

٢) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (ت).

ب يشكّل المتغيّر العشوائي المتقطع (د) الفرق (غير السالب) بين الأرقام على البطاقتَين المختارتَين.

أوجد:

١) القيم الممكنة للمتغيّر (د).

٢) القيمة الأكثر احتمالًا للمتغير (د)، والقيمة الأقل احتمالًا للمتغير (د).

الحــلّ:

أ ١)

يتم اختيار أول بطاقة من أصل ٥ بطاقات.

يتم اختيار ثاني بطاقة من ٤ بطاقات متبقية.

تشير علامات × على المخطط إلى استحالة أن يتم اختيار البطاقة نفسها مرتَين.

البطاقة الأولى

+	١	٢	٢	٣	٥
١	×	٣	٣	٤	٦
٢	٣	×	٤	٥	٧
٢	٣	٤	×	٥	٧
٣	٤	٥	٥	×	٨
٥	٦	٧	٧	٨	×

البطاقة الثانية

٢) ت ∈ {٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

ب ١)

البطاقة الأولى

−	١	٢	٢	٣	٥
١	×	١	١	٢	٤
٢	١	×	٠	١	٣
٢	١	٠	×	١	٣
٣	٢	١	١	×	٢
٥	٤	٣	٣	٢	×

البطاقة الثانية

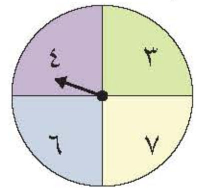
د ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

٢) القيمة الأكثر احتمالًا للمتغير (د) هي ١

والقيمتان الأقل احتمالًا للمتغير (د) هما ٠، ٤

تمارين ٣-١

١) تمّ تدوير قرص دوّار منتظم مرقم ٣، ٤، ٦، ٧ مرتَين.



ثم جُمع الرقمان الناتجان ليكون المجموع المتغير (س).

أ أنشئ مخطط احتمال واستخدمه لإيجاد:

١) أكبر قيمة ممكنة للمتغيّر (س).

٢) أقل قيمة ممكنة للمتغيّر (س).

ب اكتب كل القيم الممكنة للمتغيّر (س).

ج اكتب القيمة الأكثر احتمالاً للمتغيّر (س).

٢) شارك ثلاثة أولاد من الصف العاشر وولدَين من الصف التاسع في سباق طوله ٣ كم.
تجد أدناه ثلاثة متغيرات عشوائية متقطعة:

- (ج) هو عدد الأولاد الذين يكملون السباق في أقل من ٢٠ دقيقة.
- (ف) هو عدد الأولاد من الصف العاشر الذين يكملون السباق في أقل من ٢٠ دقيقة.
- (ب) هو عدد الأولاد من الصف التاسع الذين يكملون السباق في أقل من ٢٠ دقيقة.

أ اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (ج).

ب أوجد عدد القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي المتقطع:

١) (ف)

٢) (ب)

٣) يوجد في كيس ٦ حبات من التفاح. اثنتان منها خضراء، ٣ منها حمراء، وواحدة منها صفراء.
تسحب فتاة بشكل عشوائي ٤ حبات تفاح من الكيس.

أ أوجد القيم الممكنة للمتغيّر (خ) عدد حبات التفاح الخضراء المختارة.

ب أوجد القيم الممكنة للمتغيّر (خَ) عدد حبات التفاح المختارة التي ليست خضراء.

مُساعَدة

ل(خَ) = ١- ل(خ)

٤) لدى مزارع ٤ عنزات و ٥ بقرات.

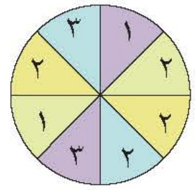
سيتم اختيار (ن) من هذه الحيوانات بشكل عشوائي ليتم فحصها.

عدد العنزات المختارة (ع) متغيّر عشوائي متقطع، وحيث ع ∋ {١، ٢، ٣، ٤}.

عدد البقرات المختارة (ب) متغيّر عشوائي متقطع، وحيث ب ∋ {٢، ٣، ٤، ٥}.

أوجد قيمة (ن).

٥) تمّ رمي ٣ أسهم بشكل عشوائي باتجاه لوح دائري بحيث يعلق السهم في مقطع مرقم كما هو مبيّن أدناه.
يُعتبر رقم المقطع حيث يعلق السهم نتيجة ذلك السهم.



يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (س) مجموع نواتج الأسهم الثلاثة.
يمثل المتغيّر العشوائي المتقطع (ص) حاصل ضرب نواتج الأسهم الثلاثة.
على سبيل المثال، إذا كانت نواتج الأسهم الثلاثة (٢، ٢، ٣) فإن س = ٢ + ٢ + ٣ = ٧
إذا كانت نواتج الأسهم الثلاثة (٢، ١، ٣) فإن ص = ٢ × ١ × ٣ = ٦

أ أعطِ مثالًا لكل من النواتج الممكنة لكل من الأسهم الثلاثة بحيث:
١) س < ص
٢) س = ص
٣) س > ص

ب أوجد الفرق بين:
١) أكبر قيمة ممكنة للمتغيّر (ص) وأصغر قيمة ممكنة للمتغيّر (س).
٢) أكبر قيمة ممكنة للمتغيّر (س) وأصغر قيمة ممكنة للمتغيّر (ص).

٦) بقي في حافلة مقاعد خالية لـ ٤ ركاب إضافيّين فقط.
في موقف الحافلات ٥ نساء ورجل واحد و ٣ أولاد ينتظرون صعود الحافلة.
يقرر سائق الحافلة اختيار ٤ من هؤلاء الأشخاص عشوائيًا لصعود الحافلة.
تجد أدناه ثلاثة متغيّرات عشوائية متقطعة:
- (و) هو عدد النساء اللواتي تمّ اختيارهن عشوائيًا لصعود الحافلة.
- (م) هو عدد الرجال الذين تمّ اختيارهم عشوائيًا لصعود الحافلة.
- (ج) هو عدد الأولاد الذين تمّ اختيارهم عشوائيًا لصعود الحافلة.

أ اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (و).

ب يرى السائق أن امرأة مسنة وابنتها من ضمن الذين ينتظرون لصعود الحافلة، فيسمح لهما بالصعود قبل أن يختار البقية عشوائيًا من بين الآخرين الذين ينتظرون دورهم.
اشرح أثر قرارات السائق على القيم الممكنة للمتغيّر:
١) (م) ٢) (ج)

٧) أعطِ سببًا موجزًا لعدم كون كل من الآتي متغيّرًا عشوائيًا متقطعًا:

أ أطوال الأشجار في الحديقة.

ب عدد الأشخاص الذين زاروا الحديقة يوم السبت.

٣-٢ التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع

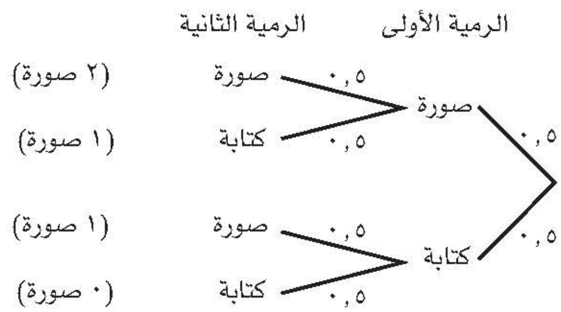
التوزيع الاحتمالي probability distribution لمتغيّر عشوائي متقطع هو عرض لكل قيمة من قيم المتغير واحتمال حدوثها.

الطريقة المعتادة للعرض هي من خلال وضع القيم واحتمالاتها في جدول يسمى جدول التوزيع الاحتمالي.

فمثلًا إذا رمينا قطعة نقدية منتظمة مرتَين، يمكن أن نحصل على ٠ أو ١ أو ٢ صورة، وعليه فإن عدد الصور الناتجة في كل محاولة يرمز إليه بـ (س) وهو متغيّر عشوائي متقطع حيث س ∈ {٠، ١، ٢}.

لكل رمية ل(صورة) = ل(كتابة) = ٠,٥.

يبيّن مخطط الشجرة الآتي النواتج الممكنة:



ل(٢) = ل(صورة، صورة) = ٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

ل(١) = ل(صورة، كتابة) + ل(كتابة، صورة) = (٠,٥ × ٠,٥) + (٠,٥ × ٠,٥) = ٠,٥

ل(٠) = ل(كتابة، كتابة) = ٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

عندما ترمي قطعة نقدية منتظمة مرتين، فمن المتوقع أن لا تظهر صورة في ٢٥٪ من المحاولات، و ٥٠٪ تظهر فيها صورة واحدة، وتظهر صورتان في ٢٥٪ من المحاولات.

يبيّن جدول التوزيع الاحتمالي الآتي كل القيم الممكنة للمتغيّر (س) مع احتمالات حدوثها.

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٢٥	٠,٥٠	٠,٢٥

احتمالات القيم الممكنة للمتغيّر (س) مساوية للتكرارات النسبية لـ قيم (س).

مُساعَدة

لأي قيمة من قيم س يكون ل (س) = التكرار النسبي لتلك القيمة.

مجموع الاحتمالات في جدول التوزيع الاحتمالي يساوي الواحد (∑ ل (س) = ١) لأنه من المؤكد وقوع إحدى قيم المتغير العشوائي عند إجراء التجربة.

نتيجة ١

٠ ⩽ ل(س) ⩽ ١

مجموع الاحتمالات في جدول التوزيع الاحتمالي = ١

وتكتب ∑ ل(س) = ١

مثـــال ٣

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س).

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ل(س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٢}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\frac{٢}{١٢}$	$\frac{١}{١٢}$

استخدم جدول التوزيع الاحتمالي لإيجاد:

أ ل(س $>$ ٤)

ب ل(س $\leq$ ٣)

ج ل(س $\neq$ ٥)

الحـــلّ:

أ ل(س $>$ ٤) = ل(٥) + ل(٦)

توجد قيمتان للمتغير (س) أكبر من ٤، لذا نجمع احتماليهما

$= \frac{٢}{١٢} + \frac{١}{١٢}$

$= \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$

ب ل(س $\leq$ ٣) = ل(١) + ل(٢) + ل(٣)

توجد ثلاث قيم للمتغير (س) أصغر أو تساوي ٣، لذا نجمع احتمالاتها

$= \frac{١}{١٢} + \frac{٢}{١٢} + \frac{٣}{١٢}$

$= \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

ج ل(س $\neq$ ٥) = ١ − ل(٥)

تذكّر أن ل(لا تساوي س) = ١ − ل(س)

$= ١ - \frac{٢}{١٢}$

$= \frac{١٠}{١٢} = \frac{٥}{٦}$

حل آخر:

ل(س $\neq$ ٥) = ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤) + ل(٦)

نجمع احتمالات كل قيم (س) التي لا تساوي ٥

$= \frac{١}{١٢} + \frac{٢}{١٢} + \frac{٣}{١٢} + \frac{٣}{١٢} + \frac{١}{١٢}$

$= \frac{١٠}{١٢}$

$= \frac{٥}{٦}$

مثـال ٤

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (ر).

ر	٣	٤	٥	٦	٧
ل(ر)	٠,٤	أ	أ − ٠,١	٠,١٥	٠,٢١

أوجد:

أ) قيمة الثابت أ

ب) ل(٤ ≤ ر < ٦)

الحـلّ:

أ) ٠,٤ + أ + أ − ٠,١ + ٠,١٥ + ٠,٢١ = ١

مجموع الاحتمالات في جدول التوزيع الاحتمالي يساوي ١، أي Σ ل(ر) = ١

٢أ + ٠,٦٦ = ١

٢أ = ٠,٣٤

أ = ٠,١٧

ب) ل(٤ ≤ ر < ٦) = ل(٤) + ل(٥)

توجد قيمتان للمتغير (ر) في الفترة (٤ ≤ ر < ٦) هما ٤، ٥

= أ + أ − ٠,١

= ٢أ − ٠,١

= ٢ × ٠,١٧ − ٠,١

= ٠,٢٤

مثـال ٥

لدى ولد كيس فيه ٦ حبّات من الحلوى: ٣ حمراء، ٢ خضراء، وواحدة صفراء.
يختار الولد عشوائيًا قطعتَي حلوى من الكيس من دون إرجاع.
يمثل المتغير العشوائي المتقطع (خ) عدد قطع الحلوى الخضراء التي يختارها.

أ) اكتب القيم الممكنة للمتغيّر (خ).

ب) استخدم جدول التوزيع الاحتمالي الآتي للمتغيّر (خ) لإيجاد احتمال أن يختار قطعة حلوى خضراء واحدة على الأقل.

خ	٠	١	٢
ل(خ)	$\frac{٦}{١٥}$	$\frac{٨}{١٥}$	$\frac{١}{١٥}$

الحــلّ:

أ خ ∈ {٠، ١، ٢} .... يمكنه اختيار ٠، ١، ٢ من قطع الحلوى الخضراء

ب ل(على الأقل واحدة خضراء) = ل(١) + ل(٢) .... واحد على الأقل يعني واحدًا أو أكثر من واحد

$= \frac{٨}{١٥} + \frac{١}{١٥}$

$= \frac{٩}{١٥}$

$= \frac{٣}{٥}$

تمارين ٣-٢

١) يبيّن الجدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (س).

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

استخدم الجدول لإيجاد :

أ ل(س < ٣) ب ل(س ≥ ٢) ج ل(س ≠ ٢)

د ل(١ ≤ س < ٤) هـ ل(س > ٤)

٢) يبيّن الجدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (ع).

ع	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(ع)	ج	ج + ٠,١٢	٢ج − ٠,٠٨	٠,٣٥	٠,١٨	٣ج + ٠,٠١

أ أوجد قيمة الثابت ج

ب أوجد قيمة:

١) ل(ع ≤ ١)

٢) ل(١ < ع ≤ ٣)

ج أوجد احتمال أن يكون (ع) عددًا فرديًا .

٣) يبيّن الجدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (ص).

ص	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(ص)	$\frac{١}{٢٠}$	$\frac{٣}{٢٠}$	$\frac{٥}{٢٠}$	$\frac{أ}{٢٠}$	أ − $\frac{١}{٢٠}$	$\frac{١}{٢٠}$

أ بيّن أن أ = $\frac{١١}{٢١}$

ب أوجد احتمال أن يكون (ص) عددًا أوليًا .

٤) تملك شركة ١٥ آلية، وهي ٦ شاحنات، ٥ حافلات، ٣ سيارات، ودراجة نارية واحدة.
تمّ اختيار آليتَين منها عشوائيًا.

أ أكمل جدول التوزيع الاحتمالي المعطى أدناه لعدد الحافلات المختارة (و).

و	٠	١	٢
ل(و)	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{١٠}{٢١}$	......

ب أوجد احتمال أن يتم اختيار حافلة واحدة على الأكثر.

٣-٣ القيمة المتوقعة والتباين للمتغيّر العشوائي المتقطع

قيم المتغير العشوائي المتقطع التي لها احتمالات أعلى يتوقع حدوثها أكثر من تلك التي قيم احتمالاتها أقل.

القيمة المتوقعة

نسمي الوسط الحسابي لمتغيّر عشوائي متقطع (س) **القيمة المتوقعة** **expectation** لهذا المتغيّر ونرمز إليها بـ ت(س).

لنفرض أننا نقوم بإجراء تجارب تتضمن رمي قطعة نقدية غير منتظمة ٣ مرات،

وليكن المتغيّر العشوائي المتقطع (س) عدد مرات ظهور 'صورة'،

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير (س).

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢١٦	٠,٤٣٢	٠,٢٨٨	٠,٠٦٤

مهما أكثرنا من عدد التجارب، نتوقع أن يظهر:

- صورة واحدة في ٤٣,٢٪ من التجارب.
- صورتان في ٢٨,٨٪ من التجارب.
- ثلاث صور في ٦,٤٪ من التجارب.
- لا توجد صورة في ٢١,٦٪ من التجارب.

ويكون هذا لأن الاحتمالات في الجدول هي التكرارات النسبية لقيم (س).

مُساعَدة

لتحويل الاحتمالات إلى نسب مئوية، نضربها في ١٠٠٪:

٠,٢١٦ × ١٠٠٪ = ٢١,٦٪

٠,٤٣٢ × ١٠٠٪ = ٤٣,٢٪

إذا قمنا بـ ١٠٠٠ تجربة، فسيكون التوزيع التكراري المتوقع لعدد مرات ظهور 'صورة' كالآتي:

س (عدد مرات ظهور 'صورة')	٠	١	٢	٣
التكرارات المتوقعة (ك)	٠,٢١٦ × ١٠٠٠ = ٢١٦	٠,٤٣٢ × ١٠٠٠ = ٤٣٢	٠,٢٨٨ × ١٠٠٠ = ٢٨٨	٠,٠٦٤ × ١٠٠٠ = ٦٤

يمكننا حساب عدد مرات ظهور 'صورة' (المتوقع) في ١٠٠٠ تجربة من جدول التكرار هذا:

$$\text{الوسط} = \text{ت(س)} = \frac{\sum \text{س ك}}{\sum \text{ك}} = \frac{(٠ \times ٢١٦) + (١ \times ٤٣٢) + (٢ \times ٢٨٨) + (٣ \times ٦٤)}{٢١٦ + ٤٣٢ + ٢٨٨ + ٦٤}$$

$$= \frac{١٢٠٠}{١٠٠٠}$$

$$= ١,٢$$

إذا قمنا الآن باستبدال التكرارات بالتكرارات النسبية (الاحتمالات) في الحسابات أعلاه، نحصل على القيمة نفسها لـ ت(س):

الوسط = ت (س) = $\frac{\sum \text{س ل (س)}}{\sum \text{ل (س)}}$ لاحظ أن $\sum$ ل (س) = ١

= $\sum$ س × ل (س)

= (٠ × ٠,٢١٦) + (١ × ٠,٤٣٢) + (٢ × ٠,٢٨٨) + (٣ × ٠,٠٦٤)

= ١,٢

مُساعَدة

يمكننا أن نفكر في ت(س) على أنها المعدل على المدى الطويل لقيم (س) بعد عدد كبير من التجارب.

نتيجة ٢

القيمة المتوقعة لمتغيّر عشوائي متقطع (س) هي ت(س) = $\sum$ س ل(س)

التباين

مُساعَدة

تذكّر أن

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$

أي أن ع(س) = $\sqrt{\text{ع}^2\text{(س)}}$

يعطي **التباين variance** أو الانحراف المعياري لمتغيّر عشوائي متقطع قياسًا لانتشار القيم حول الوسط (التوقع ت(س)).

يرمز إلى التباين بـ ع^2(س) ويرمز إلى الانحراف المعياري بـ ع(س).

يمكننا أخذ صيغة التباين لتوزيع تكراري، التباين = $\frac{\sum \text{س}^2 \text{ك}}{\sum \text{ك}} - \bar{\text{س}}^2$، ونستبدل كلًا من ك، $\bar{\text{س}}$ بـ ل(س)، ت(س) على الترتيب للحصول على صيغة لتباين متغيّر عشوائي متقطع (س).

التباين = $\frac{\sum \text{س}^2 \text{ك}}{\sum \text{ك}} - \bar{\text{س}}^2$

= $\frac{\sum \text{س}^2 \text{ل (س)}}{\sum \text{ل (س)}} - (\text{ت (س)})^2$ لاحظ مجددًا أن $\sum$ ل (س) = ١

= $\sum$ س^2 ل (س) − $(\text{ت (س)})^2$

نتيجة ٣

تباين متغيّر عشوائي متقطع (س) هو ع^2(س) = $\sum \text{س}^2$ ل(س) − $(\text{ت (س)})^2$.

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي متقطع (س) هو ع(س) = $\sqrt{\text{ع}^2\text{(س)}}$

مثـــال ٦

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (س).

س	٠	٥	١٥	٢٠
ل(س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$

أ أوجد ت(س).

ب أوجد ع^٢(س).

ج أوجد ع(س) مقرّبة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

الحـــلّ:

س	٠	٥	١٥	٢٠	المجموع
ل(س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	١
س × ل(س)	٠	$\frac{١٥}{١٢}$	$\frac{٧٥}{١٢}$	$\frac{٦٠}{١٢}$	١٢,٥
س^٢ × ل(س)	٠	$\frac{٧٥}{١٢}$	$\frac{١١٢٥}{١٢}$	$\frac{١٢٠٠}{١٢}$	٢٠٠

أ ت(س) = $\sum$ س ل(س)

= ١٢,٥

ب ع^٢(س) = $\sum$ س^٢ ل(س) − (ت(س))^٢

= ٢٠٠ − (١٢,٥)^٢

= ٤٣,٧٥

ج ع(س) = $\sqrt{\text{ع}^٢(\text{س})}$ = $\sqrt{٤٣,٧٥}$ = ٦,٦١

بأخذ الجذر التربيعي للتباين.

مُساعَدة

تذكّر أن تطرح تربيع ت(س) عند حساب التباين.

مثــال ٧

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (ص).

ص	١	٤	أ	١٢
ل(ص)	٠,٣	٠,٤	٠,٢	٠,١

لدينا ت(ص) = ٥,١، أوجد:

أ) قيمة الثابت أ

ب) ع^{٢}(ص).

الحــلّ:

أ) ت(ص) = ١ × ٠,٣ + ٤ × ٠,٤ + أ × ٠,٢ + ١٢ × ٠,١ .... بتعويض القيم من الجدول في صيغة ت(ص) حيث ت (ص) تساوي ٥,١

= ٣,١ + (٠,٢)أ

٣,١ + (٠,٢)أ = ٥,١

أ = $\frac{٥,١ - ٣,١}{٠,٢}$

= ١٠

ب) ع^{٢}(ص) = (١^{٢} × ٠,٣) + (٤^{٢} × ٠,٤) + (١٠^{٢} × ٠,٢) + (١٢^{٢} × ٠,١) − ٥,١^{٢} .. بالتعويض في صيغة ع^{٢}(ص).

= ٤١,١ − ٢٦,٠١

= ١٥,٠٩

تمارين ٣-٣

١) يبيّن الجدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع (س).

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,١٠	٠,١٢	٠,٣٦	٠,٤٢

أ) أوجد ت(س).

ب) أوجد ع^{٢}(س).

٢) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (ص).

ص	٠	١	٢	٣	٤
ل(ص)	٠,٠٣	٢ ل	٠,٣٢	ل	٠,٠٥

أ أوجد قيمة الثابت ل

ب أوجد قيمة ت(ص).

ج أوجد قيمة $ع^{٢}$(ص).

د اكتب قيمة ع(ص) مقرّبة إلى أقرب ٣ منازل عشرية.

٣) لدينا المتغيّر العشوائي المتقطع (ز) بحيث ز ∈ {١، ٣، ٦، ١٠}.
إذا كان لقيم (ز) الأربع الممكنة احتمالات متساوية، فأوجد:

أ ت(ز).

ب $ع^{٢}$(ز).

٤) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (و).

و	١	٣	٩	م
ل(و)	٠,٤	٠,٢٨	٠,١٤	٠,١٨

إذا كان لدينا ت(و) = ٥,٣٨ ، فأوجد:

أ قيمة م

ب قيمة $ع^{٢}$(و)

٥) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (غ).

غ	٢	٧	ب	٢٤
ل(غ)	٠,٣	٠,٣	٠,١	٠,٣

لدينا ت(غ) = ب

أ أوجد قيمة ب

ب أوجد قيمة $ع^{٢}$(غ)

٦) لدينا المتغيّر العشوائي المتقطع (ر) بحيث ر $\in$ {١٠، ٢٠، ٧٠، ١٠٠}.

لدينا ل(ر) = $\frac{ر}{٢٠٠}$

أ بيّن أن ت(ر) = ٧٧

ب أوجد ع^{٢}(ر).

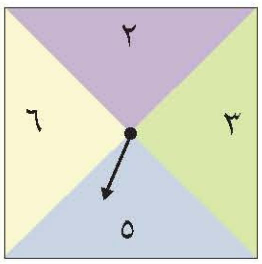
٧) يبيّن الجدول الآتي الأرباح المحتملة لمشروع تجاري مع احتمالاتها.

الربح (ريال عُماني)	−١٠٠٠٠	٠	١٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٣٠٠٠٠
الاحتمال	٠,٢٤	٠,٣٣	٠,٢٨	٠,١١	٠,٠٤

أ أوجد القيمة المتوقعة للأرباح من هذا المشروع التجاري.

ب أوجد التباين للأرباح.

٨) تمّت إدارة مربع دوّار منتظم محدد بالأرقام ٢، ٣، ٥، ٦ مرتَين.
وتمّ جمع الناتجَين معًا ليعطيا المجموع الكلي (ت).



أ أكمل مخطط الاحتمال الآتي مبيّنًا النواتج الـ ١٦ الممكنة ذات الاحتمالات المتساوية.

الدورة الأولى

الدورة الثانية

+	٢	٣	٥	٦
٢				
٣				
٥				
٦				

ب استخدم مخطط الاحتمال المستخدم في الجزئية أ لتكمل جدول التوزيع الاحتمالي الآتي للمتغيّر (ت)، علمًا أن الاحتمالَين الناقصَين متساويان.

ت	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(ت)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	....	$\frac{٤}{١٦}$	....	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

ج إذا تم تكرار التجربة (إدارة المربع الدوار مرتين) لـ ١٠٠٠ مرة، فكم مرة تتوقع أن يكون المجموع:

١) مساويًا لـ ٨؟

٢) أكبر من ١٠؟

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- يأخذ المتغير العشوائي المتقطع قيمًا محددة وقابلة للعد.
- التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المتقطع هو عرض لكل قيمة من قيم المتغير واحتمالها.
- بالنسبة إلى المتغيّر العشوائي المتقطع (س):

$$٠ \leqslant ل(س) \leqslant ١$$

$$\sum ل(س) = ١$$

$$ت(س) = \sum س\ ل(س)$$

$$ع^{٢}(س) = \sum س^{٢}\ ل(س) - (ت(س))^{٢}$$

$$ع(س) = \sqrt{ع^{٢}(س)}$$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي لمتغيّر عشوائي متقطع (س).

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	١–ك	٢–٣ك	٣–٤ك	٤–٦ك

مُساعَدة
في هذه الحالة ، تعني كلمة 'الدقيقة' إيجاد الناتج بدون تقريب في صورة $\frac{أ}{ب}$

أ أوجد قيمة ك

ب أوجد القيمة الدقيقة لـ ت(س).

٢) ستخضع سميرة لاختبارات في أربع مواد هذه السنة.

يبيّن الجدول الآتي توقعات معلماتها عن عدد الدرجات العليا (أ) التي ستحصل عليها.

أ	٠	١	٢	٣	٤
الاحتمال	٠,٠٤	٠,٠٨	٠,٤	٠,٣٦	٠,١٢

أ أوجد القيمة المتوقعة لعدد الدرجات العليا (أ) التي ستحصل عليها سميرة.

ب أوجد قيمة $ع^{٢}$(أ).

٣) أنشأت شركة استثمارات الجدول الآتي الذي يبيّن احتمالات نسب مئوية لأرباح متفاوتة على أموال مستثمرة على امتداد فترة ٣ سنوات.

الربح (أ) ٪	١	٥	١٠	١٥	٢٠	٣٠	٤٠	٤٥	٥٠
ل(أ)	٠,٠٥	٠,١٠	٠,٥٠	٠,٢٠	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١

مُساعَدة
قيمة الأرباح المتوقعة لاستثمار (م) ريال عماني = القيمة المتوقعة بالنسبة المئوية × المبلغ المستثمر (م).

أوجد القيمة المتوقعة للأرباح على استثمار ٥٠٠٠٠ ريال عُماني.

٤) لمثلّث دوّار منتظم أطراف محددة بالأرقام ٠، ١، ٢ ولمثلّث دوّار منتظم آخر أطراف محددة بالأرقام –١، ٠، ١

تمّت إدارة الاثنَين مرة واحدة وتمّ تسجيل النتيجة (س)، وهي مجموع تربيع الرقمَين الناتجَين.

أ أوجد قيمة الثابت أ المستخدمة في جدول التوزيع الاحتمالي الآتي لقيم المتغير (س).

س	٠	١	٢	٤	٥
ل(س)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{أ}{٩}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{أ}{٩}$

ب أوجد القيمة الدقيقة لـ $ع^{٢}$(س).

٥ تحوي حزمة من خمسة أقراص فيديو ٣ أفلام ووثائقيَين.

تمّ اختيار ٣ أقراص عشوائيًا من هذه الحزمة.

يبيّن الجدول الآتي، التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (م) عدد الأفلام المختارة.

م	١	٢	٣
ل(م)	٠,٣	٠,٦	٠,١

يبيّن الجدولِ الآتي، التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (د) عدد الوثائقيات المختارة.

د	٠	١	٢
ل(د)	٠,١	٠,٦	٠,٣

أ أعطِ سببًا لوجوب أن يكون مجموع ت(م)، ت(د) مساويًا لـ ٣

ب احسب:

١) ع^{٢}(م)

٢) ع^{٢}(د)

ج اكتب ما تلاحظه عن تباين هذَين المتغيّرَين.

مصطلحات علمية

أ

الأساس الطبيعي Natural base: عدد غير نسبي يُرمز إليه بالرمز هـ ويساوي ٢،٧١٨٢٨ مقرّبًا إلى خمس منازل عشرية، ويُنسب إلى عدد من العلماء فيُعرف بثابت أويلر كما يُعرف بالعدد النيبيري. (ص ١٩)

إيجاد المشتقة differentiate: القيام بعملية الاشتقاق. (ص ٤٧)

ت

التباين variance: قياس لانتشار قيم المتغيّر العشوائي المتقطّع، ويُرمز إليه ب ع^{2}(س). (ص ٨٣)

التفاضل (الاشتقاق) differentiation: عملية إيجاد المشتقة أو دالة الميل لدالة ما. (ص ٤٧)

التوزيع الاحتمالي probability distribution: عرض للقيم الممكنة لمتغير عشوائي متقطع ولاحتمالاتها المتعلقة. (ص ٧٧)

د

الدالة الأسيّة الطبيعيّة natural exponential function: هي الدالة الأسية التي أساسها هـ. (ص ٢٢)

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية natural logarithmic function: الدالة العكسية للدالة الأسّية الطبيعية وتكتب د(س) = لط س. (ص ٢٦)

دالة الميل gradient function: تسمى د$'$(س) دالة الميل (اسم آخر للمشتقة) للمنحنى ص = د (س). (ص ٥٤)

دالة متزايدة increasing function: دالة تتزايد قيمتها كلما تزايدت قيمة س، حيث الميل موجب دائمًا. (ص ٦٥)

دالة متناقصة decreasing function: دالة تتناقص قيمتها كلما تزايدت قيمة س، حيث الميل سالب دائمًا. (ص ٦٥)

ص

الصيغة الأسّية للأساس هـ exponential form of the base e: العدد هـ مرفوعًا لقوّة معيّنة، وتكتب هـ$^{\text{س}}$. (ص ١٩)

الصيغة الخطيّة Linear form: هي علاقة بين متغيّرَين، س، ص، يمكن كتابتها في الصيغة ص = م س + جـ. يمكن تمثيل علاقة خطية من خلال التمثيل البياني لمستقيم. (ص ٤٠)

الصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ logarithmic form of the base e: استخدام العدد هـ أساسًا للوغاريتم، وتكتب لط س. (ص ٣٤)

ق

القيمة المتوقعة expectation: قيمة الوسط الحسابي للمتغيّر العشوائي المتقطّع، ويُرمز إليها بـ ت(س). (ص ٨٢)

ل

اللوغاريتم الطبيعي Natural logarithm: اللوغاريتم ذو الأساس هـ (عدد أويلر أو العدد النيبيري). (ص ٢٦)

م

المتغيّر العشوائي المتقطّع (المنفصل) discrete random variable: متغيّر يمكن أن يأخذ مجموعة قيم قابلة للعد ضمن فترة معيّنة (مجال)، وتحدث هذه القيم بشكل عشوائي. (ص ٧٣)

المشتقة derivative: دالة الميل عند أية نقطة على منحنى، ونرمز إليها بـ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$. (ص ٤٩)

المشتقة الأولى first derivative: يُرمز إليها بـ د$'$(س) أو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ وهي دالة الميل عند أية نقطة على منحنى. (ص ٤٩)

المشتقة الثانية second derivative: يُرمز إليها بـ د$''$(س) أو $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}$ وهي صيغة تنتج من إيجاد مشتقة المشتقة الأولى لدالة. (ص ٦١)

المعادلة الأسّية الطبيعية natural exponential equation: معادلة يكون فيها المتغيّر أسًّا وأساسه هو الأساس الطبيعي هـ، وتكتب ص = هـ^{س}. (ص ٣٦)

المعادلة اللوغاريتمية الطبيعية natural logarithmic equation: معادلة لوغاريتمية يكون فيها أساس اللوغاريتم هو الأساس الطبيعي هـ، وتكتب ص = لط س. (ص ٣٦)

مماس tangent: مستقيم يمسّ المنحنى في نقطة واحدة. (ص ٤٧)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعـراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Westend61/Getty Images; Jackyenjoyphotography/Getyy Images; Douglas Sacha/Getty Images

تم بحمد الله

رقم الإيداع

٢٠٢٣/٦٥٧٠

طبع بالمطابع العالمية . سلطنة عمان . ت : ٢٤٨١٥٧٧١